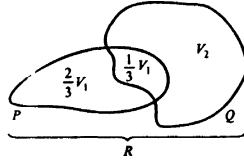
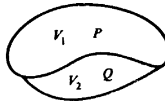


Глава VII. Объемы тел

647. Вычислим искомый объем

а) $R' = V_1 + V_2$.

б) $R = V_1 - \frac{1}{3} V_1 + V_2 = \frac{2}{3} V_1 + V_2$.



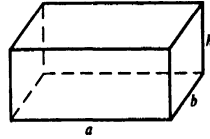
648. Вычислим объем по теореме п. 63 $V = abh$.

а) $V = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 11 \cdot 180 = 1980$;

б) $V = 3 \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10 \sqrt{10} = 30 \sqrt{10} \sqrt{10} = 300$;

в) $V = 18 \cdot 5 \sqrt{3} \cdot 13 = 90 \cdot 13 \sqrt{3} = 1170 \sqrt{3}$;

г) $V = 3 \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 0,96 = \frac{10 \cdot 0,96}{3} \cdot \sqrt{5} = 3,2 \sqrt{5}$.



649. а) $AC = 12$ см. Обозначим ребро куба x , следовательно из $\triangle ACD$:

$$x \sqrt{2} = 12; \quad x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6 \sqrt{2}; \quad V = x^3 = (6 \sqrt{2})^3 = 432 \sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)};$$

б) $AC_1 = 3 \sqrt{2}$ (м). Обозначим сторону куба за x .

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = (x^2 + x^2) + x^2 = 3x^2,$$

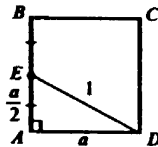
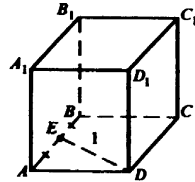
$$AC_1 = x \sqrt{3}, \quad 3 \sqrt{2} = x \sqrt{3}, \quad x = \frac{3 \sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$V = x^3 = \left(\frac{3 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \sqrt{2}}{3 \sqrt{3}} = 6 \sqrt{6} \text{ (м}^3\text{)};$$

в) $DE = 1$ см. Обозначим ребро куба за x .

$$\text{Из } \triangle EAD: 1 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4} x^2; \quad x^2 = \frac{4}{5}; \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$V = x^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^3 = \frac{8}{5 \sqrt{5}} = \frac{8 \sqrt{5}}{25} = 0,32 \sqrt{5} \text{ (см}^3\text{)}.$$



650. Вычислим объем параллелепипеда: $V_{\text{пар}} = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 96 \cdot 18 = 1728 \text{ (см}^3\text{)}.$

Обозначим ребро куба за x , следовательно, $V_{\text{куба}} = x^3$.

Откуда: $x^3 = 1728$, следовательно, $a = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{12 \cdot 144} = \sqrt[3]{12 \cdot 12 \cdot 12} = 12 \text{ (см)}.$

651. $m = \rho V$. $V = 25 \cdot 12 \cdot 6,5 = 1950 \text{ (см}^3\text{)}.$ $m = 1,8 \cdot 1950 = 3510 \text{ (г)} = 3,51 \text{ (кг)}.$

652. Обозначим стороны $AB = a$, $BC = b$ и $CC_1 = c$. Тогда условия выглядят так:

$$a^2 + b^2 = 12^2 = 144; \quad (1)$$

$$b^2 + c^2 = 11^2 = 121; \quad (2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 13^2 = 169 \quad (3)$$

$$(a^2 + b^2 = AC^2, \quad AC^2 + C_1C^2 = AC_1^2).$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 144, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 169, \\ b^2 + c^2 = 121. \end{cases}$$

$$c^2 = 169 - (a^2 + b^2) = 169 - 144 = 25; \quad c = 5 \text{ (см)};$$

$$b^2 = 121 - c^2 = 121 - 25 = 96; \quad b = \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6} \text{ (см)};$$

$$a^2 = 144 - b^2 = 144 - 96 = 48; \quad a = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$V = abc = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5 = 80\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = 240\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

653. BC_1 — проекция D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C , поэтому $\angle D_1BC_1 = 30^\circ$, $\angle DBB_1 = 45^\circ$.

Вычислим — из прямоугольного $\triangle D_1C_1B$:

$D_1C_1 = 9$ см как катет лежащий против угла в 30° .

Из прямоугольного

$$\triangle D_1B_1B: B_1B = 18 \sin 45^\circ = 18 \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

$$D_1B^2 = d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \text{ Значит, } 18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^2.$$

$$B_1C_1^2 = 18^2 - 9^2 - (9\sqrt{2})^2 = 9^2(4 - 2 - 1) = 9^2, \text{ отсюда } B_1C_1 = 9 \text{ (см)}.$$

$$V = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

654. Заметим, что DB — проекция диагонали на плоскость основания, $\angle D_1BD = \beta$; BC_1 — проекция диагонали на плоскость боковой грани, $\angle D_1BC_1 = \alpha$, $DD_1 = AA_1 = h$.

$$\text{Из треугольника } \triangle D_1DB: \frac{DD_1}{DB} = \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{h}{DB} = \operatorname{tg} \beta, \quad DB = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}; \quad D_1B = \frac{DD_1}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Обозначим $AB = x$, $AD = y$.

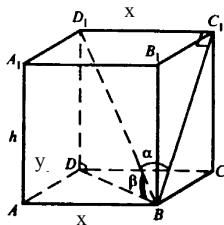
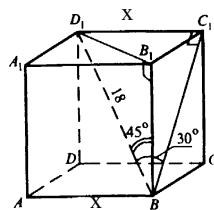
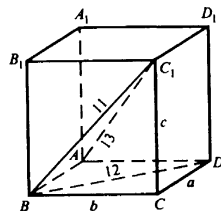
$$\text{Из треугольника } \triangle ADB: x^2 + y^2 = DB^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 \beta}.$$

$$\text{Из треугольника } \triangle D_1BC_1: D_1C_1 = D_1B \sin \alpha; \quad x = \frac{h}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha = \frac{h \sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$y^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 \beta} - x^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \frac{h^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta},$$

$$y = \sqrt{h^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right)} = h \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}} = \frac{h}{\sin \beta} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Вычислим объем } V = xyh; \quad V = \frac{h \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{h}{\sin \beta} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha} \cdot h = \frac{h^3 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \beta}.$$



655. C_1B — проекция диагонали D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C . Введем обозначение $AB=a$, $BC=b$, $D_1B=d$ и $C_1C=c$.

$$\text{Из } \triangle D_1BC_1: a = \frac{1}{2}, \quad d = 2a, \quad BC_1 = d \cos 30^\circ = 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Из треугольника } \triangle BC_1C: b^2 + c^2 = BC_1^2 = 3a^2.$$

$$c^2 = 3a^2 - b^2, \quad c = \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot CC_1; \quad V = ab \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

656. Диагонали в прямоугольнике равны, $AC=BD=12$ см. $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \perp B_1B$ и $BD \perp B_1B$, $\angle ABD = 60^\circ$ — линейный угол двугранного угла A_1B_1BD .

$$\text{Из } \triangle B_1BD: B_1B = BD = 12 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle ABD: AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см, } AD = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ см } V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 432\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

657. а) Заметим, что $\triangle C_1CA$ — равнобедренный прямоугольный, $CA = CC_1 = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м,

$$C_1B \perp AB, \quad \triangle ABC_1 \text{ — прямоугольный. } AB = \frac{1}{2} \text{ м.}$$

$$\text{Из } \triangle ABC: BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ м.}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8} \sqrt{2} \text{ м}^3.$$

$$\text{б) Из } \triangle AA_1C_1: AA_1 = AC_1 = 24 \sin 45^\circ = 24 \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ см.}$$

$$\text{Из треугольника } \triangle A_1C_1D: AD = \frac{1}{2} AC_1 = 12 \text{ см,}$$

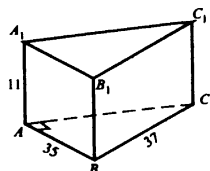
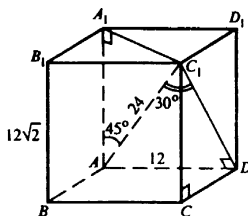
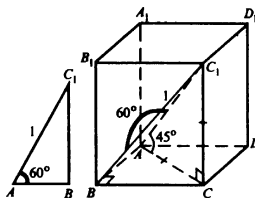
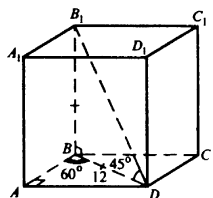
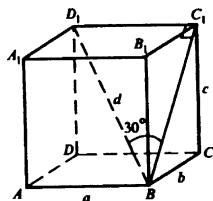
$$C_1D = 24 \cos 30^\circ = 24 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle C_1CD (\angle C_1CD = 90^\circ): (12\sqrt{3})^2 = (12\sqrt{2})^2 + CD^2, \\ CD^2 = 3 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^2 = 12^2; \quad CD = 12 \text{ см.}$$

$$V = B_1B \cdot AD \cdot CD; \quad V = 12\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 12 = 1728\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

$$\textbf{658. } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC.$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12 \text{ см.}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = 35 \cdot 6 = 210 \text{ см}^2. \quad V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 210 \cdot 11 = 2310 \text{ см}^3.$$

659. а) Из треугольника $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49;$$

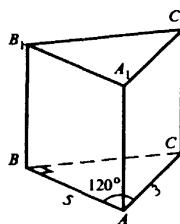
$$BC = 7 \text{ см.}$$

Т.к. $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то максимальную площадь имеет та боковая грань, у которой вторая сторона наибольшая, то есть $BC = 7$ см.

$$S_{BB_1C_1C} = 35, 35 = BB_1 \cdot 7, BB_1 = 5 \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2.$$

$$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$$



б) Т.к. призма прямая, то B_1B перпендикулярна плоскости ABC , $B_1B \perp BC$. $\angle ABC = 90^\circ$ — линейный угол двугранного угла с ребром B_1B .

Из $\triangle AB_1C$ по теореме косинусов:

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7, AC = \sqrt{7}.$$

Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$.

$$\text{В треугольнике } \triangle ABC \text{ } a^2 + b^2 = 7. \quad (1)$$

$$\text{В треугольнике } \triangle AB_1B \text{ } a^2 + c^2 = 9. \quad (2)$$

$$\text{В треугольнике } \triangle CB_1B \text{ } b^2 + c^2 = 4. \quad (3)$$

Запишем систему:

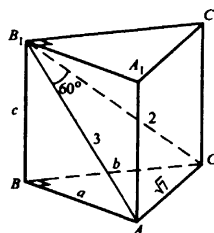
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 + c^2 = 9, \\ b^2 + c^2 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 - b^2 = 5. \end{cases}$$

$$2a^2 = 12, a^2 = 6, \quad a = \sqrt{6} \text{ см;}$$

$$b^2 = 7 - a^2 = 7 - 6 = 1, \quad b = 1 \text{ см;}$$

$$c^2 = 4 - b^2 = 4 - 1 = 3, \quad c = \sqrt{3} \text{ см.}$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1; \quad V = \frac{1}{2} abc = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 1,5 \sqrt{2}.$$

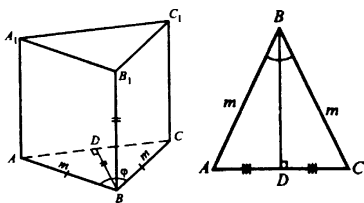


660. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Из треугольника $\triangle ABD$: $BD = m \cos \frac{\varphi}{2}$,

$$BB_1 = m \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} m^2 \sin \varphi.$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} m^2 \sin \varphi \cdot m \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m^3 \sin \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$



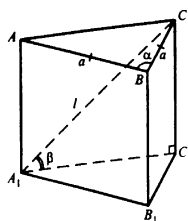
661. Обозначим $a = BA = BC$. Из прямоугольного $\triangle A_1B_1C$: $A_1C_1 = l \cos \beta$, $CC_1 = l \sin \beta$.

$$AC = A_1C_1 = l \cos \beta.$$

По теореме косинусов в треугольнике $\triangle ABC$:

$$AC^2 = l^2 \cos^2 \beta = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha = 2a^2(1 - \cos \alpha),$$

$$a^2 = \frac{l^2 \cos^2 \beta}{(1 - \cos^2 \alpha) \cdot 2}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2 \cos^2 \beta}{2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} \sin \alpha;$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot CC_1 = \frac{l^2 \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha}{4 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)} \cdot l \sin \beta = \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha}{4(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{l^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

662. В сечении — параллелограмм A_1B_1CD . В плоскости сечения A_1B_1CD проведем A_1E перпендикулярно DC ; проведем отрезок EA . По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $AE \perp DC$.

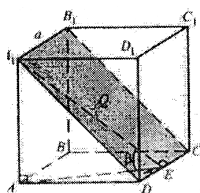
$$S_{A_1B_1CD} = Q = DC \cdot A_1E = a \cdot A_1E; \quad A_1E = \frac{Q}{a}.$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle A_1AE$:

$$AE = A_1E \cos \beta = \frac{Q}{a} \cos \beta; \quad A_1A = \frac{Q}{a} \sin \beta.$$

$$S_{ABCD} = AE \cdot BC = \frac{Q}{a} \cos \beta \cdot a = Q \cos \beta.$$

$$V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = Q \cdot \cos \beta \cdot \frac{Q}{a} \sin \beta = \frac{Q^2}{a} \sin \beta \cdot \cos \beta = \frac{Q^2}{2a} \sin 2\beta.$$

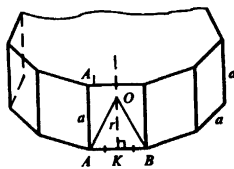


663. Имеем $OA = OB = R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$; $r = OK = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$; $OK \perp AB$.

Правильный n -угольник состоит из n треугольников одинаковой площади.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \cdot a = \frac{a^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$S_{\text{осн}} = n S_{\Delta AOB} = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}. \quad V = S_{\text{осн}} \cdot AA_1 = \frac{na^3}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

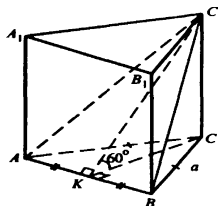


Тогда: а) $n=3$. $V = \frac{3a^3}{4 \operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$; б) $n=4$. $V = \frac{4a^3}{4 \operatorname{tg} 45^\circ} = a^3$;

в) $n=6$. $V = \frac{6a^3}{4 \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2} = 1,5\sqrt{3}a^3$; г) $n=8$. $V = \frac{8a^3}{4 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}} = \frac{2a^3}{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$.

664. Построим $CK \perp AB$, отрезок C_1K в плоскости сечения AC_1B . По теореме о трех перпендикулярах $C_1K \perp AB$; $\angle C_1KC = 60^\circ$.

Из ΔC_1KC : $\frac{C_1C}{CK} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, отсюда $C_1C = CK \sqrt{3}$.



Из треугольника ΔCKB : $CK = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$C_1C = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} = \frac{3a}{2}. \quad S_{\Delta AOB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V = S_{\Delta AOB} \cdot C_1C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} a^3.$$

665. Очевидно, что наибольшая из диагоналей — диагональ A_1B_4 . Тогда A_1A_4 ее проекция на нижнее основание.

В правильном 6-угольнике $R=a$, R — радиус описанной окружности. $D=2R=2a=A_1A_4$.

Из треугольника $\Delta A_1A_4B_4$: $\frac{A_1A_4}{B_4A_4} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

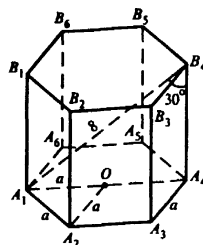
$$B_4A_4 = 2\sqrt{3}a. \quad S_{A_1A_1 \dots A_6} = 6S_{\Delta A_1OA_2}.$$

$$S_{\Delta A_1OA_2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ поэтому } S_{A_1A_1 \dots A_6} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = S_{A_1A_1 \dots A_6} \cdot B_4A_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot 2\sqrt{3}a = 9a^3.$$

Из треугольника $\Delta A_1B_4A_4$: $A_1A_4 = 2a = 8 \sin 30^\circ = 4$, $a = 2$ см.

Итак, $V = 9 \cdot 2^3 = 8 \cdot 9 = 72$ см³.



666. По теореме п.66 а) $V = \pi r^2 h$, $V = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 3 = \pi \cdot 8 \cdot 3 = 24\pi$ см³;

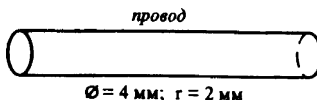
$$б) r^2 = \frac{V}{\pi h}; r^2 = \frac{120}{\pi \cdot 3,6} = \frac{120 \cdot 10}{\pi \cdot 36} = \frac{100}{3\pi}; \quad r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}} = \frac{10}{\sqrt{3\pi}} \text{ см};$$

$$в) h = \frac{V}{\pi r^2}, \quad h = \frac{8\pi}{\pi h^2} = \frac{8}{h^2}, \quad h^3 = 8, h = 2 \text{ см}.$$

667. Провод в распрямленном положении — это цилиндр.

$V = \pi r^2 l$, r — радиус сечения; l — длина провода.

Из физики известно, что, $\rho = \frac{m}{V}$, где ρ — плотность алюминия; m — масса алюминия; V — объем куска провода.



$$\text{Получаем уравнение: } \pi r^2 l = \frac{m}{\rho}, \text{ откуда } l = \frac{m}{\rho \pi r^2}.$$

$$r = 2 \text{ мм} = 0,2 \text{ см}, \quad r^2 = 0,04 \text{ см}^2, \quad \pi \approx 3,14, \quad \rho = 2,6 \text{ г/см}^3,$$

$$l \approx \frac{6800}{2,6 \cdot 3,14 \cdot 0,04} = \frac{68 \cdot 100 \cdot 100}{2,6 \cdot 3,14 \cdot 4} \approx 2,08 \cdot 10^4 \text{ см} \approx 20800 \text{ см} = 208 \text{ м}.$$

668. Вычислим объем цистерны $V = \pi r^2 h$, $r = \frac{18}{2} = 9 \text{ м}$, $V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi \text{ м}^3$.

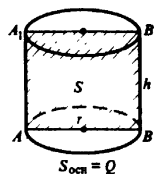
$$\rho = \frac{m}{V}; m = \rho V; \quad m = 0,85 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3,14 = 0,85 \cdot 10^3 \cdot 567 \cdot 3,14 = 1513 \cdot 10^3 \text{ кг} = 1513 \text{ т}.$$

669. Обозначим радиус основания через r , а высота цилиндра равна h . Следовательно $S = 2rh$. (1) $Q = \pi r^2$. (2)

Тогда, $V = \pi r^2 h = Qh$.

$$\text{Из (1) } r = \frac{S}{2h}. \text{ Подставим в (2): } Q = \frac{\pi S^2}{4h^2},$$

$$h^2 = \frac{\pi S^2}{4Q}; \quad h = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}}. \quad V = Q \frac{S}{2} \sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \frac{1}{2} S \sqrt{\pi Q}.$$



670. $\rho = 11,4 \text{ г/см}^3 = 11,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3 = 11,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

$$r_1 = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ мм} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad r_2 = 6,5 + 4 = 10,5 \text{ мм} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

$$V_{\text{трубы}} = \pi r_2^2 l - \pi r_1^2 l = \pi l (r_2^2 - r_1^2) = 3,14 \cdot 25 (10,5^2 \cdot 10^{-6} - 6,5^2 \cdot 10^{-6}) = 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} (10,5^2 - 6,5^2) = 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} (110,25 - 42,25) = 3,14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 68 = 5338 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

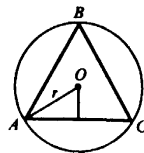
$$m = \rho V; m = 11,4 \cdot 10^3 \cdot 5338 \cdot 10^{-6} = 60853,2 \cdot 10^{-3} \approx 60,85 \text{ кг} \approx 61 \text{ кг}.$$

671. Очевидно, что высота призмы равна высоте цилиндра. Тогда отношение объемов равно отношению площадей оснований призмы и цилиндра.



Вид сверху

а) $n=3$, $\triangle ABC$ — правильный. Обозначим сторону $\triangle ABC$ равной x , следовательно, $r=AO=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ($\frac{x}{\sin 60^\circ}=2r$,

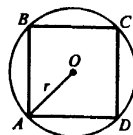


$$r=\frac{x}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x}{\sqrt{3}}).$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}; S_{кр}=\pi r^2=\pi\cdot\frac{x^2}{3}; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{кр}}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{\pi x^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

б) $n=4$, $ABCD$ — квадрат. Обозначим сторону квадрата равной x .

$$S_{ABCD}=x^2; \quad AC=x\sqrt{2}, \quad r=\frac{AC}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

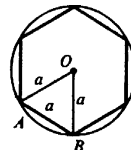


$$S_{кр}=\pi r^2=\pi\cdot\frac{x^2\cdot 2}{4}=\frac{\pi x^2}{2}. \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{кр}}=x^2\cdot\frac{\pi x^2}{2}=\frac{2}{\pi};$$

в) $n=6$. Обозначим сторону 6-угольника за x , следовательно, $r=x$.

$$S_{6-уг}=6S_{\triangle AOB}=6\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

$$S_{кр}=\pi AO^2=\pi x^2. \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}}=\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}:\pi x^2=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$



г) обозначим сторону правильного вписанного n -угольника за x . Следовательно, радиус описанной окружности равен $\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

$$S_{n-уг}=nS_{\triangle}=n\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

(Правильный n -угольник разбивается радиусами, проведенными из центра, на n одинаковых треугольников; все треугольники равновелики)

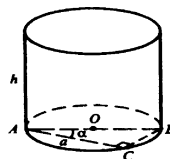
$$S_{кр}=\pi\cdot\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2; \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}}=\frac{S_{n-уг}}{S_{кр}}=\frac{n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{\pi\cdot\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2}=\frac{n}{2\pi}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

672. $\angle C=90^\circ$. $\angle ACB$ — вписанный и равен 90° ,

тогда, AB — диаметр. $AB=2r=\frac{a}{\cos\alpha}$, $r=\frac{a}{2\cos\alpha}$,

r — радиус основания цилиндра.

Высота призмы равна высоте цилиндра, значит,

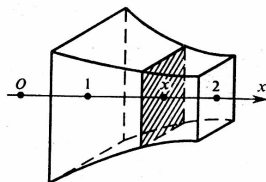


$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot h = \frac{\pi a^2 h}{4 \cos^2 \alpha}.$$

673. Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=1$; $b=2$.

$$S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^{-2}.$$

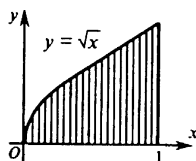
$$V = \int_1^2 x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right|_1^2 = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0,5.$$



674. Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=0$; $b=1$.

$$\text{Площадь сечения: } S(x) = \pi (\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

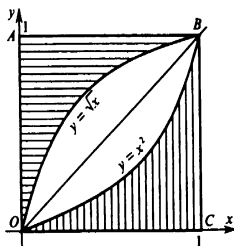
$$V = \int_0^1 \pi x dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \pi \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



675. Заштрихованные фигуры симметричны относительно биссектрисы ОВ. Следовательно, объем тела, которое получается вращением фигуры ОАВ вокруг оси Оу, и тела, полученного вращением равнобедренной фигуры ОВС вокруг оси Ох равны.

Имеем $V = \int_a^b S(x) dx$, где $a=0$; $b=1$. $S(x) = (x^2)^2 \pi = x^4 \pi$.

$$V = \int_0^1 \pi x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$



676. Построим из точки A_1 перпендикуляр A_1M к плоскости $\triangle ABC$. Следовательно, $\angle A_1AM = 60^\circ$.

$$\text{Из } \triangle A_1AM: A_1M = h = 8 \sin 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)},$$

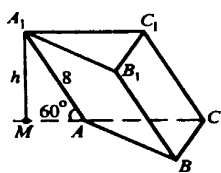
$$p = \frac{10+10+12}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см, } S_{\triangle ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2.$$

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = 48 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

677. $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. По условию задачи плоскость $ABB_1A_1 \perp$ плоскости

ABC . Построим $B_1K \perp AB$. $B_1K = h$ — высота призмы.

$$\text{Из } \triangle AB_1K: AK = \sqrt{b^2 - h^2}.$$



Из ΔB_1KB : $KB = \sqrt{a^2 - h^2}$.

Получим уравнение: $AK + KB = AB = a$.

$$\sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2} = a; \quad b^2 - h^2 + a^2 - h^2 + 2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = a^2,$$

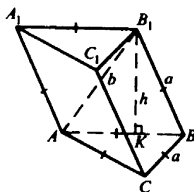
$$2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = 2h^2 - b^2.$$

$$2h^2 - b^2 \geq 0; \quad h^2 \geq \frac{b^2}{2}; \quad h \geq \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$4(b^2a^2 - b^2h^2 - a^2h^2 + h^4) = 4h^4 + b^4 - 4h^2b^2; \quad 4b^2a^2 - b^4 = 4a^2h^2,$$

$$h^2 = \frac{b^2(4a^2 - b^2)}{4a^2}; \quad h = \frac{b}{2a} \sqrt{4a^2 - b^2};$$

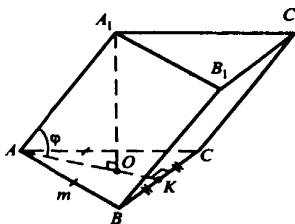
$$V = S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = \frac{ab}{8} \sqrt{12a^2 - 3b^2}.$$



678. Построим $A_1O \perp$ плоскости ABC , точка O — центр правильного ΔABC . Отрезок OA — радиус описанной около ΔABC окружности.

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R = 2AO,$

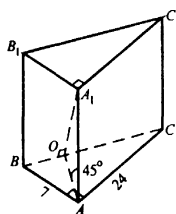
отсюда $AO = R = \frac{m}{2 \sin 60^\circ} = \frac{m}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{m}{\sqrt{3}}.$



Из прямоугольного ΔA_1OA найдем высоту призмы $A_1O = R \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}; \quad V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1O = \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^3 \operatorname{tg} \varphi}{4}.$$

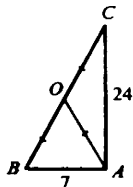
679. Наклонные A_1B , A_1A , A_1C равны по условию. Т.к. A_1 равноудалена от A , B и C , то проекция точки A_1 на плоскость ABC — это точка O , которая является центром описанной около ΔABC окружности. Тогда, точка O — середина гипотенузы BC , $A_1O \perp BC$. A_1O — высота призмы. ΔA_1OA — равнобедренный прямоугольный, $A_1O = AO$.



$$BC = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \text{ см.}$$

$$OC = OB = OA = \frac{25}{2} \text{ см. Высота призмы } OA_1 = \frac{25}{2} \text{ см.}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84 \text{ см}^2. \quad V = S_{\Delta ABC} \cdot OA_1 = 84 \cdot \frac{25}{2} = 42 \cdot 25 = 1050 \text{ см}^3.$$



680. Построим $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$. $\Delta B_1BM = \Delta B_1BN$

(по гипотенузе и острому углу). Значит, $B_1M=B_1N$.

Построим $B_1O \perp$ плоскости ABC , отрезки ON и OM . Из равенства наклонных B_1M и B_1N следует равенство их проекций, $OM=ON$, то есть точка O лежит на биссектрисе угла ABC .

Из $\triangle B_1BM$: $BM=c \cos \varphi$, $BO=BM \sqrt{2} = c \sqrt{2} \cos \varphi$.

Из прямоугольного $\triangle B_1BO$:

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - c^2 \cdot 2 \cdot \cos^2 \varphi} = c \sqrt{1 - 2 \cos^2 \varphi} = c \sqrt{-\cos 2\varphi}. \quad B_1O \text{ — высота параллелепипеда. } S_{ABCD} = ab;$$

$$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = abc \sqrt{-\cos 2\varphi} \quad (2\varphi > 90^\circ, \cos 2\varphi < 0; \text{ — } \cos 2\varphi > 0).$$

$$681. S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ см}^2.$$

Вычислим высоту параллелепипеда. Боковое ребро BB_1 составляет со смежными сторонами основания равные углы; обозначим $\angle B_1BA = \angle B_1BC = \alpha$.

Проведем $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$.

$\triangle B_1BM = \triangle B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу).

Тогда, $B_1M = B_1N$. Проведем $B_1O \perp$ плоскости $ABCD$, отрезки ON и OM . $ON=OM$ (как проекции равных отрезков). Точка O равноудалена от сторон ромба BC и BA , то есть она лежит на биссектрисе угла ABC , а в ромбе биссектрисой угла служит диагональ ромба, значит, точка O лежит на диагонали ромба DB . B_1O — высота параллелепипеда.

По свойству диагоналей ромба $\angle ASB = 90^\circ$ и $B_1S=3$, $A_1S=4$. Следовательно, сторона ромба $B_1A_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см.

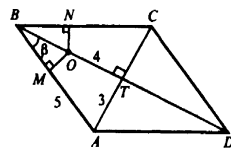
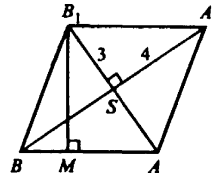
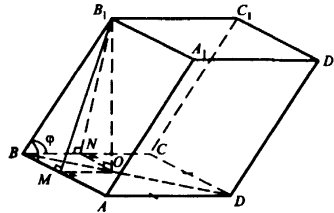
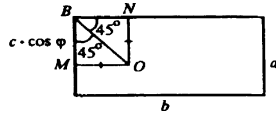
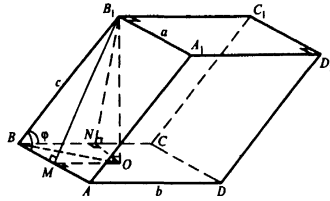
$$S_{BB_1A_1A} = BA \cdot B_1M = 24; \quad 5 \cdot B_1M = 24; \quad B_1M = \frac{24}{5} \text{ см.}$$

Из прямоугольного треугольника $\triangle B_1MB$:

$$BM = \sqrt{BB_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{625 - 576}{25}} = \frac{7}{5} \text{ см}$$

$$\text{Из } \triangle ABT: \cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\text{Из } \triangle MOB: BO = BM \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \text{ см.}$$

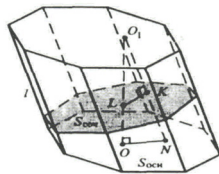


Из прямоугольного треугольника ΔB_1OB :

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 16 - 49}{16}} = \frac{\sqrt{351}}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{39} \text{ см.}$$

$$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = 24 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39} \text{ см}^3.$$

n-угольная наклонная призма



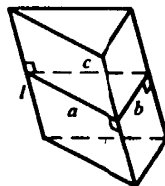
682. Пусть α и β — плоскости оснований призмы. Проведем плоскость γ , перпендикулярно боковым ребрам призмы. Далее, осуществим параллельный перенос фигуры, ограниченной плоскостями β , γ и боковыми ребрами призмы так, чтобы плоскость α совместилась с плоскостью β .

Получим прямую призму, боковая сторона которой равна боковой стороне исходной призмы, а основание является сечением исходной призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.

По свойствам аддитивности объема $V_1 = V_2$, где V_1 и V_2 соответственно объемы исходной и полученной призмы. $V_2 = S \cdot l$, где S — площадь основания, что и требовалось доказать.

683. Обозначим l — длина бокового ребра призмы, а расстояние между боковыми ребрами равны a , b , c .

По замечанию в п. 68 объем призмы можно вычислить по формуле $V = S_{\perp} \cdot l$, где $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного (к боковым ребрам) сечения призмы. Треугольник, составленный из отрезков a , b и c , является перпендикулярным сечением.



$$S_{\perp} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{37+13+30}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см.}$$

$$S_{\perp} = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = \sqrt{40 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10} = 20 \cdot 9 = 180 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = l \cdot a + l \cdot b + l \cdot c = 480 \text{ см}^2$$

$$l(a+b+c) = 480$$

$$l = \frac{480}{a+b+c} = \frac{480}{80} = 6$$

$$V = S_{\perp} l = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ см}^3.$$

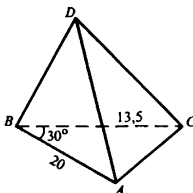
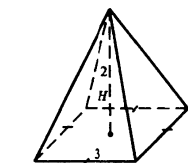
$$\mathbf{684. a)} S_{\text{осн}} = 3^2 = 9 \text{ м}^2; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6 \text{ м}^3;$$

$$\text{б)} h = 2,2 \text{ м} = 220 \text{ см.}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin 30^\circ = \frac{1}{2} 20 \cdot 13,5 \cdot \frac{1}{2} = 67,5 \text{ см}^2,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot 67,5 \cdot 220 = 22,5 \cdot 220 = 4950 \text{ см}^3.$$

$$\mathbf{685.} h = 12 \text{ см, } x = 13 \text{ см.}$$



$$S_{\text{осн}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{13^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{169 \sqrt{3}}{4},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{169 \sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 169 \sqrt{3} \text{ см}^3.$$

686. а) DO — высота пирамиды.

Из прямоугольного треугольника $\triangle ADO$: $DO = H = l \sin \varphi$.

Точка O — центр $\triangle ABC$, OA — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA$, $OA = l \cos \varphi$.

$$BC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} l \cos \varphi.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3})^2 l^2 \cos^2 \varphi \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} l^2 \cos^2 \varphi.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} l^2 \cos^2 \varphi}{4} \cdot l \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8} l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

б) $\triangle ADC$ — равнобедренный. $\angle D = 180^\circ - 2\alpha$.

По теореме косинусов имеем:

$$AC^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 2l^2(1 + \cos 2\alpha) = 2l^2(1 + 2\cos^2 \alpha - 1) = 4l^2 \cos^2 \alpha,$$

$$AC = \sqrt{4l^2 \cos^2 \alpha} = 2l |\cos \alpha| = 2l \cos \alpha;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2l \cos \alpha)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} l^2 \cos^2 \alpha.$$

Вычислим длину отрезка OA , $OA = R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

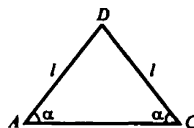
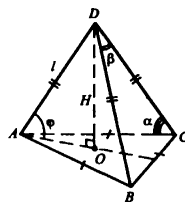
$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2AO; \quad OA = \frac{AC}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \cos \alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle ADO: DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2 \cos^2 \alpha}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} l^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha} = \frac{1}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sqrt{3 - 4\cos^2 \alpha};$$

в) $\triangle BDC$ — равнобедренный. По теореме косинусов:

$$BC^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos \beta = 2l^2(1 - \cos \beta) = 2l^2 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}; \quad BC = \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = 2l \sin \frac{\beta}{2}.$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

В треугольнике $\triangle ABC$: OA — радиус описанной окружности:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA; OA = \frac{BC}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}.$$

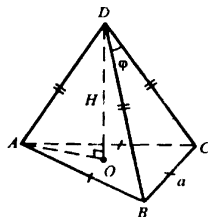
Из прямоугольного $\triangle AOD$:

$$H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{3}} = \sqrt{\frac{3l^2 - 4l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \sqrt{3} l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{3} l^3 \sin^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

687. Из треугольника $\triangle BCD$ найдем боковое ребро. Обозначим $DB=DC=DA=d$. По теореме косинусов: $a^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos \varphi = 2d^2(1 - \cos \varphi) = 2d^2 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

$$a = 2d \sin \frac{\varphi}{2}; d = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$



Построим $DO \perp$ плоскости ABC .

$DO = H = \sqrt{d^2 - OA^2}$, OA — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

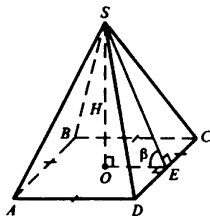
По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2OA$; $OA = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$H = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{3}}.$$

$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H$. $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, поэтому

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{2 \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a^3 \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{24 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

688. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Построим $OE \perp DC$. По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp DC$. Таким образом, $\angle OES = \beta$ — линейный угол двугранного угла при основании.



$$a) OE = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = H \operatorname{ctg} \beta, AD = 2OE = 2H \operatorname{ctg} \beta.$$

$$S_{ABCD} = AD^2 = 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta. V = \frac{1}{3} S_{ABCD} H = \frac{1}{3} \cdot 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \beta \cdot H = \frac{4}{3} \cdot H^3 \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

б) SO — высота пирамиды. Проведем OE перпендикулярно DC, отрезок SE. По теореме о трех перпендикулярах SE перпендикулярно DC.

В правильной пирамиде боковые ребра равны, ΔDSC — равнобедренный, высота SE — биссектриса и медиана.

$$\text{Из треугольника } \Delta DSE: \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{SE} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, SE = \frac{m}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника ΔSOE :

$$\begin{aligned} SO = H &= \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \sqrt{\frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)} = \\ &= \frac{m}{2} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Площадь $S_{ABCD} = m^2$.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} H = \frac{1}{3} m^2 \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha} = \frac{m^3}{6 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos \alpha}.$$

689. SO перпендикулярна плоскости ABCD, SO — высота пирамиды. В правильной пирамиде все боковые ребра равны. OD — проекция SD на плоскость основания, $\angle SDO = \varphi$.

Из ΔSOD : $SO = m \sin \varphi$; $OD = m \cos \varphi$; $BO = OD$, $BD = 2m \cos \varphi$.

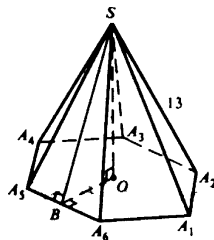
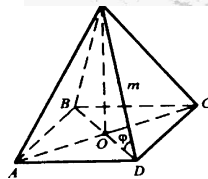
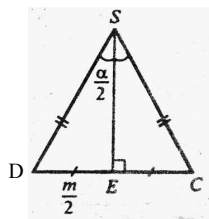
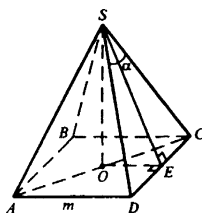
Обозначим сторону основания за x . Следовательно, $x \sqrt{2} = 2m \cos \varphi$; $x = \sqrt{2} m \cos \varphi$.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{3} 2m^2 \cos^2 \varphi m \sin \varphi = \frac{2}{3} m^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

690. Построим $OB \perp A_5 A_6$. По теореме о трех перпендикулярах $SB \perp A_5 A_6$. $OB = r$, r — радиус вписанной в основание окружности; $r = 6:2 = 3$ (см). Обозначим x — сторона основания.

$$\text{Как известно, } r = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } x = \frac{2 \cdot r}{\sqrt{3}} = 2 \sqrt{3} \text{ см.}$$

$$S_{\Delta A_5 O A_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5 A_6 \cdot OB = \frac{1}{2} x r = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} \cdot 3 = 3 \sqrt{3} \text{ см}^2.$$



$$S_{\text{осн}} = 6 \cdot S_{\Delta A_5 O A_6} = 6 \cdot 3 \sqrt{3} = 18 \sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Вычислим высоту пирамиды из ΔSOB .

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{SB^2 - r^2} = \sqrt{SB^2 - 9^2}.$$

Из равнобедренного $\Delta SA_5 A_6$ найдем SB . (Т.к. SB — высота в равнобедренном треугольнике, то она является медианой, $A_5 B = BA_6 = \frac{1}{2} x = \sqrt{3}$ см.)

$$SB = \sqrt{SA_6^2 - BA_6^2} = \sqrt{13^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{169 - 3} = \sqrt{166} \text{ см.}$$

$$\text{Из } \Delta SBO: SO = \sqrt{166 - 9} = \sqrt{157} \text{ см.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{157} = 6 \sqrt{471} \text{ см}^3.$$

Найдем площадь боковой поверхности. $S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\Delta A_5 O A_6}$,

$$S_{\Delta A_5 O A_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5 A_6 \cdot SB = \frac{1}{2} x \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{166} = \sqrt{3 \cdot 166} = \sqrt{498} \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 6 \sqrt{498} \text{ см}^2.$$

691. Построим SO перпендикулярно плоскости ABC ; SO — это высота пирамиды. $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$, они прямоугольные, SO — общий катет, они имеют равный острый угол. Тогда, $OB = OC = OA = R$, где R — радиус описанной окружности.

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = 2R; \quad R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{10}{2 \sin \angle B} = \frac{5}{\sin \angle B}.$$

По теореме косинусов в треугольнике ΔABC :

$$10^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \angle B,$$

$$100 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \angle B; \quad 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle B = 338 - 100; \quad \cos \angle B = \frac{238}{2 \cdot 169} = \frac{119}{169}.$$

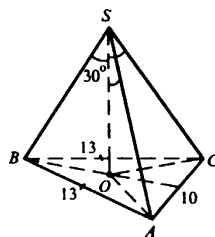
$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{119^2}{169^2}} = \frac{1}{169} \sqrt{14400} = \frac{120}{169}.$$

$$\text{Значит, } R = OB = \frac{5 \cdot 169}{120} = \frac{169}{24}.$$

$$\text{Из треугольника } \Delta SOB \text{ найдем высоту } SO: SO = \frac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = R \sqrt{3} = \frac{169}{24} \sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-13)(p-13)}, \text{ где } p = \frac{10+13+13}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ см.}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 \text{ см}^2.$$



$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} SO = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot \frac{169\sqrt{3}}{24} = \frac{169\sqrt{3} \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{845\sqrt{3}}{6} \text{ см}^3.$$

692. Построим высоту пирамиды DE. Т.к. все ребра одинаково наклонены к плоскости основания, то $\angle DEA = \angle DEB = \angle DEC$. Поэтому $EA = EB = EC = R$, R — радиус описанной окружности. Значит, точка E — это середина гипотенузы AB , плоскость $ADB \perp$ плоскости ABC .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab; AB = \sqrt{a^2 + b^2}; BE = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{DE}{BE} = \operatorname{tg} \varphi; \quad DE = BE \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{ab}{12} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

693. SO — высота пирамиды. $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD$. Тогда $OA = OB = OC = OD$ и высота проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

$OC = BO = OA = \frac{b}{2}$ (по свойству диагоналей прямоугольника).

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha = OB \cdot OA \cdot \sin \alpha = \frac{b^2}{4} \cdot \sin \alpha$$

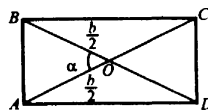
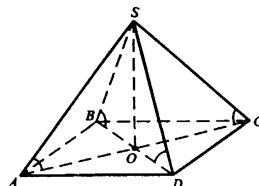
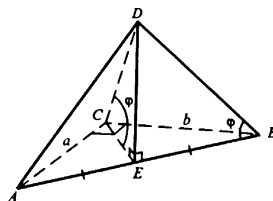
$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 \sin \alpha}{2}.$$

$$\text{Обозначим } \angle OAS = \beta, \text{ следовательно, } \operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{AO} = \frac{SO}{\frac{b}{2}} = \frac{2}{b} SO.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin \alpha}{2} \cdot SO, \quad SO = \frac{6V}{b^2 \sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{b} \cdot \frac{6V}{b^2 \sin \alpha} = \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}; \quad \beta = \arctg \frac{12V}{b^3 \sin \alpha}.$$

694. Построим линейные углы двугранных углов при основании и высоту пирамиды SO ; $ON \perp DC$, $OK \perp BC$, $OL \perp AB$ и $OM \perp AD$.

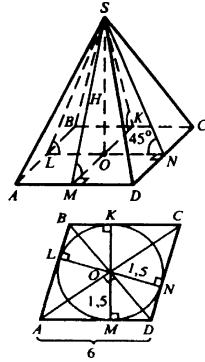


По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, $SK \perp BC$, $SL \perp AB$, $SM \perp AD$. $\triangle SOM = \triangle SON = \triangle SOK = \triangle SOL$ (по катету и острому углу). Следовательно, $OM = ON = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в основание окружности.

Треугольник $\triangle SON$ — равнобедренный, $SO = ON = 1,5$ см.

$$S_{ABCD} = AD \cdot MK = 6(1,5 \cdot 2) = 6 \cdot 3 = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1,5 = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ (см}^3\text{)}.$$



695. а) Построим высоты DE , отрезки EA , EB , EC .

$\triangle DEA = \triangle DEB = \triangle DEC$. Тогда $EA = EB = EC = R$, R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

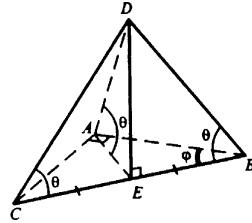
Значит, точка E является серединой BC , плоскость $CDB \perp$ плоскости ABC ; $CE = EB = \frac{c}{2}$.

$$\text{Из треугольника } DEB: \frac{DE}{EB} = \operatorname{tg} \theta, DE = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

В треугольнике ABC : $AC = c \sin \varphi$, $AB = c \cos \varphi$;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} c^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg} \theta = \frac{c^3 \operatorname{tg} \theta \sin 2\varphi}{24}.$$

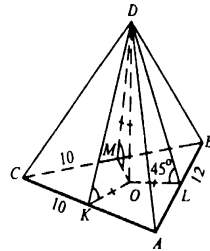


б) Проведем $OL \perp AB$, $OK \perp CA$, $OM \perp CB$.

По теореме о трех перпендикулярах имеем $DL \perp AB$, $DM \perp CB$, $DK \perp CA$. $\triangle DOL = \triangle DOK = \triangle DOM$. Тогда, $OM = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. $r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ см.

$$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48 \text{ см}^2.$$

$$a = r = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}. \text{ Из } \triangle DOL: DO = OL = 3 \text{ см. } V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48 \text{ см}^3.$$

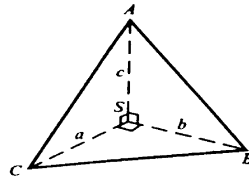


в) $AS \perp SC$, $AS \perp SB$

AS перпендикулярна плоскости BSC , AS — высота пирамиды.

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} ab. V = \frac{1}{3} S_{\triangle ASB} AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{abc}{6}.$$

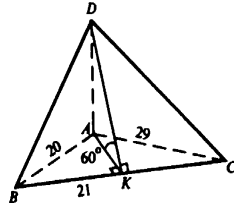
696. DA — высота пирамиды.



Построим $AK \perp BC$, отрезок DK . По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$, $\angle AKD = 60^\circ$ — линейный угол двугранного угла $DBCA$.

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$$

$\triangle ABC$ — прямоугольный по теореме Пифагора ($20^2 + 21^2 = 29^2$). Следовательно, $ABC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 (\text{см}^2)$ и



точка K совпадает с B .

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 210, AK = \frac{1}{2} = 20 (\text{см}).$$

$$\text{Из } \triangle DAB: \frac{DA}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, DA = 20\sqrt{3} (\text{см}).$$

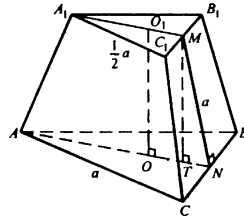
$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DA = \frac{1}{3} \cdot 210 \cdot 20\sqrt{3} = 70 \cdot 20\sqrt{3} = 1400\sqrt{3} (\text{см}^3).$$

$$697. V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}), \text{ где } h = O_1O, S = S_{\triangle ABC}, S_1 = S_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

$$\text{Проведем } MT \text{ перпендикулярно } AN. TN = ON - O_1M, ON = \frac{BC}{2\sqrt{3}}, O_1M = \frac{B_1C_1}{2\sqrt{3}}.$$

$$ON = \frac{a}{2\sqrt{3}}, O_1M = \frac{a}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}},$$

$$TN = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}}.$$



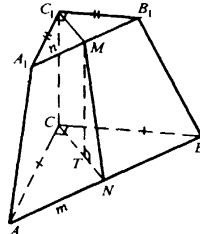
$$\text{Из } \triangle MTN: MT = O_1O = \sqrt{MN^2 - TN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{48}} = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{47}{3}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{(\frac{1}{2})^2\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16}} \right) = \frac{a^3\sqrt{47} \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{7\sqrt{47}a^3}{192}.$$

698. Построим $C_1M \perp A_1B_1$ и $CN \perp AB$, отрезок MN . Т.к. $AB \perp CN$ и $AB \perp C_1C$, то плоскость $C_1CNM \perp AB$, $MN \perp AB$, MN — апофема. Проведем $MT \perp CN$, MT — высота пирамиды. $\angle MNT = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $MAVC$.

$$C_1M = MB_1 = \frac{n}{\sqrt{2}}; CN = NB = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$



$$TN=CN-C_1M=\frac{m}{\sqrt{2}}-\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{m-n}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{В } \triangle MTN: \frac{MT}{TN}=\operatorname{tg} \varphi, MT=TN \operatorname{tg} \varphi=\frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

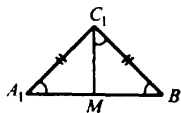
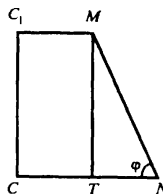
$$AB=AC \sqrt{2}, m=AC \sqrt{2}, AC=\frac{m}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{2}=\frac{m^4}{4}, S_{\triangle A_1 B_1 C_1}=\frac{n^2}{4}.$$

$$V=\frac{1}{3} MT (S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1 B_1 C_1}+\sqrt{S_{\triangle AAB} \cdot S_{\triangle A_1 B_1 C_1}});$$

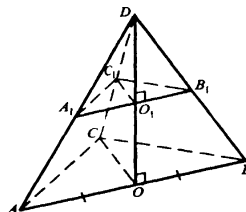
$$V=\frac{1}{3} \cdot \frac{m-n}{2} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{m^4}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2 \cdot n^2}{4 \cdot 4}} \right) = \frac{m-n}{6} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{m^2+n^2}{4} + \frac{mn}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \operatorname{tg} \varphi (m-n)(m^2+mn+n^2) = \frac{(m^3-n^3)}{24} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$



699. Построим высоту пирамиды DO . $\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$ (по гипотенузе и катету). Тогда, $OA = OB = OC$. Точка O равноудалена от вершин $\triangle ABC$, таким образом, является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — это середина гипотенузы.

$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC$ (т.к. плоскости $A_1 B_1 C_1$ и ABC параллельны по условию, таким образом, $A_1 B_1 \parallel AB$, $B_1 C_1 \parallel BC$, $A_1 C_1 \parallel AC$), поэтому $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{A_1 C_1}{AC}$.



$\triangle DO_1 B_1 \sim \triangle DOB$ — имеют общий острый угол при D , $\frac{DO_1}{DO} = \frac{O_1 B_1}{OB} =$

$$= \frac{DB_1}{DB}. \triangle DA_1 B_1 \sim \triangle DAB, \frac{DA_1}{DA} = \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{DB_1}{DB} = \frac{\frac{1}{2} DB}{DB} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{DO_1}{DO} = \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, поэтому $\frac{S_{\triangle A_1 B_1 C_1}}{S_{\triangle AAB}} = \left(\frac{A_1 B_1}{AB} \right)^2 = \frac{1}{4}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216 \text{ дм}^2$.

$$S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{216}{4} = 54 \text{ дм}^2$$

Вычислим высоту усеченной пирамиды $O_1 O$.

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30 \text{ дм}.$$

$\triangle ADB$ — равнобедренный, $DA=DB=25$ дм.

Из треугольника $\triangle DOB$: $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{400} = 20$ дм;

$$O_1O = \frac{1}{2} DO = 10 \text{ дм. } V = \frac{1}{3} O_1O(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AA_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle AA_1B_1C_1}});$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot (216 + 54 + \sqrt{216 \cdot 54}) = \frac{10}{3} (270 + \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 2}) = \frac{10}{3} (270 + 27 \cdot 4) = \frac{10}{3} (270 + 108) = 10 \cdot 126 = 1260 \text{ дм}^3$$

700. $A_1D_1=4$ см, $AD=6$ см, $S_{\triangle AA_1C_1C}=15$ см². $S_{ABCD}=AD^2=6^2=36$ (см²);
 $S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1}=A_1D_1^2=4^2=16$ (см²). O_1O — высота пирамиды.

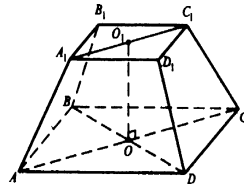
$A_1C_1 \parallel AC$, поэтому сечение AA_1C_1C — равнобедренная трапеция.

$S_{\triangle AA_1C_1C} = 15 = \frac{A_1C_1 + AC}{2} O_1O$, где O_1O — высота пирамиды и высота сечения.

$$A_1C_1 = 4\sqrt{2}; \quad AC = 6\sqrt{2}.$$

$$15 = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} O_1O, \quad O_1O = \frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} O_1O(S_{ABCD} + S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{\triangle AA_1B_1C_1D_1}});$$



$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} (36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (52 + 24) = \frac{76}{\sqrt{2}} = \frac{76\sqrt{2}}{2} = 38\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

701. а) Дано: $h=3$ см, $r=1,5$ см. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,25 \cdot 3 = 2,25\pi$ (см³);

б) Дано: $r=4$ см, $V=48\pi$ см³. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ (см);

в) Дано: $h=m$, $V=p$. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $p = \frac{1}{3} \pi r^2 m$, $r^2 = \frac{3p}{\pi m}$, $r = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$.

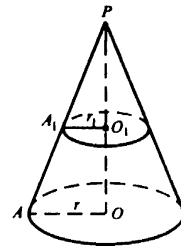
702. $PO=5$ см, $PO_1=2$ см; PO — высота конуса.

$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$, $O_1A_1=r_1$,

Тогда: $\frac{PO_1}{A_1O_1} = \frac{PO}{OA}$, $\frac{2}{r_1} = \frac{5}{r}$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 PO_1 = 24, \quad \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot 2 = 24, \quad r_1^2 = \frac{36}{\pi},$$

$$r_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ см. } \frac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} = \frac{5}{r}, \text{ откуда } r = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = \frac{15}{\sqrt{\pi}} \text{ см.}$$



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 PO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{225}{\pi} \cdot 5 = 75 \cdot 5 = 375 \text{ см}^3.$$

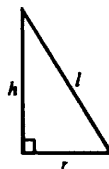
703. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота конуса.

$$\pi r^2 = Q, \text{ откуда } r^2 = \frac{Q}{\pi}. S_{\text{бок}} = P = \pi r l, \text{ где } l \text{ — образующая.}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}. P = \pi \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot l, l = \frac{P}{\sqrt{\pi Q}}.$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{P}{\sqrt{\pi Q}}\right)^2 - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Q}{\pi} (P^2 - Q^2)} = \frac{\sqrt{\pi Q (P^2 - Q^2)}}{3\pi}.$$



$$\mathbf{704.} V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{H^2}{4} \cdot H = \frac{\pi H^3}{12}.$$

705. Обозначим образующую $SB=d$, радиус основания $OB=r$.

$$\text{Из треугольника } \Delta SOB: SO=H=\sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - r^2} = \sqrt{169 - r^2}, \text{ тогда } S_{\Delta ASB} = 60 = \frac{1}{2} H \cdot AB = \frac{Hr \cdot 2}{2} = H \cdot r.$$

$$\begin{cases} H = \sqrt{169 - r^2}, \\ Hr = 60. \end{cases}$$

$$H = 60 \cdot \frac{1}{r}, \frac{60}{r} = \sqrt{169 - r^2}, r^4 - 169r^2 + 3600 = 0.$$

$$(r^2)_{1,2} = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2},$$

$$r^2 = \frac{288}{2} = 144, r = 12 \text{ см,}$$

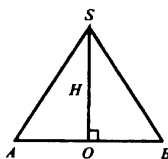
$$\text{при } r_1 = 12 \text{ см } H_1 = \frac{60}{12} = 5 \text{ см,}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240\pi \text{ см}^3,$$

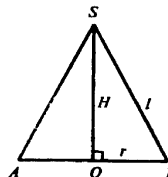
706. Дано: $h=12$ см, $V=324\pi$ см³.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3 \cdot 324\pi}{\pi \cdot 12} = 81,$$

Осевое сечение конуса



Осевое сечение конуса



$$r^2 = \frac{169 - 119}{2} = 25, r = 5 \text{ см.}$$

$$\text{при } r_2 = 5 \text{ см } H_2 = \frac{60}{5} = 12 \text{ см.}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ см}^3.$$

$$r=9 \text{ (см)}. \alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l}.$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} =$$

$$= 15 \text{ (см)}. \alpha = \frac{360^\circ \cdot 9}{15} = 216^\circ.$$

707. Имеем $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$, $S_{\text{осн}} = \pi r^2$,
 $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

$45\pi = \pi r^2 + \pi r l$, отсюда $45 = r^2 + r l$, где r — радиус основания; а l — образующая конуса.

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{l}. 60^\circ = \frac{360^\circ \cdot r}{l}, 60^\circ \cdot l = 360^\circ \cdot r, l = 6r.$$

$$\text{Запишем систему: } \begin{cases} r^2 + r l = 45, \\ l = 6r. \end{cases} \quad r^2 + 6r^2 = 45, r^2 = \frac{45}{7}.$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(6r)^2 - r^2} = r \sqrt{35} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{45 \cdot 35} = 15 \text{ дм}.$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \pi \cdot \frac{45 \cdot 5}{7} = \frac{225\pi}{7} \text{ дм}^3.$$

708. Имеем $V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r_1^2 + r r_1)$, где h — высота; r и r_1 — радиусы оснований конуса.

$O_1 C = r_1$, $O B = r$. Построим $CL \perp AB$, $CL = O_1 O = h$.

$$LB = r - r_1 = 6 - 3 = 3 \text{ м}.$$

$$\text{Из треугольника CBL: } CL = \sqrt{CB^2 - BL^2} = \sqrt{l^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ м},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4 (3^2 + 6^2 + 3 \cdot 6) = 84\pi \text{ м}^3.$$

709. Имеем $V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r_1^2 + r r_1) h$.

$S_{\text{бок}} = S = \pi (r + r_1) l$, где h — высота; а l — образующая; r и r_1 — радиусы оснований конуса.

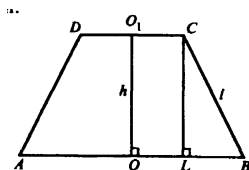
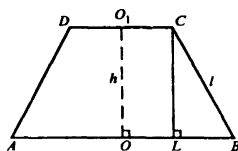
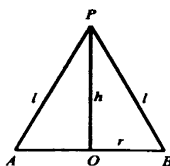
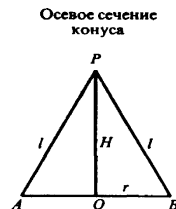
$$O_1 C = r_1, O B = r, LB = r - r_1.$$

$$\text{Из треугольника CBL: } h^2 + (r - r_1)^2 = l^2.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} S = \pi \cdot l (r + r_1), \\ (r - r_1)^2 = l^2 - h^2, \end{cases} \quad \begin{cases} S = \pi \cdot l (r + r_1), \\ r - r_1 = \sqrt{l^2 - h^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{S}{\pi l} = r + r_1, \\ \sqrt{l^2 - h^2} = r - r_1, \end{cases}$$

$$\text{Тогда } 2r = \frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2}, r = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2} \right),$$



$$r_1 = \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2} \right).$$

$$\begin{aligned} r^2 + r_1^2 + rr_1 &= (r+r_1)^2 - 2rr_1 + rr_1 = (r+r_1)^2 - rr_1 = \left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} \right)^2 - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2} \right) = \left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 - (l^2 - h^2) \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{S}{\pi l} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{4} (l^2 - h^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2 \right). V = \frac{1}{3} \pi h \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2 \right) = \frac{\pi h}{12} \left(l^2 - h^2 + \frac{3S^2}{\pi^2 l^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} = S_{\text{ABCD}} &= \frac{DC + AB}{2} h = \frac{2r_1 + 2r_2}{2} h = h(r_1 + r_2) = h \left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \right. \\ &\left. - \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} \right) = h \frac{S}{\pi l}. \end{aligned}$$

710. а) Дано: $R=4$ см. $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 64 = \frac{256\pi}{3} \text{ см}^3, S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi \text{ см}^2;$$

б) Дано: $V=113,04$ см³, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$,

$$R^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3 \cdot 113,04}{4\pi} = \frac{339,12}{4\pi} \approx 27, R = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ см}, S = 4\pi R^2 \approx 36\pi \text{ см}^2;$$

в) Дано: $S=64\pi$ см². $S=4\pi R^2$, $64\pi=4\pi R^2$, $R^2=16$, $R=4$ см,

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} = \frac{256\pi}{3} \text{ см}^3.$$

711. $V_3 = \frac{4}{3} \pi R_3^3$, $D_3 = 2R_3$, $V_3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{D_3^3}{8} = \frac{\pi D_3^3}{6}$; $V_{\text{л}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{л}}^3$, $D_{\text{л}} = 2R_{\text{л}}$,

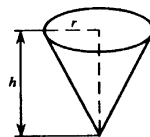
$$V_{\text{л}} = \frac{\pi D_{\text{л}}^3}{6}, \frac{V_9}{V_{\text{л}}} = \frac{D_3^3}{D_{\text{л}}^3}, \text{ если } D_3 = 4D_{\text{л}}, \text{ то } \frac{V_3}{V_{\text{л}}} = \frac{4^3 D_{\text{л}}^3}{D_{\text{л}}^3} = 64.$$

712. $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$, $V_{\text{ц}} = \pi r^2 h$, $D_{\text{ш}} = D_{\text{ц}}$, то есть $2R = 2r$, отсюда $R = r$. По усло-

вию $V_{\text{ш}} = V_{\text{ц}}$. $\frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h$, $\frac{4}{3} R = h$.

713. $h=12$ см, $r = \frac{5}{2} = 2,5$ см. $V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6,25 \cdot 12 = 25\pi$ см³.

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3, R = \frac{D}{2}; V_{\text{ш}} = \frac{\pi D^3}{6}, D=5 \text{ см}, V_{\text{ш}} = \frac{125\pi}{6} \text{ см}^3.$$



Надо сравнить объемы конуса и шара: 25π и $V \frac{125\pi}{6}$, 150 и 125. Т.к. $150 > 125$, то $25\pi > \frac{125\pi}{6}$,



$V_K > V_{ш}$, то есть растаявшее мороженое уместится в стаканчике.

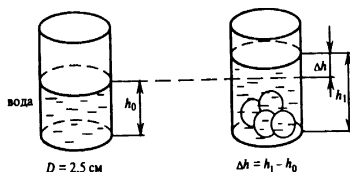
714. $V_{цил} = \pi r^2 h$, $V_{воды} = \pi r^2 h_0 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h_0 = \frac{\pi D^2}{4} h_0$. 4 опущенных шарика

занимают объем: $4 \left(\frac{4}{3} \pi r_{ш}^3\right) = \frac{16}{3} \pi \left(\frac{D_{ш}}{2}\right)^3 = \frac{2\pi D_{ш}^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ см}^3$.

Т.к. объем шариков равен объему

вытесненной воды, то: $\pi \frac{D^2}{4} \Delta h = \frac{2\pi}{3}$;

$$\Delta h = \frac{8}{3D^2} = \frac{4}{3(2,5)^2} = \frac{32}{75}.$$



715. Пусть $AC=h$, $AB=r$, r — радиус клумбы; примем радиус шара равным R м. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD=2R$, $\angle CBD=90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр CD .

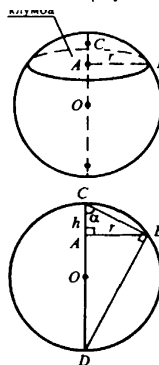
Из треугольника CDB : $CB=2R \cos \alpha$; из $\triangle ACB$:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Получили уравнение: $2R \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2}$, $2Rh = h^2 +$

$$+ r^2, R = \frac{h^2 + r^2}{2h} \quad (h=0,6 \text{ м}), R = \frac{0,36 + 25}{2 \cdot 0,6} = \frac{25,36}{1,2} = \frac{317}{15} \text{ м}.$$

$$V_{сегм} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right) (0,6)^2 \cdot \pi \left(\frac{317}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25} \pi \cdot \frac{314}{15} = \frac{3 \cdot 314 \pi}{3 \cdot 25} = \frac{924 \pi}{125}$$

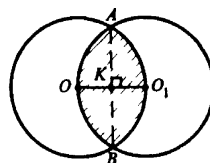


716. Сечение шаров проходит через их центры O и O_1 . Хорда $AB \perp OO_1$, $OO_1=r$, r — радиусы шаров. Общая часть заштрихована и состоит из двух одинаковых шаровых сегментов. Их объемы:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right), \text{ где } h = KO_1 = \frac{1}{2} r, R=r.$$

$$V = \pi \frac{r^2}{4} \left(r - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} r\right) = \frac{\pi r^2}{4} \left(r - \frac{r}{6}\right) = \frac{5\pi r^3}{24}.$$

$$V_{общ} = 2V = \frac{5\pi r^3}{12}. \text{ Объем шара } V = \frac{4}{3} \pi r^3. \frac{V_{общ}}{V} = \frac{5\pi r^3}{12} : \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 12} = \frac{5}{16}.$$



717. $MB=60 \text{ см}$. $CA=2R=2 \cdot 75=150 \text{ см}$.

Обозначим $CM=h$. Обозначим $\angle ACB = \varphi$,
 следовательно, из $\triangle ACB$: $CB=CA \cos \varphi = 2R \cos \varphi$.

С другой стороны, из треугольника CMB :

$$CB = \sqrt{h^2 + 60^2}, \cos \varphi = \frac{CM}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 60^2}}.$$

$$2R \frac{h}{\sqrt{h^2 + 60^2}} = \sqrt{h^2 + 60^2}, 2Rh = h^2 + 60^2, h^2 - 2Rh + 3600 = 0,$$

$$h_{1,2} = R \pm \sqrt{R^2 - 3600} = 75 \pm \sqrt{5625 - 3600} = 75 \pm 45; h_1 = 120 \text{ см}, h_2 = 30 \text{ см}.$$

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h_1 \right) = \pi \cdot 120^2 \left(75 - \frac{1}{3} \cdot 120 \right) = \pi \cdot 14400 \cdot 35 = 504000\pi \text{ см}^3;$$

$$V_2 = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h_2 \right) = \pi \cdot 30^2 \left(75 - \frac{1}{3} \cdot 30 \right) = \pi \cdot 900 \cdot 65 = 58500\pi \text{ см}^3.$$

$$718. AB = 2R, AM = MN = NB = \frac{1}{3} AB = \frac{2R}{3}.$$

Объем шарового слоя найдем как разность объемов шаровых сегментов, высоты которых NA и MA .

$$V_1 = \pi \cdot NA^2 \left(R - \frac{1}{3} NA \right) = \pi \left(\frac{4R}{3} \right)^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3} \cdot \frac{4R}{3} \right) = \frac{5 \cdot 16}{81} \pi R^3;$$

$$V_2 = \pi \cdot MA^2 \left(R - \frac{1}{3} MA \right) = \pi \left(\frac{2R}{3} \right)^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3} \cdot \frac{2R}{3} \right) = \frac{7 \cdot 4}{81} \pi R^3;$$

$$V_{\text{шар слоя}} = V_1 - V_2 = \left(\frac{80}{81} - \frac{28}{81} \right) \pi R^3 = \frac{52}{81} \pi R^3.$$

719. Имеем $CD \perp AB$, $AM = 6$ см, $MB = 12$ см.

Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга. AB — диаметр шара, $AB = 6 + 12 = 18$ см, $R = 9$ см. Полученные части — шаровые сегменты.

$$V_1 = \pi \cdot AM^2 \left(R - \frac{1}{3} AM \right); V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 - V_1.$$

$$V_1 = \pi \cdot 6^2 \left(9 - \frac{1}{3} \cdot 6 \right) = 36\pi(9 - 2) = 252\pi \text{ см}^3.$$

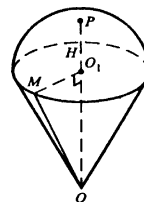
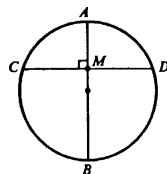
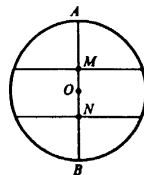
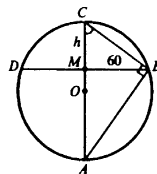
$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 9^3 - 252\pi = \frac{4\pi \cdot 81 \cdot 9}{3} - 252\pi = 972\pi - 252\pi = 720\pi \text{ см}^3.$$

720. Пусть R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Вычислим высоту сегмента $H = PO_1$, $OP = R$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle OO_1M$:

$$OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45 \text{ см}$$

$$H = PO_1 = OP - O_1O = 75 - 45 = 30 \text{ см}.$$

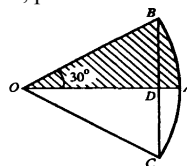


$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 = 112500 \pi \text{ см}^3.$$

721. Имеем $\angle BOA = 30^\circ$. Тогда $\angle BOC = 60^\circ$, $OB = OC = R$, $\triangle BOC$ — равно-
сторонний, сторона BC отсекает от радиуса OA отрезок DA , равный высоте H
соответствующего шаровому сектору сегмента.

$$H = AD = AO - OD = R - R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi R^3 (2 - \sqrt{3}).$$



722. $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$. На сушу приходится $\frac{1}{4}$ часть поверхности шара, т.е.

$$S_{\text{суши}} = \pi \cdot 6375^2 \approx 1,28 \cdot 10^8 \text{ км}^2 = 128 \cdot 10^6 \text{ км}^2.$$

723. $S = 4\pi R^2$; $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ см}^2$. 1% составит $4\pi \text{ см}^2$, 8% — $32\pi \text{ см}^2$.
 $S = 400\pi + 32\pi = 432\pi \approx 1357 \text{ см}^2$.

$$724. \text{ Имеем } S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi \frac{D^2}{4} = \pi D^2;$$

$$S_{\text{полн кон}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

$$\text{Из треугольника } AOP: \cos \angle A = \frac{OA}{PA} = \frac{r}{l} = \frac{1}{2}, \angle A = 60^\circ.$$

$$OA = r = H \cdot \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{H}{\sqrt{3}}; S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{H^2}{3}.$$

$$l = 2 \cdot \frac{H}{\sqrt{3}}. S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot \frac{H}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2H}{\sqrt{3}} = \pi \cdot \frac{2H^2}{3},$$

$$S_{\text{полн кон}} = \frac{\pi H^2}{3} + \frac{2\pi H^2}{3} = \frac{3\pi H^2}{3} = \pi H^2.$$

По условию $H = D$, т.е. $S_{\text{сф}} = S_{\text{полн кон}}$.

