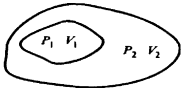
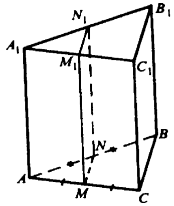
Вопросы к главе VII

1. а) $V_2 > V_1$; б) $V_1 = V_2 = n$ (см^3).



2. Заметим, что $\Delta AMN \sim \Delta ACB$.



$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\frac{MN}{CB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}BC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$, $V_{AMNA_1M_1N_1} = S_{\Delta AMN} \cdot AA_1$,

$$\frac{V_{AMNA_1M_1N_1}}{V_{ACBA_1B_1C_1}} = \frac{S_{\Lambda AMN} \cdot AA_1}{S_{\Lambda ACB} \cdot AA_1} = \frac{1}{4}.$$

3. $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot h$.

$D_1 = 2D$, $h_1 = \frac{h}{4}$. $V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (2D)^2 h_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 4D^2 \cdot \frac{h}{4} = \frac{\pi}{4} D^2 h$. $V_1 = V$.

4. $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$, $h_1 = nh$.

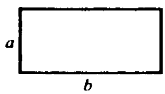
В основании многоугольник, у которого: а) число сторон осталось без изменений; б) углы остались без изменений, т.е. полученный многоугольник подобен исходному, а площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Обозначим: x — сторона исходного многоугольника, $\frac{x}{n}$ — сторона полученного.

$\frac{S_1}{S_{осн}} = \left(\frac{\frac{a}{n}}{a}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$, где S_1 — площадь основания полученного многоугольника.

$$V = \frac{1}{3} S_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{осн}}{n^2} \cdot n \cdot h = \frac{1}{3} S_{осн} h \frac{1}{n} = \frac{V}{n}.$$

5. В качестве четырехугольников рассмотрим параллелограмм и прямоугольник. Обозначим их стороны a и b.

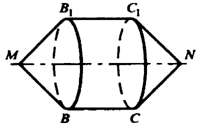
$S_1 = ab\sin\alpha$



$S_2 = ab$

$ab\sin\alpha < ab$, т.е. $V_1 = \frac{1}{3} S_1 h$ и $V_2 = \frac{1}{3} S_2 h$ связаны неравенством $V_1 < V_2$, т.е. нет.

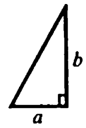
6. $r_1 = 2r_2$; $V_1 = \pi r_1^2 h$; $V_2 = \pi r_2^2 h$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi h r_1^2}{\pi h r_2^2} = \frac{4r_2^2}{r_2^2} = 4$.



7. Тело вращения будет состоять из трех тел: прямого цилиндра BCC_1B_1 и двух равных конусов.

8. Конус 1: обозначим радиус основания a; высота b. Тогда объем равен: $V_1 = \pi a^2 b$.

Конус 2: радиус основания b; высота a; $V_2=\pi b^2 a$.



Если $a \neq b$, то $V_1 \neq V_2$.

9. Шар 1: $D=2R_1$; шар 2: $D=R_2$, $2R_1=R_2$.

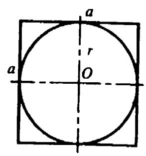
а) $\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_1}{2R_1}=\frac{1}{2}$;

б) $V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$; $V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 8R_1^3$. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3\cdot 8}=\frac{1}{8}$.

10. Имеем R=6 см, $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 6^3$; r=2 см, $V_1=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3$, $n\cdot V_1=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot n$.

Тогда получили уравнение $\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot n=\frac{4}{3}\pi\cdot 6^3$, $2^3\cdot n=6^3$, $n=\frac{6\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 2\cdot 2}=3^3=27$.

11. Обозначим ребро куба равное a. Вписанный шар касается всех граней куба в их центрах. Вершины куба, вписанного в шар, лежат на поверхности шара. Радиус описанного шара равен половине диагонали куба.



$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{a}{2}$ $V_{вп}=\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{4\pi}{3}\cdot(\frac{a}{2})^3=\frac{\pi a^3}{6}$;

$V_{оп}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{3}}{2})^3=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. $\frac{V_{оп}}{V_{вп}\bullet}=\frac{\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}}{\frac{\pi a^3}{6}}=3\sqrt{3}$.

12. $S=4\pi R^2$,

а) $R_1=\frac{R}{2}$; $S=4\pi R^2$; $S_1=4\pi R_1^2=4\pi\cdot\frac{R^2}{4}=\pi R^2$. $\frac{S}{S_1}=\frac{4\pi R^2}{\pi R^2}=4$; $S_1=\frac{1}{4}S$ — уменьшится в 4 раза;

б) $R_1=3R$. $S=4\pi R^2$; $S_1=4\pi R_1^2=4\pi\cdot(3R)^2=4\pi\cdot 9R^2$. $\frac{S}{S_1}=\frac{4\pi\cdot 9R^2}{4\pi R^2}=9$; $S_1=9S$ — увеличится в 9 раз.

13. Для шара 1: $V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$; Для шара 2: $V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3$,

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=(\frac{R_1}{R_2})^3=8$; $\frac{R_1}{R_2}=2$; $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=(\frac{R_1}{R_2})^2=4$.

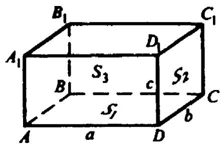
14. Пусть $S_1:S_2=m^2:n^2$.

Для шара 1: $S_1=4\pi R_1^2$, $V_1=\frac{4\pi}{3}R_1^3$; Для шара 2: $S_2=4\pi R_2^2$, $V_2=\frac{4\pi}{3}\pi R_2^3$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=(\frac{R_1}{R_2})^2=\frac{m^2}{n^2}$; $\frac{R_1}{R_2}=\frac{m}{n}$; $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=(\frac{R_1}{R_2})^3=(\frac{m}{n})^3$.

Дополнительные задачи

725. Обозначим $S_{ABCD}=S_1$, $S_{DD_1C_1C}=S_2$, $S_{AA_1D_1D}=S_3$; AD=a, DC=b, DD_1=c.

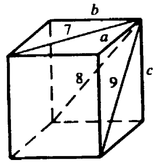


$$\begin{cases} S_1 = ab, \\ S_2 = cb, \\ S_3 = ac, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = ab, \\ \dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{b}{a}, \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{S_1}{a},\ a^2 = \dfrac{S_1S_3}{S_2}, \\ \dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{S_1}{a^2}, a = \sqrt{\dfrac{S_1S_3}{S_2}}; \end{cases}$$

$$b=\frac{S_1\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}};\ c=\frac{S_3\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\frac{\sqrt{S_3S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

$$V=abc;\ V=\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3S_2}{S_1}}=\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3};\ V=\sqrt{6\cdot 12\cdot 18}=36 \text{ дм}^3.$$

726. Обозначим стороны параллелепипеда за a, b, c. Составим систему уравнений:

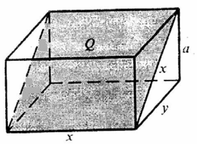


$$\begin{cases} a^2+c^2=81, \\ b^2+c^2=64, \\ a^2+b^2=49. \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-b^2=17, \\ a^2+b^2=49. \end{cases}$$

$2a^2=66$, $a^2=33$, $a=\sqrt{33}$; $b^2=49-33=16$, b=4; $c^2=64-16=48$, $c=4\sqrt{3}$.

$V=abc$; $V=\sqrt{33}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}=16\cdot\sqrt{3\cdot 3\cdot 11}=16\cdot 3\cdot\sqrt{11}=48\sqrt{11}$ см^3.

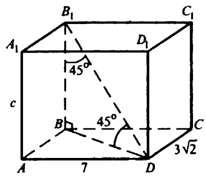
727. Сечение заштриховано, его сторона равна x. Сторона основания y.



$x^2=Q$, $x=\sqrt{Q}$. $y^2+a^2=x^2$, $y^2+a^2=Q$, $y=\sqrt{Q-a^2}$. $V=xya$;

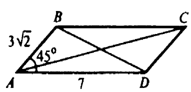
$V=a\sqrt{Q}\sqrt{Q-a^2}=a\sqrt{Q^2-a^2Q}$.

728. В основании параллелепипеда — параллелограмм, боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания.



BD — меньшая диагональ, т.к. $\angle A=45°$, а $\angle B=135°$, поэтому BD<AC. ΔBB_1D — прямоугольный, BB_1=BD. По теореме косинусов из треугольника ABD:

$BD^2=49+18-2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=49+18-42=7+18=25$; BD=5 см.

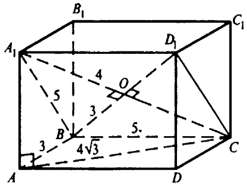


$S_{осн}=S_{ABCD}=7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin 45°=7\cdot 3\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=21$ см^2.

$BD=BB_1=5$ см $V_{пар}=S_{осн}\cdot BB_1=5\cdot 21=105$ см^3

729. A_1BCD_1 — параллелограмм, в котором диагонали перпендикулярны. Значит, A_1BCD_1 — ромб. По свойству диагоналей ромба A_1O=OC и

BO=OD_1. По теореме Пифагора из ΔA_1OB A_1B=5см. Из прямоугольного A_1AB: $AA_1=\sqrt{25-9}=4$ см.



Вычислим площадь основания.

Из ΔA_1AC: $AC=\sqrt{A_1C^2 - A_1A^2}=\sqrt{8^2-4^2}=$ $=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ см.

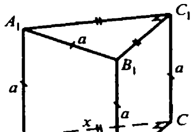
По теореме косинусов в треугольнике ABC: $(4\sqrt{3})^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\angle B$; $\cos\angle B=-\frac{7}{15}$,

$\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\sqrt{1-\frac{49}{225}}=\frac{\sqrt{176}}{15}$. $S_{осн}=3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{176}}{15}=\sqrt{176}$ см^2.

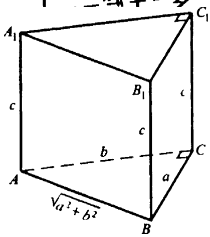
$V=S_{осн}\cdot A_1A=4\sqrt{176}=4\sqrt{16\cdot11}=16\sqrt{11}$ см^3.

730. Пусть $BC=B_1C_1=AC=A_1C_1=x$. Из прямоуголь-ного треугольника ABC: $x^2+x^2=a^2$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. $V=S_{осн}\cdot AA_1=\frac{a^2}{4}a=\frac{a^3}{4}$.



731. Пусть AC=b, BC=a, тогда, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть $A_1A=c$. Площади боковых граней, которые являются прямоугольниками, равны соответственно ac; bc; $\sqrt{a^2+b^2}$ c. Т.к. $\sqrt{a^2+b^2}>b$ и $\sqrt{a^2+b^2}>a$, то наибольшую площадь имеет грань со сторонами $\sqrt{a^2+b^2}$ и c. $S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab$.



Пусть a<b, $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}ab\right)c=3, & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}\cdot c=3\sqrt{5}, & (2)\\ c=3. & (3)\end{cases}$

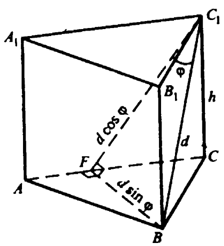
Из (1) имеем: $ac\cdot\frac{1}{2}b=3$, $3\cdot\frac{1}{2}b=3$, b=2.

Из уравнений (3) и (2): $\begin{cases}ac=3,\\ c\sqrt{a^2+4}=3\sqrt{5},\end{cases}$ $\begin{cases}a^2c^2=9,\\ a^2c^2+4c^2=45.\end{cases}$

$9+4c^2=45$, $4c^2=36$, $c^2=9$ (c>0), поэтому c=3. $a=\frac{3}{3}=1$.

Итак, a=1, b=2, c=3. AB=$\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$ м.

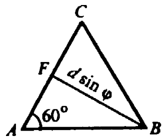
732. Обозначим $BC_1=d$, $CC_1=h$. Проведем BF перпендикулярно AC, отрезок C_1F, он является проекцией BC_1 на плоскость боковой грани AA_1C_1C, $\angle BC_1F=\varphi$.



Из прямоугольного треугольника FC_1B: $FB=d\sin\varphi$.

$AB=\dfrac{FB}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}$. $\qquad S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=$

$=\left(\dfrac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4d^2\sin^2\varphi\sqrt{3}}{3\cdot 4}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi$.



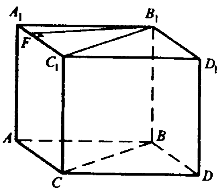
Найдем высоту призмы $C_1C=h$. $FC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного ΔC_1FC:

$$h=\sqrt{(d\cos\varphi)^2-\left(\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{d^2\cos^2\varphi-\frac{d^2\sin^2\varphi}{3}}=d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{3}}.$$

$$V=S_{осн}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi\cdot d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{3}}=\frac{d^3\sin^2\varphi}{3}\cdot\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}.$$

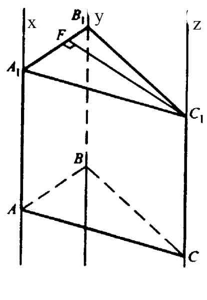
733. $ABCAB_1C_1$ — треугольная призма, $B_1B\parallel$ плоскости AA_1C_1C. Построим $B_1F\perp$ плоскости AA_1C_1C. Отрезок B_1F есть расстояние от грани AA_1C_1C до параллельного ей ребра B_1B. Достроим данную призму до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$. За основание параллелепипеда возьмем грань AA_1C_1C, следовательно, его высотой будет отрезок B_1F.



$V_{пар}=S_{AA_1C_1C}\cdot B_1F$.

Плоскость C_1CBB_1 делит параллелепипед на две равновеликие призмы, тогда, объем каждой из них составляет $\dfrac{1}{2}V_{пар}$, или $V_{призмы}=\dfrac{1}{2}S_{AA_1C_1C}\cdot B_1F$, что и требовалось доказать.

734. $x\parallel y\parallel z$, $AA_1=BB_1=CC_1$. Известно (см. задачу 733), что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.



Возьмем за основание грань AA_1B_1B, из точки C_1 проведем отрезок $C_1F\perp$ плоскости AA_1B_1B. Отрезок C_1F — высота призмы.

$V=S_{AA_1B_1B}\cdot C_1F\cdot\dfrac{1}{2}$.

Длина C_1F — величина постоянная при заданном положении x, y, z. Расстояние между параллельными прямыми x и y, а значит, и между отрезками AA_1 и BB_1 не меняется, тогда, высота параллелограмма AA_1B_1B - величина постоянная. Тогда площадь $S_{AA_1B_1B}$=const, значит V=const.

735. Обозначим x — коэффициент пропорциональности, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней наклонной призмы. Следовательно

$S_1=x\cdot 20$, $S_2=x\cdot 37$, $S_3=x\cdot 51$. $S_{бок}=S_1+S_2+S_3=10{,}8$ дм^2.

$10{,}8=x\cdot 20+x\cdot 37+x\cdot 51=108x$, $x=\dfrac{10{,}8}{108}=\dfrac{1}{10}$.

Значит $S_1=\dfrac{1}{10}\cdot 20=2$ дм^2; $S_2=\dfrac{1}{10}\cdot 37=3{,}7$ дм^2; $S_3=\dfrac{1}{10}\cdot 51=5{,}1$ дм^2.

Пусть боковые грани пересечены плоскостью, перпендикулярной к ним. Линии пересечения секущей плоскости с боковыми гранями будут высотами боковых граней, то есть высотами параллелограммов. Пусть у боковых граней с площадями S_1, S_2, S_3, высоты равны h_1, h_2, h_3.

Значит, $2=h_1\cdot 0{,}5$, $h_1=\dfrac{2}{0{,}5}=4$ дм; $3{,}7=h_2\cdot 0{,}5$, $h_2=\dfrac{3{,}7}{0{,}5}$ дм; $5{,}1=h_3\cdot 0{,}5$, $h_3=\dfrac{5{,}1}{0{,}5}$ дм.

Полупериметр перпендикулярного сечения равен:

$$p=\frac{1}{2}\left(4+\frac{37}{5}+\frac{51}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(4+\frac{88}{5}\right)=\frac{108}{2\cdot 5}=\frac{54}{5} \text{ дм.}$$

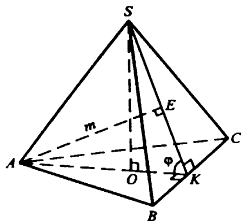
Вычислим площадь перпендикулярного сечения:

$$S=\sqrt{p(p-h_1)(p-h_2)(p-h_3)}=\sqrt{\frac{54}{5}\cdot\left(\frac{54}{5}-4\right)\cdot\left(\frac{54}{5}-\frac{37}{5}\right)\cdot\left(\frac{54}{5}-\frac{51}{5}\right)}=\sqrt{\frac{54}{5}\cdot\frac{34}{5}\cdot\frac{17}{5}\cdot\frac{3}{5}}=$$

$$=\frac{1}{25}\sqrt{54\cdot 17^2\cdot 2\cdot 3}=\frac{17}{25}\cdot 6\cdot 3=\frac{17\cdot 18}{25} \text{ дм}^2.$$

$$V=S\cdot 0{,}5=\frac{17\cdot 18}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17\cdot 9}{25}=\frac{153}{25}=6{,}12 \text{ дм}^2.$$

736. Пусть SO — высота пирамиды, O — центр правильного ΔABC. Проведем AK перпендикулярно BC, отрезок SK. По теореме о трех перпендикулярах $SK\perp BC$, поэтому $\angle AKS=\varphi$ — линейный угол двугранного угла при основании.



Проведем AE перпендикулярно плоскости BSC. Поскольку плоскость ASK перпендикулярна плоскости BSC, то AE $\subset$ плоскости ASK.

Из прямоугольного ΔAEK: $AK=\dfrac{m}{\sin\varphi}$. Обозначим сторону основания равной x, тогда из треугольника ΔABK: $AK=x\sin 60°=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Тогда, $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{m}{\sin\varphi}$,

$x=\dfrac{m\cdot 2}{\sqrt{3}\sin\varphi}$. $S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4m^2}{3\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi}$.

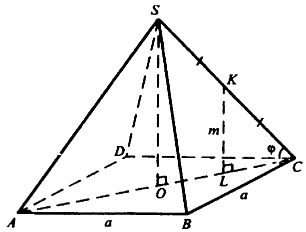
В ΔABC OK — радиус вписанной окружности,

$OK=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2m}{\sqrt{3}\sin\varphi}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{m}{3\sin\varphi}$.

В ΔSOK: $\dfrac{SO}{OK}=\operatorname{tg}\varphi$, $SO=OK\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{m}{3\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{m}{3\cos\varphi}$.

$V=\dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot SO$; $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{m}{3\cos\varphi}=\dfrac{m^2\sqrt{3}}{\sin^2\varphi\cos\varphi}:27$.

737. Имеем SO — высота пирамиды, O — точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Обозначим сторону основания равной x. K — середина ребра SC, $KL\perp$ плоскости ABCD, KL=m, т.к. плоскость SOC перпендикулярна плоскости ABCD и $K\in$ плоскости SOC. KL — средняя линия в ΔSOC, значит SO=2m.

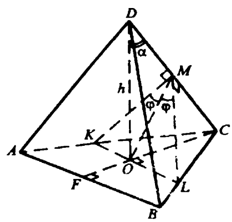


$LC=\dfrac{m}{\operatorname{tg}\varphi}$,. $OC=2CL=\dfrac{2m}{\operatorname{tg}\varphi}$, $AC=2OC=\dfrac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}$.

Из прямоугольного треугольника ABC: $x\sqrt{2}=\dfrac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}$, $x=\dfrac{4m}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi}$.

$S_{осн}=x^2=\dfrac{16m^2}{2\operatorname{tg}^2\varphi}=\dfrac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}$. $V=\dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot 2m=\dfrac{16m^3}{3\operatorname{tg}^2\varphi}$.

738. Имеем DO — высота пирамиды, плоскость $DOC\perp$ плоскости ABC. Проведем $OM\perp DC$, через точку O проведем KL параллельно AB, отрезки ML и MK. KL перпендикулярно плоскости DOC, значит, $KL\perp DC$.



$OM\perp DC$ — по построению. Плоскость $KLM\perp DC$ и поэтому $LM\perp DC$ и $KM\perp DC$.

Тогда, $\angle KML=2\varphi$, $\Delta KOM=\Delta LOM$, значит $\angle KMO=\angle LMO=\varphi$.

Пусть $\angle ODM=\alpha$, следовательно, из прямоугольного ΔODM: $OM=h\sin\alpha$.

Примем KO=OL=y. Из прямоугольного ΔLOM: $\dfrac{y}{h\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$. (1)

Рассмотрим треугольник ABC. В нем OC — радиус описанной окружности, OC=R, а OF — радиус вписанной окружности. OF=r. Обозначим сторону основания x, следовательно, $AF=FB=\dfrac{x}{2}$.

Из подобия треугольников FCB и OLC имеем: $\frac{d}{R}=\frac{x}{2(R+r)}$, т.е. d=$\frac{xR}{2(R+r)}$ =

$=\frac{x\cdot x}{\sqrt{3}\cdot 2\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x}{3}$, т.к. R=$\frac{x}{\sqrt{3}}$, R+r=FC=x·sin60°=$\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Возвращаясь к (1), имеем: $\frac{1}{h\sin\alpha}\cdot\frac{x}{3}=\operatorname{tg}\varphi$ (2).

Из ΔDOC: $\frac{R}{h}=\operatorname{tg}\alpha$, или $\frac{x}{\sqrt{3}h}=\operatorname{tg}\alpha$, поэтому $x=h\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Подставим в (2): $\frac{h\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{3h\cdot\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$; $h\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varphi\cdot 3h\cdot\sin\alpha$, т.е.

$3\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\varphi}$. $DC=\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{h\cdot 3\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,h\operatorname{tg}\varphi$.

Вычислим сторону основания x: $\frac{x}{\sqrt{3}}$=R, с другой стороны, из ΔDOC:

$R=\sqrt{DC^2-h^2}$, $R=\sqrt{3h^2\operatorname{tg}^2\varphi-h^2}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$, т.е. $\frac{x}{\sqrt{3}}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$,

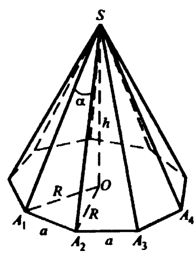
$x=h\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$. $S_{осн}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{осн}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^2\cdot 3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)$.

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}h^2}{4}\cdot(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)$.

739. Имеем SO — высота пирамиды. В основании — правильный n-угольник, O — его центр.

$OA_1=OA_2=...=OA_n=R$, где R — радиус описанной окружности.

$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.



Обозначим боковое ребро пирамиды через b. Тогда из ΔA_1SA_2 по теореме синусов имеем:

$$\frac{b}{\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}}=\frac{a}{\sin\alpha};\ b=\frac{a\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

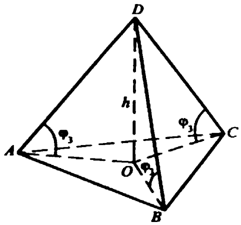
Из прямоугольного треугольника ΔA_1OS:

$$h=SO=\sqrt{b^2-R^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

Вычислим площадь основания.

Площадь правильного n-угольника:

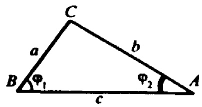
$$S_{осн}=\frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.\ V=\frac{1}{3}S_{осн}h=\frac{1}{3}\ \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\ \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}\ .$$



740. $\Delta DOA=\Delta DOB=\Delta DOC$ (по катету и строму углу). Тогда, DA=DB=DC и OA=OB=OC=R, R — радиус окружности, описанной около ΔABC.

Из треугольника AOD: $\frac{h}{OA}=\operatorname{tg}\varphi_3$, $OA=R=\frac{h}{\operatorname{tg}\varphi_3}$.

Рассмотрим треугольник ABC. По теореме синусов:

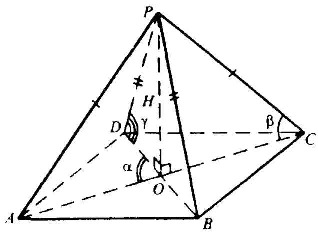


$$\frac{a}{\sin\varphi_2}=\frac{b}{\sin\varphi_1}=\frac{c}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)}=2R=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3},\ \text{т.е.}$$

$$a=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\sin\varphi_2,\ b=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\sin\varphi_1.$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\frac{1}{2}ab\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\right)^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4h^2}{\operatorname{tg}^2\varphi_3}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{2}{3}\ \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\varphi_3}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$



741. $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$.

Из прямоугольного треугольника POD:

$\frac{PO}{OD}=\operatorname{tg}\gamma$, $\frac{H}{OD}=\operatorname{tg}\gamma$, $OD=\frac{H}{\operatorname{tg}\gamma}$.

Из прямоугольного треугольника POC:

$\frac{PO}{OC}=\operatorname{tg}\beta$, $\frac{H}{OC}=\operatorname{tg}\beta$, $OC=\frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$.

OD=OB и OA=OC — из свойства диагоналей параллелограмма.

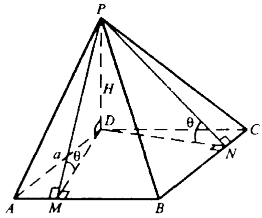
$$DB=2\cdot OD=\frac{2H}{\operatorname{tg}\gamma};\ AC=2\cdot OC=\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta}.\ S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot DB\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\gamma}\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\sin\alpha=$$

$$=2H^2\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\sin\alpha.\ V=\frac{1}{3}\cdot2H^2\cdot\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\sin\alpha\cdot H=\frac{2}{3}H^3\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\sin\alpha.$$

742. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости — перпендикуляр к этой плоскости; значит, PD перпендикулярна плоскости ABCD. PD — высота пирамиды, PD=H. $\angle ADC=\varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре PD. В основании ABCD $\angle A=\angle C=180^o-\varphi$.

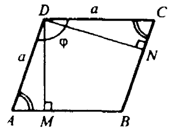
$S_{ABCD}=AD\cdot AB\sin\angle A=a^2\sin(180^\circ-\varphi)=a^2\sin\varphi$.

Построим $DM \perp AB$, $DN \perp CB$. По теореме о трех перпендикулярах отрезки $PM \perp AB$, $PN \perp BC$.



$\angle PMD = \angle PND = \theta$ — линейные углы двугранных углов, образованных боковыми гранями PAB и PBC с плоскостью основания.

$\Delta ADM = \Delta CDN$, $DM = DN = a \sin(180^\circ - \varphi) = a \sin\varphi$.

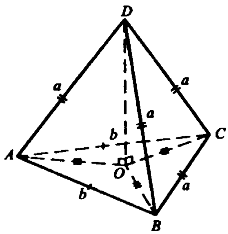


Из треугольника PDN: $\frac{H}{DN} = \operatorname{tg}\theta$, $DN \cdot \operatorname{tg}\theta = H$,

$H = a \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$. $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$; $V = \frac{1}{3} a^2 \sin\varphi \cdot a \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta =$

$= \frac{1}{3} a^3 \sin^2\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$.

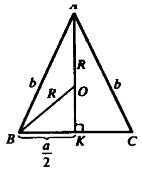
743. а) Пусть $AC = AB = b$, а $DA = DB = DC = BC = a$. Построим высоту пирамиды DO, отрезки OA, OB, OC.



$\Delta DOA = \Delta DOB = \Delta DOC$.

Тогда, $OA = OB = OC = R$, где R — радиус окружности, описанной вокруг ΔABC.

В равнобедренном треугольнике ΔBAC проведем из угла A высоту AK.



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AK = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ (в ΔABK: $AK =$
$= \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$).

$OA = R$, по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ (a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь) Вычислим площадь, вычислим R.

$$R = \frac{abb}{4 \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

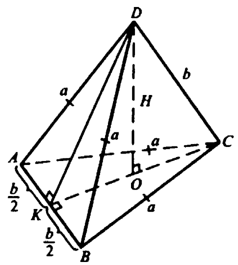
Из ΔADO: $H = DO = \sqrt{a^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^4}{4b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}}$.

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{4a^2b^2 - a^4 - b^4}}{12};$$

б) в равнобедренном треугольнике ABC ($CA = CB = a$) построим высоту $CK \perp AB$; проведем отрезок DK.

В треугольнике ADB: DK — высота (ΔADB — равнобедренный, AK=KB, значит, медиана DK является высотой).

$AB\perp DK$, $AB\perp KC$, $AB\perp(DKC)$.

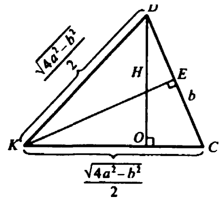


Если плоскость проходит через перпенди-куляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Итак, плоскости ABC и DKC перпендикулярны. В плоскости DKC проведем высоту пирамиды DO; $DO\perp CK$.

Примем DO=H.

В треугольнике ABC: $CK=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CK=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}=\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$.



Вычислим высоту пирамиды: $DK=KC=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$.

Проведем $KE\perp DC$. $DE=EC=\frac{b}{2}$.

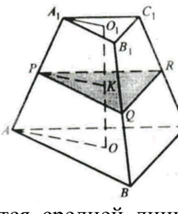
Из треугольника KDE: $KE=\sqrt{KD^2-DE^2}=\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}-\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\frac{4a^2-2b^2}{4}}$.

$S_{\Delta KDE}=\frac{1}{2}\cdot KE\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot H\cdot KC$;

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-2b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}=\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$$

$\sqrt{\frac{4a^2-2b^2}{4}}\cdot b=H\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$, $H=\frac{b\sqrt{4a^2-2b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

744. Обозначим $O_1K=KO=h$, $A_1B_1=y$, $AB=x$.



По условию $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$, $y=\frac{2}{5}x$.

Рассмотрим трапецию AA_1O_1O. $PK\|AO$, отрезок PK — средняя линия трапеции, значит, $A_1P=PA$.

Рассмотрим грань AA_1B_1B. Это трапеция, через точку P проведен отрезок $PQ\|AB$, поэтому PQ является средней линией трапеции.

$$PQ=\frac{x+y}{2}=\frac{x+\frac{2}{5}x}{2}=\frac{7x}{10}.$$

$PQ\|AB\|A_1B_1$, $A_1C_1\|PR\|AC$, $B_1C_1\|QR\|BC$, тогда, $\Delta ABC\sim\Delta PQR\sim\Delta A_1B_1C_1$.

Площади подобных фигур относятся как квадраты их сходственных сторон.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=(\frac{a}{b})^2=(\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4},\ S_{\Delta A_1B_1C_1}=\frac{4}{25}S_{\Delta ABC}.$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta PQR}}=(\frac{AB}{PQ})^2=\left(\frac{x}{\frac{7x}{10}}\right)^2=\frac{100}{49},\ S_{\Delta PQR}=\frac{49}{100}S_{\Delta ABC}.$$

Обозначим объем верхней усеченной пирамиды $V_в$, а объем нижней усеченной пирамиды V_H.

Тогда

$$\frac{V_B}{V_H}=\frac{\frac{1}{3}h(S_{\Delta PQR}+S_{\Delta A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\Delta PQR}\cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}})}{\frac{1}{3}h(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta PQR}+\sqrt{S_{\Delta ABC}\cdot S_{\Delta PQR}})}=\frac{(\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\sqrt{\frac{49}{100}\cdot\frac{4}{25}})S_{\Delta ABC}}{(1+\frac{49}{100}+\sqrt{1\cdot\frac{49}{100}})S_{\Delta ABC}}=$$

$$=\frac{\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\frac{7\cdot 2}{10\cdot 5}}{1+\frac{49}{100}+\frac{7}{10}}=\frac{49+16+28}{170+49}=\frac{93}{219}=\frac{31}{73}.$$

745. а) Обозначим r — радиус основания цилиндра, h – его высота.

$$\begin{cases} S=2\pi h, \\ \pi r^2=Q, \end{cases} \begin{cases} r=\sqrt{\frac{Q}{\pi}}, \\ h=\frac{S}{2\pi r}=\frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}=\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}} \end{cases} \quad V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}}=\frac{S}{2}\cdot\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}};$$

б) обозначим r — радиус основания, т.к. осевое сечение — квадрат, то высота h=2r, тогда $r=\frac{h}{2}$. $V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{h^2}{4}\cdot h=\frac{\pi h^3}{4}$;

в) обозначим r — радиус основания и высота равна диаметру основания, то есть h=2r.

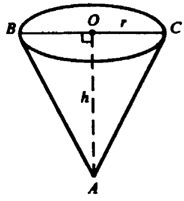
$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r2r=2\pi r^2+4\pi r^2=6\pi r^2$.

$r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. $V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{S}{6\pi}\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{4S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

746. Обозначим r_1, r_2 — радиусы оснований двух цилиндров, а h_1 и h_2 — их высоты. $S_1=2\pi r_1h_1$; $S_2=2\pi r_2h_2$.

По условию $S_1=S_2$; $2\pi r_1h_1=2\pi r_2h_2$, $r_1h_1=r_2h_2$. $V_1=\pi r_1^2h_1$; $V_2=\pi r_2^2h_2$.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r_1^2h_1}{\pi r_2^2h_2}=\frac{(r_1h_1)\cdot r_1}{(r_2h_2)\cdot r_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$

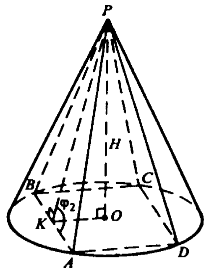


747. OA=h, OC=OB=r. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$;

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1{,}5^2\cdot 3=2{,}25\cdot\pi\approx 2{,}25\cdot 3{,}14=7{,}065$ м^3.

1 л=1 дм^3, а 1 м^3=1000 дм^3, поэтому V=7,065·1000=7065 литров.

748. Пусть PO — это высота конуса, PO=H, AB<AD. Построим $OK\perp AB$, отрезок PK. По теореме о трех перпендикулярах PK перпендикулярно AB.



$\dfrac{PO}{OK}=\text{tg}\varphi_2$, $\dfrac{H}{OK}=\text{tg}\varphi_2$, $H=OK\cdot\text{tg}\varphi_2$.

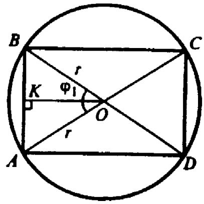
В основании пирамиды.

AB=a, BO=OD=AO=OC — по свойству диагоналей прямоугольника. BO=R.

В треугольнике ABO:

$$\angle ABO=\angle BAO=\frac{180°-\varphi_1}{2}=90°-\frac{\varphi_1}{2}.$$

По теореме синусов запишем: $\dfrac{a}{\sin\varphi_1}=\dfrac{R}{\sin(90°-\frac{\varphi_1}{2})}$;



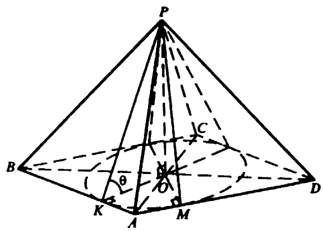
$$R=\frac{a\cdot\sin(90°-\frac{\varphi_1}{2})}{\sin\varphi_1}=\frac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}.$$

Из треугольника BKO: $OK=R\cdot\cos\dfrac{\varphi_1}{2}=\dfrac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}}$.

$$H=OK\ \text{tg}\varphi_2=\frac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}}\cdot\text{tg}\varphi_2=\frac{a\cdot\text{tg}\varphi_2}{2\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$

$$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}\cdot$$

$$\frac{a\cdot\text{tg}\varphi_2}{2\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{\pi a^3\text{tg}\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$

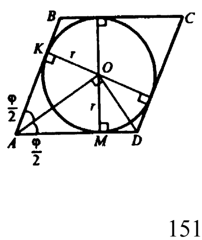


749. Пусть PO — высота пирамиды, обозначим PO=H. PK — образующая конуса, которая лежит в плоскости APB, $OK\perp AB$.

В основание пирамиды рассмотрим.

ABCD — ромб. AB=a.

$S_{ABCD}=4S_{AOD}=2S_{ABC}$



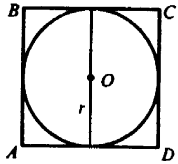
$S_{ABCD}=2(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin\varphi)=a^2\sin\varphi$.

$S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot OM=\frac{1}{2}ar$.

Пришли к уравнению: $a^2 \sin\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}ar$, откуда $r=\frac{1}{2}a\sin\varphi$.

Из прямоугольного треугольника РОК: $\frac{PO}{OK}=\text{tg}\theta$ ($\angle PKO$ — угол, который образующая конуса РК составляет с ее проекцией ОК). $\frac{H}{OK}=\text{tg}\theta$, $H=r\cdot\text{tg}\theta=$
$=\frac{1}{2}a\cdot\sin\varphi\cdot\text{tg}\theta$. $V_{кон}=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2\sin^2\varphi}{4}\cdot\frac{1}{2}a\sin\varphi\cdot\text{tg}\theta=\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\varphi\cdot\text{tg}\theta$.

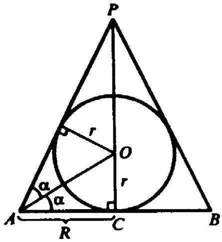
750. Рассмотрим осевое сечение, основанием является квадрат.



Пусть сторона куба равна x, следовательно, радиус шара $r=\frac{x}{2}$.

$V_ш=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{x}{2})^3=\frac{4\pi x^3}{3\cdot 4\cdot 2}=\frac{\pi x^3}{6}$.

Радиус основания цилиндра равен $\frac{x}{2}$, высота цилиндра равна x, следовательно, $V_{цил}=\pi(\frac{x}{2})^2\cdot x=\frac{\pi x^3}{4}$. $\frac{V_{цил}}{V_ш}=\frac{\frac{\pi x^3}{4}}{\frac{\pi x^3}{6}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.



751. Рассмотрим осевое сечение конуса:

$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Обозначим PC=H.

Из треугольника АОС: $\text{tg}\alpha=\frac{r}{R}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

OA — биссектриса $\angle PAB$, следовательно, $\angle PAB=2\alpha$.

Из прямоугольного треугольника РАС:

$\frac{PC}{AC}=\text{tg}2\alpha$, или $\frac{H}{R}=\text{tg}2\alpha$

$H=R\text{tg}2\alpha=6\text{tg}2\alpha$. $\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$. $H=\frac{6\cdot 4}{3}=8$ дм.

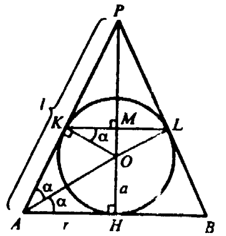
$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 8=96\pi$ дм^3.

752. Рассмотрим сечение конуса.

ΔAPB — осевое сечение конуса, AH=r, AP=l, PH — высота конуса.

Обозначим радиус сферы равен R. OK=OH=OL=R. Точки К и L — точки касания сферы поверхности конуса. Плоскость, в которой лежит окружность, в сечении изображена отрезком KL; KL равен диаметру этой окружности. Обозначим $\angle PAB=2\alpha$.

Из треугольника AOH: $\frac{OH}{HA}=\text{tg}\alpha$; $\frac{R}{r}=\text{tg}\alpha$, $R=r\,\text{tg}\alpha$.



Из треугольника APH: $\cos 2\alpha=\frac{AH}{AP}=\frac{r}{l}$,

$2\cos^2\alpha-1=\frac{r}{l}$, $\cos^2\alpha=\frac{l+r}{2l}$, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{l+r}{2l}}$;

$\sin^2\alpha=1-\frac{l+r}{2l}=\frac{l-r}{2l}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{l-r}{2l}}$;

$\text{tg}\alpha=\sqrt{\frac{l-r}{2l}:\frac{l+r}{2l}}=\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}$. $R=r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}$.

$\angle APH=\angle MKO=90^\circ-2\alpha$.

В треугольнике MOK: $KM=OK\cdot\cos\angle MKO=R\cdot\cos(90^\circ-2\alpha)=R\cdot\sin 2\alpha=$ $=R\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

$KM=r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{l-r}{2l}}\cdot\sqrt{\frac{l+r}{2l}}=2r\cdot\sqrt{\frac{(l-r)^2\cdot(l+r)}{(l+r)\cdot(2l)^2}}=2r\cdot\frac{l-r}{2l}=r\cdot\frac{l-r}{l}$.

KM — радиус окружности, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Ее длина равна

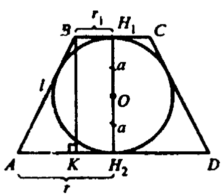
$2\pi\cdot KM=2\pi\cdot\frac{r(l-r)}{l}$.

753. Рассмотрим осевое сечение конуса.

H_1,H_2 — центры оснований. ABCD — сечение, которое является равнобедренной трапецией.

$BH_1=r_1$, $AH_2=r$. Обозначим радиус вписанного шара a. $V_ш=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Высота конуса есть диаметр шара, $H_1H_2=2a$.



$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot H_1H_2(r^2+r_1^2+rr_1)=\frac{1}{3}\pi 2a(r^2+r_1^2+rr_1)$.

$\frac{V_{кон}}{V_ш}=\frac{\frac{2\pi a}{3}(r^2+r_1^2+rr_1)}{\frac{4}{3}\pi a^2}=\frac{r^2+r_1^2+rr_1}{2a^2}$.

В описанном 4-угольнике суммы противоположных сторон равны.

$BC+AD=AB+CD=2AB$.

Обозначим $AB=l$, следовательно $2r_1+2r=2l$, $l=r_1+r$.

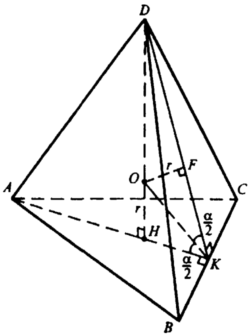
Построим BK перпендикулярно AD. $AK=r-r_1$, $BK=H_1H_2=2a$.

Из прямоугольного треугольникаABK:

$2a=\sqrt{l^2-AK^2}=\sqrt{(r_1+r)^2-(r-r_1)^2}=\sqrt{r_1^2+r^2+2r_1r-r^2-r_1^2+2rr_1}=$ $=\sqrt{4r_1r}=2\sqrt{r_1r}$, $a=\sqrt{r_1r}$.

Подставляя выражение для a в формулу (1), получаем: $\dfrac{V_{кон}}{V_{ш}}=\dfrac{r^2+r_1^2+rr_1}{2rr_1}$.

754. Через основание высоты DH построим AK $\perp$BC, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах DK перпендикулярно BC.



Центр вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке O; OH и OF — радиусы, равные r. По условию задачи

$\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3=V$, поэтому $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$.

Т.к. AK$\perp$BC и DK$\perp$BC, то $\angle AKD$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.

$\angle AKD=\alpha$. OK — биссектриса $\angle DKA$. Из равенства ($\Delta OHK=\Delta OFK$), $\angle HKO=\angle OKF=\dfrac{\alpha}{2}$.

Обозначим сторону основания пирамиды за a. В равностороннем треугольнике ABC — HK это радиус вписанной окружности и $HK=\dfrac{x}{2\sqrt{3}}$.

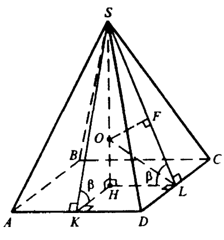
Из прямоугольного треугольника OHK: $\dfrac{r}{HK}=\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $HK=\dfrac{r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

$\dfrac{x}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $x=\dfrac{2\sqrt{3}r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$. В треугольнике DHK: $\dfrac{DH}{HK}=\text{tg}\alpha$, $DH=HK\,\text{tg}\alpha=$

$=\dfrac{r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\text{tg}\alpha$. $\quad V_{пир}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}DH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot DH=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{3}r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{r\,\text{tg}\alpha}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot$

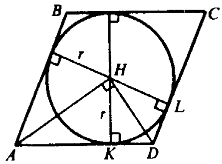
$\cdot\dfrac{12}{\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot r^3\cdot\text{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\,\text{tg}\alpha}{\text{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{3V}{4\pi}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\cdot V.$

755. SH перпендикулярна плоскости ABCD. Построим HK$\perp$AD, HL$\perp$DC, отрезки SL и SK. По теореме о трех перпендикулярах SL$\perp$DC и SK$\perp$AD. Тогда, $\angle SKH$ и $\angle SLH$ — линейные углы двугранных углов при основании пирамиды. Из условий задачи $\angle SKH=\angle SLH=\beta$. $\Delta SHK=\Delta SHL$ (по катету и острому углу).



Точка H равноудалена от сторон ромба ABCD, значит, является центром вписанной в ромб окружности.

$S_{ABCD}=2(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin\alpha)=a^2\sin\alpha$; $S_{\Delta AHD}=\frac{1}{2}a\cdot HK$;



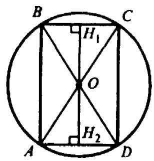
$S_{ABCD}=4\cdot S_{\Delta AHD}$. $a^2\cdot\sin\alpha=2a\cdot HK$, $HK=HL=\frac{a\sin\alpha}{2}$.

Построим отрезок LO, точка O — центр вписанного шара, $O\in SH$. OL — биссектриса $\angle SLH$, $\angle OLH=\frac{\beta}{2}$.

Из треугольника OHL: $\frac{OH}{HL}=\text{tg}\angle HLO$, OH — радиус шара.

$OH=HL\,\text{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a\sin\alpha}{2}\cdot\text{tg}\frac{\beta}{2}$. $V_ш=\frac{4}{3}\pi(OH)^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3\sin^3\alpha\,\text{tg}^3\frac{\beta}{2}}{8}=\frac{\pi}{6}\sin^3\alpha\cdot\text{tg}^3\frac{\beta}{2}\cdot a^3$.

756. Рассмотрим сечение цилиндра, которое явля-ется прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R.



O — центр сферы (и окружности). BD — диагональ осевого сечения, $\angle BDA=\alpha$. $BD=2R$.

Вычислим из прямоугольного треугольника BAD $AD=2R\cos\alpha$.

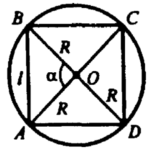
Радиус основания цилиндра равен $\frac{1}{2}AD$, то есть $R\cos\alpha$.

Высота цилиндра $AB=2R\sin\alpha$.

$V_{цил}=\pi\cdot(R\cos\alpha)^2\cdot AB=\pi R^2\cos^2\alpha\cdot 2R\sin\alpha=\pi R^3\cos\alpha\,(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=$ $=\pi R^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

757. Рассмотрим сечение цилиндра с шаром, которое является прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R, точка O — центр окружности и сферы. Образующая цилиндра $AB=l$.

$BO=OD=OA=OC=R$.

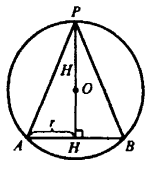


Из треугольника AOB по теореме синусов:

$$\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(\frac{180°-\alpha}{2})}=\frac{R}{\sin(90°-\frac{\alpha}{2})}=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$R=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\ V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1^3}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi l^3}{6\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$$

758. Рассмотрим сечение шара и конуса, которое является равнобедренным треугольником APB, PH — высота конуса, O — центр описанной окружности (и шара), $O\in PH$.



$PH=H$, $AH=r$. Обозначим R — радиус окружности большого круга шара; $OP=OA=OB=R$.

Из треугольника APH: AP=$\sqrt{H^2+r^2}$, PB=AP.

$S_{\Delta APB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PH=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot H=rH.$

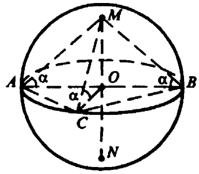
Вычислим R по формуле: $R=\frac{abc}{4S}$, где a, b,c — стороны треугольника APB, а S — его площадь. $R=\frac{\sqrt{H^2+r^2}\cdot\sqrt{H^2+r^2}\cdot 2r}{4rH}=\frac{H^2+r^2}{2H}$.

Площадь поверхности шара:

$S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{H^2+r^2}{2H}\right)^2=\frac{4\pi(H^2+r^2)^2}{4H^2}=\frac{\pi(H^2+r^2)^2}{H^2}$.

Объем шара: $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{(H^2+r^2)^3}{8H^3}=\frac{\pi(H^2+r^2)^3}{6H^3}$.

759. Плоскость треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды, пересечет шар по окружности, и треугольник ABC будет вписан в эту окружность. Пусть AB — гипотенуза, следовательно, $\angle ACB=90^\circ$, тогда, он опирается на диаметр, которым является гипотенуза AB.



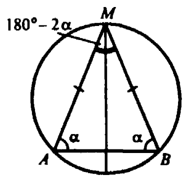
Построим высоту пирамиды MO. Построим отрезки OA, OB, OC; эти три отрезка являются проекциями соответствующих наклонных боковых ребер пирамиды.

В треугольниках MOA, MOB, MOC MO — общий катет, $\angle MAO=\angle MBO=\angle MCO=\alpha$ — по условию, тогда, $\Delta MOA=\Delta MOB=\Delta MOC$, откуда OA=OB=OC, то есть точка O — равноудалена от вершин основания и поэтому является центром описанной около основания окружности.

Таким образом, MO — высота пирамиды, MO лежит в плоскости AMB, тогда, плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC.

Из теоремы синусов следует, что: $\frac{AB}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=2R$, R — радиус шара.

$\frac{2}{\sin 2\alpha}=2R$, $R=\frac{1}{\sin 2\alpha}$.



Площадь поверхности шара: $S=4\pi R^2=\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ см^2.

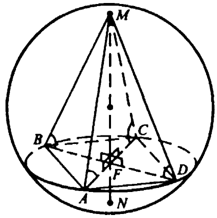
Вычислим объем шара: $V=\frac{4}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3 2\alpha}$ см^3.

760. Построим высоту пирамиды MF; построим отрезки FA, FB, FC, FD.

$\Delta MFA=\Delta MFB=\Delta MFC=\Delta MFD$, т.к. они прямоугольные, MF — общий катет, $\angle MBF=\angle MAF=\angle MCF=\angle MDF=\beta$ — по условию.

Следовательно, FA=FB=FC=FD, тогда точка F равноудалена от вершин основания, значит, является центром описанной около основания окружности.

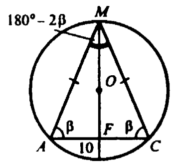
Рассмотрим сечение пирамиды и шара плоскостью AMC. Точка O — центр шара, $O \in MF$.



Из теоремы синусов в треугольнике AMC:

$\frac{AC}{\sin(180° - 2\beta)}=2R$, где R — радиус шара.

$R=\frac{10}{2\sin 2\beta}=\frac{5}{\sin 2\beta}$. Площадь поверхности шара:



$S=4\pi R^2=\frac{4\pi\cdot 25}{\sin^2 2\beta}=\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ см^2.

Объем шара: $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{125}{\sin^3 2\beta}=\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см^3.

761. OA=1,5 м, MO=0,5 м , AD=l.

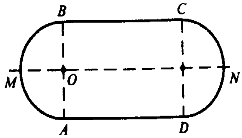
$V_{цист}=50$ м^3; $V_{цил}=\pi r^2 l=\pi\cdot 1{,}5^2\cdot l$ м^3.

AMB, CND — шаровые сегменты.

$V_{сегм}=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$, где h=MO=0,5 (м), R=OA=1,5 (м).

$V_{сегм}=\pi\cdot 0{,}5^2(1{,}5-\frac{0{,}5}{3})=0{,}25\,\pi\cdot\frac{4{,}5-0{,}5}{3}=\frac{0{,}25\pi}{3}\cdot 4=\frac{\pi}{3}$ м^3.

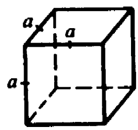
$V_{цист}=V_{цил}+2V_{сегм}$.



$V_{цист}=50=2{,}25\pi l+\frac{2\pi}{3}$ м^3.

$l=\frac{50-\frac{2\pi}{3}}{2{,}25\pi}\approx\frac{50-\frac{2\cdot 3{,}14}{3}}{2{,}25\cdot 3{,}14}=\frac{50-2{,}09}{7{,}065}=\frac{47{,}91}{7{,}065}\approx 6{,}78$ м.

762. Пусть ребро куба равно a. Площадь поверхности куба равна $6a^2$.

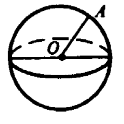


Пусть радиус шара OA=b. Площадь поверхности шара $4\pi b^2$.

Пусть радиус основания цилиндра равен c, тогда AB=H=2c.

$S_{осн}=\pi c^2$; $S_{бок}=2\pi c\cdot P=2\pi c\cdot H=2\pi c\cdot 2c=4\pi c^2$;

$S_{полн}=4\pi c^2+2\pi c^2=6\pi c^2$.



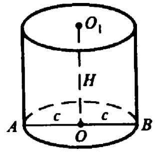
Пусть радиус основания конуса равен d, тогда PO=H=2d.

$S_{осн}=\pi d^2$; $S_{бок}=\pi d\cdot AP$. $AP=\sqrt{d^2+H^2}=\sqrt{d^2+4d^2}=d\sqrt{5}$.

$S_{бок}=\pi\cdot d\cdot d\cdot\sqrt{5}=\pi\sqrt{5}\,d^2$. $S_{полн}=\pi d^2+\pi\sqrt{5}\,d^2=\pi d^2(\sqrt{5}+1)$ (из условия).

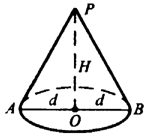
$6a^2=4\pi b^2=6\pi c^2=\pi d^2(\sqrt{5}+1)$.

Выразим a, c и d через b.



$6a^2=4\pi b^2$; $a^2=\frac{4\pi b^2}{6}=\frac{2\pi b^2}{3}$; $a=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\cdot b$ (1)

$6\pi c^2=4\pi b^2$; $c^2=\frac{4\pi b^2}{6}=\frac{2}{3}b^2$; $c=\sqrt{\frac{2}{3}}\,b$. (2)



$d^2\cdot\pi(\sqrt{5}+1)=4\pi b^2$;

$d^2=\frac{4\pi b^2}{\pi(\sqrt{5}+1)}=\frac{4b^2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{4b^2\cdot(\sqrt{5}-1)}{5-1}=b^2(\sqrt{5}-1)$;

$d=\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot b$.

Объем куба равен a^3; $a^3=(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,b)^3=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,b^3$.

Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi b^3$.

Объем цилиндра равен $\pi c^2\cdot H$;

$\pi c^2\cdot H=\pi\cdot(\sqrt{\frac{2}{3}}\,b)^2\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot b=\pi\cdot\frac{2}{3}b^2\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,b=\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,b^3$.

Объем конуса равен $\frac{1}{3}\pi d^2H$;

$\frac{1}{3}\pi d^2H=\frac{\pi}{3}\cdot b^2(\sqrt{5}-1)\cdot 2\cdot b\sqrt{\sqrt{5}-1}=\frac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot b^3$.

Сравним объемы тел. Т.к. все они выражены через радиус шара b, то остается сравнивать коэффициенты при b^3.

$\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ $\frac{2\pi}{3}$ — общий множитель. Следовательно, остаются числа:

$\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; 2; $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; $(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ (1) (2) (3) (4)

Сравним числа (1) и (2). $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ и 2; $\frac{2\pi}{3}$ и 4; π и $\frac{4\cdot 3}{2}$; π и 6.

Т.к. $\pi<6$, то $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}<2$. Т.к. $\sqrt{\frac{2}{3}}<1$, то $2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}<2$.

Сравним теперь (1) и (3). $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ и $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{8}{3}$; π и $\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}$; π и 4.

Т.к. $\pi<4$, то $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Таким образом, установлено, что $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\frac{2}{3}}<2$.

Сравним теперь (4) и (1). $(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; $(\sqrt{5}-1)^3$ и $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)^3$ и π.

$(\sqrt{5}-1)^3=(5+1-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=(6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=6\sqrt{5}-6-10+2\sqrt{5}=2(4\sqrt{5}-8)$;

$\frac{3}{2}\cdot 2(4\sqrt{5}-8)=3\cdot 4(\sqrt{5}-2)$, $12(\sqrt{5}-2)$ и π.

$\sqrt{5}\approx 2{,}23$; $\sqrt{5}-2\approx 0{,}23$. $12\cdot 0{,}23=2{,}76$. $2{,}76$ и π.

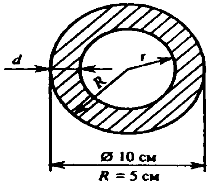
Т.к. $2{,}76<\pi$, то $(\sqrt{5}-1)^3<\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

Таким образом, числа расположены в следующем порядке:

$(\sqrt{5}-1)^3<\sqrt{\frac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\frac{2}{3}}<2$.

Им соответствует объемы тел: $V_{кон}<V_{куба}<V_{цил}<V_{ш}$.

763. а) $d=2$ мм$=0{,}2$ см; $R=5$ см.



$r=R-d=5-0{,}2=4{,}8$ см.

Объем шара: $V_ш=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

Масса шара: $m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

$m_ш\approx 8{,}9\cdot\frac{4}{3}\cdot 3{,}14(5^3-4{,}8^3)=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14(125-110{,}592)\approx 11{,}837\cdot 3{,}14$.

$14{,}41\approx 37{,}17\cdot 14{,}41\approx 535{,}6$ г.

$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\approx\frac{3\cdot 535{,}6}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1606{,}8}{500\cdot 3{,}14}=\frac{1606{,}8}{1570}\approx 1{,}023$ г/см^3.

Сравним плотность шара $\rho_ш$ и плотность воды, которую примем равной 1 г/см^3.

$\rho_ш>\rho_в$, тогда, шар не сможет плавать в воде;

б) $d=1{,}5$ мм$=0{,}15$ см. $r=R-d=5-0{,}15=4{,}85$ (см). $V_ш=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

$m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V_ш=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$. $m_ш=8{,}9\cdot\frac{4}{3}\cdot 3{,}14\ (125-4{,}85^3)\approx 8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14$ $(125-114{,}09)=11{,}837\cdot 3{,}14\cdot 10{,}91=405{,}50$ г.

$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\cdot 405{,}50}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1216{,}5}{1570}\approx 0{,}77$ г/см^3.

Если принять $\rho_{воды}=1$ г/см^3, то $\rho_ш<\rho_в$, такой шар будет плавать на поверхности воды.