

ТОЛЬКО ДЛЯ
РОДИТЕЛЕЙ

Серия
РЕШЕБНИК

Домашняя работа по геометрии



А.Н. Прокопович

Домашняя работа по геометрии за 7 класс

С задачами повышенной трудности

**к учебнику «Геометрия. 7–9 классы: учеб.
для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. —
М.: Просвещение, 2009»**

***Учебно-методическое
пособие***

*Издание четырнадцатое,
переработанное и исправленное*

**Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА
2010**

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

П78

Имена авторов и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Условия заданий и упражнений приводятся исключительно в учебных целях и в необходимом объеме как иллюстративный материал. Изображение учебника «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Прокопович, А.Н.

П78 Домашняя работа по геометрии за 7 класс к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений»: учебно-методическое пособие / А.Н. Прокопович. — 14-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2010. — 127, [1] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-03001-0

Предлагаемое учебное пособие содержит образцы выполнения всех задач и упражнений из учебника «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по геометрии.

УДК 372.8:514

ББК 74.262.21

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.

Уч.-изд. л. 3,52. Усл. печ. л. 6,72. Тираж 30 000 экз. Заказ № 5878(6)

ISBN 978-5-377-03001-0

© Прокопович А.Н., 2010

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2010

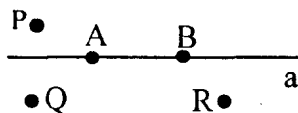
Содержание

Глава I	4
§ 1. Прямая и отрезок	1
§ 2. Луч и угол	5
§ 3. Сравнение отрезков и углов	6
§ 4. Измерение отрезков	7
§ 5. Измерение углов	12
§ 6. Перпендикуляр. Прямые	14
Глава II	25
§ 1. Первый признак равенства треугольников	25
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	28
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	33
§ 4. Задачи на построение	41
Глава III	60
§ 1. Признаки параллельности двух прямых	60
§ 2. Аксиома параллельных прямых	63
Глава IV	73
§ 1. Сумма углов треугольника	73
§ 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника	79
§ 3. Прямоугольные треугольники	84
§ 4. Построение треугольника по трем элементам	90
Задачи повышенной трудности	112

Глава I

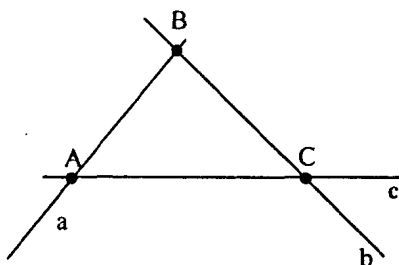
§ 1 Прямая и отрезок

1



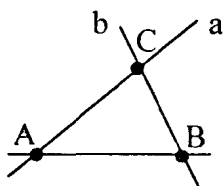
$A \in a, B \in a$
 $P \notin a, Q \notin a, R \notin a$

2.

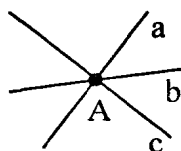


3.

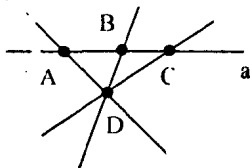
1-ый случай



2-ой случай

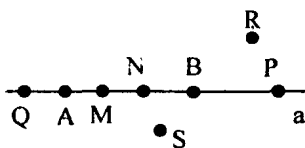


4.

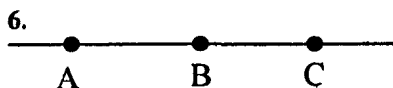


Получим четыре прямые

5.



$M, N \in \text{отрезку } AB,$
 $P, Q \in a, R, S \notin a$



Имеем. $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$ — три отрезка

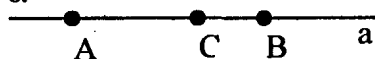
7.

а) Точка C принадлежит: $[AD]$, $[BD]$, $[AC]$, $[BC]$

б) $B \notin [CD]$

§ 2. Луч и угол

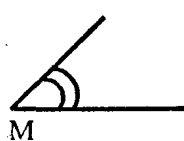
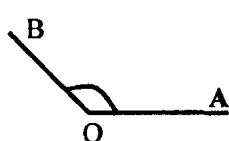
8.



а) лучи $[AB]$ и $[AC]$ — совпадают. $[BC]$ и $[BA]$ — совпадают

б) Луч $[CB]$ — является продолжением луча $[CA]$

9.

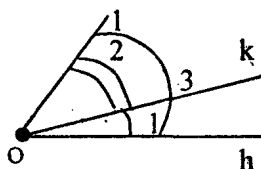


10.



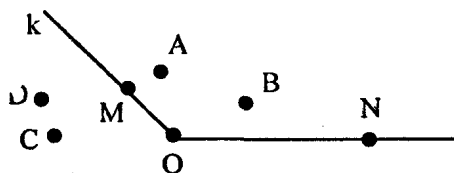
11.

Имеем: $\angle hk$; $\angle kl$; $\angle h_l$.

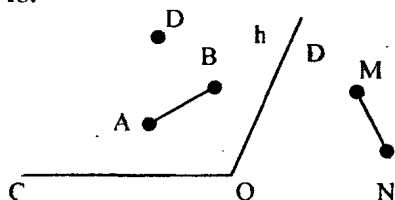


12.

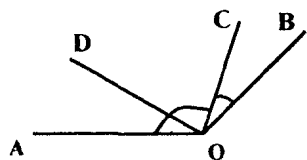
Получаем:



13.

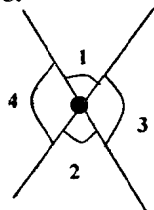


14.



Как видно из рисунка .

15.



При пересечении двух прямых образуется 4
независимых угла.
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.

16.

Внутри угла: M, A

Вне угла: C, N

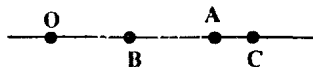
На сторонах угла: O, B

17.

Лучи l и h

§ 3. Сравнение отрезков и углов

18.



$OB < OA$; $OB < OC$; $OC > OA$

19.



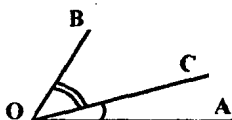
- а) Т.к. $A(1) = (1)B$ — следовательно они совпадают при наложении,
 б) $OA < AB$, то, отрезки OA и AB не совпадают при наложении

20.

- а) B — середина $[AC]$ б) Отрезок $[CE]$
 C — середина $[AE]$ $[AE]$ и $[BD]$ — имеют общую середину C
 D — середина $[CE]$

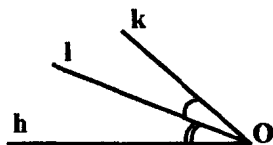
21.

$$\angle AOB > \angle AOC$$



22.

- а) l — биссектриса, значит,
 $\angle hl = \angle lk$, и углы, при наложении совпадут
 б) Т.к. $\angle hl < hk$, при наложении углы не совпадут



23.

- а) OB — биссектриса $\angle AOC$
 OD — биссектриса $\angle BOF$
 OC — биссектриса $\angle AOE$
 б) OC — биссектриса углов $\angle BOD$ и $\angle AOE$

§ 4. Измерение отрезков

24

Длина учебника — 14,5 см. = 145 мм.
 Ширина учебника — 22 см. = 220 мм.

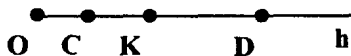
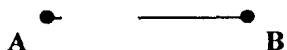
25.

Толщина учебника — 1,5 см., количество листов в нем — 170 л.,

Значит толщина одного листа — $\frac{1,5}{170} = \frac{3}{340} \approx 0,009$ см.

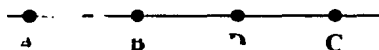
26.

- а) $CD = 6KL$; $EF = 5KL$; $PQ = 3KL$; $AB = 2KL$.
 б) $CD = 3AB$; $EF = 2,5AB$; $PQ = 1,5AB$; $KL = 0,5AB$



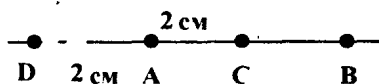
$$OP = \frac{1}{2} AB, OQ = \frac{1}{4} AB; OR = 2AB$$

28.



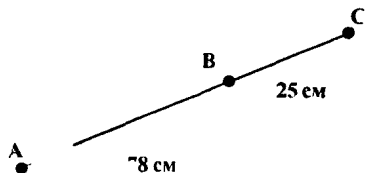
$$AB = BC \text{ и } BD = DC$$

29.



Две точки: справа и слева от точки А. Это точка С и D

30.



Дано: $AB = 7,8 \text{ см}$; $BC = 25 \text{ мм}$
 $AC = ?$

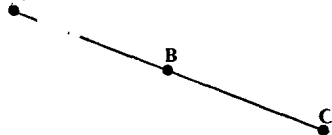
По свойству измерения отрезков имеем:

$$AC = AB + BC$$

$$AC = 78 \text{ мм} + 25 \text{ мм} = 103 \text{ мм}$$

Ответ: 10 см., 3 см

31.



Дано: $AB = 3,7 \text{ см}$ | $AB = 4 \text{ см}$
 $AC = 7,2 \text{ см}$ | $AC = 4 \text{ см}$

$BC = ?$

Решение: Из рисунка видим, что

а) $BC = AC - AB$

$$BC = 7,2 \text{ см} - 3,7 \text{ см} = 3,5 \text{ см}$$

б) Аналогично: $BC = AC - AB$

$$BC = 40 \text{ мм} - 4 \text{ мм} = 36 \text{ мм}$$

Ответ: а) 3,5 см; б) 36 мм.

32.

Дано: $A, B, C \in a$

$$AB = 12 \text{ см.}, BC = 13,5 \text{ мм}$$

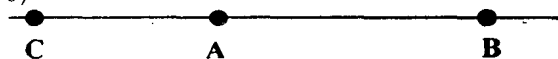
$AC = ?$

Решение: Рассмотрим два варианта а) и б):

а) $AC = AB + BC = 12 \text{ см} + 13,5 \text{ см} = 25,5 \text{ см.}$



б)



$$AC = BC - BA = 13,5 \text{ см} - 12 \text{ см} = 1,5 \text{ см}$$

Ответ: 25,5 см, 1,5 см

33.

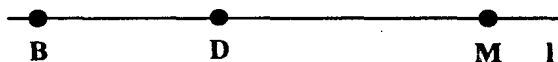
Дано: $B, D, M \in l$

$$BD = 7 \text{ см.}, MD = 16 \text{ см}$$

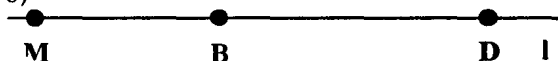
$BM = ?$

Решение: Рассмотрим два варианта :

а) $BM = BD + DM = 7 + 16 = 23.$



б)



$$BM = DM - BD = 16 \text{ см} - 7 \text{ см} = 9 \text{ см}$$

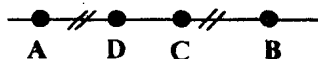
Ответ: а) 23 см; б) 9 см.

34.

Дано: $CA = BC$

$$AB = 64 \text{ см.}, D \in CA, CD = 15 \text{ см}$$

$CD = ?$, $DA = ?$



Решение: Рассмотрим два варианта, что :

$$AC = CB = 64 \text{ см.} : 2 = 32.$$

$$BD = BC - CD = 32 \text{ см} - 15 \text{ см} = 17 \text{ см}$$

$$DA = AC + CD = 32 \text{ см} + 15 \text{ см} = 47 \text{ см}$$

Ответ: а) 17 см; б) 47 см.

35.

Дано: $M, T, C \in l$

$$MC = 650 \text{ км.}, MT = 170 \text{ км}$$

$TC = ?$,



Решение:

$$TC = MC - MT = 650 \text{ км} - 170 \text{ км} = 480 \text{ км.}$$

Ответ: 480 км.

36.

Если точка А, В, С лежат на одной прямой, то больший из отрезков АВ, ВС, и АС равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (АС = 5 см), а $AB + BC = 7$ см., поэтому точки А, В, С не лежат на одной прямой.

37.

а) Дано: $AC = CB$,

$AO = OC$, $AB = 2$ см

AC, CB, AO, OB - ?



Решение:

С - середина АВ. значит $AC = CB = 2 : 2 = 1$ см

О - середина АС, значит $AO = OC = 1 : 2 = 0,5$ см

$OB = OC + CB = 0,5 \text{ см} + 1 \text{ см} = 1,5 \text{ см}$

Ответ: 1 см.; 1 см; 0,5 см; 1,5 см.

б) Дано: $AC = BC$,

$AO = OC$, $CB = 3,2$ м

AB, AC, AO, OB - ?

Решение:

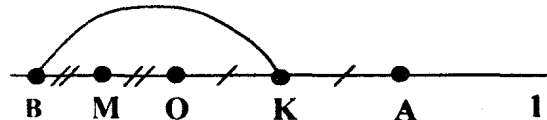
$AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 3,2 = 6,4$ м

$AC = CB = 3,2$ м

$AO = OC = 3,2 : 2 \text{ см} = 1,6$ м

Ответ: 6,4 м.; 3,2 м; 1,6 м; 1,6 м.

38.



Первый вариант:

Дано: $OA = 12$ см, $OB = 9$ см, $O \in AB$

$OK = KA$,

KM - ?

Решение: Из условия получаем равенств

$OK = KA = 12 \text{ см} : 2 = 6 \text{ см}$

$OM = MB = 9 \text{ см} : 2 \text{ см} = 4,5 \text{ см}$

$MK = MO + OK = 6 \text{ см} + 4,5 \text{ см} = 10,5 \text{ см}$

Ответ: 10,5 см.

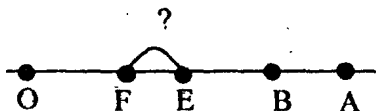
б) Второй вариант:

Дано: $O \in AB$,

$OA = 12 \text{ см}$, $OB = 9 \text{ см}$,

$OE = EA$, $OF = FB$

$EF = ?$



Решение: Из условия получаем равенств

$$OE = EA = 12 \text{ см} : 2 = 6 \text{ см}$$

$$OF = FB = 9 \text{ см} : 2 = 4,5 \text{ см}$$

$$FE = OE - OF = 6 \text{ см} - 4,5 \text{ см} = 1,5 \text{ см}$$

Ответ: 1,5 см.

39.



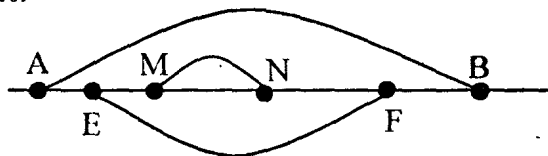
Дано: $C \in AB$, $AB = a$

$AK = KC$, $CM = MB$

$KM = ?$

Решение. $KM = AB - MB - AK = AB - \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AC =$
 $= AB - \frac{1}{2}(BC + AC) = AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

40.



Дано:

$AB = 28 \text{ см}$

$AE = EM$, $NF = FB$, $EF = 16 \text{ см}$

$MN = ?$

Решение:

28 см - 12 см - значит $AE + FB = 12 \text{ см}$

$AM = EM$, $FB = NF$ (по условию) следует $EM + NF = 12 \text{ см}$,

значит $MN = EF - (EM + NF) = 16 \text{ см} - 12 \text{ см} = 4 \text{ см}$

Ответ: 4 см.

§ 5. Измерения углов

41 43

Это практические задания Их надо выполнять по описанию в книге

44.

Выполняем построение по указаниям. Построение можно сделать когда угол $\angle AOB$ острый.

45.

Т.к градусные меры углов равны, то равны и сами углы

46.

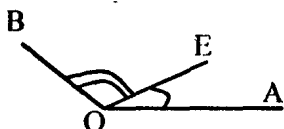
а) $\angle AOX = 40^\circ$, $\angle BOX = 60^\circ$, $\angle AOB = 20^\circ$, $\angle COB = 20^\circ$, $\angle DOX = 130^\circ$

б) $\angle AOB = \angle COB = 20^\circ$

в) $\angle XOA = \angle AOC = 40^\circ$, $\angle COD = \angle DOP = 50^\circ$, $\angle AOB = \angle BOC = 20^\circ$

г) $\angle AOX = 40^\circ$, $\angle AOB = 20^\circ$, $\angle AOC = 40^\circ$, $\angle AOD = 90^\circ$

47.



Дано:

$$\angle AOE = 44^\circ \quad \left| \quad \angle AOE = 12^\circ 37'$$

$$\angle EOB = 77^\circ \quad \left| \quad \angle EOB = 108^\circ 25'$$

$$\angle AOB = ?$$

Решение: По свойству измерения углов имеем:

$$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$$

$$\angle AOB = 44^\circ + 77^\circ$$

$$\angle AOB = 121^\circ; \text{ Аналогично.}$$

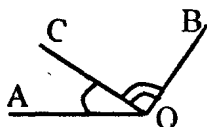
б) $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$

$$\angle AOB = 12^\circ 37' + 108^\circ 25'$$

$$\angle AOB = 120^\circ 62' = 121^\circ 02'$$

Ответ: а) 121° ; б) $121^\circ 02'$

48.



Дано: $\angle AOB = 78^\circ$,

$\angle AOC$, меньше $\angle BOC$ на 18°

$\angle COB = ?$

Решение:

Возьмем $\angle AOC = x$, значит $\angle BOC = x + 18^\circ$,

$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, следовательно

49.

Дано: $\angle AOB = 155^\circ$,

$\angle AOC$ больше $\angle COB$ на 15°

$\angle AOC = ?$

Решение:

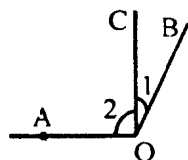
Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 15$

$\angle AOB = \angle 1 + \angle 2$, значит

$155 = x + x + 15$; $155 = 2x + 15$; $2x = 140$; $x = 70$;

$\angle AOC = x + 15 = 85^\circ$.

Ответ: 85° .



50.

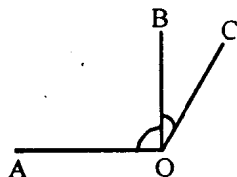
Дано: угол $\angle AOB$ часть угла

$\angle AOC$

$\angle AOC = 108^\circ$,

$\angle AOB = 3 \angle BOC$

$\angle AOB = ?$



Решение:

Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOB = 3x$

$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, следовательно, $108 = 3x + x$; $108 = 4x$, $x = 27$,

$\angle AOB = 3x = 81^\circ$.

Ответ: 81° .

51.

Дано: $\angle AOD = 90^\circ$

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$

OE – биссектриса $\angle AOB$

OF – биссектриса $\angle COD$

$\angle EOF = ?$

Решение:

По условию

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$, значит

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 90^\circ : 3 = 30^\circ$

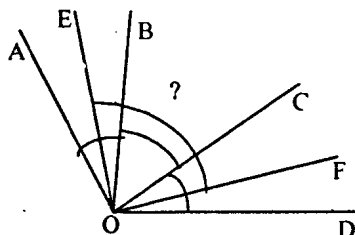
OE и OF – биссектрисы углов $\angle AOB$ и $\angle COD$, следовательно

$\angle EOB = \angle COF = 15^\circ$.

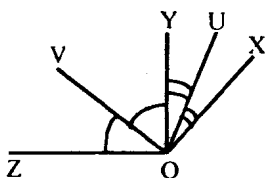
Далее видим, что:

$\angle EOF = \angle EOB + \angle BOC + \angle COF = 15^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60°



52.



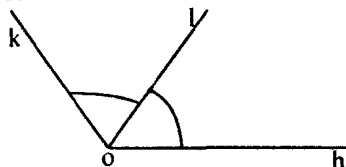
Дано: OV – биссектриса угла $\angle ZOY$
 OU – биссектриса угла $\angle XOY$
 $\angle UOV = 80^\circ$
 $\angle XOZ = ?$

Решение:

$$\begin{aligned}\angle ZOX &= \angle ZOV + \angle VOY + \angle YOY + \angle YOU + \angle UOX = \\ &= 2\angle VOY + 2\angle YOU = 2\angle VOU = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 160°

53.

1) $\angle hl$ – не прямой

Если $\angle hl = 90^\circ$, то $\angle kh = 180^\circ$ —
 а это не так, потому что по усло-
 вию $\angle hk < 180^\circ$

2) $\angle hl$ – не тупой. Если $\angle hl > 90^\circ$, то $\angle kh > 180^\circ$, а это не так, по условию.

§ 6. Перпендикуляр. Прямые

54.



$\angle AOB$ – острый;
 $\angle AOD$ – тупой.

55.

а)



б)



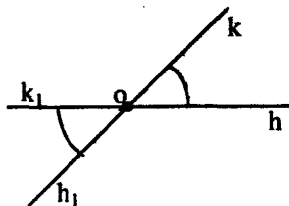
в)



На рисунке углы $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные

56.

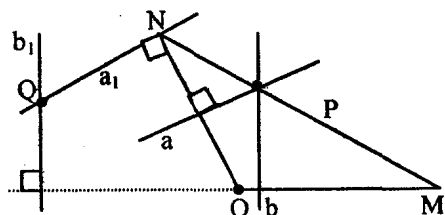
Углы $\angle hk$ и $\angle h_1k_1$ – вертикальные.



57.

$b \perp OM$, $a \perp ON$

$b_1 \perp OM$, $a_1 \perp ON$



58.

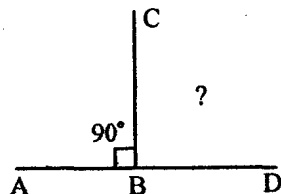
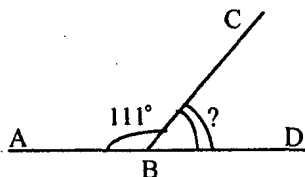
Из свойств смежных углов вытекает, что:

а) $\angle CBD = 180^\circ - 111^\circ$

$\angle CBD = 69^\circ$

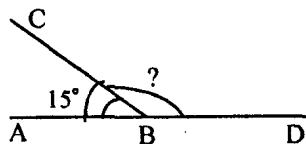
б) $\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ$

$\angle CBD = 90^\circ$



в) $\angle CBD = 180^\circ - 15^\circ$

$\angle CBD = 165^\circ$



59.

Прямым, т.к. $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

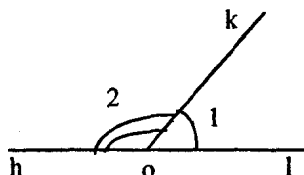
60.

Верно, т.к. $\angle 1 + \angle 1 = 180^\circ$, а отсюда $\angle 1 = 90^\circ$

61.

Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ – смежные

$\angle 1$, $\angle 2 = ?$



Решение:

Зная, что сумма смежных углов равна 180° имеем:

а) $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = x + 40$,

$$x + x + 40 = 180;$$

$$2x = 140; x = 70$$

$$\angle kh = 70^\circ,$$

$$\angle kl = 110^\circ$$

в) Пусть $\angle 1 = x$, тогда

$$\angle 2 = x + 47^\circ 18'$$

$$x + x + 47^\circ 18' = 180^\circ$$

$$(180^\circ = 179^\circ 60')$$

$$2x = 179^\circ 60' - 47^\circ 18'$$

$$2x = 132^\circ 42'; x = 66^\circ 21'$$

$$\angle kl = 66^\circ 21', \angle hk = 113^\circ 39'$$

д) если $\angle 2 : \angle 1 = 5 : 4$, то пусть

на 1 часть приходится x , тогда

$$\angle 2 = 5x, \angle 1 = 4x$$

$$5x + 4x = 180; 9x = 180; x = 20$$

$$\angle kh = 100^\circ, \angle kl = 80^\circ$$

б) Пусть $\angle 1 = x$, тогда

$$\angle 2 = x + 120^\circ;$$

$$x + x + 120^\circ = 180;$$

$$2x = 60; x = 30;$$

$$\angle kl = 30^\circ, \angle hk = 150^\circ$$

г) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 3x$

$$x + 3x = 180$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

$$\angle kl = 45^\circ,$$

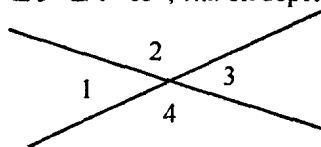
$$\angle hk = 135^\circ$$

64.

а) Т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, то $\angle 2 = \angle 4 = 117^\circ$

$$\angle 1 = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ, \text{ т.к. он смежный с } \angle 2$$

$$\angle 3 = \angle 1 = 63^\circ, \text{ т.к. он вертикальный с } \angle 1.$$



- б) $\angle 1 = \angle 3 = 43^\circ 17'$ – как вертикальные
 $\angle 2 = 180^\circ - 43^\circ 27' = 136^\circ 33'$, т.к. $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные
 $\angle 4 = 136^\circ 33'$, т.к. $\angle 4$ и $\angle 2$ вертикальные

65.

а) Дано:

$$\angle 1 + \angle 3 = 114^\circ$$

$$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4 = ?$$

Решение:

Т.к. $\angle 1 = \angle 3$ вертикальные, то

$$\angle 1 = \angle 3 = 114^\circ : 2 = 57^\circ$$

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, т.к. $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные

$$\angle 2 = 180^\circ - 57^\circ$$

$\angle 2 = \angle 4 = 123^\circ$, т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные

Ответ: $57^\circ, 123^\circ, 57^\circ, 123^\circ$.

б) Дано:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220^\circ$$

$$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4 = ?$$

Решение:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$ как сумма
 двух развернутых углов

$$\angle 4 = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$\angle 4 = \angle 2 = 140^\circ$ (т.к. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные)

$$\angle 1 + 140^\circ + \angle 3 = 220^\circ, \text{ откуда}$$

$$\angle 1 + \angle 3 = 80^\circ, \text{ то}$$

$\angle 1 = \angle 3 = 40^\circ$ (т.к. $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные)

Ответ: $40^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$.

66.

а) $\angle 2 + \angle 4 = 220^\circ$, т.к.

$\angle 2, \angle 4$ – вертикальные, то

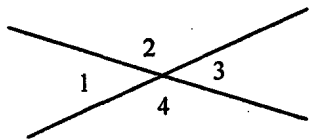
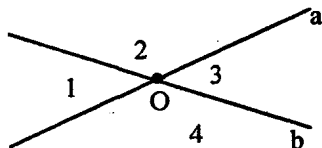
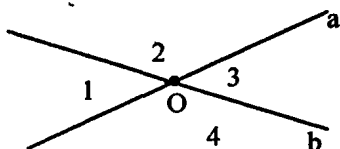
$$\angle 2 = \angle 4 = 220^\circ : 2 = 110^\circ$$

$\angle 1 = \angle 3 = 70^\circ$, т.к. $\angle 1$ и $\angle 2, \angle 3$ и $\angle 4$ – смежные

Ответ: $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$.

б) $3 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$

т.к. $\angle 1 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - x$



Подставляем в 1-ое равенство:

$$3 \cdot (x+x) = 180^\circ - x + 180^\circ - x$$

$$6x = 360 - 2x; 8x = 360; x = 45;$$

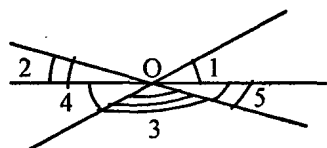
$$\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ; \angle 2 = \angle 4 = 135^\circ.$$

в) $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$

$$\angle 1 = x, \text{ тогда, } \angle 2 = x + 30^\circ; x + x + 30 = 180; 2x = 150; x = 75;$$

$$\angle 1 = 75^\circ, \angle 2 = 105^\circ$$

67.



Решение:

Имеем:

$$\angle 1 = \angle 4 - \text{вертикальные}$$

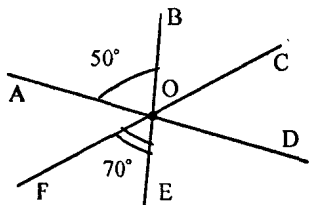
$$\angle 2 = \angle 5 - \text{вертикальные}$$

$\angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = \angle AOB$ – развернутый угол, т.е. $\angle AOB = 180^\circ$.

$$180^\circ = \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 3 + \angle 2.$$

Ответ: 180°

68.



Дано:

$$\angle AOB = 50^\circ, \angle FOE = 70^\circ$$

$$\angle AOC, \angle BOD, \angle COE, \angle COD = ?$$

Решение:

$\angle EOD = \angle AOB = 50^\circ$ по свойству вертикальных углов

$$\angle FOD = \angle FOE + \angle EOD =$$

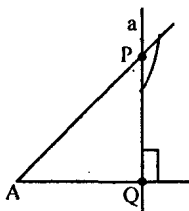
$$= 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$

$$\angle COD = 180^\circ - \angle FOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle AOB = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ; \angle COE = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$$

$$\angle BOD = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ; \angle COD = 60^\circ$$

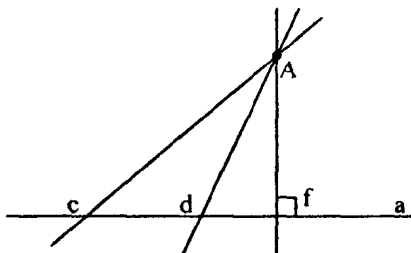
69.



Одновременно прямые AP и AQ не могут быть перпендикулярными прямой a, т.к. AP и AQ – пересекаются и, значит, не параллельны, что противоречит аксиоме параллельных прямых.

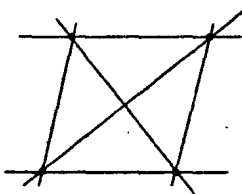
70.

Пусть $f \perp a$, $d \perp a$, $c \perp a$, тогда прямые f , d и c — не пересекаются (по теореме), а по условию c , d и f — проходят через точку A , значит, все три прямые одновременно быть перпендикулярными a не могут. Значит, только одна из трех прямых может быть перпендикулярна прямой a , а значит две не перпендикулярны прямой a .



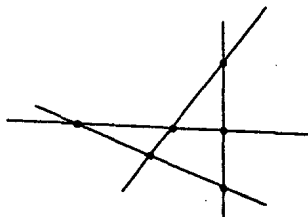
71.

Получилось 6 прямых



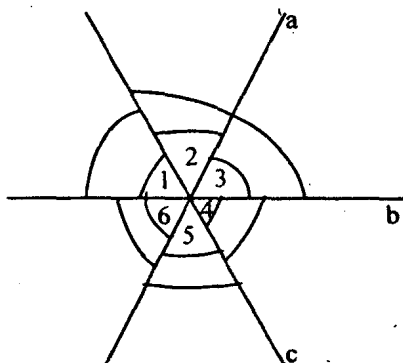
72.

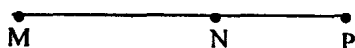
Имеем 6 точек



73.

Рассмотрим все углы и выберем неразвернутые. Тогда в итоге имеем 12 углов, как это показано на рисунке.





Дано: $MP=24$ см
 NM в 2 раза больше NP
 $NP, NM=?$

Решение:

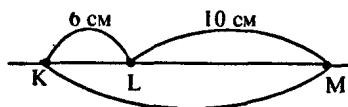
Пусть $NP=x$ см, тогда $MN=2x$ см

$2x+x=24$, значит, $3x=24$,

$x=8$, следовательно, $NP=8$ см, $MN=16$ см.

Ответ: 8 см, 16 см.

75.

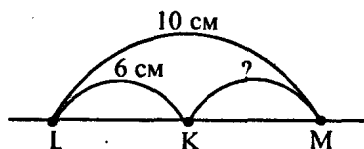


а) 1-ый случай

$KM=?$

Имеем:

$KM=KL+LM$; $KM=6+10=16$ см



б) 2-ой случай

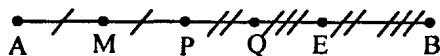
$KM=?$

Имеем:

$KM=LM-LK$

$KM=10-6=4$ см

76.



Дано. $AB=a$,
 $AP=2PQ=2QB$
 $QE=EB$. $AM=MP$
 $AE, ME=?$

Решение:

а) $AP=2PQ=2QB$, значит $PQ=QB$ и Q – середина PB

значит P – середина AB , значит, $AP=PB=\frac{1}{2}a$

Q – середина PB , то $PQ=QB=\frac{1}{4}a$

E – середина QB , то $EB=QE=\frac{1}{8}a$

$AE=AB-BE=a-\frac{1}{8}a=\frac{7}{8}a$

б) $ME=AB-AM-EB=a-\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}a=\frac{5}{8}a$

Ответ: $\frac{7}{8}a$; $\frac{5}{8}a$

77.

а) Дано: $AB=m$, Q – середина AE ,
 L – середина NB
 $AE=EN=NB$.
 $QL=?$



Решение:

Имеем: $AE=EN=NB=\frac{m}{3}$

Q, L – середины соответственных отрезков, значит,

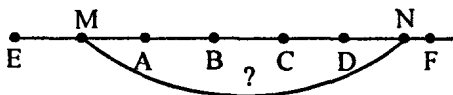
$$AQ=QE=NL=LB=\frac{m}{6}$$

Тогда:

$$QL=AB-AQ-LB; QL=m-\frac{m}{6}-\frac{m}{6}=\frac{2}{3}m.$$

Ответ: $\frac{2}{3}m$.

б) Дано: $EF=m$;
 $EA=AB=BC=CD=DF$
 $EM=MA$
 $DN=NF$
 $MN=?$



Решение:

$EA=AB=BC=CD=DF$, тогда, $EA=AB=BC=CD=DF=\frac{m}{5}$

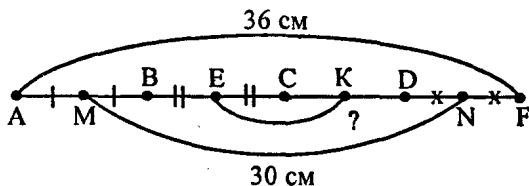
Далее:

$$EM=NF=\frac{1}{2}EA=\frac{1}{2}DF=\frac{m}{10}; MN=EF-EM-NF=m-\frac{m}{5}=\frac{4}{5}m.$$

Ответ: $\frac{4}{5}m$.

78.

Дано $AF=36$ см,
 $MN=30$ см
 $AM=MB$, $DN=NF$,
 $BE=EC$, $CK=KD$
 $EK=?$



Решение:

$$AF=MN=(AM+NF), 36-30=6\text{ см}-(AM+NF)$$

$$AM=MB$$

$$NF=ND, \text{ следовательно, } AM=NF=MB+DN=6 \text{ см}$$

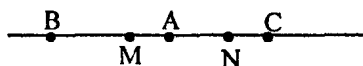
$$BD=BC+CD=30-6=24 \text{ см, тогда,}$$

$$BC=BE+EC=2EC, CD=CK+KD=2CK, EK=EC+CK=\frac{1}{2} BD$$

Учитывая, что $EK=\frac{1}{2} BD$ получаем $EK=12$ см.

Ответ: 12 см.

79.



Дано: $AM=MB$,
 $AN=NC$

Доказать: $BC=2MN$

Доказательство:

Пусть $BM=a$, $NC=b$

Из $BM=MA$ следует $AB=2a$

Из $NC=NA$ следует $AC=2b$, значит, $BC=BA+AC=2a+2b=2\cdot(a+b)$;

$MN=MA+AN=a+b$.

Тогда $BC=2\cdot(a+b)$, значит $BC=2MN$.

Тогда: $MN=a+b$.

80.

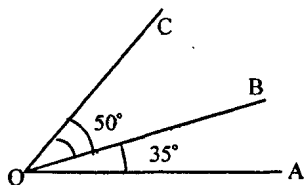
Дано: $\angle AOB=35^\circ$, $\angle BOC=50^\circ$

$\angle AOC=?$

Решение:

Рассмотрим два случая:

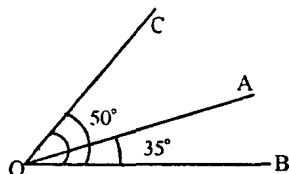
а)



$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

$$\angle AOC = 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$$

б)



$$\angle AOC = \angle BOC - \angle BOA$$

$$\angle AOC = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$$

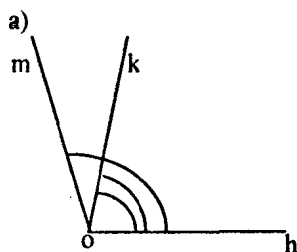
81.

Дано: $\angle hk=120^\circ$, $\angle hm=150^\circ$

$\angle km=?$

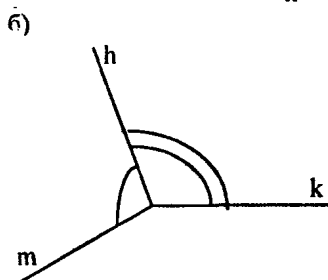
Решение:

Рассмотрим два случая:



$$\angle km = \angle hm - \angle hk$$

$$\angle km = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



$$\angle km = \angle kh + \angle hm$$

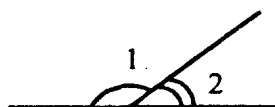
$$\angle km = 120^\circ + 150^\circ = 270^\circ$$

82.

Дано: а) $\angle 1$ больше $\angle 2$ на 45°

б) $\angle 1 - \angle 2 = 35^\circ$

$\angle 1, \angle 2 = ?$



Решение:

а) Пусть $\angle 2 = x$, тогда

$\angle 1 = x + 45^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов)

то $x + x + 45 = 180$, $2x = 135$, $x = 67^\circ 30'$

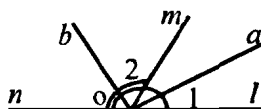
$\angle 2 = 67^\circ 30'$, $\angle 1 = 112^\circ 30'$

б) Пусть $\angle 2 = x$, тогда, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, значит, $x + x + 35 = 180$, $2x = 145$.

$x = 72^\circ 30'$

$\angle 1 = 107^\circ 30'$.

83.



Дано: а, b – биссектрисы $\angle 1$, $\angle 2$

$\angle ab = ?$

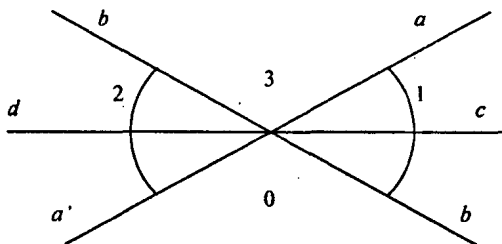
Решение:

$\angle nb + \angle bm + \angle ma + \angle al = 180^\circ = 2\angle bm + 2\angle ma = 2\angle ab$, откуда

$\angle ab = 90^\circ$.

Ответ: 90°

84.



Дано: $\angle 1 = \angle 2$ – вертикальные углы
 c, d – биссектрисы $\angle 1, \angle 2$ соответственно.

Доказать, что c, d лежат на одной прямой.

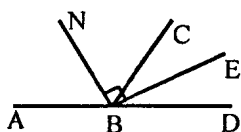
$\angle 1$ и $\angle 3$ – смежные углы, тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. (по свойству).

$\angle 1 = \angle 2$, значит $\angle ac = \angle bc = \angle b'd = \angle a'd$, значит

$\angle ab' + \angle 3 + \angle ac = 180^\circ$, тогда

$\angle dc = 180^\circ$ – развернутый угол и тогда согласно определению развернутого угла лучи d и c – лежат на одной прямой.

85.



Дано: BE – биссектриса угла $\angle CBD$
 BN – биссектриса угла $\angle ABC$
 $\angle EBN = 90^\circ$

Доказать, что A, B, D лежат на одной прямой.

Доказательство.

$\angle EBN = 90^\circ$; $\angle EBN = \angle EBC + \angle CBN$

Пусть $\angle EBC = x$, тогда $\angle CBN = 90^\circ - x$

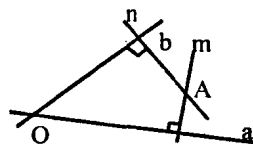
BN – биссектриса $\angle ABC$, значит $\angle ABN = \angle NBC = 90^\circ - x$

BE – биссектриса $\angle CBD$, значит $\angle DBE = \angle EBC = x$

$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 2(90^\circ - x) + 2x = 180 - 2x + 2x = 180^\circ$

значит, $\angle ABD$ – развернутый, и точки A, B, D лежат на одной прямой.

86.



Дано: $n \perp b$; $m \perp a$

Доказать, что m, n – не совпадают.

Доказательство от противного:

Пусть m и n совпадают, значит лежат на одной прямой l , тогда имеем, что $l \perp a$ и $l \perp b$,

т.е. одна прямая перпендикулярна двум различным прямым a и b , тогда a и b не пересекаются согласно теореме о прямых, а это противоположно условию, что $a \cap b = 0$, значит наше предположение не верно, а верно то, что m и n не совпадают, ч.т.д.

Глава II

§ 1. Первый признак равенства треугольников.

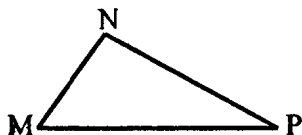
87.

стороны: MN, NP, MP

углы: $\angle NMP$, $\angle MPN$, $\angle PNM$

MN=12 мм; NP=25 мм; MP=34 мм;

Значит $P_{\triangle MNP}=71$ мм.

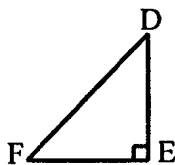


88.

а) против углов D, E, F – лежат соответственно EF; FD; DE.

б) против сторон DE; EF; FD лежат соответственно углы F; D; E.

в) $\angle D$ и $\angle E$; $\angle E$ и $\angle F$; $\angle F$ и $\angle D$ – углы прилежащие соответственно к сторонам OE; EF; FO.



90.

Дано: $AC=2AB$, $AB=17$ см, $BC=AC-10$

$P_{\triangle ABC}=?$

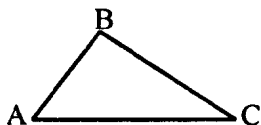
Решение:

$AC=2AB=2 \cdot 17=34$ см

$BC=AC-10=34-10=24$ см

$P=AB+BC+AC=17+34+24=75$ см

Ответ: 75 см.



91.

Дано: $P_{\triangle ABC}=48$ см, $AB=18$ см, $BC-AC=4,6$ см

BC , $AC=?$

Решение:

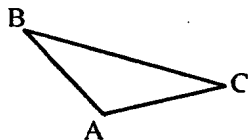
$P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=48$

$18+BC+AC=48$ см, тогда, $BC+AC=30$.

Пусть $AC=x$, тогда, $BC=x+4,6$ и $2x=25,4$

$x=12,7$, значит, $AC=12,7$ см, $BC=17,3$ см.

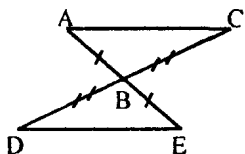
Ответ: 12,7 см; 17,3 см.



92.

Нет, не могут. Если треугольники равные, то у них равные соответственные стороны, а значит равны их перпендикуляры, что не так по условию.

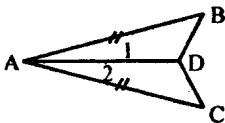
93.

Дано: $AB=BE$, $DB=BC$

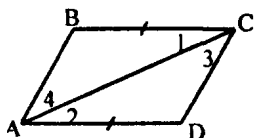
Доказать:

а) $\triangle ABC = \triangle EBD$ б) $\angle D = 47^\circ$, $\angle E = 42^\circ$ $\angle A$, $\angle C = ?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle EBD$ и $\triangle ABC$ $AB=EB$ по условию; $CB=DB$ как вертикальные; $\angle ABC = \angle DBE$ по 2-му признаку, значит $\triangle ABC = \triangle EBD$, тогда. $\angle A = \angle E = 42^\circ$; $\angle D = \angle C = 47^\circ$.

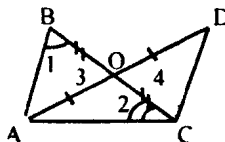
94.

Дано: $AB=AC$, $\angle 1 = \angle 2$ $AC=15$ см, $DC=5$ смДоказать: 1) $\triangle ABD = \triangle ACD$ 2) BD , $AB = ?$ Доказательство: $\angle 1 = \angle 2$; $AB=AC$ сторона AD – общая, значит, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по 1-му признакуДалее, т.к. $\triangle ABD = \triangle ACD$, то $BD=DC=5$ см; $AB=AC=15$ см

95.

Дано: $BC=AD$, $\angle 1 = \angle 2$ $AD=17$ см, $DC=14$ смДоказать: 1) $\triangle ABC = \triangle CDA$ 2) AB , $BC = ?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle ABC$ $BC=AD$, сторона AC – общая; $\angle 1 = \angle 2$ тогда $\triangle ABC = \triangle CDA$ по 1-му признаку;следовательно, $AB=CD$ и $AB=14$ см, $BC=17$ см.

96.

Дано: $OA=OD$, $OB=OC$ $\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 36^\circ$ Доказать: 1) $\triangle AOB = \triangle DOC$ 2) $\angle ACD = ?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle AOB$ $BO=OC$; $AO=OD$; $\angle 3 = \angle 4$ т.к. они вертикальные.

значит $\triangle AOB = \triangle DOC$ по 1-му признаку; $\angle 1 = \angle OCD = 74^\circ$,

значит, $\angle ACD = \angle 2 + \angle OCD = 36^\circ + 74^\circ = 110^\circ$.

Ответ: 110°

97.

Дано: $AO = OC$, $BO = OD$

Доказать: $\triangle ABC = \triangle CDA$

Доказательство:

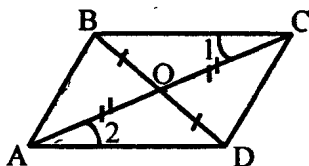
Рассмотрим $\triangle COB$ и $\triangle AOD$

$BO = OD$; $AO = OC$

$\angle AOB = \angle COD$ т.к. они вертикальные, значит $\triangle AOD = \triangle COB$ по 2-му признаку, тогда $CB = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle ABC$

$BC = AD$, AC – общая сторона; $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по 1-му признаку равенства $\triangle$, ч.т.д.



98.

Дано: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$, $AP = A_1P_1$

Доказать: $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$

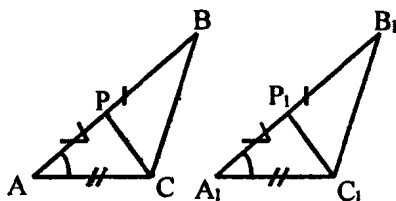
$AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$,

значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 1-му признаку равенства треугольников, тогда $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим $\triangle B_1P_1C_1$ и $\triangle BPC$

$BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BP = B_1P_1$ т.к.

$BP = AB - AP = A_1B_1 - A_1P_1 = B_1P_1$, тогда $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$ по 1-му признаку, ч.т.д.



99.

Дано: $AC = AD$, $AB = AE$

Доказать: $\angle CBD = \angle DEC$

Доказательство:

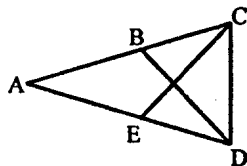
Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle ACE$

$AC = AD$; $AE = AB$

$\angle A$ – общий угол $\triangle ADB$ и $\triangle ACE$

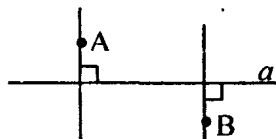
тогда $\triangle ACE = \triangle ADB$ по 1-му признаку

$\angle ABD = \angle AEC$ следовательно, $\angle CBD$, $\angle ABD$ – смежные, тогда $\angle CBD = 180^\circ - \angle ABD$, тогда $\angle DCE$, $\angle AEC$ – смежные, тогда $\angle CED = 180^\circ - \angle AEC$, откуда $\angle CBD = \angle CED$, т.к. $\angle ABD = \angle AEC$.

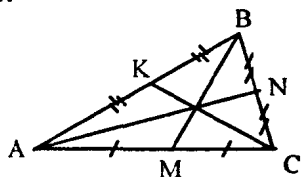


§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

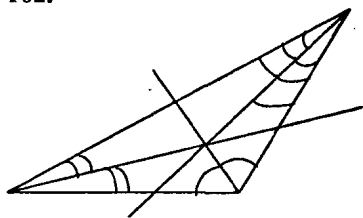
100.



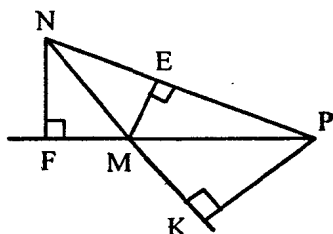
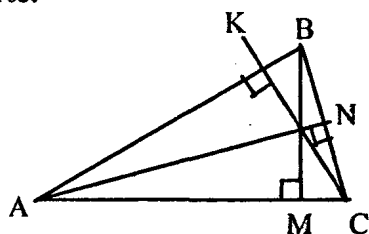
101.



102.

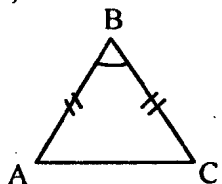


103.



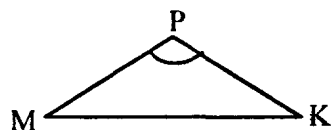
104.

а)



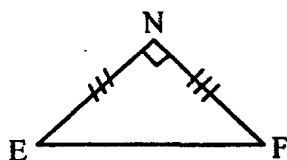
угол $\angle B$ — острый

в)



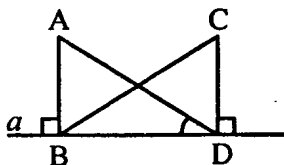
угол $\angle P$ — тупой

б)

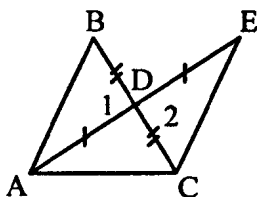


угол $\angle N$ — прямой

105.

Дано: $AB, CD \perp a$ $AB=CD, \angle ADB=44^\circ$ Доказать: $\triangle ABD = \triangle CDB$ $\angle ABC = ?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle CDB$ и $\triangle ABD$ сторона BD — общая $AB=CD; \angle B=\angle D=90^\circ$ по условиюзначит $\triangle ABD = \triangle CDB$ по 1-му признаку2) тогда $\angle ADB = \angle CBD$ следовательно $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$

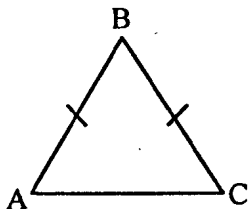
106.

Дано: $AD=DE; BD=DC$ $\angle ACD=56^\circ, \angle ABD=40^\circ$ Доказать: $\triangle ABD = \triangle ECD$ $\angle ACE = ?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle ECD$ и $\triangle ABD$ $BD=DC; AD=DE; \angle 1 = \angle 2$ т.к. они вертикальные,тогда $\triangle ABD = \triangle ECD$ по 1-му признаку следовательно,2) $\angle ABD = \angle ECD$ и $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 56^\circ + 40^\circ = 96^\circ$.

107.

Дано: $AB=BC, AB=2AC$ $P_{ABC} = 50$ см $AB, BC, AC = ?$ Решение:Пусть $AC = x$, тогда $AB=BC=2x$, $P_{ABC} = AC + AB + BC$, значит, $50 = x + 2x + 2x$, $50 = 5x, x = 10, AC = 10$ см, $AB=BC=20$ см.

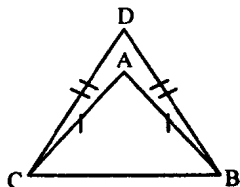
Ответ: 10 см; 20 см; 20 см.



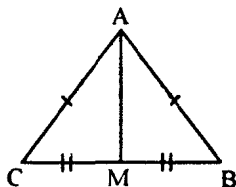
108.

Дано: $AB=AC; P_{ABC} = 40$ см; $DB=DC=BC$ $P_{ACD} = 45$ см; AB и $BC = ?$ Решение: $P_{ABC} = AB + BC + AC = BC + 2AB$ т.к. $AB=AC$ $40 = BC + 2AB$ $P_{ACD} = DB + BC + CD = 3BC$ т.к. $BC=DC=BD; 45 = 3BC$, значит, $BC = 15$ см и $40 = 15 + 2AB; 2AB = 25$, т.е. $AB = 12,5$ см.

Ответ: 12,5 см; 15 см.



09.



Дано: $AC=AB$; $CM=MB$

$P_{ABM}=24$ см, $P_{ABC}=32$ см

$AM=?$

Решение:

$P_{ABM}=AB+BM+AM$; $24=AB+BM+AM$;

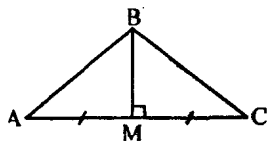
$P_{ABC}=AB+BC+AC$; $32=2AB+2BM$

$16=AB+BM$; $24=AB+BM+AM=16+AM$, тогда,

$AM=8$ см.

Ответ: 8 см.

110.



Дано: $AM=CM$, $\angle BMC=90^\circ$

Доказать: $AB=BC$

Доказательство:

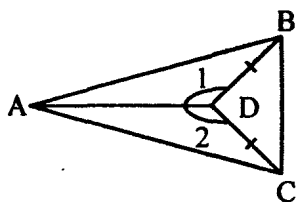
Рассмотрим $\triangle CBM$ и $\triangle ABM$

$AM=MC$; сторона BM – общая; $\angle AMB=\angle CMB=90^\circ$,

значит, $\triangle ABM=\triangle CBM$ по 1-му признаку

следовательно, $AB=BC$, ч.т.д.

11.



Дано: $CD=BD$, $\angle 1=\angle 2$

Доказать: $AB=AC$

Доказательство:

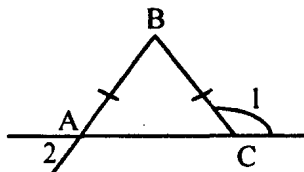
Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$

сторона AD – общая

$BD=DC$; $\angle 1=\angle 2$

значит, $\triangle ABD=\triangle ACD$ по 1-му признаку; тогда $AB=AC$, ч.т.д.

12.



Дано: $AB=BC$, $\angle 1=130^\circ$

$\angle 2=?$

Решение:

углы $\angle 1$ и $\angle ACB$ – смежные, т.е.

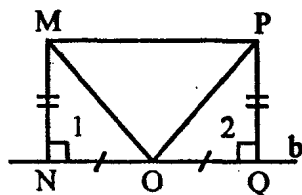
$\angle 1+\angle ACB=180^\circ$,

значит $\angle ACB=180^\circ-130^\circ=50^\circ$; $\triangle ABC$ – равнобедренный, значит,

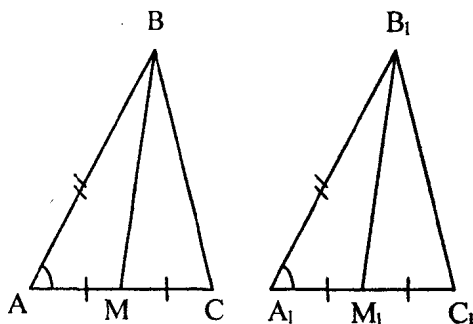
$\angle BAC=\angle ACB=50^\circ$ как вертикальные, $\angle 2=\angle BAC$, т.е. $\angle 2=50^\circ$

Ответ: 50° .

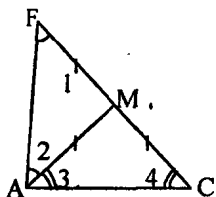
113.

Дано: $MN, PQ \perp b$ $MN=PQ, NO=OQ$ $\angle MOP=105^\circ$ Доказать: $\angle OMP=\angle OPM$ $\angle NOM=?$ Доказательство:1) Рассмотрим $\triangle POQ$ и $\triangle HON$ $MN=PQ; NO=OQ; \angle N=\angle O=90^\circ$ — по условию,тогда $\triangle MON=\triangle POQ$ — по 1-му признакуследовательно, $\angle 1=\angle 2, OM=OP$,тогда $\triangle MOP$ — равнобедренный, откуда $\angle OMP=\angle OPM$.2) $\angle 1+\angle MOP+\angle 2=180^\circ$ — развернутый угол, т.е. $\angle 1+105^\circ+\angle 2=180^\circ; \angle 1+\angle 2=75^\circ$, но $\angle 1=\angle 2$, значит, $\angle 1=\angle 2=37^\circ 30'$, т.е. $\angle NOM=37^\circ 30'$.Ответ: $37^\circ 30'$.

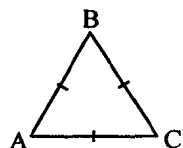
114.

Дано: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ BM, B_1M_1 — медианыДоказать: $BM=B_1M_1$ Доказательство:Рассмотрим $\triangle A_1B_1M_1$ и $\triangle ABM$ $AB=A_1B_1; \angle A=\angle A_1$ из равенства треугольников $AM=A_1M_1$ потому что $AM=\frac{1}{2}AC, A_1M_1=\frac{1}{2}A_1C_1$ и $AC=A_1C_1$ значит, $\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$ — по первому признаку
следовательно, $BM=B_1M_1$ что и требовалось доказать.

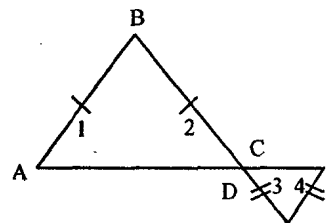
115.

Дано: $BM=MC=AM$ Доказать: $\angle A = \angle B + \angle C$ Доказательство: $\triangle ABM$ — равнобедренный, потому что $BM=MA$, тогда $\angle 1 = \angle 2$. $\triangle AMC$ — равнобедренный, потому что $AM=MC$, тогда $\angle 3 = \angle 4$. $\angle A = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$, т.е. $\angle A = \angle B + \angle C$ что и требовалось доказать.

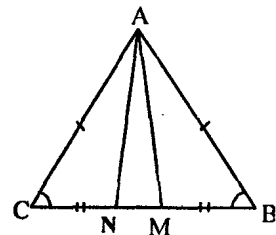
116.

Дано: $AB=BC=AC$.Доказать: $\angle A = \angle B = \angle C$.Доказательство: $\triangle ABC$ — равнобедренный, потому что $AB=BC$, тогда $\angle A = \angle C$ $\triangle ABC$ — равнобедренный, потому что $AB=AC$, тогда $\angle B = \angle C$ Имеем: $\angle A = \angle C = \angle B$.

117.

Дано: $AB=BC$, $CD=DE$ Доказать: $\angle BAC = \angle CED$ Доказательство: $\triangle ABC$ — равнобедренный, потому что $AB=BC$, тогда $\angle 1 = \angle 2$ $\triangle CDE$ — равнобедренный, потому что $CD=DE$, тогда $\angle 3 = \angle 4$ углы $\angle 2$, $\angle 3$ — вертикальные, т.е. $\angle 2 = \angle 3$ Имеем: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ Тогда $\angle 1 = \angle 4$, т.е. $\angle BAC = \angle CED$, что и требовалось доказать.

118.

Дано: $AC=AB$ $CN=MB$ Доказать: а) $\triangle BAM = \triangle CAN$ б) $\triangle AMN$ — равнобедренныйДоказательство:1) Рассмотрим $\triangle ACN$ и $\triangle ABM$
 $AB=AC$ $BM=CN$

$\angle B = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника, значит $\triangle ABM = \triangle ACN$ по первому признаку, следовательно, $\triangle AMN$ — равнобедренный. что и требовалось доказать.

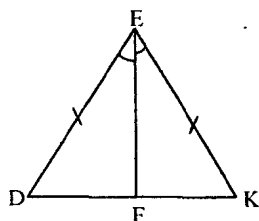
119.

Дано: $DE = EK$

$\angle KEF = \angle DEF$.

$DK = 16$ см, $\angle DEF = 43^\circ$

KF , $\angle DEK$, $\angle EFD = ?$



Решение:

Так как $\triangle DEK$ — равнобедренный, то EF — медианы и высота, т.е

$DF = FK$ и $EF \perp DK$, тогда $\angle DEK = 2 \cdot \angle DEF$; $\angle DEK = 2 \cdot 43^\circ = 86^\circ$;

$\angle EFK = 90^\circ$; $KF = DF = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ см

Ответ: 8 см, 86° , 90° .

120.

Дано: $AB = BC$, $AE = FC$,

Доказать: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$

б) $\triangle ADE = \triangle CDF$

Доказательство:

1) Рассмотрим $\triangle CDF$ и $\triangle ADE$:

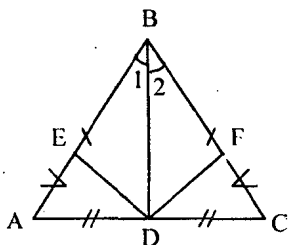
$AD = DC$, $AE = FC$; $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника, значит, $\triangle ADE = \triangle CDF$ по первому признаку

2) Рассмотрим $\triangle BDF$ и $\triangle BDE$

сторона BD — общая

$\angle 1 = \angle 2$ — свойство медианы в равнобедренном $\triangle$

$BE = AB - AE = AB - FC = BC - FC = BF$, значит $\triangle BDE = \triangle BDF$ по 1-му признаку, что и требовалось доказать.



§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников

121.

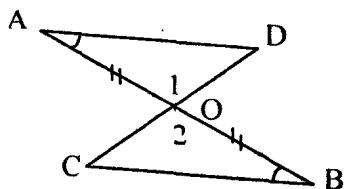
Дано: $AO = OB$,

$\angle OAD = \angle OBC$

$CD = 26$ см, $AD = 15$ см

Доказать. $\triangle CBO = \triangle DAO$

$BC, CO = ?$



Доказательство:

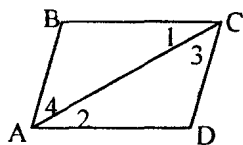
Рассмотрим $\triangle DAC$ и $\triangle CBO$

$AO=OB$; $\angle A=\angle B$; $\angle 1=\angle 2$ т.к. они вертикальные,
значит $\triangle CBO=\triangle DAO$ по 2-му признаку, следовательно $CO=OD$,
 $AD=CB$, $\angle D=\angle C$

$$CD=OC+OD, CO=\frac{1}{2}CD=13\text{ см};$$

т.к. $CO=OD$, то $BC=AD$ следовательно, $BC=15\text{ см}$.

122.



Дано: $\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$

$AD=19\text{ см}$, $CD=11\text{ см}$

Доказать: $\triangle ABC=\triangle CDA$

AB , $BC=?$

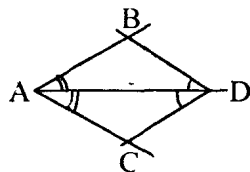
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle ABC$

AC — общая

$\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$, значит $\triangle ABC=\triangle CDA$ по второму признаку
тогда $AB=CD=11\text{ см}$, $BC=AD=19\text{ см}$.

123.



Дано: $\angle BAD=\angle CAD$

$\angle ADB=\angle ADC$

Доказать: $BD=CD$

Доказательство:

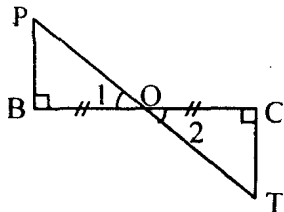
Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ABD$

$\angle BAD=\angle CAD$; $\angle BDA=\angle CAD$; сторона AD — общая

значит $\triangle ABD=\triangle ACD$ по 2-му признаку,

тогда $BD=CD$, что и требовалось доказать.

124.



Дано: $BO=OC$

$\angle B=\angle C=90^\circ$

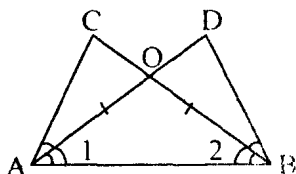
Доказать: $OP=OT$, $\angle P=\angle T$

Доказательство:

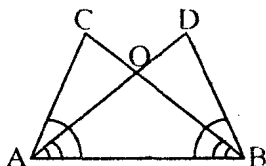
Рассмотрим $\triangle CTO$ и $\triangle BPO$

$BO=OC$; $\angle B=\angle C=90^\circ$; $\angle 1=\angle 2$ т.к. они
вертикальные, значит $\triangle BPO=\triangle CTO$ по 2-му признаку,
тогда $BP=CT$, $PO=OT$, $\angle P=\angle T$, что и требовалось доказать.

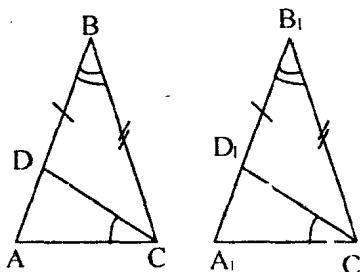
125.

Дано: $\angle DBC = \angle DAC$ $BO = AO$ Доказать: $\angle C = \angle D$, $AC = BD$ Доказательство:Из $AO = OB$, следует $\triangle AOB$ — равнобедренный.т.е. $\angle 1 = \angle 2$.Рассмотрим $\triangle BDA$ и $\triangle ABC$: $\angle CAB = \angle DBA$ т.к. $\angle CAB = \angle CAD + \angle 1$; $\angle DBA = \angle DBC + \angle 2$. $\angle 1 = \angle 2$ сторона AB — общаязначит $\triangle ACB = \triangle BDA$ (по стороне и 2 прилежащим к ней углам)т.е. $AC = DB$, $\angle C = \angle D$, что и требовалось доказать.

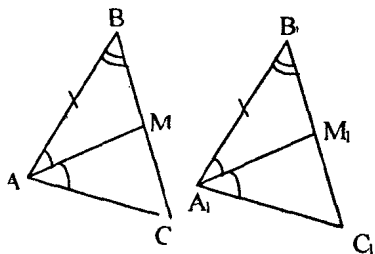
126.

Дано: $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$ $CA = 13$ см $DB = ?$ Решение:Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$: $\angle CAB = \angle ABD$; $\angle ABC = \angle DBA$; сторона AB — общаязначит $\triangle ACB = \triangle BDA$ по 2-му признаку, тогда $AC = BD = 13$ см

127.

Дано: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ Доказать: $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$ Доказательство.Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$: $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $\angle B = \angle B_1$ значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признакуследовательно, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ Рассмотрим $\triangle D_1B_1C_1$ и $\triangle DBC$: $BC = B_1C_1$; $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, потому что $\angle BCD = \angle C - \angle ACD$, и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$; $\angle B_1C_1D_1 = \angle C_1 - \angle A_1C_1D_1$; $\angle B = \angle B_1$, значит $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$ по второму признаку, что и требовалось доказать.

128.



Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$
 $\angle BAM = \angle MAC$
 $\angle B_1A_1M_1 = \angle M_1A_1C_1$
 Доказать: $AM = A_1M_1$

Доказательство:

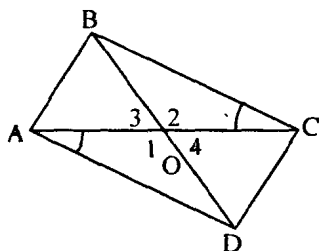
Рассмотрим $\triangle A_1B_1M_1$ и $\triangle ABM$:
 $AB = A_1B_1$ из равенства
 $\angle B = \angle B_1$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

$\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ (т. к. $\angle A = \angle A_1$)

значит $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по 2-му признаку

следовательно, $AM = A_1M_1$, что и требовалось доказать.

129.



Дано: $OA = OC$, $\angle BCO = \angle DAO$
 Доказать: $\triangle BOA = \triangle DOC$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle COB$ и $\triangle AOD$

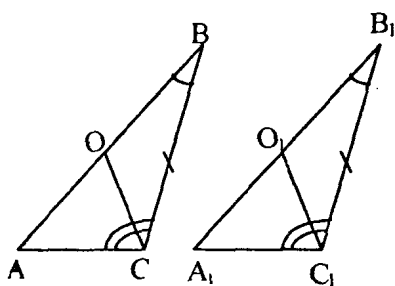
$\angle A = \angle C$; $AO = OC$

$\angle 1 = \angle 2$ т. к. они вертикальные, значит
 $\triangle AOB = \triangle COB$ по 2-му признаку
 тогда $BO = OD$

Рассмотрим $\triangle CDO$ и $\triangle ABO$:

$AO = OC$; $BO = OD$; $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, тогда $\triangle ABO = \triangle CDO$
 по 1-му признаку

130.



Дано: CO , C_1O_1 — медианы
 $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$
 Доказать: 1) $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$
 2) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$
 $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$
 тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по
 2-му признаку

значит $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$

2) Рассмотрим $\triangle A_1O_1C_1$ и $\triangle AOC$:

$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

$$AO=A_1O_1 \text{ (т. к. } AO=\frac{1}{2} AB, A_1O_1=\frac{1}{2} A_1B_1 \text{ и } AB=A_1B_1).$$

значит $\triangle AOC=\triangle A_1O_1C_1$ по 1-му признаку

3) Рассмотрим $\triangle B_1C_1O_1$ и $\triangle BCO$:

$$BC=B_1C_1, \angle B=\angle B_1$$

$$OB=O_1B_1 \text{ (т. к. } OB=\frac{1}{2} AB, O_1B_1=\frac{1}{2} A_1B_1 \text{ и } AB=A_1B_1)$$

значит $\triangle BCO=\triangle B_1C_1O_1$ по 1-му признаку.

131.

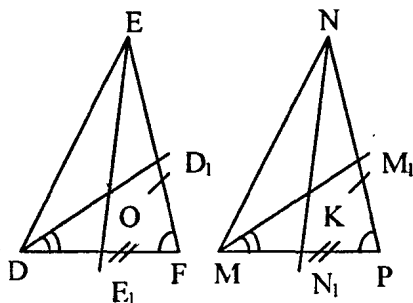
Дано: $EF=NP$, $DF=MP$,

$$\angle F=\angle P$$

EE_1 , DD_1 — биссектрисы

MM_1 и NN_1 — биссектрисы

Доказать: $\angle DOE=\angle MKN$.



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle MNP$ и $\triangle DFE$:

$$EF=NP; DF=MP; \angle F=\angle P,$$

значит $\triangle DEF=\triangle MNP$ по 1-му

признаку, следовательно, $\angle D=\angle M$, $\angle E=\angle N$, $DE=MN$.

Рассмотрим $\triangle MKN$ и $\triangle DOE$:

$$DE=MN; \angle EDO=\angle NMK \text{ (т. к. } \angle FDO=\frac{1}{2} \angle D, \angle MNK=\frac{1}{2} \angle M \text{ и}$$

$$\angle D=\angle M); \angle DEO=\angle MNK \text{ (т. к. } \angle DEO=\frac{1}{2} \angle E, \angle MNK=\frac{1}{2} \angle N \text{ и}$$

$$\angle E=\angle N).$$

значит $\triangle DOE=\triangle MKN$ по 2-му признаку, следовательно,

$\angle DOE=\angle MKN$ что и требовалось доказать.

132.

Дано: $\angle NAA_1=\angle MAA_1$

$$a \perp AA_1$$

Доказать: $AM=AN$

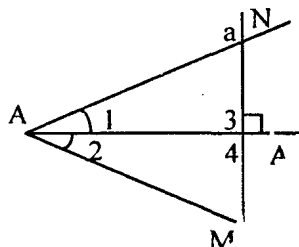
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle AMA_1$ и $\triangle ANA_1$.

сторона AA_1 — общая

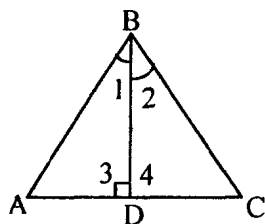
$$\angle 1=\angle 2 \text{ — по условию}$$

$$\angle 3=\angle 4=90^\circ \text{ — по условию}$$



тогда $\triangle ANA_1 = \triangle AMA_1$ по 2-му признаку
следовательно, $AN = AM$ и значит, $\triangle AMN$ — равнобедренный, что
и требовалось доказать.

133.



Дано: $\angle ABC = \angle CBD$
 $\angle ADB = 90^\circ = \angle CDB$
Доказать: $AB = BC$

Доказательство:

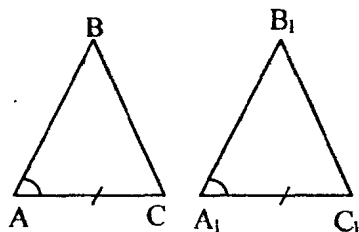
Рассмотрим $\triangle CBD$ и $\triangle ABD$:

сторона BD — общая

$\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$;

значит $\triangle ABD = \triangle CBD$ по 2-му признаку, тогда $AB = BC$ и
 $\triangle ABC$ — равнобедренный, что и требовалось доказать.

134.



Дано: $AB = BC$
 $A_1B_1 = B_1C_1$
 $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$
Доказать: $ABC = A_1B_1C_1$

Доказательство.

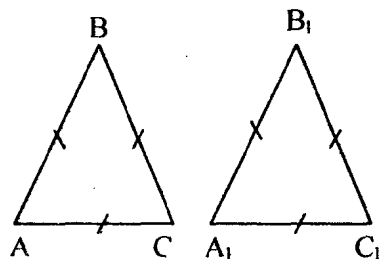
Из $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ — равнобедренные, следует что

$\angle A = \angle C$, $\angle A_1 = \angle C_1$

из $\angle A = \angle A_1$, следует $\angle C = \angle C_1$ тогда, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle C = \angle C_1$

значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 2-му признаку

135.



Дано: $AB = BC = AC$
 $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$
 $AB = A_1B_1$
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Имеем: $AB = AC = BC$ и

$A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$

т. к. $AB = A_1B_1$

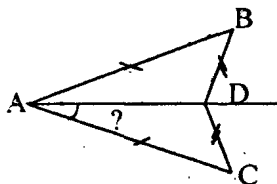
то $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 3-му признаку, что
и требовалось доказать.

36.

Дано: $AB=BC$

$BD=DC$ $\angle BAC=50^\circ$

$\angle CAD=?$



Решение:

1) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ABO$:

$AB=AC$; $BD=DC$

сторона AP — общая

значит $\triangle ABD=\triangle ACD$ по 3-му признаку

и тогда $\angle BAD=\angle CAD$

имеем: $\angle CAD+\angle BAD=\angle BAC$; $2\angle CAD=\angle BAC$

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$$

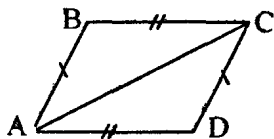
Ответ: 25° .

37.

Дано: $BC=AD$

$AB=CD$

Доказать: $\angle B=\angle D$



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle ABD$.

$AB=CD$; $BC=AD$

сторона AC — общая; значит $\triangle ABC=\triangle CDA$ по 3-му признаку, следовательно, $\angle B=\angle D$ что и требовалось доказать.

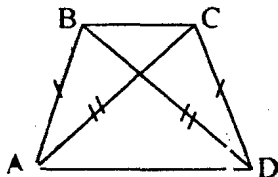
38.

Дано: $AB=CD$

$BD=AC$

Доказать: 1) $\angle CAD=\angle ADB$

2) $\angle BAC=\angle CDB$



Доказательство.

Рассмотрим $\triangle DCA$ и $\triangle ABC$

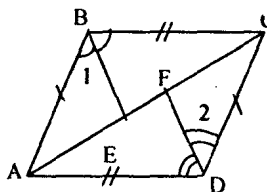
$AB=CD$; $BD=AC$. сторона AD — общая

значит $\triangle ABD=\triangle DCA$ по 3-му признаку, тогда $\angle ADB=\angle CAD$, из равенства треугольников $\angle BAD=\angle CDA$

$\angle BAC=\angle BAD - \angle CAD$, но $\angle BAD=\angle CDA$, а $\angle CAD=\angle ADB$

$\angle CDB=\angle CDA - \angle ADB$, $\angle BAC=\angle CDB$. что и требовалось доказать

139.

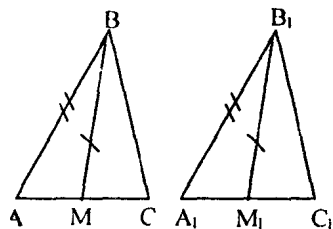
Дано: $AB=CD$, $AD=BC$ $\angle ABE = \angle CBE$ $\angle ADF = \angle CDF$ Доказать: 1) $\angle ABE = \angle ADF$ 2) $\triangle ABE = \triangle CDF$ Доказательство:Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle ABC$ $AB=CD$; $BC=AD$; сторона AC — общая,значит $\triangle ABC = \triangle CDA$ по 3-му признаку $\angle B = \angle D$,тогда: $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle ACB = \angle CAD$

Далее:

$$\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC; \angle ADF = \frac{1}{2} \angle ADC$$

значит $\angle ABE = \angle ADF$, т. к. $\angle B = \angle D$.Рассмотрим $\triangle CDF$ и $\triangle ABE$: $AB=CD$; $\angle BAC = \angle DCA$; $\angle 1 = \angle 2$, т. к. $\angle ABE = \angle ADF = \angle CDF$ значит $\triangle ABE = \triangle CDF$ по 2-му признаку.

140.

Дано: $AM=CM$ $A_1M_1=C_1M_1$ $BM=B_1M_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ Доказательство:Из $AC=A_1C_1$

т.

е

$$\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} A_1C_1, \text{ получаем } AM=A_1M_1$$

Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle A_1B_1M_1$: $AB=A_1B_1$; $BM=B_1M_1$; $AM=A_1M_1$ значит $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по 3-му признакуследовательно, $\angle A = \angle A_1$ Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 1-му признаку.

141.

Дано: AD, A_1D_1 — биссектрисы

$AB=A_1B_1, BD=B_1D_1, AD=A_1D_1$

Доказать: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

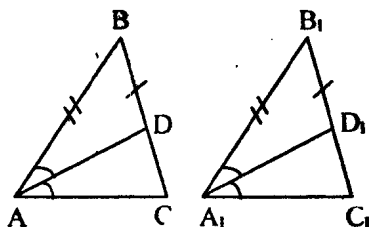
Рассмотрим $\triangle A_1B_1D_1$ и $\triangle ABD$

$AB=A_1B_1, AD=A_1D_1,$

$BD=B_1D_1$, значит $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$ по 3-му признаку

следовательно, $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1, \angle B=\angle B_1$

Из AD и A_1D_1 — биссектрисы, получаем $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$



Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

$AB=A_1B_1, \angle B=\angle B_1, \angle BAC=\angle B_1A_1C_1$

тогда $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

142.

Дано: $BC=BD, AC=AD$

Доказать. а) $\angle ADB=\angle ACB$

б) $DO=OC$

Доказательство:

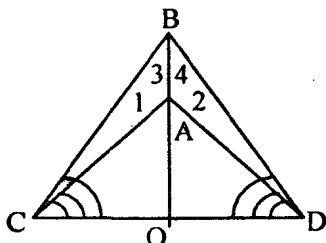
Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$

$CB=BD; AC=AD$

сторона BA — общая

тогда $\triangle ABC=\triangle ABD$ по 3-му признаку

следовательно, $\angle ACB=\angle ADB; \angle CBA=\angle DBA$



Рассмотрим $\triangle DBO$ и $\triangle CBO$:

сторона BO — общая;

$BC=BD; \angle CBO=\angle DBO$, тогда $\triangle CBO=\triangle DBO$ по 1-му признаку и значит $CO=OD$, что и требовалось доказать.

§ 4. Задачи на построение

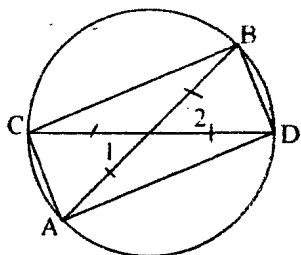
143.

а) хорды окружности: $MN; CD; AB$;

б) диаметр: AB ;

в) радиусы: $OP; OA; BO$

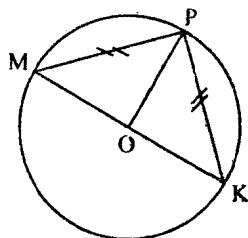
144.



Дано: AB, CB — диаметры

Доказать: а) $BD=AC$ б) $AD=BC$ в) $\angle BAD=\angle BCD$ Доказательство.Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$ $OA=OB=R$ — радиус $CO=OD=R$ — радиус $\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальныезначит $\triangle AOC=\triangle BOD$ по 1-му признаку, следовательно, $AC=BD$ Также из $\triangle AOB=\triangle BOC$ следует $AD=BC$.Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BAC$; сторона DB — общая; $BC=AD$; $PC=AB$, значит $\triangle ABC=\triangle ABD$ и тогда $\angle DAB=\angle ABD$.

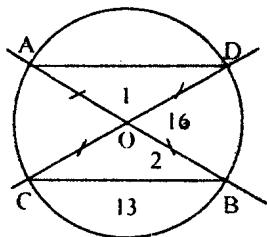
145.



Дано: MK — диаметр

 $MP=PK$ $\angle POM=?$ Решение:Из $MP=PK$ следует, что $\triangle MPK$ — равнобедренныйТ. к. $MO=OK$ — радиусы, то PO — медиана равнобедренного $\triangle MPK$, опущенная на основание,тогда PO — биссектриса и высота (по свойству равнобедренного треугольника) и $\angle MOP=90^\circ$ Ответ: 90°

146.



Дано: AB, CD — диаметры

 $CB=13$ см, $AB=16$ см $P_{AOD}=?$ Решение:Рассмотрим $\triangle COB$ и $\triangle AOD$. $AO=OB=OC=OD$ (как радиусы) $\angle 1=\angle 2$ т. к. они вертикальныезначит $\triangle AOD=\triangle COB$ по 2-му признакуследовательно, $AD=CB=13$ см и $AO=OB=OC=OD=8$ см, тогда $P_{AOD}=AO+OD+AD=8+8+13=29$ см

Ответ: 29 см.

147.

Дано: $\angle AOB = 90^\circ$

BC — диаметр

Доказать: $AC = AB$

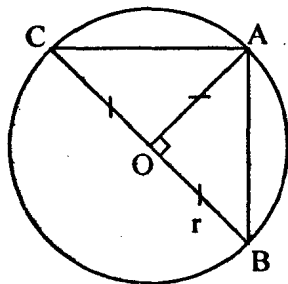
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BOA$ и $\triangle COA$:

сторона OA — общая

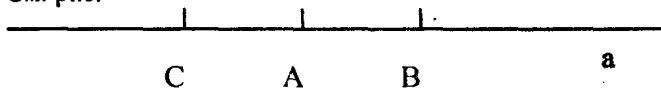
$CO = OB$ — радиусы; $\angle COA = \angle BOA = 90^\circ$

значит $\triangle COA = \triangle BOA$ по I-му признаку
и $AC = AB$, что и требовалось доказать.

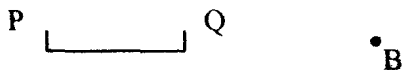


148.

См. рис.

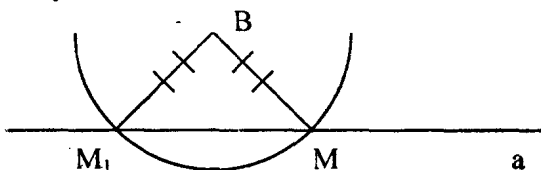


149.



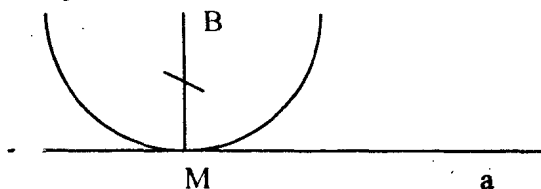
Возможны три случая:

I случай



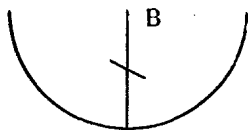
на прямой есть 2 точки, удаленные от B на расстояние PQ.

II случай



одна точка на прямой, которая удалена от B на расстояние PQ

III случай

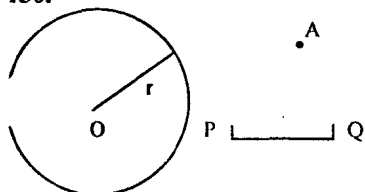


а

не существует такой точки на прямой а.

$PQ=BM$ — радиус окружности с центром в точке В, так мы строим М. В третьем случае задача не имеет решения.

150.



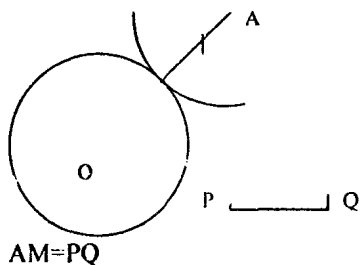
Снова возможны 3 случая:

Построение делаем как и в предыдущей задаче. И опять задача не всегда имеет решение, пример — 3 случай.

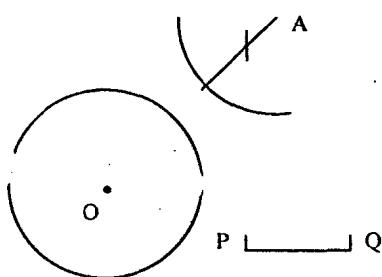
$AM=AM=PQ$

2 точки

1 точка

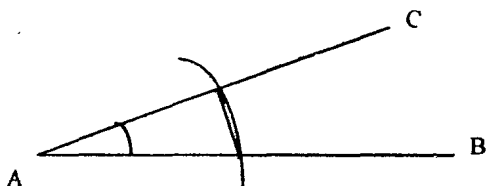


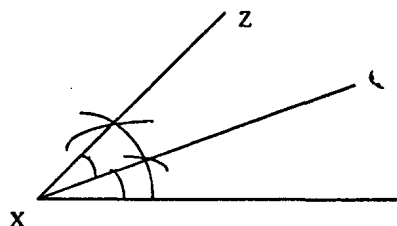
$AM=PQ$



не существует такой точки М.

151.





Построение:

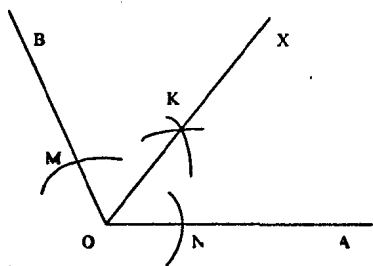
С помощью циркуля построим $\angle YXQ = \angle BAC$, от луча XQ при помощи циркуля отложим еще раз $\angle QXZ = \angle BAC$ и получим $\angle YXZ = 2\angle BAC$

152.

Построение:

Построим окружность с центром в O любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках N и M .

Построим 2 окружности с одинаковым радиусом, большим половины длины отрезка MN . Одна окружность с центром M , а другая с центром N . Эти окружности пересекутся в точке K . OK и есть искомый луч.



153.

Построение приведено в учебнике.

154.

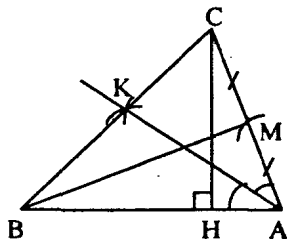
Построение:

а) Построение биссектрисы AK приведено в задаче о построении биссектрисы угла.

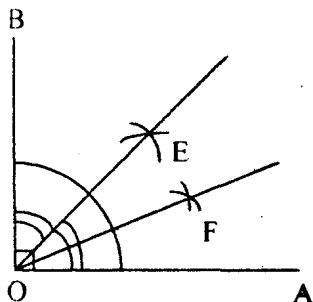
б) Строим точку M — середину CA (по задаче о построении середины отрезка).

в) Построим прямую a так, чтобы $C \in a$ и $a \perp AB$ (задача 153).

Пересечение AB и a есть H . CH — искомая высота.



155.



Построение:

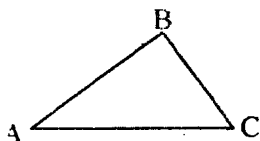
С помощью треугольника построим $\angle AOB = 90^\circ$ - прямой.Построим биссектрису OE , имеем $\angle AOE = \angle BOE = 45^\circ$.Построим OF — биссектрису $\angle AOE$

Имеем:

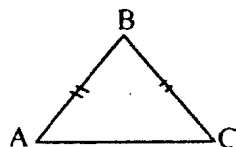
 $\angle AOF = \angle EOF = 22^\circ 30'$.

Что и требовалось построить.

156.

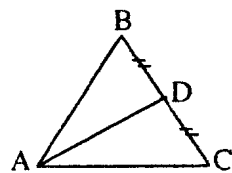
Дано: $P_{ABC} = 15$ см $BC = AB + 2$, $AC = AB + 1$ AB , BC , $AC = ?$ Решение.Пусть $AB = x$ см, т. к. $P_{ABC} = AB + BC + AC$, то $15 = x + x + 2 + x + 1$, $3x = 12$, $x = 4$ смОтвет: $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, $AB = 4$ см.

157.

Дано: $AB = BC$ $AC = AB + 2$ $AC + 3 = AB + BC$ AB , BC , $AC = ?$ Решение.Пусть $AB = BC = x$ см, тогда $AC = x + 2$ см и $x + 2 + 3 = x + x$, $x = 5$ значит, $AB = BC = 5$ см, $AC = 7$ см.

Ответ: 5 см; 5 см, 7 см.

158.

Дано: $AB = BC$, $AC = 8$ см $P_{ABD} = P_{ADC} + 2$ см; $BD = CD$. $AB = ?$ Решение: $P_{ABD} = AB + BD + AD$ значит $P_{ABD} - P_{ADC} = 2$ см $P_{ADC} = AC + CD + AD$ значит $AB + BD + AD - AC - CD - AD = 2$ $AB - AC = 2$; из $AC = 8$, следует $AB - 8 = 2 = 10$ см

Ответ 10 см

159.

Дано: $AB=BC$; $A_1B_1=B_1C_1$

$AB=A_1B_1$, $\angle B=\angle B_1$

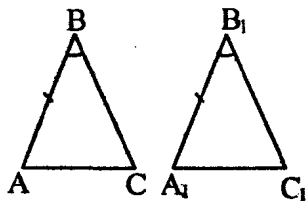
Доказать: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Имеем $AB=BC=A_1B_1=B_1C_1$ — из условия

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

$AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$, значит $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку.



160.

Дано: $AO=OB$, $\angle AOD=\angle BOD=90^\circ$

Доказать: 1) $AD=DB$

2) если $AD=DB$, то $D \in a$.

Доказательство:

1) Рассмотрим $\triangle BDO$ и $\triangle ADO$

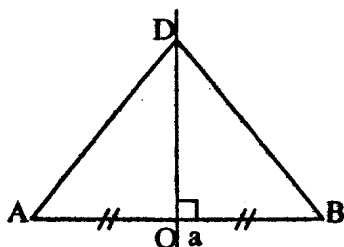
сторона DO — общая,

$AO=OB$

значит $\angle AOD=\angle BOD=90^\circ$

$\triangle AOD=\triangle BOD$ по 2-му признаку

тогда $AD=DB$.



2)

Докажем обратное

если $AB=AD$, то $D \in a$

Рассмотрим $\triangle BDO$ и $\triangle ADO$:

$AD=BD$, $AO=OB$, сторона DO —

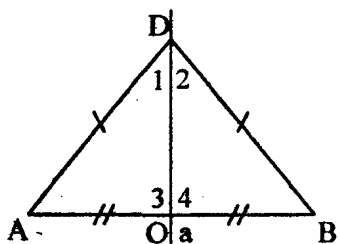
общая, значит $\triangle ADO=\triangle BDO$ по 3-

му признаку, следовательно,

$\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$; $\angle 3, \angle 4$ — смеж-

ные и $\angle 3=\angle 4$, значит, $\angle 3=\angle 4=90^\circ$

и, значит, $DO \perp AB$, и DO и a совпадают, т.е. $D \in a$.



161.

Дано: AM, A_1M_1 — медианы,

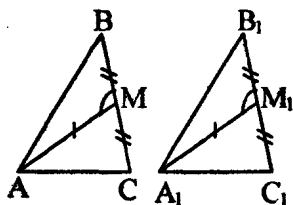
$AM=A_1M_1$, $BC=B_1C_1$,

$\angle AMB=\angle A_1M_1B_1$

Доказать: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle A_1B_1M_1$ и $\triangle ABM$:



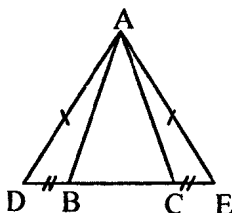
$AM=A_1M_1$, $BM=B_1M_1$ (т. к. $BM=\frac{1}{2} BC$; $B_1M_1=\frac{1}{2} B_1C_1$ и $BC=B_1C_1$)

$\angle M = \angle M_1$, значит $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по 1-му признаку, следовательно. $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$.

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$

$AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$, тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 1-му признаку. что и требовалось доказать.

162.



Дано: $AD = AE$

а) $BD = CE$

Доказать: $\angle CAD = \angle BAE$, $AB = AC$

б) $\angle CAD = \angle BAE$

Доказать: $BD = CE$, $AB = AC$

а) Рассмотрим $\triangle AEC$ и $\triangle ADB$:

$AD = AE$, $DB = CE$, $\angle D = \angle E$ углы при основании равнобедренного треугольника, тогда $\triangle ADB = \triangle AEC$ по 1-му признаку. значит $AC = AB$.

Рассмотрим $\triangle EBA$ и $\triangle DAC$

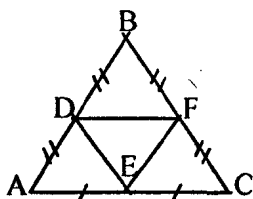
$AD = AE$, $AC = AB$: $DC = BE$, потому что $BD = CE$ и BC — общая сторона тогда $\triangle DAC = \triangle EBA$ по 3-му признаку, значит $\angle CAD = \angle BAE$.

б) Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle EAB$

$AD = AE$, $\angle D = \angle E$ при основании равнобедренного треугольника, $\angle CAD = \angle BAE$ значит, $\triangle DAC = \triangle EAB$ (по стороне и 2 прилежащим углам), следовательно, $DC = BE$, $AC = AB$.

Что и требовалось доказать.

163.



Дано: $AB = BC$

E, D, F — середины AC, AB, BC

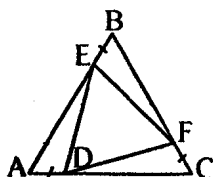
Доказать: $\triangle DFE$ — равнобедренный.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle CEF$ и $\triangle ADE$:

$AD = FC$, $AE = EC$, $\angle A = \angle C$ углы при основании равнобедренного треугольника, значит $\triangle ADE = \triangle CEF$ по 1-му признаку, тогда $DE = EF$ и значит $\triangle DFE$ — равнобедренный.

164.



Дано: $AB = BC = AC$

$EB = FC = AD$

Доказать: $EF = FD = DE$

Доказательство:

Из $AB = BC = AC$. $EB = FC = AD$ следует, что $AE = BF = CD$.

Далее:

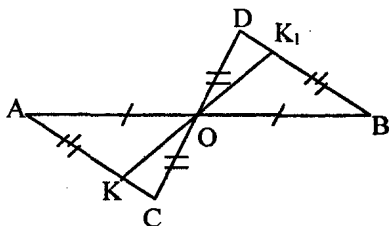
$AD=EB=FC$, $AE=BF=DC$, $\angle A=\angle B=\angle C$ (как углы равнобедренного треугольника), значит $\triangle AED=\triangle EBF=\triangle DFC$ по 1-му признаку, тогда $DE=EF=DC$ и значит $\triangle DEF$ — равносторонний.

165.

Дано: $AO=OB$, $CO=OD$, $AK=BK_1$

Доказать: а) $OK=OK_1$

б) $O \in KK_1$



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$:

$AO=OB$, $CO=OD$,

$\angle AOC=\angle BOD$ т. к. они вертикальные, значит $\triangle AOC=\triangle BOD$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle A=\angle B$.

Рассмотрим $\triangle BK_1O$ и $\triangle AKO$:

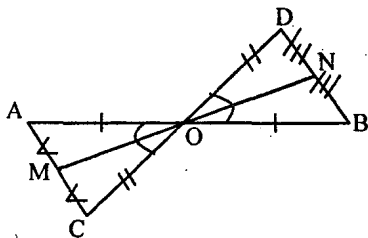
$AK=BK_1$, $AO=OB$, $\angle A=\angle B$, тогда $\triangle AKO=\triangle BK_1O$ по 1-му признаку, значит $\angle AOK=\angle BOK_1$, $KO=OK_1$, $\angle AOK=\angle BOK_1$, AB — лежит на прямой, тогда $\angle AOK$, $\angle BOK_1$ — вертикальные, и тогда O , K , K_1 лежат на одной прямой.

166.

Дано: $AO=OB$, $CO=CD$, $AM=MC$,

$BN=ND$

Доказать: $OM=ON$



Доказательство:

1) Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$:

$AO=OB$, $CO=OD$

$\angle AOC=\angle BOD$ т. к. вертикальные, значит $\triangle AOC=\triangle BOD$ по 1-му признаку, следовательно, $AC=BD$, $\angle C=\angle D$, $\angle A=\angle B$

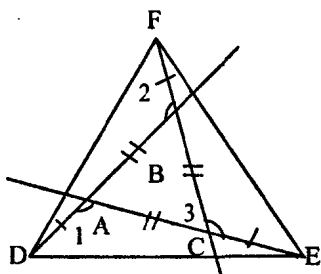
2) Рассмотрим $\triangle DON$ и $\triangle MOC$:

$OC=OD$, $\angle C=\angle D$,

$MC=DN$ (т. к. $MC=\frac{1}{2}AC$, $DN=\frac{1}{2}BD$ и $AC=BD$),

значит $\triangle MOC=\triangle DON$ по 1-му признаку, и значит $OM=ON$, что и требовалось доказать.

167.

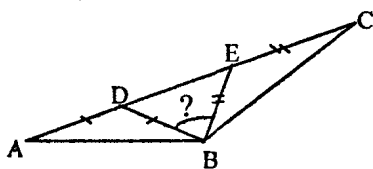
Дано: $AB=BC=AC$, $BF=CE=AD$ Доказать: $\triangle DEF$ — равносторонний.Доказательство:

Из $\triangle ABC$ — равносторонний, следует $\angle A = \angle B = \angle C$, $\angle 1$ и $\angle A$, $\angle 2$ и $\angle B$, $\angle 3$ и $\angle C$ — смежные, значит, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

Рассмотрим $\triangle FEC$ и $\triangle DEA$ и $\triangle DBF$.
 $BF=CE=AD$

$DB=FC=AE$ ($AB=BC=AC$ и $DA=BF=CE$), $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, значит $\triangle DBF = \triangle FEC = \triangle DEA$ по 1-му признаку, следовательно, $FD=FE=DE$ и $\triangle DEF$ — равносторонний.

168.



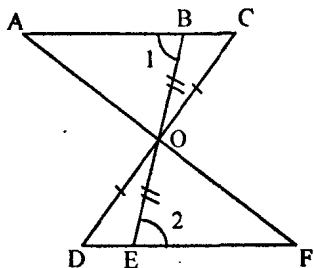
Дано: $\angle A = 38^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 32^\circ$
 $BD=DA$, $BE=EC$, $\angle DBE = ?$

Решение:

т. к. $\triangle ADB$ — равнобедренный,
 то $\angle A = \angle DAB = \angle ABO = 38^\circ$

т. к. $\triangle BEC$ — равнобедренный, то $\angle C = \angle BCE = \angle CBE = 32^\circ$
 $\angle B = \angle ABD + \angle DBE + \angle CBE$ или $110^\circ = 38^\circ + \angle DBE + 32^\circ$, т.е. $\angle DBE = 40^\circ$.
 Ответ: 40° .

169.

Дано: $OC=OD$, $BO=OE$ Доказать: $AB=EF$ Доказательство:Рассмотрим $\triangle EOD$ и $\triangle BOC$:

$BO=OE$; $CO=OD$; $\angle BOC = \angle EOD$ т. к. они вертикальные, значит $\triangle BOC = \triangle EOD$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle B = \angle E$, $\angle 1$, $\angle B$ — смежные, значит,

$\angle 1 = 180^\circ - \angle B$, $\angle 2$, $\angle E$ — смежные, значит, $\angle 2 = 180^\circ - \angle E$.

Из $\angle B = \angle E$. следует $\angle 1 = \angle 2$.

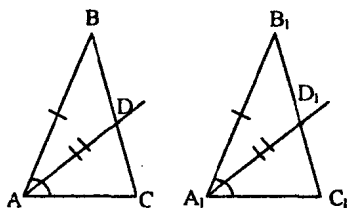
Рассмотрим $\triangle FEO$ и $\triangle ABO$:

$BO=OE$; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle AOB = \angle FOE$ т. к. они вертикальные, значит $\triangle ABO = \triangle FEO$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

170.

Дано: $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$,
 AD , A_1D_1 — биссектрисы,
 $A_1D_1=AD$.

Доказать: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Из $\angle A=\angle A_1$ следует $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$

т. к. AD , A_1D_1 — биссектрисы.

Рассмотрим $\triangle B_1A_1D_1$ и $\triangle BAD$:

имеем: $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$, значит
 $\triangle BAD=\triangle B_1A_1D_1$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle B=\angle B_1$.

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

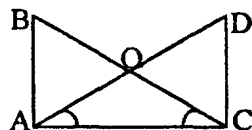
имеем: $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, значит $\angle B=\angle B_1$, $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ по
 2-му признаку, что и требовалось доказать.

171.

Дано: $BC=AD$,

$\angle OAC=\angle OCA$

Доказать: $\triangle ABO=\triangle CDO$



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$:

сторона AC — общая, $BC=AD$, $\angle C=\angle A$, значит $\triangle ACB=\triangle ACD$ по
 1-му признаку, следовательно, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $AB=CD$.

Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle AOB$: $AB=CO$

имеем: $\angle B=\angle D$, $\angle BAO=\angle DCO$

(т. к. $\angle BAO=\angle A-\angle DAC$, $\angle DCO=\angle C-\angle ACB$ и $\angle A=\angle C$, $\angle DAC=\angle ACB$)

значит $\triangle AOB=\triangle DOC$ по 2-му признаку, что и требовалось доказать.

172.

Дано: $AC=AD$, $AB\perp CD$

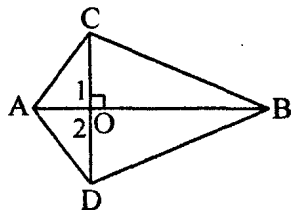
Доказать: $BC=BD$, $\angle ACB=\angle ADB$

Доказательство:

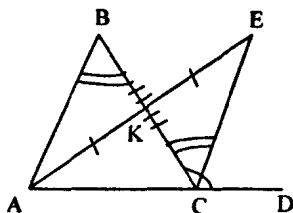
$\triangle DAC$ — равнобедренный, потому что
 $AD=AC$, AO — высота, проведенная к
 основанию, значит AO — биссектриса и
 медиана $\triangle DAC$ и значит, $\angle 1=\angle 2$, $CO=OD$.

Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$:

сторона AB — общая, $AC=AD$, $\angle 1=\angle 2$, $\triangle ACB=\triangle ADB$ по 1-му
 признаку, следовательно, $BC=BD$, $\angle ACB=\angle ADB$.



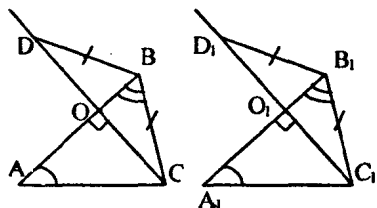
173.

Дано: $\angle BCD$ — смежный с $\angle ACB$.Доказать: $\angle BCD > \angle 1$, $\angle BCD > \angle 2$.Доказательство: $\angle ACB + \angle BCD = 180^\circ$ следует из определения смежного углаиз $\triangle ABC$ имеем

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

значит $\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC$, но $\angle CAB > 0$ и $\angle ABC > 0$,значит $\angle BCD < \angle CAB$, $\angle CBD < \angle ABC$, что и требовалось доказать.

174.

Дано: $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$

$$BC = B_1C_1$$

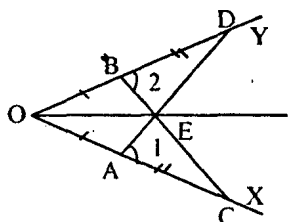
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ Доказательство:

Выполним дополнительное построение:

$$\angle ABD = \angle ABC \text{ и } BD = BC: \angle A_1B_1D_1 = \angle A_1B_1C_1 \text{ и } B_1D_1 = B_1C_1;$$

 $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники, BO , B_1O_1 — биссектрисы, тогда они медианы и высоты. а значит $DO = OC = D_1O_1 = O_1C_1$, $BO \perp DC$, $B_1O_1 \perp D_1C_1$.
Рассмотрим $\triangle A_1O_1C_1$ и $\triangle AOC$:
 $OC = O_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ (по катету и острому углу), следовательно, $AO = A_1O_1$ значит, $AB = AO + OB = A_1O_1 + O_1B_1 = A_1B_1$ следовательно, $AB = A_1B_1$.
Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:
 $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по 1-му признаку

175.

Дано: $OA = OB$, $AC = BD$ Доказать: OE — биссектриса $\angle XOY$ Доказательство:Рассмотрим $\triangle BCO$ и $\triangle AOD$:
 угол $\angle O$ — общий, $OA = OB$, $OD = OC$
 (т.к. $OD = OB + BD = OA + AC = OC$)
значит $\triangle ADO = \triangle BCO$ по 1-му признакуследовательно, $\angle D = \angle C$, $\angle OAD = \angle OBC$

$\angle AOD$ и $\angle 1$ — смежные, следовательно, $\angle 1 = 180^\circ - \angle OAD$,
 $\angle OBC$ и $\angle 2$ — смежные, следовательно, $\angle 2 = 180^\circ - \angle OBC$,
 т. к. $\angle OAD = \angle OBC$, то $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим $\triangle AEC$ и $\triangle BED$:

$\angle 1 = \angle 2$; $\angle D = \angle C$; $BD = AC$, значит $\triangle BED = \triangle AEC$ по 2-му признаку, следовательно, $DE = EC$.

Рассмотрим $\triangle OCE$ и $\triangle OED$:

сторона OE — общая, $OD = OC$, $DE = EC$, значит $\triangle OED = \triangle OCE$ по 3-му признаку, следовательно, $\angle DOE = \angle COE$ и значит OE — биссектриса $\angle XOY$, что и требовалось доказать.

Описание способа построения биссектрисы угла, используя эту задачу

- 1) построить окружность с центром в вершине угла любого радиуса. Окружность пересечет стороны угла в точках A и B .
- 2) построить окружности с центрами в точках A и B одинакового радиуса. Окружность с центром A и радиусом R пересечет сторону угла в точке C , также окружность с центром B и радиусом R пересечет сторону угла в точке D . Значит:
- 3) Построим отрезки AD и BC .
- 4) Они пересекутся в точке E .
- 5) Соединим лучом вершину угла и точку E . Полученный луч и будет биссектрисой.

176.

Дано: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$
 AM , A_1M_1 — медианы
 $AM = A_1M_1$

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство.

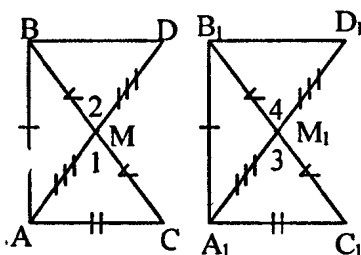
1) дополнительное построение:
 проведем AM и A_1M_1 за точки M и M_1 и отметим на продолжениях точки D и D_1 , чтобы $AM = AD$, $A_1M_1 = M_1D_1$

2) Рассмотрим $\triangle BMD$ и $\triangle AMC$:

$AM = MD$, $BM = MC$, $\angle 1 = \angle 2$ т. к. они вертикальные, значит $\triangle AMC = \triangle BMD$ по 1-му признаку, следовательно, $AC = BD$ следует из $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$.

Рассмотрим $\triangle B_1M_1D_1$ и $\triangle A_1M_1C_1$:

$A_1M_1 = M_1D_1$, значит $B_1M_1 = M_1C_1$, $\angle 3 = \angle 4$ т.к. они вертикальные,



значит $\Delta A_1 M_1 C_1 = \Delta B_1 M_1 D_1$ по 1-му признаку, следовательно,
 $A_1 C_1 = B_1 D_1$

3) Рассмотрим $\Delta A_1 B_1 D_1$ и ΔABD :

$AB = A_1 B_1$, $AD = A_1 D_1$ следует из $AM = A_1 M_1$, $BD = B_1 D_1$, значит
 $\Delta ABD = \Delta A_1 B_1 D_1$, т. е. медианы BM и $B_1 M_1$ треугольников опущены
на соответственно равные стороны AD и $A_1 D_1$.

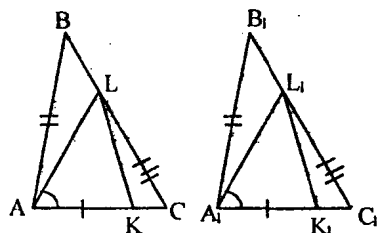
Из $BM = B_1 M_1$, следует $BC = B_1 C_1$ т.к. ($BC = 2BM$; $B_1 C_1 = 2 B_1 M_1$).

4) Рассмотрим $\Delta A_1 B_1 C_1$ и ΔABC :

$AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C_1$.

Имеем: $BC = B_1 C_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$ по 3-му признаку, что и
требовалось доказать.

177.



Дано: $AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C_1$,
 $\angle A = \angle A_1$, $AK = A_1 K_1$, $LC = L_1 C_1$.

Доказать: а) $KL = K_1 L_1$

б) $AL = A_1 L_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим $\Delta A_1 B_1 C_1$ и ΔABC :
 $AB = A_1 B_1$.

Имеем: $AC = A_1 C_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\Delta ABC = \Delta A_1 B_1 C_1$ по 1-му при-
знаку, следовательно, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1 C_1$.

2) Рассмотрим $\Delta L_1 C_1 K_1$ и ΔLCK :

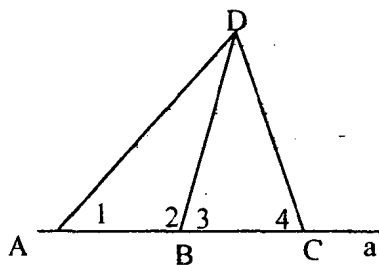
$LC = L_1 C_1$.

Имеем: $\angle C = \angle C_1$, $KC = AC - AK = A_1 C_1 - A_1 K_1 = K_1 C_1$, значит
 $\Delta LCK = \Delta L_1 C_1 K_1$ по 1-му признаку, следовательно, $LK = L_1 K_1$.

3) Рассмотрим $\Delta A_1 B_1 L_1$ и ΔABL :

$AB = A_1 B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BL = BC - LC = B_1 C_1 - L_1 C_1 = B_1 L_1$, значит
 $\Delta ABL = \Delta A_1 B_1 L_1$ по 1-му признаку, следовательно, $AL = A_1 L_1$, что и
требовалось доказать.

178.



Дано: см. рисунок

Доказать: хотя бы два из трех
отрезков AD , BD и CD не равны
друг другу.

Доказательство:

Допустим, что $AD = BD = CD$

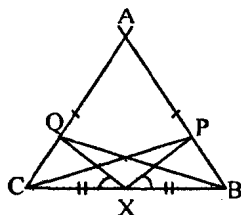
ΔABD , ΔBDC и ΔADC — равно-
бедренные, и тогда

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 4$, откуда $\angle 2 = \angle 3$, но $\angle 2$, $\angle 3$ — смежные. значит $\angle 2 = \angle 3 = 90^\circ$, а это противоречит теореме о том что через точку не лежащую на прямой можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой, значит наше предположение неверно, а верно то, что надо доказать.

179.

Дано: $AB=AC$, $BX=XC$, $\angle PXB = \angle QXC$.

Доказать: $BQ=CP$.



Доказательство:

$\triangle ABC$ — равнобедренный, следует $\angle B = \angle C$.

Рассмотрим $\triangle BPX$ и $\triangle CQX$:

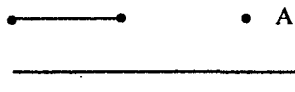
$CX=BX$

Имеем: $\angle QXC = \angle PXB$, $\angle C = \angle B$, значит $\triangle CQX = \triangle BPX$ по 2-му признаку, следовательно, $CQ=PB$, $QX=XP$.

Рассмотрим $\triangle BPC$ и $\triangle CQB$:

$CQ=PB$, сторона CB — общая, $\angle C = \angle B$, значит $\triangle CQB = \triangle BPC$ по 2-му признаку следовательно, $QB=PC$ ч.т.д.

180.



План построения:

- 1) построим окружность с центром в точке A и радиусом R .
- 2) Эта окружность пересечет прямую l в двух точках; в одной точке или не пересечет.

- 3) Значит будет иметь два решения, одно или не одного

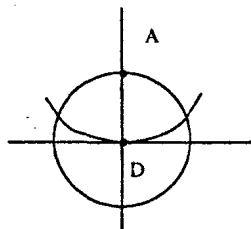
3 случая

случай.

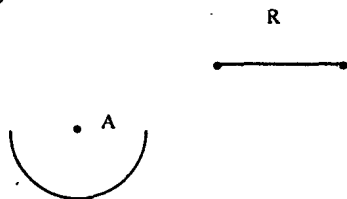
2 случай.

R

R

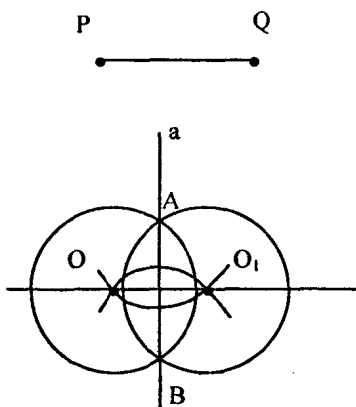


3 случай



- 1) центр искомой окружности может быть или В, или С. Т.е. задача имеет 2 решения.
- 2) центр искомой окружности D. Т.е. задача имеет одно решение.
- 3) задача не имеет решения. На прямой 1 нет точки, удаленной от А на расстояние R.

181.



Планы построения:

- 1) построим окружность с центром в А и радиусом PQ и окружность с центром в В тем же радиусом.
- 2) Эти окружности пересекутся в точках О и О₁, в точке О или не пересекутся.
- 3) Значит будем иметь два решения, одно или не одного.

1 случай

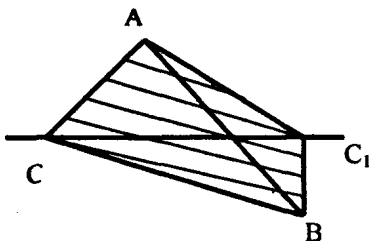
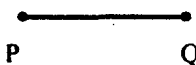
- 1) если $AB < 2PQ$, то центр искомой окружности может быть или О, или О₁. 2 решения.

2 случай .

- 2) если $AB = 2PQ$, то центр искомой окружности О. Одно решение.

3 случай

- 1) если $AB > 2PQ$, то задача не имеет решения.



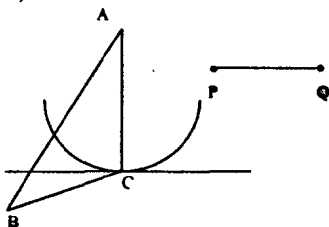
Построить: $\triangle ABC$ чтобы $C \in \alpha$, $AC=PQ$

План построения:

- 1) построим окружность в A и радиусом PQ .
- 2) Окружность пересечет прямую α в двух точках в одной точке, α может и не пересекать окружность. Обозначим эти точки C и C_1 .
- 3) Соединим точки A, B, C , и A, B, C_1 , получим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$. Эти треугольники удовлетворяют требованиям задачи. Данная задача имеет два решения. Также может иметь одно или ни одного решения.

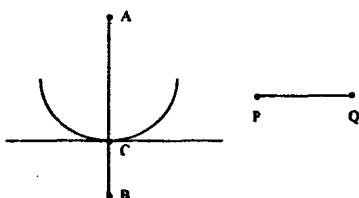
Например:

а)

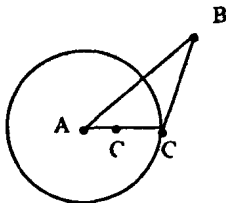
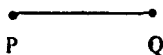


Одно решение.

б)



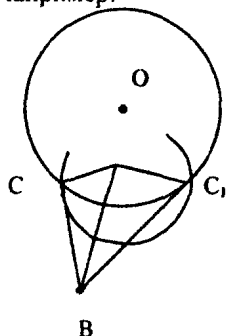
Не имеет решения, т.к. ABC -отрезок.



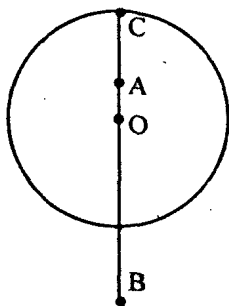
План построения:

- 1) построим окружность с центром в A и радиусом PQ .
- 2) Данная и построенная окружности пересеклись в C .
- 3) Соединим точки A, B, C и получим $\triangle ABC$. Задача может иметь два или ни одного решения

например:



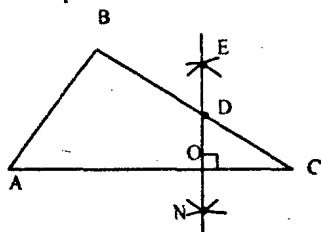
$\triangle ABC$ и $\triangle ABC_1$ – искомые



Задача не имеет решения. Т.к ABC – отрезок.

84.

Построить: $D \in BC$ чтобы $AD=DC$.



План построения:

- 1) построим две окружности с центром в A и в C равными радиусам, но больше половины AC.
- 2) Окружности пересекутся в точках E и N.
- 3) EN и BC пересекутся в точке D которая и есть искомая точка.

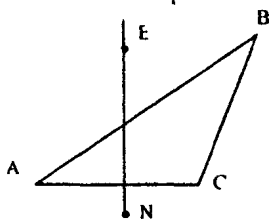
Доказательство:

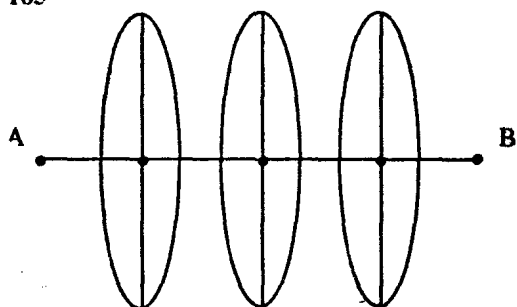
В $\triangle ADC$, DO – серединный перпендикуляр, т.е. $\triangle ADC$ – равнобедренный, значит $AD=AC$.

Задача может и не иметь решения.

Например:

EN и BC не пересекаются, т.е. нет такой точки $D \in [BC]$, что $AD=DC$





План решения:

Делим отрезок наполам, и его каждую половину – наполам.

Глава III

§1. Признаки параллельности двух прямых.

186

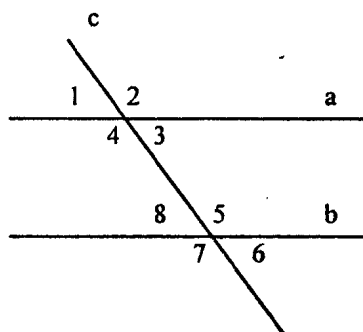
Дано:

а) $\angle 1 = 37^\circ$, $\angle 7 = 143^\circ$

б) $\angle 1 = \angle 6$

в) $\angle 1 = 45^\circ$, $\angle 7 = 3\angle 3$

Доказать: $a \parallel b$.



а) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3 = 37^\circ$ т.к. они вертикальные

$\angle 7 = \angle 5 = 143^\circ$ т.к. они вертикальные

$\angle 3$, $\angle 5$ – соответственные углы при прямых a , b и секущей c и $\angle 3 + \angle 5 = 37^\circ + 143^\circ = 180^\circ$, значит по признаку параллельности прямых $a \parallel b$.

б) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3$ т.к. они вертикальные

$\angle 6 = \angle 8$ т.к. они вертикальные

$\angle 1 = \angle 6$ отсюда $\angle 3 = \angle 8$

так как $\angle 3$ и $\angle 8$ накрест лежащие при прямых a , b и секущей c и $\angle 3 + \angle 5 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$ следовательно $a \parallel b$.

в) Доказательство:

$\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$ т.к. $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные

$\angle 7 = 3\angle 3$, следует $\angle 7 = 135^\circ$

$\angle 5 = \angle 7 = 135^\circ$ – $\angle 5$ и $\angle 7$ – вертикальные

$\angle 3$, $\angle 5$ – соответственные углы при прямых a , b и секущей c и $\angle 3 + \angle 5 = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$ следовательно $a \parallel b$.

187.

Доказать: $AB \parallel DE$

Доказательство:

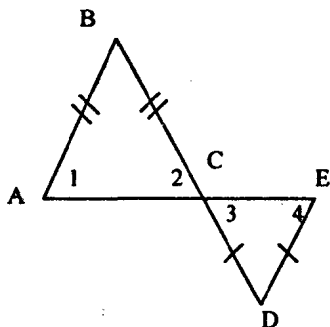
$\triangle ABC$ – равнобедренный, потому что $AB=BC$, $\angle 1=\angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

$\triangle CDE$ – равнобедренный, потому что $CD=ED$.

Следовательно $\angle 3=\angle 4$, $\angle 2=\angle 3$ т.к.

они вертикальные, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ от-

куда, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$. т.е. $\angle 1$ и $\angle 4$ – накрест лежащие при прямых AB , DE и секущей AE , и значит $AB \parallel DE$, по признаку параллельности.



188.

Дано:

$AO=OB$, $CO=OD$.

Доказать: $AC \parallel BD$

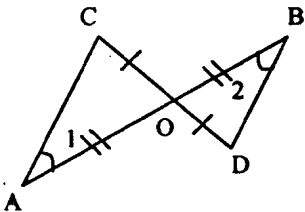
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BDO$ и $\triangle ACO$: $AO=OB$.

Имеем: $CO=OD$, $\angle COA=\angle DOB$ т.к. они

вертикальные, значит, $\triangle AOC=\triangle BOD$ по 1-му признаку равенства $\triangle$.

Следовательно $\angle 1=\angle 2$, а так как $\angle A$ и $\angle B$ – накрест лежащие при прямых AC , BD и секущей AB , то $AC \parallel BD$.



189.

Доказать: $BC \parallel AD$.

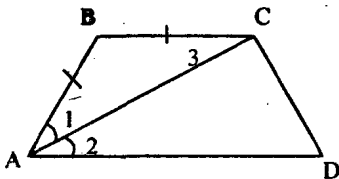
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABC$:

$AB=BC$, следовательно

$\angle 1=\angle 3$ как углы при основании равнобедренного $\triangle$.

$\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$ значит $\angle 2=\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при прямых BC , AD и секущей AC , значит $BC \parallel AD$.



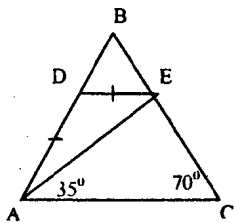
190.

Дано: $AB=BC$, $AD=DE$, $\angle C=70^\circ$, $\angle EAC=35^\circ$.

Доказать: $DE \parallel AC$

Доказательство:

$AB=BC$, значит $\angle A=\angle C=70^\circ$ как углы при основании равнобедренного $\triangle$.

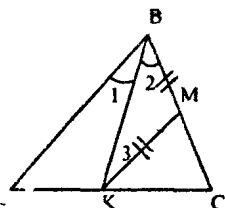


$$\angle EAC = 35^\circ$$

из $\angle A = 70^\circ$ следует $\angle DAE = 35^\circ$

$\triangle ADE$ – равнобедренный, значит, $\angle DEA = \angle EAC = 35^\circ$, $\angle DEA$ и $\angle EAC$ – накрест лежащие при прямых DE и AC и секущей AE , следовательно $DE \parallel AC$ ч.т.д.

91.



Дано: $\angle CBK = \angle ABK$, $BK = KM$

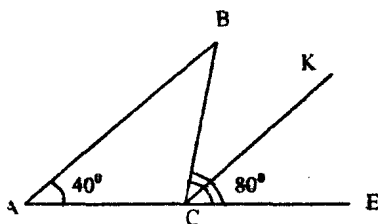
Доказать: $KM \parallel AB$.

Доказательство:

Из $BM = MK$, следует $\triangle BMK$ – равнобедренный, тогда $\angle 2 = \angle 3$ по св-ву равнобедренного $\triangle$.

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, тогда, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при прямых AB и KM , и секущей BK , значит $AB \parallel KM$, по признаку.

92.



Дано: $\angle A = 40^\circ$,

$\angle BCE$, $\angle ACB$ – смежные углы

$\angle BCE = 80^\circ$

$\angle BCK = \angle ECK$

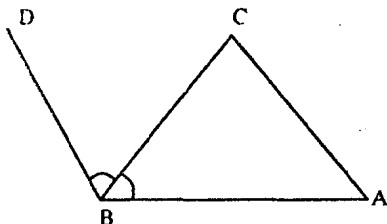
Доказать: $AB \parallel CK$

Доказательство:

$$\angle BCK = \angle KCE = \frac{1}{2} \angle BCE = 40^\circ$$

$\angle BAC$ и $\angle KCE$ – соответственные при прямых AB , CK и секущей AC и $\angle BAC = \angle KCE = 40^\circ$, значит $AB \parallel CK$ ч.т.д.

93.



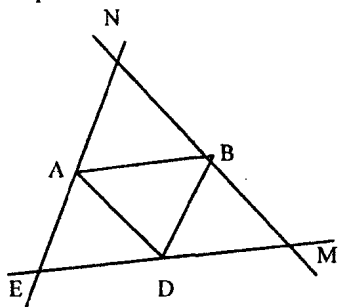
Доказательство:

$\angle ABC = 70^\circ$, то $\angle DBA = 140^\circ$ (т.к. BC – биссектриса)

$\angle DBA$ и $\angle A$ – односторонние при прямых AC , BD и секущей AB , $\angle DBA + \angle A = 140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$, значит $DB \parallel AC$ по признаку параллельности прямых, ч.т.д.

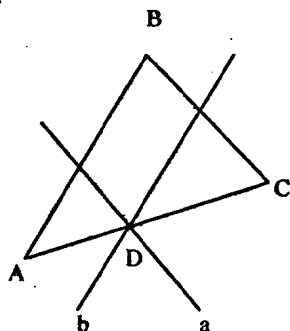
194.

см. рис.



195.

см. рис.



§ 2. Аксиома параллельных прямых

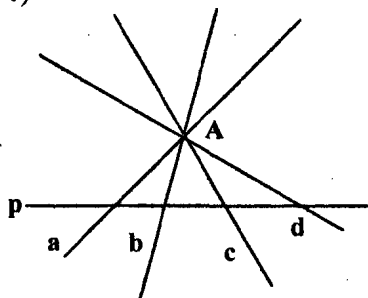
196.

Ответ: одну прямую $\parallel AB$.

197.

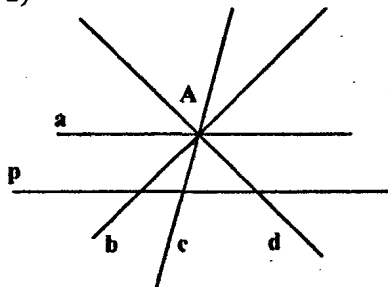
Имеем 2 случая:

1)



4 прямые

2)

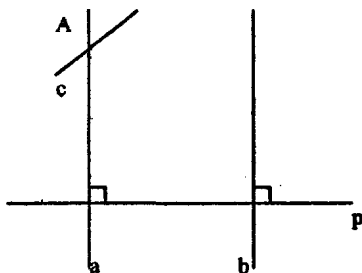


3 прямые

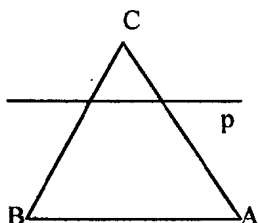
198.

Доказательство:

$a \perp p$ и $b \perp p$, следует, что $b \parallel a$ (по признаку параллельности двух прямых). Если c пересекает a , то по аксиоме c пересекает и b , ч.т.д.



199.



Дано: $p \parallel AB$,
Доказать: $BC \cap p$ и $AC \cap p$

Доказательство:

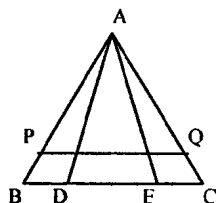
$BC \cap AB = B$

$AB \parallel p$, значит по следствию из аксиомы

$BC \cap p$

Аналогично $AC \cap p$.

200.

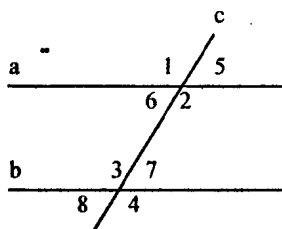


Дано: $AP \parallel p$, $PQ \parallel BC$
Доказать: p — пересекает AB , AE , BC , PQ .

Доказательство:

Прямая AP пересекает AB , AE , AC , BC и PQ . Значит, по следствию прямая p пересекает AB , AE , AC , BC и PQ ч.т.д.

201.



Дано:

$\angle 2 + \angle 3 = 210^\circ$, $a \parallel b$; $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8 = ?$

Решение:

$\angle 2$ и $\angle 3$ — накрест лежащие при параллельных прямых.

Значит $\angle 2 = \angle 3$

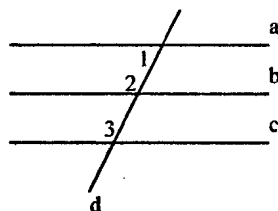
$\angle 2 = \angle 3 = 210^\circ : 2 = 105^\circ$ (т.к. $\angle 2 + \angle 3 = 210^\circ$)

$\angle 1 = \angle 2 = 105^\circ$ т.к. эти углы вертикальные, $\angle 3 = \angle 4 = 105^\circ$; $\angle 2, \angle 6$ — смежные, следовательно, $\angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$ т.е.

$\angle 6 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, $\angle 5 = \angle 6 = 75^\circ$ (т.к. они вертикальные) при параллельных, $\angle 7 = \angle 6 = 75^\circ$, $\angle 8 = \angle 7 = 75^\circ$ т.к. они вертикальные.

Ответ: $105^\circ, 105^\circ, 105^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 75^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

202.



Дано: $\angle 1 = 42^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3 = 138^\circ$

Какие из a, b, c — параллельны?

Решение:

$\angle 1, \angle 2$ — односторонние при a, b и секущей d

и $\angle 1 + \angle 2 = 42^\circ + 140^\circ = 182^\circ \neq 180^\circ$, т.е. $a \nparallel b$

$\angle 1, \angle 3$ - односторонние при a, c и секущей d и $\angle 1 + \angle 3 = 42^\circ + 138^\circ = 180^\circ$, т.е. $a \parallel c$. $\angle 2, \angle 3$ - односторонние при b, c и секущей d и $\angle 2 \neq \angle 3$, т.е. $a \not\parallel b$

Ответ: две прямые a и c .

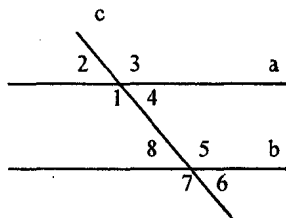
203.

Дано: $a \parallel b$,

а) $\angle 1 = 150^\circ$

б) $\angle 1 = \angle 4 + 70^\circ$

$\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8 = ?$



Решение:

а) $\angle 1 = 150^\circ$ следовательно, $\angle 3 = \angle 1 = 150^\circ$ т.к. они вертикальные, $\angle 5 = \angle 1 = 150^\circ$ (как накрест лежащие при параллельных) $\angle 7 = \angle 5 = 150^\circ$ - вертикальные, $\angle 1, \angle 4$ - смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$, $\angle 4 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 30^\circ$ т.к. они вертикальные, $\angle 8 = \angle 4 = 30^\circ$ (как накрест лежащие при параллельных) $\angle 6 + \angle 8 = 30^\circ$ - вертикальные.

Ответ: $30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 30^\circ$.

б) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 4 = x - 70^\circ$

$\angle 1, \angle 4$ - смежные, следовательно, $x + x - 70^\circ = 180^\circ$, $2x = 250^\circ$, $x = 125^\circ$, $\angle 1 = 125^\circ$, $\angle 4 = \angle 1 - 70^\circ = 55^\circ$.

По примеру пункта а) имеем:

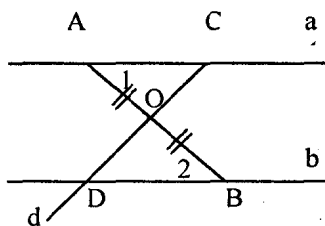
$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 125^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 55^\circ$.

Ответ: $125^\circ, 55^\circ$.

204.

Дано: $a \parallel b$, $AO = OB$

Доказать: $CO = OD$



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$:

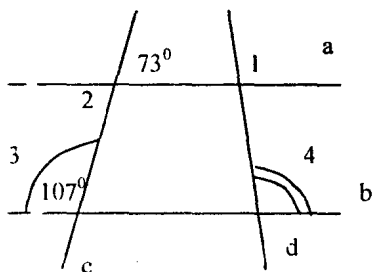
$AO = BO$

$\angle AOC = \angle BOD$ т.к. они вертикальные

$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных a и b)

Значит, $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ по 2-му признаку равенства $\triangle$.

Следовательно $CO = OD$, ч.т.д.



$$\angle 1 = ?$$

Доказательство:

$\angle 2$ и угол 73° вертикальные следовательно $\angle 2 = 73^\circ$

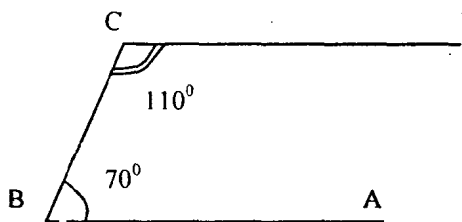
$\angle 2, \angle 3$ – односторонние при прямых a, b и секущей c и $\angle 2 + \angle 3 = 73^\circ + 107^\circ = 180^\circ$ следовательно по признаку параллельности прямых $a \parallel b$.

$\angle 1, \angle 4$ – соответственные углы при параллельных a и b следовательно $\angle 1 = \angle 4 = 92^\circ$

Ответ: 92° .

206.

Дано: $\angle ABC = 70^\circ, \angle BCD = 110^\circ$



Решение:

1) $\angle C$ и $\angle B$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC , и $\angle B + \angle C = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$, следовательно, $AB \parallel CD$ по признаку параллельности

прямых.

Значит, AB и CD могут быть параллельными.

Рассмотрим другую ситуацию:

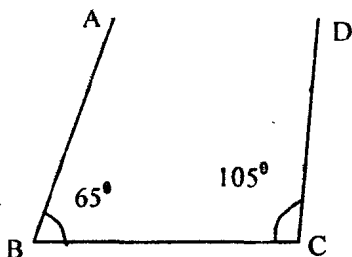
2) Здесь прямые AB и CD пересекаются в E , значит AB и CD могут пересекаться.

207.

Дано: $\angle ABC = 65^\circ, \angle BCD = 105^\circ$.

$\angle B$ и $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC , и $\angle B + \angle C = 65^\circ + 105^\circ = 170^\circ \neq 180^\circ$,

следовательно, $AB \nparallel CD$, т.е. AB и CD не могут быть параллельны И значит они пересекаются



208.

Дано: $a \parallel b$

$\angle 1 - \angle 2 = 50^\circ$, $\angle 1$, $\angle 2 = ?$

Решение:

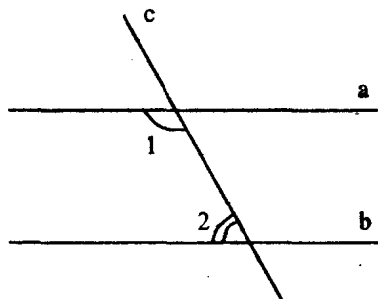
Из $a \parallel b$ следует, что $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x - 50$

и $x + x - 50 = 180$, $2x = 230$, $x = 115$, т.е.

$\angle 1 = 115^\circ$, $\angle 2 = 55^\circ$

Ответ: 115° , 55° .



209.

Дано: $a \parallel b$, $c \parallel d$

$\angle 4 = 45^\circ$

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3 = ?$

Решение:

$\angle 3$, $\angle 4$ – смежные, следовательно

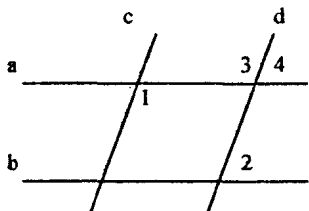
$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, значит $\angle 3 + 45^\circ = 180^\circ$, тогда

$\angle 3 = 135^\circ$, $\angle 1$, $\angle 3$ – накрест лежащие при $c \parallel d$ и секущей, тогда

$\angle 1 = \angle 3 = 135^\circ$ (по свойству); $\angle 2$, $\angle 4$ – соответственные при $a \parallel b$ и се-

кущей d , тогда $\angle 2 = \angle 4 = 45^\circ$ (по свойству).

Ответ: 135° , 45° , 135° .



210.

Дано: $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.

Доказать: $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_1$.

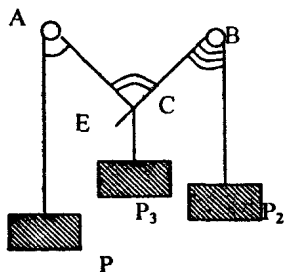
Доказательство:

$AP_1 \parallel CP_3$, значит, $\angle P_1AC + \angle ACP_3 = 180^\circ$;

$CP_3 \parallel BP_2$, значит, $\angle P_2BC = \angle P_3CE$

и $\angle P_1AC + \angle P_3CE + \angle ACE = 180^\circ$

$(\angle P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180^\circ$ (1)



$\angle ACF$ и $\angle ACB$ смежные, следовательно, $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$ (2)
 сг авнивая (1) и (2) получим $(\angle P_1AC + \angle P_2BC) + \angle ACE = 180^\circ$.
 $\angle ACE + \angle ACB = 180^\circ$, $\angle ACB = \angle P_1AC + \angle P_2BC$ ч.т.д.

211.

а) Дано: $a \parallel b$; AA_1 - биссектриса $\angle A$; BB_1 — биссектриса $\angle B$.

Доказать: а) $AA_1 \parallel BB_1$; б) $AA_1 \perp BB_1$.

Доказательство:

$\angle A = \angle B$ как накрест лежащие при параллельных

Из AA_1 и BB_1 - биссектрисы равных углов, следует, что

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$; $\angle 2$ и $\angle 3$ — накрест лежащие при прямых AA_1 и BB_1 и секущей c и $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $AA_1 \parallel BB_1$.

б)

Доказательство:

Т.к. они односторонние при параллельных a и b .

$\angle A + \angle B = 180^\circ$

Из AA_1 и BB_1 — биссектрисы равных углов $\angle A$ и $\angle B$, следует
 Что $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.

Рассмотрим $\triangle AB_1B$:

$\angle 1 + \angle 3 + \angle B_1 = 180^\circ$ по теореме о сумме углов $\triangle$, тогда,

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle B_1 = 180^\circ$, следовательно, $\frac{1}{2}180^\circ + \angle B_1 = 180^\circ$ или

$90^\circ + \angle B_1$. т.е. $\angle B_1 = 90^\circ$, откуда получаем, что $AA_1 \perp BB_1$ ч.т.д.

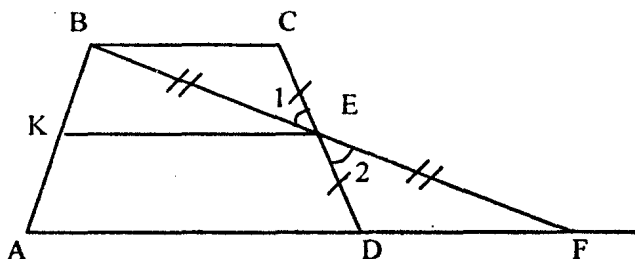
212.

Решение приведено в учебнике.

213.

Дано: $CE = ED$, $BE = EF$, $KE \parallel AD$.

Доказать: $KE \parallel BC$.



Доказательство:

Рассмотрим $\triangle FDE$ и $\triangle BCF$, $BE=EF$, $E=ED$ $\angle 1=\angle 2$ - как вертикальные, значит $\triangle BCE=\triangle FDE$ по 1-му признаку равенства $\triangle$

Тогда $\angle CBE=\angle DFE$, $\angle CBE$ и $\angle DFE$ - накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BF и $\angle CBE=\angle DFE$ следовательно $BC\parallel AD$ по признаку параллельности прямых.

$KE\parallel AD$, $BC\parallel AD$ следовательно, $KE\parallel BC$ по свойству параллельных прямых ч.т.д.

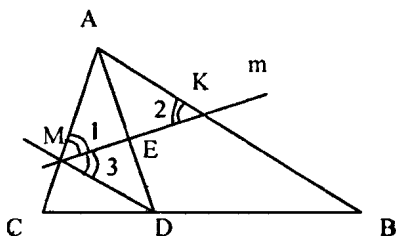
214.

Дано:

AD - биссектриса $\angle A$

$AE=ED$

Доказать. $MD\parallel AD$



Доказательство:

Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle MAE$ и $\triangle KAE$, сторона AE - общая, $\angle MAE=\angle KAE$, значит $\triangle MAE = \triangle KAE$ (по катету и острому углу), следовательно, $\angle 1=\angle 2$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle AME$ и $\triangle DME$, сторона ME - общая, $AE=ED$

Значит $\triangle AME=\triangle DME$ (по 2 равным катетам), следовательно $\angle 1=\angle 3$ $\angle 2=\angle 3$ - накрест лежащие при прямых AB и MD и секущей MK , и $\angle 1=\angle 2$, $\angle 1=\angle 3$ откуда $\angle 2=\angle 3$, и значит, $AB\parallel MD$ (по признаку параллельности прямых).

215.

Дано: см. рис.

$\angle 1=?$

Решение:

$\angle KDA=\angle CDQ=115^\circ$ т.к. они вертикальные

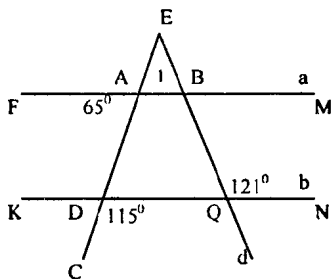
$\angle FAD$ и $\angle KDA$ - односторонние при прямых a и b

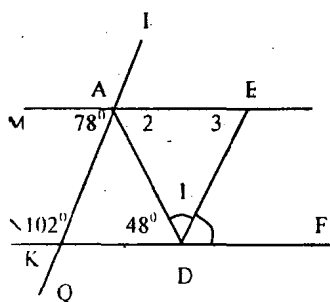
и секущей c и $\angle FAD+\angle KDA=65^\circ+115^\circ=180^\circ$, следовательно, $a\parallel b$,

$\angle DAB$ и $\angle BQN$ - смежные, тогда $\angle DOB=180^\circ-121^\circ=59^\circ$.

Из $a\parallel b$ следует, что $\angle 1=\angle DQB=59^\circ$ (как соответственные при параллельных прямых).

Ответ: 59°





Дано: DE – биссектриса угла $\angle ADF$
 $\angle 1, \angle 2, \angle 3 = ?$

Решение:

$\angle MAK$ и $\angle NKA$ – односторонние при прямых ME и NF и секущей AK
и $\angle MAK + \angle NKA = 78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$
следовательно, $ME \parallel NF$ (по признаку параллельности прямых), $\angle KDA$ и $\angle ADF$ – смежные, тогда

$$\angle KDA + \angle ADF = 180^\circ; 48^\circ + \angle ADF = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle ADF = 132^\circ.$$

Из DE – биссектриса $\angle ADF$, следует, что $\angle 1 = \angle EDF = 132^\circ : 2 = 66^\circ$

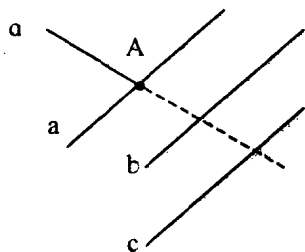
т.к. $ME \parallel NF$ т.к. они накрест лежащие то $\angle 3 = \angle EDF = 66^\circ$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \text{ (сумма углов треугольника) или } 66^\circ + \angle 2 + 66^\circ = 180^\circ.$$

значит $\angle 2 = 48^\circ$

Ответ: $66^\circ, 48^\circ, 66^\circ$.

217.



Дано: $a \parallel b$

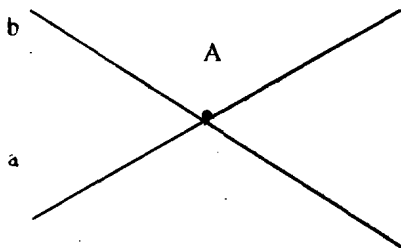
$b \parallel c$; c (пересекает прямую a)

Доказать. d пересекает прямую b

Доказательство:

$a \parallel c, b \parallel c$, следует, что, $a \parallel b$ (по свойству параллельных прямых) так как $a \parallel b$ и $a \cap d = A$, то $d \cap b$ (свойство параллельных прямых)

218.



Можно ли построить прямую c:
 $a \parallel c; c \cap b$.

Доказательство:

Возьмем любую точку M не перпендикулярную a.

Тогда по аксиоме параллельных прямых через точку M можно

построить прямую c; параллельную a и только одну

так

Тогда $a \cap b$, и значит $c \cap b$ (по свойству параллельных прямых)

Ответ: можно.

219.

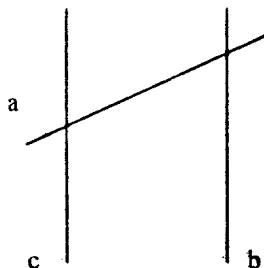
Дано: $с \cap a$, $с \cap b$, $с$ – произвольная

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:

Пусть $a \not\parallel b$, тогда $с \parallel b$, $с \cap a$, и $с \cap b$ (так строим),

но это противоречит условию. Значит $a \parallel b$ ч.т.д.



220.

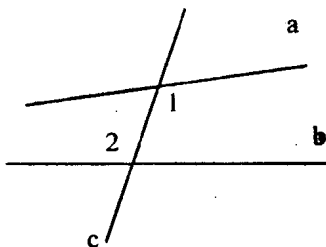
Дано: $\angle 1$, $\angle 2$ – накрест лежащие

$\angle 1 \neq \angle 2$

Доказать: $a \cap b$

Доказательство:

Если $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c и $\angle 1 \neq \angle 2$, то $a \not\parallel b$, но если прямые на плоскости не параллельны, значит они пересекаются.



221.

Дано: $BM \cap AC = E$, $BE = EM$, $AE = EC$, $CN \cap AB = K$, $AK = KB$, $NK = KC$

Доказать: $A, N, M \in l$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BCK$ и $\triangle AKN$: $AK = KB$.

Имеем: $NK = KC$, $\angle NKA = \angle CKB$ т.к. они вертикальные, значит $\triangle AKN = \triangle BCK$ по 1-му признаку, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим $\triangle BEC$ и $\triangle AEM$: $ME = EB$.

Имеем: $AE = EC$, $\angle AEM = \angle BEC$ – как вертикальные, значит, $\triangle AEM = \triangle BEC$ по 1-му признаку равенства Δ .

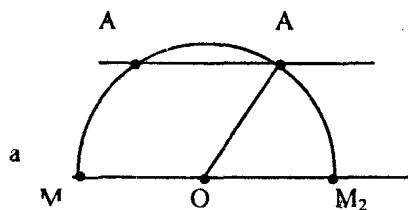
Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие углы при прямых AM и BC и секущей BM , и $\angle 3 = \angle 4$, т.е. $AM \parallel BC$ (1)

$\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы при прямых AN и BC и секущей NC , и $\angle 1 = \angle 2$, т.е. $AN \parallel BC$ (2)

Сравнивая (1) и (2) имеем:

$AM \parallel AN$, $AN \parallel BC$, значит $AM \parallel AN$, но так как прямые AM и AN проходят через одну точку A и параллельны одной и той же прямой BC , то, по аксиоме параллельных прямых можно утверждать, что AM и AN – совпадают, т.е. $A, N, M \in l$.

Или A, N, M лежат на прямой / ч.т.д.



Планы построения:

- 1) Построим окружность с центром в O и радиусом OA
- 2) Окружность пересечет прямую a в M_1 и M_2
- 3) Окружность с центром в M_1 и радиусом OA пересекает окружность с центром в O и радиусом OA в точке A .
- 4) $AA \parallel a$, значит AA_1 – это и есть искомая нами прямая.

Глава IV

§ 1. Сумма углов треугольника.

223.

Дано:

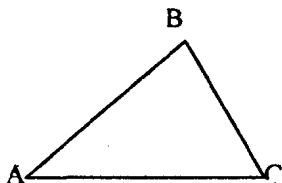
а) $\angle A = 65^\circ$; $\angle B = 57^\circ$;

б) $\angle A = 24^\circ$; $\angle B = 130^\circ$;

в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$,

г) $\angle A = 65^\circ + \alpha$, $\angle B = 60^\circ - \alpha$.

$\angle C = ?$



Решение.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов треугольника)

а) $65^\circ + 57^\circ + \angle C = 180^\circ$, значит $\angle C = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$

б) $24^\circ + 130^\circ + \angle C = 180^\circ$, значит $\angle C = 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$

в) $\alpha + 2\alpha + \angle C = 180^\circ$, значит $\angle C = 180^\circ - 3\alpha$

г) $60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha + \angle C = 180^\circ$, значит $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ответ: 58° ; 26° ; $180^\circ - 3\alpha$; 60° .

224.

Дано:

$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C = ?$

Решение:

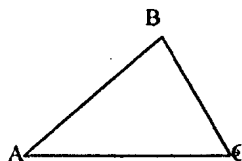
Пусть 1 часть — x° , тогда $\angle A = 2x^\circ$, $\angle B = 3x^\circ$, $\angle C = 4x^\circ$

Так как $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов Δ), то $2x + 3x + 4x = 180$, $9x = 180$, $x = 20$.

Имеем, что 20° — приходится на 1 часть, следовательно,

$\angle A = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $\angle B = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$; $\angle C = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$

Ответ: 40° ; 60° ; 80° .



225.

Дано: $AB = BC = AC$.

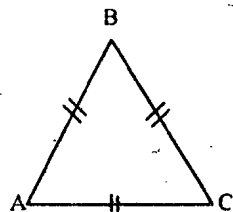
Доказать: $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

Доказательство:

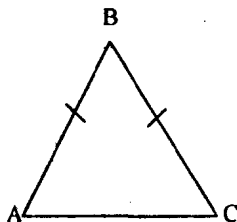
Из $AB = BC = AC$, следует

что $\angle A = \angle B = \angle C$ (свойство углов при основании равнобедренного треугольника).

Но $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов треугольника), значит $3 \cdot \angle A = 180^\circ$ или $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ ч.т.д.



226.



Дано:

$$AB=BC$$

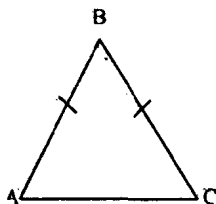
Доказать: $\angle A$ и $\angle C$ – острыеДоказательство:

Допустим $\angle A$, $\angle C$ – не острые, тогда $\angle A = \angle C = 90^\circ$, или $\angle A = \angle C > 90^\circ$.

Значит $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$, а это противоречит теореме о сумме углов треугольника, следовательно наше предположение неверно.

Тогда $\angle A = \angle C < 90^\circ$ ч.т.д.

227.



а)

Дано:

$$AB=BC; \angle A = 2\angle B$$

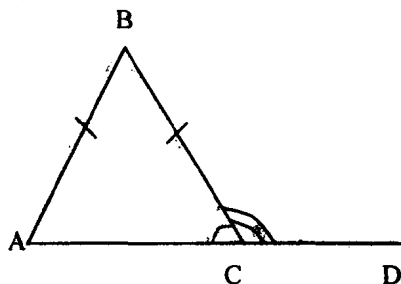
$$\angle A, \angle B, \angle C = ?$$

Решение:

Пусть $\angle B = x^\circ$, значит $\angle A = \angle C = 2x^\circ$

Из $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по теореме) следует, что $2x + x + 2x = 180$, $5x = 180$, $x = 36$ или $\angle B = 36^\circ$, $\angle A = \angle C = 72^\circ$.

б)

Дано: $AB=BC$, $\angle BCD = 3\angle C$

$$\angle A, \angle B, \angle C = ?$$

Решение:

Пусть $\angle C = x^\circ$, тогда $\angle A = x^\circ$, $\angle BCD = 3x^\circ$

Из $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (по свойству внешнего угла) следует, что $\angle B = 3x - x = 2x$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (по теореме о сумме углов треугольника)

значит $x + 2x + x = 180$, $4x = 180$, $x = 45$ или $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.

228.

а)

1) Дано: $AB=BC$,

$$\angle A=40^\circ$$

$$\angle A, \angle B, \angle C=?$$

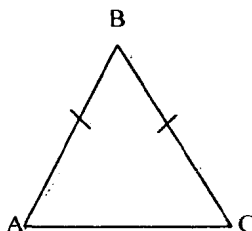
Решение:

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует, что:

$$\angle A=\angle C=40^\circ, \text{ тогда, } \angle B=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)=100^\circ.$$

(по теореме о сумме углов треугольника)

Ответ: $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$.



2)

Дано: $AB=BC$, $\angle B=40^\circ$

$$\angle A, \angle B, \angle C=?$$

Решение:

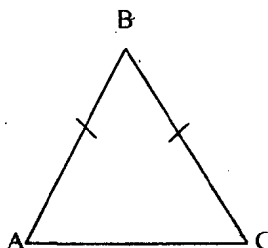
$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ (по теореме), значит

$$\angle A+\angle C=180^\circ-40^\circ \text{ или } \angle A+\angle C=120^\circ$$

Из $\angle A=\angle C$ (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника) следу-

$$\text{ет } \angle A=\angle C=120^\circ:2=60^\circ.$$

Ответ: $40^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.



б)

1)

Дано: $AB=BC$, $\angle A=60^\circ$

$$\angle A, \angle B, \angle C=?$$

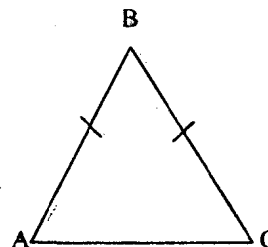
Решение:

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует, что

$$\angle A=\angle C=60^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle B=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=40^\circ. \text{ (по теореме о сумме углов треугольника)}$$

Ответ: $60^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.



2)

Дано: $AB=BC$, $\angle B=60^\circ$

$$\angle A, \angle B, \angle C=?$$

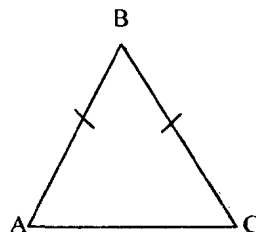
Решение:

$\angle B=60^\circ$, значит: $\angle A+\angle C=180^\circ-60^\circ$ (по теореме)

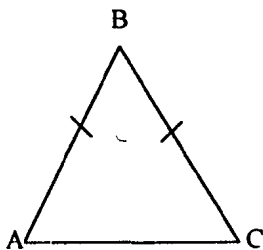
$$\text{значит } \angle A+\angle C=120^\circ$$

Из $\angle A=\angle C$ (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника, следует) $\angle A=\angle C=120^\circ:2=60^\circ$.

Ответ: $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.



в)



Дано. $AB=BC$, $\angle B=100^\circ$

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C=?$

Заметим, что $\angle A$, $\angle C < 90^\circ$ -- из ранее идущей задачи, значит именно $\angle B=100^\circ$

Решение:

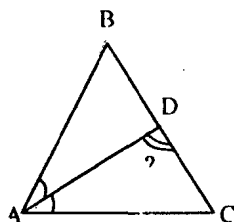
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (сумма углов треугольника) т.е.

$\angle A + \angle C = 180^\circ - 100^\circ$, тогда $\angle A + \angle C = 80^\circ$

$\angle A = \angle C$ (по свойству углов при основании равнобедренного треугольника) следует $\angle A = \angle C = 40^\circ$.

Ответ $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$.

229.



Дано: $\angle BAD = \angle CAD$, $AB=BC$, $\angle C=50^\circ$

$\angle ADC=?$

Решение:

Из $\triangle ABC$ -- равнобедренный, следует $\angle A = \angle C = 50^\circ$

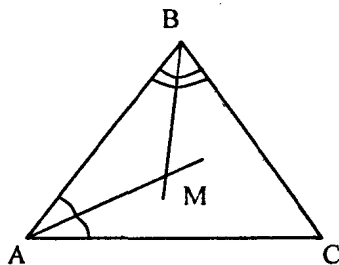
$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle A = 25^\circ$

$\angle DAC + \angle ADC + \angle C = 180^\circ$ (сумма углов треугольника)

значит $25^\circ + \angle ADC + 50^\circ = 180^\circ$ или $\angle ADC = 180^\circ - 75^\circ$, т.е. $\angle ADC = 105^\circ$

Ответ 105° .

230.



Дано: $\angle ABM = \angle CBM$,

$\angle BAM = \angle CAM$,

$\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 96^\circ$.

$\angle AMB=?$

Решение:

$\angle BAM + \angle MBA + \angle AMB = 180^\circ$ (сумма углов треугольника)

$\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \angle AMB = 180^\circ$ (т.к. AM

и BM биссектрисы), значит $\frac{1}{2} 58^\circ + \frac{1}{2} 96^\circ + \angle AMB = 180^\circ$,

$\angle AMB = 180^\circ - (29^\circ + 48^\circ)$, $\angle AMB = 103^\circ$

Ответ: 103°

231.

Дано: $AM = \frac{1}{2} BC$; $BM = MC$.

Доказать. $\triangle ABC$ прямоугольный.

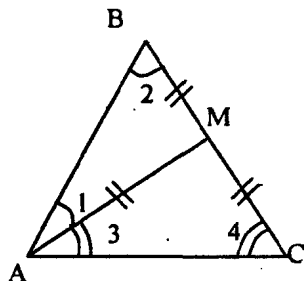
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle AMC$ и $\triangle BM$. Они равнобедренные, значит $BM = MA = MC$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Пусть $\angle 1 = \angle 2 = x^\circ$, $\angle 3 = \angle 4 = y^\circ$, из $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Следует $x + x + y + y = 180^\circ$ т.е. $x + y = 90^\circ$.

Но $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = x + y = 90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ прямоугольный. Ч.т.д.



232.

Дано: $\angle BCD = 2\angle A$.

Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренный.

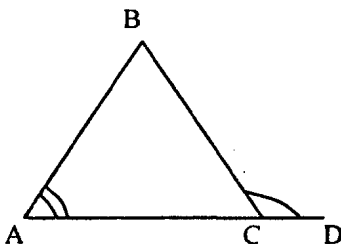
Доказательство:

Пусть $\angle A = x$, значит $\angle BCD = 2x$.

Из свойств внешнего угла имеем:

$\angle BCD = \angle A + \angle B$ т.е. $2x = x + \angle B$

Т.е. $\angle B = x$ т.е. $\angle A = \angle B$ значит $AC = BC$, следовательно $\triangle ABC$ – равнобедренный и обратное утверждение верно.



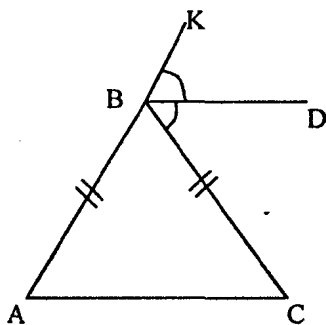
233.

Дано: $AB = BC$, $\angle KBD = \angle CBO$.

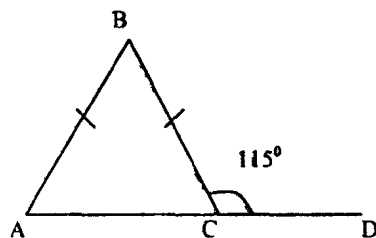
Доказать:

Доказательство:

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $\angle A = \angle C$, $\angle KBC$ – внешний, значит по предыдущей задаче $\angle KBC = 2\angle A$, следовательно $\angle KBD = \angle DBC = \angle A$, углы $\angle DBK$ и $\angle A$ – соответственные углы при прямых BD и AC и секущей AK и $\angle DBK = \angle A$, следовательно $BD \parallel AC$ по признаку параллельности прямых.



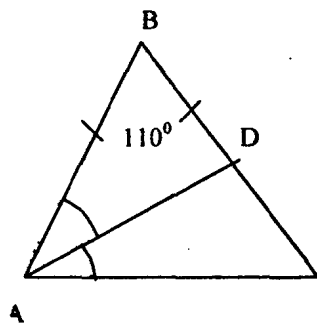
234.



Рассмотрим 2 случая:

1) Дано: $AB=BC$, $\angle BCD=115^\circ$
 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C=?$ Решение: $\angle C$, $\angle BCD$ - смежные, следовательно, $\angle C=180^\circ-115^\circ=65^\circ$, $\angle A=\angle C=65^\circ$ (как углы при основании равнобедренного тр-ка) $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$ (по теореме о сумме углов тр-ка), значит
 $\angle B=180^\circ-130^\circ=50^\circ$.Ответ: 65° ; 65° ; 50° .2) Дано: $AB=BC$, $\angle CBD=115^\circ$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C=?$ Решение: $\angle B$, $\angle CBD$ - смежные, тогда $\angle B=180^\circ-115^\circ=65^\circ$.Из $\angle A=\angle C$ (углы при основании равнобедренного тр-ка).Следует $\angle A=\angle C=(180^\circ-65^\circ):2=57,5^\circ$.Ответ: 65° ; $57^\circ 30'$; $57^\circ 30'$.

235.

Дано: $\angle BAD=\angle CAD$, $\angle ADB=110^\circ$,
 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C=?$ Решение:Пусть $\angle A=x^\circ$, тогда $\angle C=2x^\circ$ $\angle ADC=180^\circ-110^\circ=70^\circ$ т.к. $\angle AOB$ и $\angle AOC$ смежные $\angle A+\angle D+\angle C=180^\circ$ (сумма углов Δ).значит $x+70+2x=180^\circ$, $3x=110^\circ$

$$x=35\frac{2}{3}=36^\circ 40'$$

значит, $\angle DAC=36^\circ 40'$ $\angle C=2\cdot 36^\circ 40'=72^\circ 80'=73^\circ 20'$, ($1^\circ=60'$), $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$ (сумма углов треугольника),т.е. $73^\circ 20'+\angle B+73^\circ 20'=180^\circ$ или $\angle B=180^\circ-146^\circ 40'=179^\circ 60'-146^\circ 40'=33^\circ 20'$.Ответ: $73^\circ 20'$; $73^\circ 20'$; $33^\circ 20'$.

§ 2. Соотношение между сторонами и углами треугольника

236.

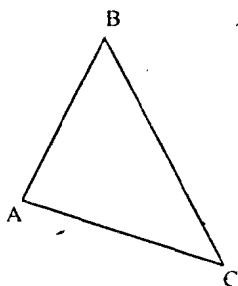
Может ли быть угол $\angle A$ тупым, если,

а) $AB > BC > AC$

AB – самая большая сторона значит, наибольшим углом может быть только $\angle C$. Но в треугольнике может быть только один тупой угол, значит $\angle A$ – не может быть тупым.

б) $AB = AC < BC$

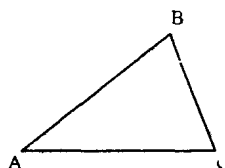
Из $AB = BC$, следует $\triangle ABC$ – равнобедренный значит $\angle C = \angle B$ и они могут быть только острыми углами $BC > AB = AC$, следовательно $\angle A > \angle C = \angle B$. и $\angle A$ может быть тупым.



237.

а) $\angle A > \angle B > \angle C$, тогда $BC > AC > BA$;

б) $\angle A > \angle B = \angle C$, тогда $BC > AC = BA$.



238.

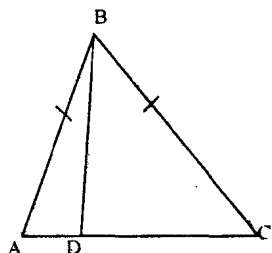
Дано: $AB = BC$.

Доказать: $BD < AB$.

Доказательство:

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $\angle A = \angle C$ – острые $\angle ADB$ и $\angle CDB$ – смежные и один из них тупой, другой острый или оба по 90° .

Если $\angle ADB$ – тупой, то он наибольший в $\triangle ADB$, тогда $AB > BD$, если $\angle CDB$ – тупой в $\triangle CDB$, то $BC > BD$ и $AB = BC > BD$ ч.т.д.



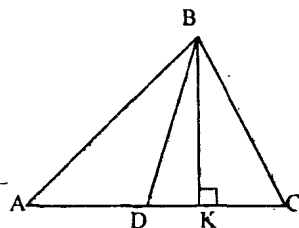
239.

Дано: BD – медиана, BK – высота.

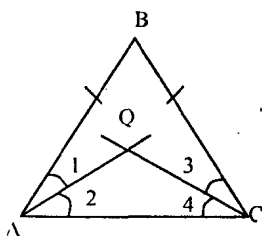
Доказать: $BK \leq BD$.

Доказательство:

$\angle K = 90^\circ$ – наибольший в $\triangle DBK$, тогда из неравенства треугольника имеем $BD > BK$. $BD = BK$ когда $\triangle ABC$ равнобедренный, и медиана с высотой опущены на основание, либо когда $\triangle ABC$ – равнобедренный.



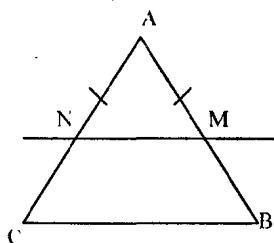
240.

Дано: $AB=BC$, AO и CO – биссектрисы.Доказать: $\triangle AOC$ – равнобедренный.Доказательство:

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $\angle A = \angle C$, AO , CO – биссектрисы равных углов, значит $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

т.к. $\angle 2 = \angle 3$ то $AO = CO$, следовательно $\triangle AOC$ – равнобедренный

241.

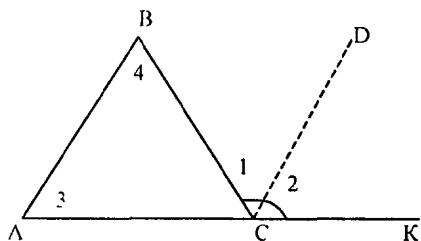
Дано: $AB=AC$, $NM \parallel BC$.Доказать: $\triangle AMN$ равнобедренный.Доказательство: $NM \parallel BC$, значит

$\angle C = \angle N$, $\angle B = \angle M$, как соответственные углы при параллельных прямых

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, то $\angle B = \angle C$. Значит, $\angle N = \angle C = \angle B = \angle M$.

Следовательно, $\triangle AMN$ – равнобедренный.

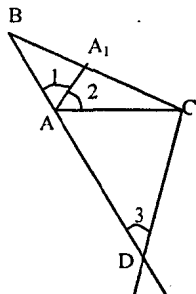
242.

Дано: CD биссектриса,угла $\angle BCK$, $DC \parallel AB$ Доказать: $\triangle ABC$ – равнобедренныйДоказательство:

$CD \parallel AB$, значит $\angle 2 = \angle 3$ (соответственные при параллельных), $\angle 1 = \angle 4$ (накрест лежащие при параллельных).

$\angle 2 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 2$ тогда $\angle 3 = \angle 4$, и $\triangle ABC$ равнобедренный по признаку

243.

Дано: AA_1 – биссектриса $\angle A$, $CD \parallel AA_1$.Доказать: $AC = AD$.Доказательство: $DC \parallel AA_1$ значит $\angle 1 = \angle 3$ (как соответственные) $DC \parallel AA_1$ значит $\angle A_1AD + \angle 3 = 180^\circ$ (как односторонние) $\angle 2 + \angle CAD + \angle 3 = 180^\circ$ (1)

$\angle 3 + \angle CAD + \angle 4 = 180^\circ$ (2) (сумма углов треугольника)

Откуда из (1) и (2) $\angle 4 = \angle 2$, тогда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 4$, т.е. $AC = AD$, ч.т.д.

244.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $DE \parallel AC$.

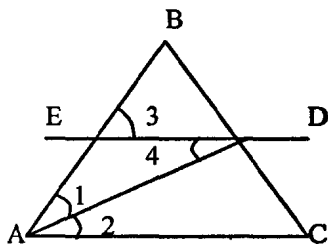
Доказать: $\triangle ADE$ – равнобедренный.

Доказательство:

$AC \parallel ED$ значит $\angle 1 = \angle 3$ (как соответственные углы)

$\angle 2 = \angle 4$ (как накрест лежащие углы)

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, тогда $\angle 1 = \angle 4$, т.е. $\triangle ADE$ – равнобедренный по признаку и $AE = ED$.



245.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$, $MN \parallel BC$.

Доказать: $MN = BM + CN$.

Доказательство:

$MN \parallel BC$, значит $\angle 1 = \angle 3$, как накрест лежащие углы

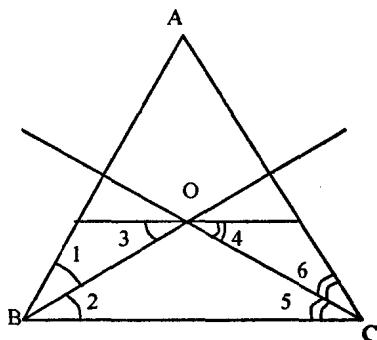
$\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$, значит

$\angle 2 = \angle 3$, тогда $\triangle CNO$ – равнобедренный и $CN = NO$

$MN \parallel BC$, значит $\angle 4 = \angle 5$, как накрест лежащие углы, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$

значит, $\angle 4 = \angle 6$, тогда $OM = MB$.

Следовательно, $MN = NO + OM = CN + BM$ ч.т.д.



246.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 4 = \angle 5$,

$OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$.

Доказать: $P_{\triangle OED} = BC$.

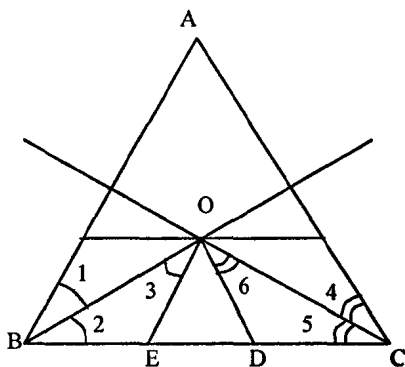
Доказательство:

$OE \parallel AB$, значит $\angle 1 = \angle 3$, как накрест лежащие углы

Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

тогда $\angle 2 = \angle 3$, и $BE = OE$ (по свойству равнобедренного треугольника)

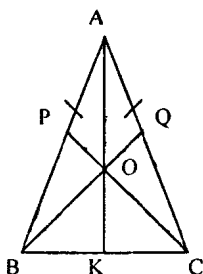
$OD \parallel AC$, значит $\angle 4 = \angle 6$, как накрест лежащие углы.



Тогда $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, значит, $\angle 5 = \angle 6$, и $CD = OD$ (по свойству равнобедренного треугольника).

Тогда, $P_{\Delta OED} = OE + ED + DO = BE + ED + DC = BC$ ч.т.д.

247.



Дано: $AB = AC$, $AP = AQ$.

Доказать:

а) ΔBOC – равнобедренный

б) $BK = KC$, $AK \perp BC$

Доказательство:

Рассмотрим ΔCQB и ΔBPC :

$BP = AP - PA = AC - AQ = CQ$

$\angle B = \angle C$ (как углы при основании равнобедренного тр-ка)

сторона BC – общая, значит $\Delta BPC = \Delta CQB$ по 1-му признаку равенства тр-ов, следовательно $\angle PCB = \angle QCB$ – равнобедренный по признаку.

Рассмотрим ΔAOB и ΔAOC :

сторона AO – общая, $BO = OC$, $AB = AC$.

Значит $\Delta AOB = \Delta AOC$ (по 3-му признаку равенства тр-ов)

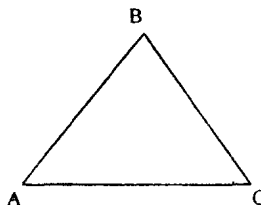
Следовательно $\angle BAO = \angle CAO$, значит AO – биссектриса ΔABC равнобедренного и по свойству биссектрисы опущенной на основание, AK – медиана и высота ч.т.д.

248.

а) Не существует т.к. $1+2=3$ – противоречие с неравенством треугольника

б) треугольник не существует, так как $1,2+1 < 2,4$.

249.



Дано: $AB = BC$, $a = 25$ см, $b = 10$ см.

Какая из сторон является основанием?

$B = AC = 10$ см, $a + a = AB + BC > AC$, $25 + 25 > 10$ – верно:

если $AC = 25$, то $AB = BC = 10$, $10 + 10 < 25$ – противоречие с неравенством треугольника.

Значит, основание $b = 10$ см.

250

а) $a=5$ см, $b=3$ см, $c=?$

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $c=5$ см или $c=3$ см $\left[\begin{array}{l} 5+5>3 \\ 3+3>5 \end{array} \right]$ —

верно.

б) $a=8$ см, $b=2$ см, $c=?$

Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $c=8$ см. $8+8>2$ – верно.

в) $a=10$ см, $b=5$ см, $c=?$

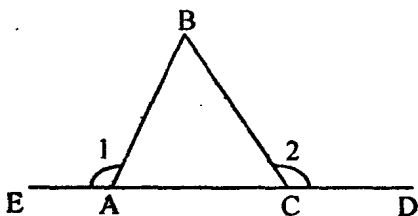
Из $\triangle ABC$ – равнобедренный, следует $c=10$ см. $10+10>5$ – верно.

251.

Решение приведено в книге

252.

Дано: $\angle 1 > \angle 2$, $P_{ABC}=74$ см,
 $AC=16$ см, $AB, BC=?$



Решение

Из $\angle 1 = \angle 2$, следует $\angle A = \angle C$
как целые смежные с равными
углами, значит, $\triangle ABC$ – рав-
нобедренный по признаку.

Пусть $AC = 16$ см, и $AB=BC=x$ см, тогда $AB+BC+AC=74$, или
 $x+x+16=74$, $2x=58$, $x=29$, $AB+BC=29$ см; $29+29>16$ – верно.

Пусть $AB=BC=16$ см, и $AC=x$ см, тогда $16+16+x=74$, $32+x=74$,
 $x=74-32$, $x=42$, $AC=42$ см, но $16+16<42$ – противоречие с неравенст-
вом треугольника, значит второе предположение неверно, а верно
только первое.

Ответ: 16 см; 29 см; 29 см.

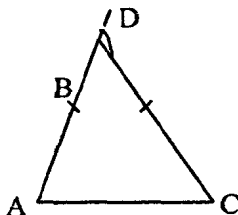
253.

Дано: $AB=BC$

$P_{ABC}=25$ см.

$\angle DBC$ – острый.

$AB, BC, AC = ?$



Решение

Пусть $AB=BC=x$ см, тогда $AC=x+4$ см

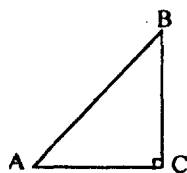
$P_{ABC}=AB+BC+AC$, значит

$25=x+x+x+4$, $21=3x$, тогда $x=7$, следова-
тельно, $AB=BC=7$ см, $AC=11$ см.

Ответ: 7 см, 7 см, 11 см.

§ 3 Прямоугольные треугольники

254.



Дано: $AC=BC$, $\angle C=90^\circ$, $\angle A$, $\angle B = ?$

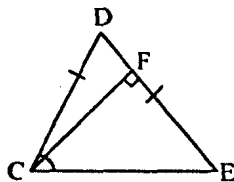
Решение

$\angle A + \angle B = 90^\circ$ (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle A = \angle B$, значит $\angle A = \angle B = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Ответ: 45° , 45° .

255.



Дано: $CD=DE$, $\angle D=54^\circ$, $\angle C=\angle E=126:2=63^\circ$

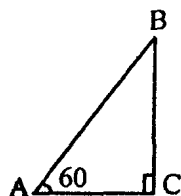
$\angle FCD=90^\circ-\angle D$ (по свойству прямоугольного треугольника),

$\angle FCD=90^\circ-54^\circ=26^\circ$,

$\angle ECF=\angle C-\angle FCD=63^\circ-26^\circ=37^\circ$.

Ответ: 37° .

256.



Дано: $\angle C=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AB+AC=26,4$ см, $AB=?$

Решение

$\angle B=90^\circ-\angle A$ (по свойству прямоугольного треугольника), $\angle B=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

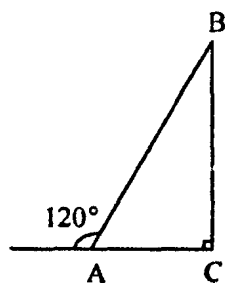
Т.к. сторона, лежащая против угла 30° , равна $\frac{1}{2}$

гипотенузы, то $AC=\frac{1}{2} AB$

$AB+AC=26,4$ значит $AB+\frac{1}{2} AB=26,4$, т.е. $AB=17,6$ см.

Ответ: 17,6 см.

257.



Дано: $\angle C=90^\circ$, внешний при $\angle CA=120^\circ$, $AC+AB=18$ см, AC , $AB=?$

Решение

$\angle BAC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ - по свойству смежных углов, $\angle B=90^\circ-\angle A$ (по свойству угла прямоугольного треугольника)

значит $\angle B=90^\circ-\angle 60^\circ=30^\circ$, и следовательно, по свойству прямоугольного треугольника

имеем, что $AC = \frac{1}{2} AB$, $AB = 2AC$.

$AC + AB = 18$, значит $AC + 2AC = 18$ т.е. $AC = 6$ см

Ответ: 6 см; 12 см.

258.

$AB = BC = AC = 12$ см, $BD = DC$, $\angle DMC = 90^\circ$.

$AM = ?$

Решение

$\triangle ABC$ – равносторонний

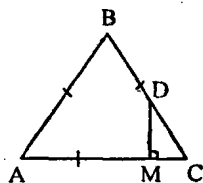
$\angle B = \angle A = \angle C = 180^\circ : 3 = 60^\circ$

$\angle MDC = 90^\circ - \angle C$ (по свойству прямоугольного треугольника), $\angle MDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, и по свойству прямоугольного треугольника $MC = \frac{1}{2} DC$; $BD = DC$, значит $DC = \frac{1}{2} BC$, т.е.

$MC = \frac{1}{4} BC = 3$ см.

$AM = AC - MC = 12 - 3 = 9$ см.

Ответ 9 см.



259.

Дано: $AB = BC$, $\angle B = 120^\circ$; $\angle ANB = 90^\circ$;

$AN = 9$, $AC = ?$

Решение

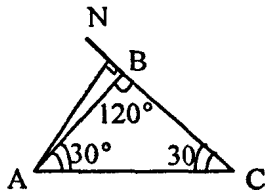
$AB = BC$, значит $\angle BAC = \angle BCA$.

$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ – по теореме о сумме углов треугольника.

Тогда $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ : 2 = 30^\circ$, следовательно по свойству прямоугольного треугольника $AN = \frac{1}{2} AC$, значит $AC = AN \cdot 2$,

$AC = 9 \cdot 2 = 18$ см.

Ответ 18 см.



260.

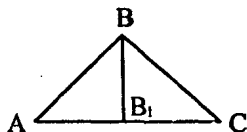
Дано: $AB = BC = 15,2$; $\angle BB_1C = 90^\circ$, $BB_1 = 7,6$ см

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C = ?$

Решение

Из условия видим $BB_1 = \frac{1}{2} BC$, тогда по свой-

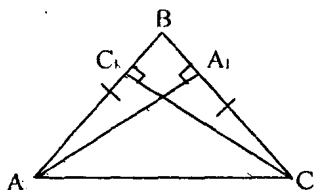
ству прямоугольного треугольника $\angle BCB_1 = 30^\circ$, значит $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ$



$\triangle ABC$ – равнобедренный, но $\angle ABC = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ (сумма углов треугольника).

Ответ: 30° ; 30° ; 120° .

261.



Дано: $AB=BC$, AA_1 , CC_1 – высоты.

Доказать: $AA_1=CC_1$.

Доказательство

$\triangle ABC$ равнобедренный, значит

$$\angle C_1AC = \angle A_1CA$$

$$\angle A_1AC = 90^\circ - \angle A_1CA =$$

$$= 90^\circ - \angle C_1AC = \angle CCA_1$$

Рассмотрим $\triangle A_1AC$ и $\triangle C_1CA$: сторона AC – общая

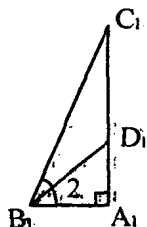
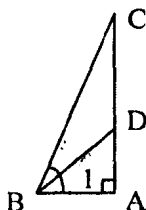
$\angle A_1AC = \angle C_1CA$, $\angle C_1AC = \angle A_1CA$ по 2-му признаку равенства треугольников.

Значит $\triangle A_1AC = \triangle C_1CA$

Следовательно, $AA_1 = CC_1$

Что и требовалось доказать.

262.



Дано: $\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$, $\angle B = \angle B_1$, BD , B_1D_1 – биссектрисы, $BD = B_1D_1$.

Доказать $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

$\angle B = \angle B_1$, BD и B_1D_1 – биссектрисы, $\angle 1 = \angle 2$

Рассмотрим $\triangle A_1B_1D_1$ и $\triangle ABD$: $BD = B_1D_1$, $\angle 1 = \angle 2$

Значит $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно $AB = A_1B_1$

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

$$AB = A_1B_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

$$\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$$

Значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

263.

Дано: $AB=AC$, CC_1 , BB_1 –
высота, $\angle BMC=140^\circ$, $\angle A$, B ,
 $C=?$

Решение

$180^\circ - 140^\circ = \angle 1$ (как смежные)

$\angle 1 = 40^\circ$, значит $\angle B_1CC_1 = 90^\circ -$

$40^\circ = 50^\circ$ (по свойству углов

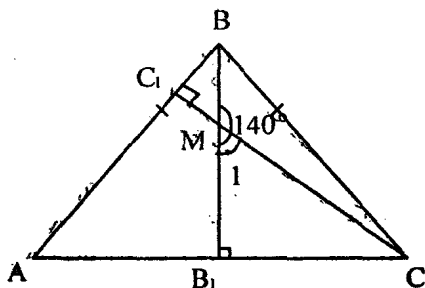
прямоугольного треугольни-

ка), $\angle A = 90^\circ - \angle B_1CC_1 = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$ (сумма углов

треугольника).

Тогда $\angle B + \angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$; т.к. $AB=AC$, то $\angle B = \angle C = 70^\circ$.

Ответ: 40° ; 70° ; 70° .



264.

Дано: AA_1 и BB_1 – высоты,

$\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 67^\circ$, $\angle AMB=?$

Решение

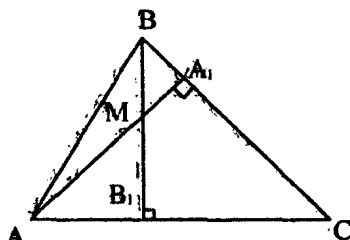
$\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle BAB_1 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

(свойство углов прямоугольного, треугольника)

Тогда, $\angle AMB = 180^\circ - \angle BAM - \angle ABM =$

$= 180^\circ - 23^\circ - 35^\circ = 122^\circ$.

Ответ: 122° .



265.

Дано: $\angle FAN$, $\angle HFA=?$

$AB=BC$, $\angle B = 112^\circ$; $\angle 1 = \angle 2$;

$\angle ANF = 90^\circ$

Решение

$\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$;

$\angle A + \angle C = 180^\circ - 112^\circ$ (по теореме
о сумме углов треугольника).

$\angle A + \angle C = 68^\circ$, $\angle A = \angle C$,

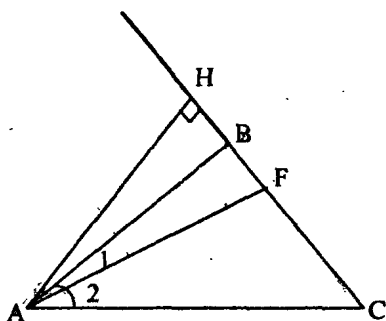
$\angle A = \angle C = 68^\circ : 2 = 34^\circ$ ($AB=BC$)

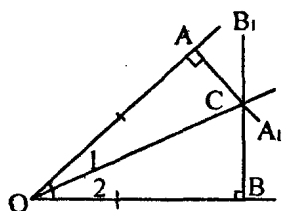
$\angle BFA = 180^\circ - \angle B - \angle BAF$, $\angle BAF = \angle 1 = 34^\circ : 2 = 17^\circ$,

Тогда $\angle BFA = 180^\circ - 112^\circ - 17^\circ = 51^\circ$.

$\angle HAF = 90^\circ - \angle HFA = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$.

Ответ: 90° , 51° , 39° .





Дано: $OA=OB$, $AA_1=BB_1$.

Доказать: OC – биссектриса

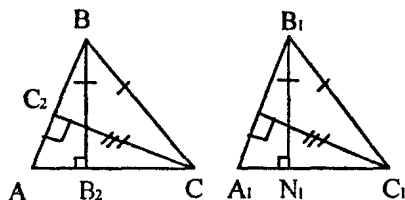
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle OBC$ и $\triangle OAC$.

Сторона OC – общая, $OA=OB$

Значит $\triangle OBC = \triangle OAC$ (по катету и гипотенузе), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и OC – биссектриса что и требовалось доказать.

267.



Дано:

CC_2 , BB_2 , C_1M_1 , B_1N_1 высоты,

$BB_2=B_1N_1$, $CC_2=C_1M_1$,

$BC=B_1C_1$,

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle N_1B_1C_1$ и $\triangle B_2BC$:

$BC=B_1C_1$, $BB_2=B_1N_1$.

Значит $\triangle B_2BC = \triangle N_1B_1C_1$ (по гипотенузе и катету)

Следовательно $\angle C = \angle C_1$

Рассмотрим $\triangle M_1B_1C_1$ и $\triangle C_2BC$:

$BC=B_1C_1$, $C_2C=M_1C_1$, $\angle C_2BC = \angle M_1B_1C_1$ (по гипотенузе и катету).

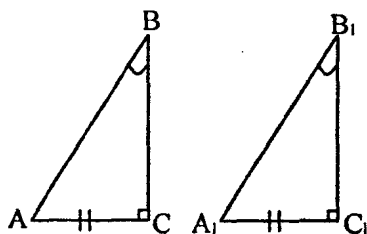
Следовательно $\angle B = \angle B_1$

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

$BC=B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Значит $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников)

268.



Дано:

$\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$

$\angle B = \angle B_1$

$AC = A_1C_1$

Доказать:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

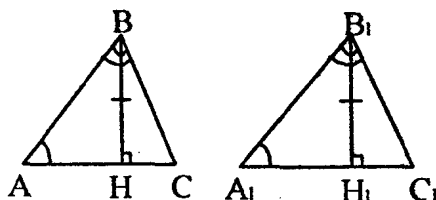
Доказательство:

$\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle B_1 = \angle A_1$

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

$AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (по второму признаку равенства треугольников)

Значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ч.т.д.



Дано: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BH = B_1H_1$ – высоты, $BH = B_1H_1$

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

$\triangle A_1B_1H_1$ и $\triangle ABH$:

$BH = B_1H_1$

$\angle A = \angle A_1$

Значит $\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ (по катету и острому углу)

Следовательно $AB = A_1B_1$

$\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$:

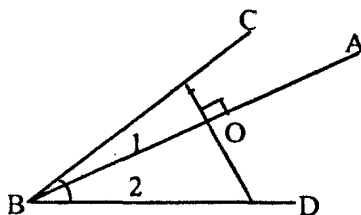
$AB = A_1B_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$ (по второму признаку равенства треугольников)

Значит $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ч.т.д.

270.



Построить

а – прямую через А,
где $BC = BD$

План построения:

построим биссектрису BM данного угла $\angle B$

через A проведем перпендикуляр CD к BM

рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle BOC$:

BO общая

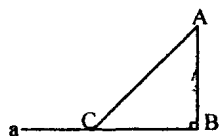
$\angle 1 = \angle 2$

Значит $\triangle BOC = \triangle BOD$ (по катету и острому углу)

Следовательно, $BC = BD$ и прямая CD искомая.

§4. Построение треугольника по трем элементам

271.



Дано: $\angle ABC = 90^\circ$, $AB + AC = 17$ см.

$AC - AB = 1$ см. $AB = ?$

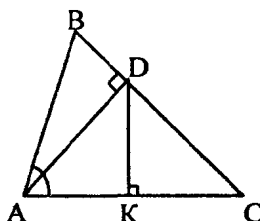
Решение

Пусть $AB = x$, $AC = y$, тогда

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 18 \\ 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 8 \end{cases} \text{ Значит } AB = 8 \text{ см.}$$

Ответ 8 см.

272.



Дано: $AB = BC = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$,

$\angle DKA = 90^\circ$, $DK = 6$ см, $AD = ?$

Решение

$\triangle ABC$ – равносторонний, значит

$\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$\angle DKA = 90^\circ$, $\angle DAK = 30^\circ$, (т.к. AD – биссектриса).

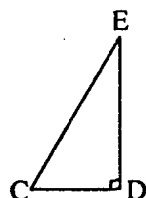
$DK = 6$ см;

DK – лежит против угла 30° , значит $AD = 2DK$; (по свойству)

т.е. $AD = 12$ см

Ответ 12 см.

273.



Дано: $\angle D = 90^\circ$, $CE + CD = 31$ см, $CE - CD = 3$ см, $CD = ?$

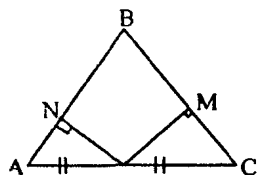
Решение:

Пусть $CE = x$ см, $CD = y$ см, тогда

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 34 \\ 2y = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 14 \end{cases} \text{ значит } CD = 14 \text{ см.}$$

Ответ: 14 см.

274.



Дано: $AB = BC$, $AK = KC$, $KM \perp BC$, $KN \perp AB$

Доказать: $KN = KM$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle CKM$ и $\triangle AKN$:

$AK = KC$, $\angle A = \angle C$ (из $\triangle ABC$ – равнобедренный)

Значит, $\triangle AKN = \triangle CKM$ (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно, $KN = KM$, чтд.

275.

Дано: $AC=CB$, $ME \perp AC$, $MK \perp BC$, $ME=MK$.

Доказать: $CM \perp AB$.

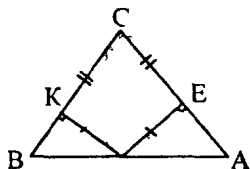
Доказательство:

Рассмотрим $\triangle EAM$ и $\triangle BKM$:

$KM=EM$, $\angle B=\angle A$ (из $\triangle ABC$ – равнобедренный)

Значит $\triangle BKM \cong \triangle EAM$ (по катету и острому углу)

Следовательно, $BM=MA$, значит, CM – медиана равнобедренного треугольника, опущенная на основание, $CM \perp AB$, по свойству равнобедренного треугольника, чтд.



276.

Дано: $AO=OB$, $AA_1 \perp BB_1 \perp l$.

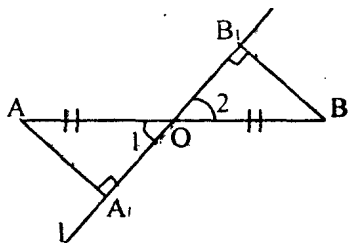
Доказать: $AA_1=BB_1$.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle BB_1O$ и $\triangle AA_1O$:

$AO=BO$, $\angle 1=\angle 2$ т.к. они вертикальные, значит, $\triangle AA_1O \cong \triangle BB_1O$ (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно, $AA_1=BB_1$ чтд.



277.

Дано: $a \parallel b$, $AB \perp a$, $AB=3$ см.

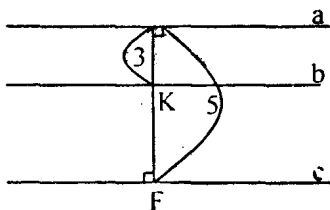
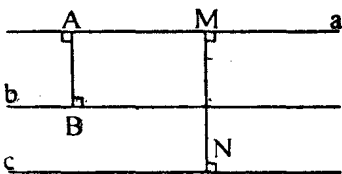
$a \parallel c$, $MN \perp a$, $MN=5$ см

Найти: расстояние между c и b

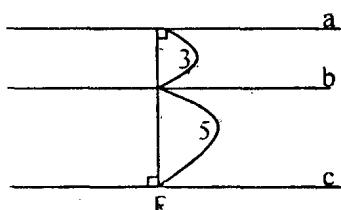
Решение:

$a \parallel b$, $a \parallel c$, $b \parallel c$ (по свойству параллельных прямых).

Рассмотрим 2 случая:



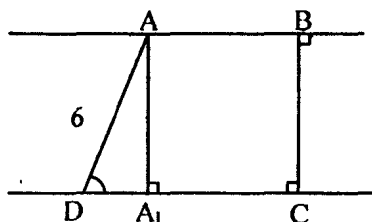
$$KF=5-3=2 \text{ см.}$$



$$KF=3+5=8 \text{ см}$$

Ответ 2 см или 8 см.

278.



Дано. $AB \parallel CD$, $\angle ADC = 30^\circ$,
 $AD = 6$ см, $BC \perp AB$, $BC = ?$

Решение:

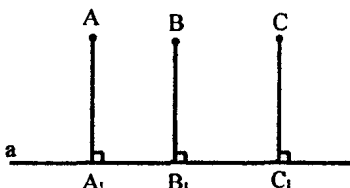
$\angle A_1 = 90^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, AA_1 лежит против угла 30° , значит

$$AA_1 = \frac{1}{2} AD, AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ см.}$$

$$AA_1 = BC, BC = 3 \text{ см.}$$

Ответ 3 см.

279.



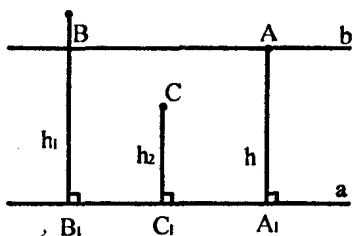
Дано: $AA_1 \perp a$, $BB_1 \perp a$, $CC_1 \perp a$,
 $AA_1 = BB_1 = CC_1$

Доказать: A, B, C – принадлежат одной прямой.

Доказательство:

по аксиоме параллельных прямых через A проведем прямую b, $b \parallel a$.

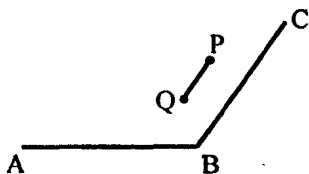
Тогда, все точки b точки равноудалены от точек прямой a. Докажем, что B, C $\in$ b.



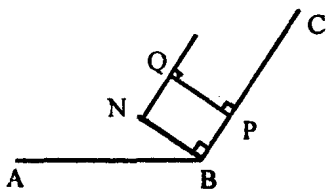
Пусть $B \notin b$, $C \notin b$, значит расстояние от точки B до a и C будет больше или меньше, чем расстояние h. Но это противоречит $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Следовательно, наше предположение неверно, и A, B, C $\in$ b чтд.

280.



Найти множество всех точек, внутри $\angle ABC$, удаленных от BC на расстояние PQ.

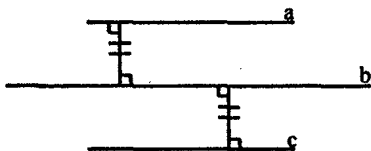


$NQ \parallel BC$, $BN \perp BC$

Значит луч NQ и есть искомое множество точек.

281.

Ответ: прямая с параллельная данным и находящаяся на равных расстояниях от них (см. рис).



282.

Дано: $a \parallel b$, $XO = OY$.

Доказать: $O \in c$, где

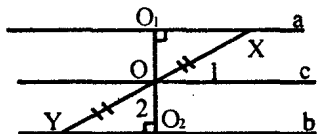
$c \parallel a \parallel b$ и $OO_1 = OO_2$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle OO_2Y$ и $\triangle OO_1X$:

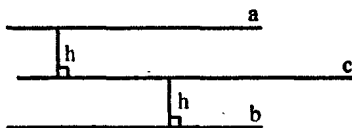
$OX = OY$, $\angle 1 = \angle 2$ т.к. они вертикальные, $\triangle OO_1X = \triangle OO_2Y$ (по гипотенузе и острому углу)

Следовательно, $OO_1 = OO_2$, O – равноудалена от a и b , значит по предыдущей задаче она лежит на прямой $c \parallel a \parallel b$.



283.

Ответ: две прямые, параллельные данной и расположенные на одном расстоянии h по разные стороны от c . См. рис.



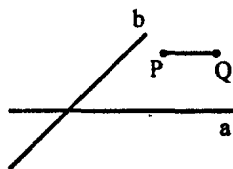
284.

Решение приведено в книге.

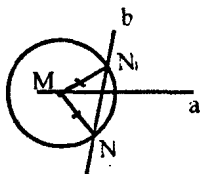
285.

Построить $M \in a$, $MN = PQ$, и $N \in b$.

Задача может и не иметь решения

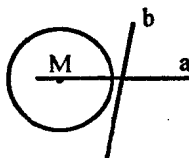


1)



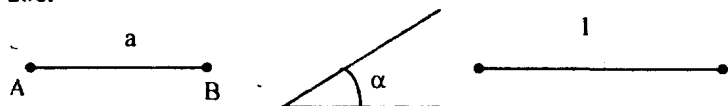
На прямой b существуют две точки N и N_1 , такие, что $MN = MN_1 = PQ$. См. рис. 1

2)



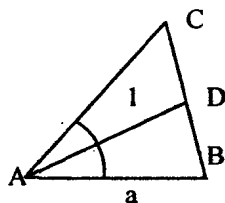
Нет решения, когда на b нет точек удаленных от M на PQ . См. рис 2.

286.

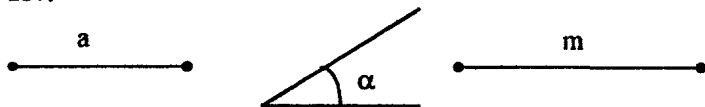


План построения:

- 1) отрезок $AB=a$
- 2) угол $A=\alpha$
- 3) биссектрису $AD=1$
- 4) соединить B и D прямой
- 5) BD пересекает сторону угла A в точке C
- 6) треугольник ABC построен

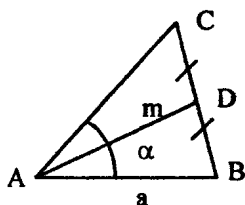


287.



План построения.

- а) отрезок $AB=a$;
- б) угол $BAD=\alpha$;
- в) $AD=m$;
- г) соединить прямой точки B и D ;
- д) отложим отрезок $CD=BD$;
- е) соединим точки A и C
- ж) треугольник ABC – построен.



288.



Построить $\triangle ABC$: $AB=PQ$,

$$\angle ABC = \angle hk, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle hk.$$

План построения:

- а) $AB=PQ$
- б) $\angle B = \angle hk$
- в) $\angle A = \frac{1}{2} \angle hk$ – строим биссектрису
- г) стороны $\angle A$ и $\angle B$ пересекаются в точке C .

Построить $\triangle ABC$: $AB=PQ$, $\angle ABC=\angle hk$, $\angle BAC=\frac{1}{4}\angle hk$

План построения:

а) $AB=PQ$

б) $\angle B=\angle hk$

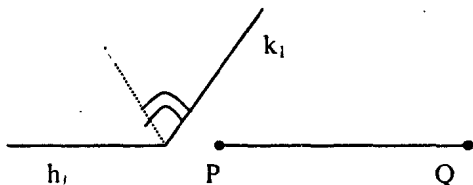
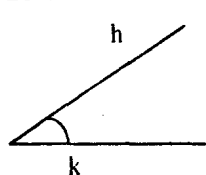
в) $\angle A=\frac{1}{4}\angle hk$

г) стороны $\angle A$ и $\angle B$ пересекаются в точке C .

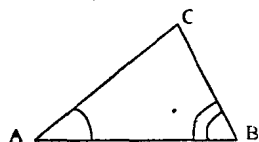
д) треугольник ABC построен.

Для построения $\frac{1}{4}\angle hk$. надо построить биссектрису угла, а затем биссектрису его половинки.

289.



Построить $\triangle ABC$: $AB=PQ$, $\angle A=\angle hk$, $\angle B=\frac{1}{2}\angle h_1k$.



План построения

а) $AB=PQ$

б) $\angle B=\angle hk$

в) $\angle A=\frac{1}{2}\angle h_1k$

г) стороны углов A и B пересекаются в точке C

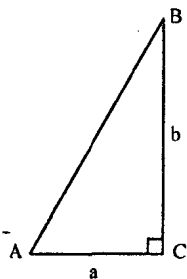
д) $\triangle ABC$ – искомый

290.

а)

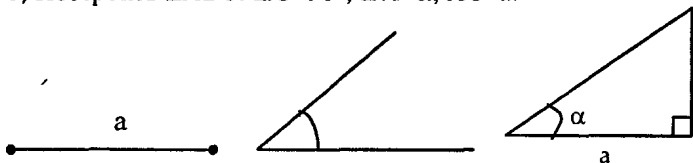


Построить $\triangle ABC$ $\angle C=90^\circ$. $AC=a$. $CB=b$.



План построения:

- а) Построить прямой $\angle C$
- б) На одной стороне отложить $AC=a$, а на другой $BC=b$
- в) соединить А и В.
- г) искомый $\triangle ABC$ построен.
- б) Построить $\triangle ABC$: $\angle C=90^\circ$, $\angle A=\alpha$, $AC=a$.



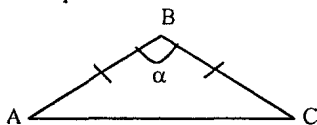
План построения:

- а) построить прямой $\angle C$
- б) отложить на стороне $AC=a$
- в) построить $\angle A=\alpha$
- г) стороны углов А и С пересекаются в В
- д) $\triangle ABC$ – построен.

291.



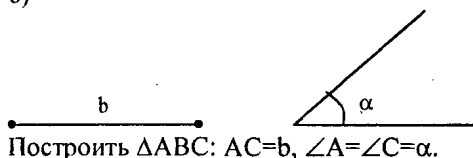
Построить $\triangle ABC$: $AB=BC=a$, $B=\alpha$



План построения:

- а) $\angle B=\alpha$
- б) на стороне угла отложить отрезки $BC=a=AB$
- в) соединить точки А и С
- г) $\triangle ABC$ – построен.

б)



Построить $\triangle ABC$: $AC=b$, $\angle A=\angle C=\alpha$.

План построения:

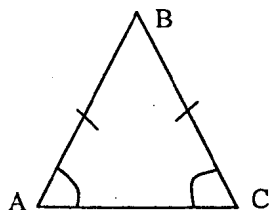
а) $AC=b$

б) $\angle A=\angle C=\alpha$

в) Стороны пересекаются в В

г) $\triangle ABC$ – построен.

в)



Построить $\triangle ABC$: $AB=BC=c$, $\angle A=\angle C=\beta$

План построения:

а) $AB=c$

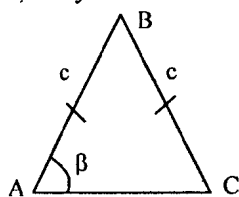
б) $\angle A=\beta$

в) $\angle B=180^\circ-2\beta$

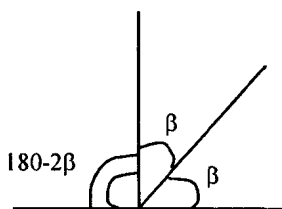
г) на стороне угла В отложить $BC=c$

д) соединить А и С

е) получаем $\triangle ABC$



г)



Построить $\triangle ABC$: $AB=BC=b$, $AC=a$

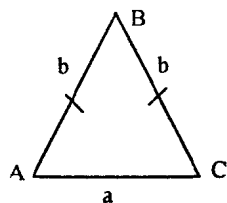
План построения:

а) $AC=a$

б) две окружности с центрами в А и С и радиусом b

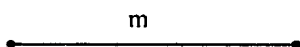
в) окружности пересекутся в В

г) соединим А и В и В и С

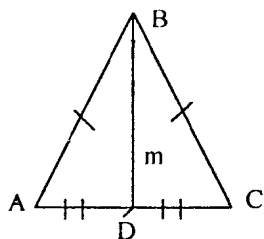


д) получается $\triangle ABC$

д)



Построить $\triangle ABC$. $AC=a$, $AB=BC$, $BD=m$



План построения:

а) $AC=a$

б) D – середине AC

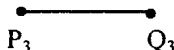
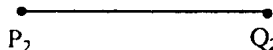
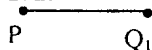
в) медиана равнобедренного треугольника является высотой, тогда построим $\angle D=90^\circ$

г) на стороне угла D отложим $DB=m$

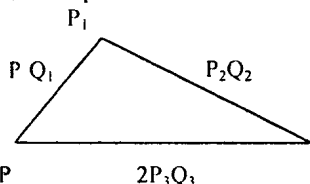
д) соединим A и B, и B и C

е) получаем треугольник ABC.

292.



а) Построить $\triangle ABC$: $BC=P_2Q_2$, $AC=2P_3Q_3$, $AB=P_1Q_1$



План построения:

а) $AB=P_1Q_1$

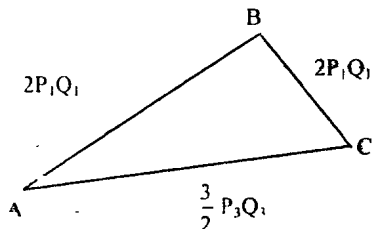
б) окружность с центром в точке A и радиусом P_2Q_2

в) окружность с центром в точке B и радиусом $2P_3Q_3$

г) окружности пересекутся в точке C

д) получаем $\triangle ABC$.

б) Построить $\triangle ABC$: $AB=2P_1Q_1$, $BC=2P_2Q_2$, $AC=\frac{3}{2}P_3Q_3$



План построения аналогичен пункту а). Задача имеет решение когда выполняется неравенство треугольника.

293.

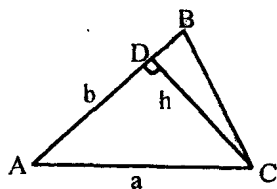
Решение задачи приведено в книге.

294.

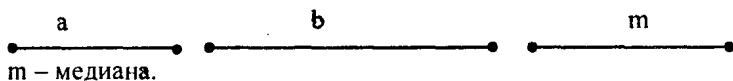
Построить $\triangle ABC$: $AB=b$, $AC=a$, $CD=c$,
 $CD \perp AB$.

План построения:

- $\angle D = 90^\circ$
- На одной стороне отложить $DC=h$
- окружность с центром в C и радиусом a
- окружность пересечет вторую сторону $\angle D$ в точке A .
- $AB=b$
- получаем $\triangle ABC$.



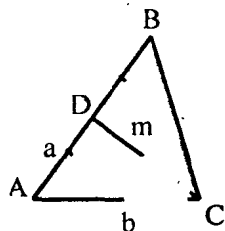
295.



Построить $\triangle ABC$.

План построения:

- $AB=a$
- точку D – середину AB ,
- окружность с центром в D и $R=m$ и окружность с центром в точке A и радиусом b
- окружности пересекаются в C
- Соединить B и C .
- получаем $\triangle ABC$.



296.

Дано: $AB=BC$

$\angle B = \angle C$

BB_1, CC_1 – биссектрисы

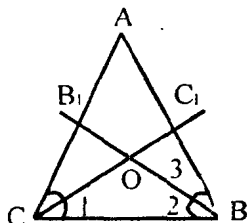
Доказать: $\angle BOC = \angle CBN$.

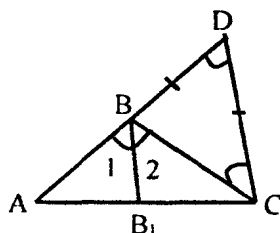
Доказательство:

$\angle BOC = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$ (по теореме о сумме углов треугольника)

$\angle NBC = 180^\circ - \angle 3 - \angle 2$ (как смежные)

$\angle B = \angle C$, CC_1 и BB_1 – биссектрисы, значит $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle BOC = \angle NBC$, что и требовалось доказать.





Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $BD = BC$, $D = \angle C$.

Доказать: $BB_1 \parallel DC$.

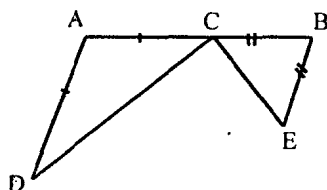
Доказательство:

$\angle D + \angle C = 180^\circ - \angle DBC = \angle 1 + \angle 2$, т.е.

$\angle D + \angle C = \angle 1 + \angle 2$, но $\angle D = \angle C$, значит

$\angle D = \angle C = \angle 1 = \angle 2$, $\angle C$ и $\angle 2$ накрест лежащие при BB_1 и DC и секущей BC , значит $BB_1 \parallel DC$ (по признаку) чтд.

298.



Дано: $AD \parallel BE$

$AD = AC$, $\angle ADC = \angle ACD$

$CB = BE$, $\angle BCE = \angle BEC$

Доказать: $\angle DCE$ – прямой.

Доказательство:

$AD \parallel BE$, значит $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (как односторонние)

$\angle A + \angle ADC + \angle ACD + \angle B + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

Тогда, $\angle ADC + \angle ACD + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ$, так как (значит $\angle A + \angle B = 180^\circ$)

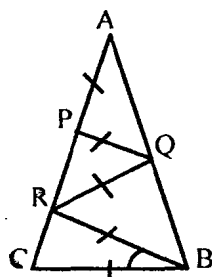
$\angle ADC = \angle ACD$, $\angle BCE = \angle BEC$, следовательно,

$\angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$

$\angle DCE = 180^\circ - (\angle ACD + \angle BCE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (как смежные)

Что и требовалось доказать.

299.



Дано: $AB = AC$, $\angle B = \angle C$

$AP = PQ = QR = RB = RC$

$\angle A = ?$

Решение:

Пусть $\angle C = \angle B = x$.

$\angle CBR = y$.

Из $\triangle RQB$:

$\angle R + \angle Q + \angle B = 180^\circ$

значит, $180^\circ - \frac{3}{2}x + x - y + x - y = 180^\circ$, $\frac{1}{2}x = 2y$, $x = 4y$

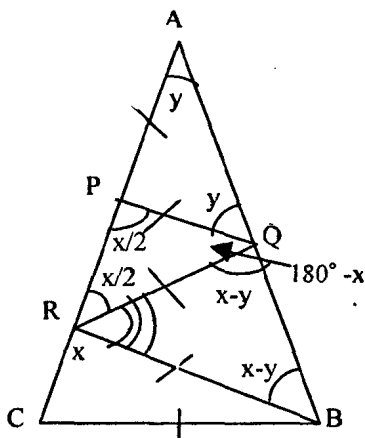
Из $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ — сумма углов треугольника равна 180° .

Значит, $4y + 4y + y = 180^\circ$;

$$9y = 180^\circ;$$

$$y = 20^\circ.$$

Ответ: 20°



300.

Дано: $\angle C > 90^\circ$;

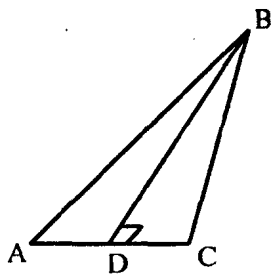
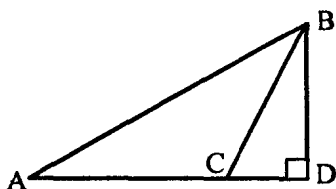
$BD \perp AC$.

Доказать. D лежит на продолжении отрезка AC

Доказательство.

Пусть $BD \in [AC]$, значит, $\angle D = 90^\circ$

$\angle C = 90^\circ$, т.е. $\angle D + \angle C > 180^\circ$, а это противоречит теореме о сумме углов в треугольнике, значит, предположение неверно, а верно то, что надо доказать.



301.

Дано: $AN \perp a$, $NM_1 = NM_2$

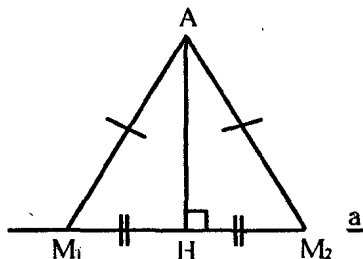
а) Доказать. $AM_1 = AM_2$

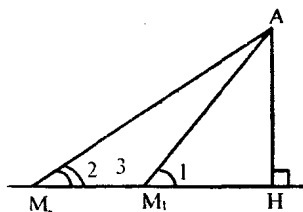
Рассмотрим $\triangle ANM_2$ и $\triangle ANM_1$.
сторона AN — общая

$$NM_1 = NM_2$$

Значит, $\triangle ANM_1 = \triangle ANM_2$ (по двум катетам).

Следовательно, $AM_1 = AM_2$





б) Доказать: $AM_1 < AM_2$, если $NM_1 < NM_2$.

$\angle H = 90^\circ$, следовательно, $\angle 1$ – острый (из $\triangle ANM_1$)

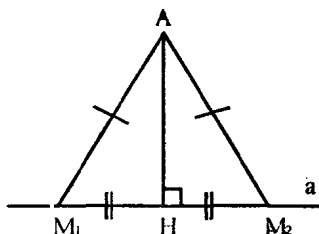
$\angle H = 90^\circ$, следовательно, $\angle 2$ – острый (из $\triangle ANM_2$), $\triangle AM_1M_2$, $\angle 2$ – острый.

$\angle 3$ – тупой, т.к. он смежный с острым; Следовательно, $AM_2 > AM_1$, ч.т.д.

302.

Дано: $AN \perp a$, $AM_1 = AM_2$

а) Доказать: $NM_1 = NM_2$



Из $\triangle ANM_1$ и $\triangle ANM_2$:

сторона AN – общая

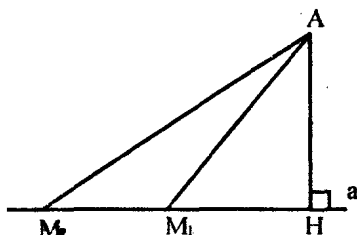
$AM_1 = AM_2$

Значит, $\triangle ANM_1 = \triangle ANM_2$

(по двум катетам и гипотенузе).

значит, $NM_1 = NM_2$.

б) Доказать: $NM_1 < NM_2$, когда $AM_1 < AM_2$.



Пусть $NM_1 > NM_2$ или $NM_1 = NM_2$.

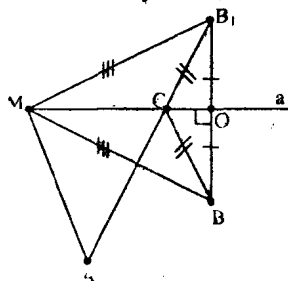
Если $NM_1 = NM_2$, то получим результат из 301 (а), что противоречит $AM_1 < AM_2$, значит, $NM_1 = NM_2$ неверно.

Если $NM_1 > NM_2$, то (по 301 (б)) получим $AM_1 > AM_2$, следовательно, $NM_1 > NM_2$ неверно.

Значит $NM_1 < NM_2$, ч.т.д.

303.

Найти: точку $C \in a$, чтобы расстояние $AC + BC$ было максимальным.



Решение:

Через B проведем прямую BO , $BO \perp a$, и отметим точку B_1 так, что $OB = OB_1$. Тогда $CB = CB_1$, значит $AC + BC = AC + CB_1 = AB_1$, а для любой другой точки M прямой a получаем:

$AM + MB = AM + MB_1 > AB_1$ (по неравенству треугольника).

Тогда, для точки C сумма $(AC + BC)$ – минимальная.

304.

Дано: М лежит внутри $\triangle ABC$.

Доказать: $MB+MC < AB+AC$.

Доказательство:

$MC < MO+OC$ (неравенство треугольника в $\triangle MOC$).

$BO < BA+AO$ (из $\triangle BOA$), значит

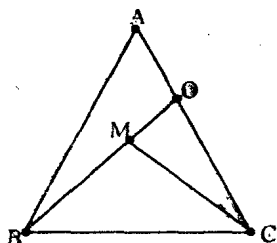
$BO = BM+OM$, тогда

$BM+MO < BA+AO$;

складывая неравенства имеем:

$MC+BM+MO < MO+OC+BA+AO$, т.е. $MC+BM < OC+BA+AO$.

$AO+OC=AC$, значит $MC+MB < AB+AC$, ч.т.д.



305.

Доказать: $BM+CM+AM < P_{ABC}$.

Доказательство:

М лежит внутри $\triangle ABC$, значит, учитывая №301

имеем $MB+MC < AB+AC$,

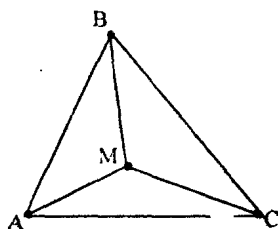
$MA+MB < AC+BC$,

$MA+MC < AB+BC$, тогда

$MB+MB+MA+MA+MC+MC < AB+AB+BC+BC+AC+AC$,

или $MB+MA+MC < AB+BC+AC = P_{ABC}$,

т.е. $P_{ABC} > MB+MA+MC$, ч.т.д.



306.

Дано: $AB=AC+BC$.

Доказать: А, В и С лежат на одной прямой.

Доказательство:

Если А, В, С не лежат на одной прямой, то они являются вершинами $\triangle ABC$.

Значит, $AB < AC+CB$, что противоречит условию. Следовательно точки А, В, С лежат на одной прямой,

ч.т.д.

307.

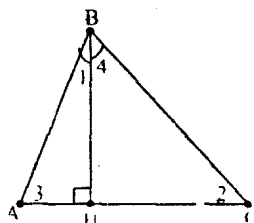
Дано: $\angle ANB = 90^\circ$. $\angle B = 90^\circ$.

Доказать:

$\triangle ABC$. $\triangle ABN$ и $\triangle BCN$ имеют равные углы соответственно.

Доказательство:

$\triangle ABC$ – прямоугольный, значит, $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ (1)



$\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ (2) (т.к. ДСВН – прямоугольный).

$\angle B = 90^\circ$, следовательно, $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ (3)

вычтем из (3) равенство (2):

$\angle 1 - \angle 2 = 0$, значит $\angle 1 = \angle 2$.

Вычтем из (3) (1)

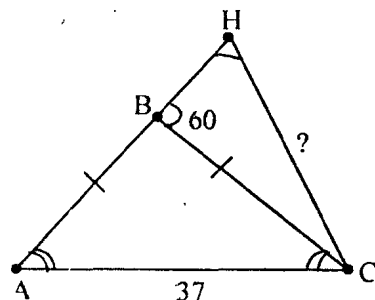
$\angle 4 - \angle 3 = 0$, значит $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 1$ (в ДАВН) = $\angle 2$ (в ДСНВ) = $\angle 2$ (в ДАВС)

$\angle 3$ (в ДАВН) = $\angle 4$ (в ДСНВ) = $\angle 3$ (в ДАВС)

$\angle ВНА$ (в ДАВН) = $\angle СНВ$ (в ДСНВ) = $\angle АВС$ (в ДАВС).

308.



Дано: $AB = BC$, $AC = 37$ см.

$\angle HBC = 60^\circ$

$CH \perp AB$

$CH = ?$

Решение:

$\angle A + \angle C = 60^\circ$ (свойство внешнего угла)

$\angle A = \angle C$ (ДАВС – равнобедренный)

тогда $2 \angle A = 60^\circ$,

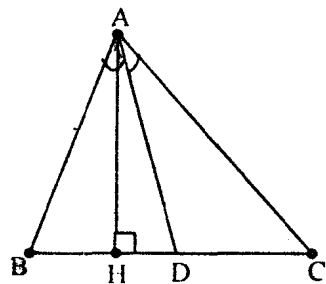
$\angle A = 30^\circ$

ДСНА – прямоугольный и $\angle A = 30^\circ$, значит

$CH = \frac{1}{2} AC$ (по свойству), $CH = 37 : 2 = 18,5$ см.

Ответ 18,5 см

309.



Дано:

$AB \neq AC$, AH – высота,

AD – биссектриса

Доказать:

$\angle HAD = \frac{1}{2} (\angle B - \angle C)$

Доказательство:

AD – биссектриса, значит

$\angle CAD = \angle BAD$

$\angle HAD$ – прямоугольный, значит, $\angle HAD + \angle ADH = 90^\circ$.

$$\angle HAD = 90^\circ - \angle ADH;$$

$\angle ADH$ внешний к $\triangle ADC$, значит $\angle ADH = \angle CAD + \angle C$

$$\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C, \angle CAD = \angle BAD, \text{ тогда,}$$

$$\angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C$$

Складывая равенства,

$$\angle HAD = 90^\circ - \angle CAD - \angle C \text{ и } \angle HAD = 90^\circ - \angle BAD - \angle C, \text{ получим}$$

$$2\angle HAD = 180^\circ - (\angle CAD + \angle BAD + 2\angle C)$$

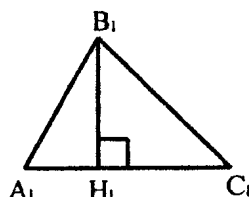
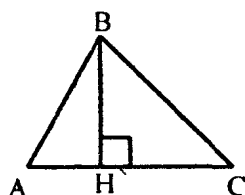
$$2\angle HAD = 180^\circ - (A + 2\angle C), \angle A + \angle B + \angle C = (\text{сумма углов } \triangle ABC),$$

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$$

$$2\angle HAD = 180^\circ - (180^\circ - \angle B - \angle C + 2\angle C) = 180^\circ - 180^\circ + \angle B - \angle C = \angle B - \angle C$$

$$\text{т.е. } \angle HAD = (\angle B - \angle C).$$

310.



Дано: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Доказать: $BH = B_1H_1$

Доказательство:

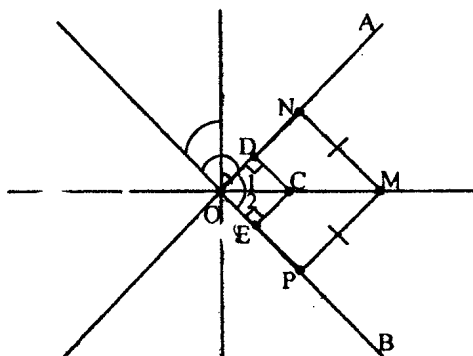
т.к. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;

далее: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит $\triangle BHA = \triangle B_1H_1A_1$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $BH = B_1H_1$.

311.

Построим биссектрисы углов, образованных при пересечении OA и OB . Возьмем любую точку C на биссектрисе. Тогда $\triangle ODC = \triangle OEC$ (OC – общая гипотенуза) и ($\angle 1 = \angle 2$), значит $CD = CE$.

Построим перпендикуляры MN и MP к OA и OB , тогда $\triangle ONM = \triangle OPM$, т.к. (OM – общая гипотенуза,

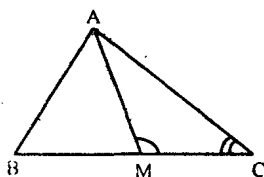


$MN=MP$, по условию, что M равноудалена от OA и OB).

Значит $\angle NOP = \angle POM$, OM – биссектриса $\angle AOB$.

Значит, искомое множество, это две прямые, являющиеся биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

312.



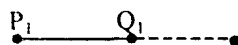
Доказать: если $AC > AB$, то $AM < AC$

Доказательство:

$AC > AB$, значит по теореме о соотношении между сторонами и углами в углами треугольника $\angle B > \angle C$.

$\angle AMC = \angle B + \angle BAM$ (т.к. $\angle AMC$ –), $\angle B > \angle C$, значит $\angle AMC > \angle C$ в $\triangle ACM$ $\angle C < \angle M$, значит по теореме $AM < AC$, чтд.

313.



Дано: $AB = P_3Q_3$

$BC = P_2Q_2$

$BO = P_1Q_1$ – медиана.

Построить $\triangle ABC$.

План построения:

а) строим любую прямую a и точку A на этой прямой;

б) строим точку D , что $AD = P_2Q_2$ и $D \in a$;

в) строим окружность с центром в A радиусом P_3Q_3 и окружность с центром в D радиусом $2P_1Q_1$;

г) окружности пересекаются в B ;

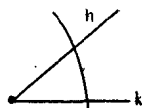
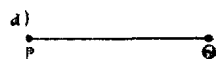
д) строим O – середину отрезка BD ;

е) строим прямую AO ;

ж) строим C , что $AO = OC$;

з) получаем $\triangle ABC$.

314.

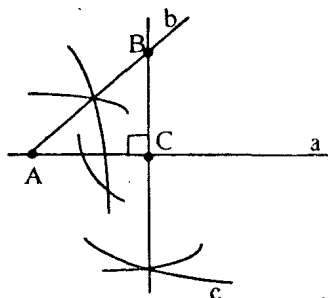


а) Построить:

$\triangle ABC$ прямоугольный, $\angle A = \angle hk$,
 $AB = PQ$

План построения:

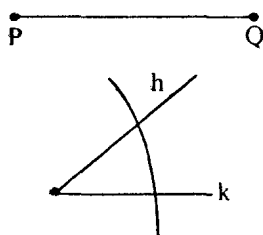
- возьмем любую прямую a и произвольную точку A на прямой a ;
- строим $\angle ab = \angle hk$ (задача о построении угла, равного данному);
- строим точку B , что $B \in b$ и $AB = PQ$ (задача об откладывании отрезка, равного данному отрезку);
- строим прямую c , что $B \in c$ и $c \perp a$;
- прямая c пересекает прямую a в точке C ;
- получаем $\triangle ABC$.



б)

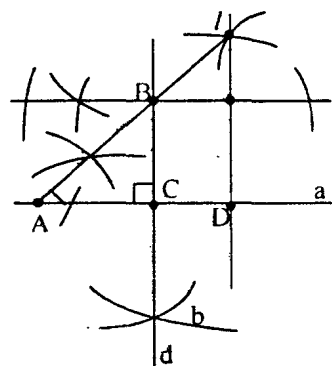
Построить:

прямоугольный $\triangle ABC$, $\angle A = \angle hk$,
 $BC = PQ$.

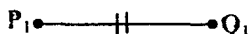
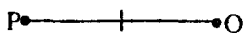


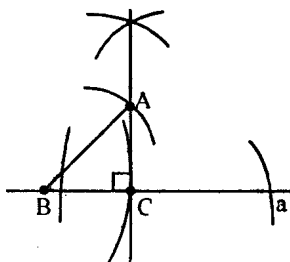
План построения:

- строим любую прямую a и произвольную точку A на прямой a ;
- строим $\angle ab = \angle hk$;
- строим прямую c , чтобы $c \parallel a$ и расстояние между a и c равно PQ ;
- прямая c пересекает прямую b в B ;
- строим прямую d , $B \in d$ и $d \perp c$;
- d пересекает прямую a в C ;
- получаем $\triangle ABC$.



в)





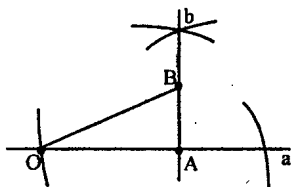
Построить:

прямоугольный $\triangle ABC$, $AB=PQ$, $BC=P_1Q_1$.

План построения:

- строим любую прямую a и произвольную точку B на прямой a ;
- находим точку C , что $C \in a$ и $BC=P_1Q_1$;
- строим прямую b , что $C \in b$ и $a \perp b$;
- строим окружность w с центром в B и радиусом PQ ;
- окружность w пересекает прямую b в точке A ;
- получаем $\triangle ABC$.

315.



Построить:

угол, равный:

- 30° ; б) 60° ; в) 15° ; г) 120° ;
- 150° ; е) 135° ; ж) 165° ; з) 75° ;
- 105°

а) План построения:

- строим произвольную прямую a и произвольную точку A на прямой a ,
- строим прямую b , что $A \in b$ и $a \perp b$;
- строим точку B , что $B \in b$;
- строим окружность w с центром в B и радиусом $2AB$;
- окружность w пересекает прямую a в точке O ;

$\triangle ABC$ – прямоугольный (по построению) и $AB = \frac{1}{2} OB$ (по построению), значит $\angle AOB = 30^\circ$ (т.к. катет противолежащий этому углу равен половине гипотенузы).

б) получаем $\angle AOB = 30^\circ$.

$\angle OBA = 60^\circ$ (т.к. $\triangle AOB$ – прямоугольный и $\angle AOB = 30^\circ$).

в) $\angle AOB$ делим пополам, получаем 15° .

г) т.к. $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, то этот угол построен в п.а) – это угол, смежный $\angle ABO$;

д) т.к. $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, то этот угол построен в п.а) – это угол смежный $\angle AOB$;

е) т.к. $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$, то строим две перпендикулярные прямые и один из полученных прямых углов делим пополам;

ж) т.к. $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$, то это угол, смежный построенному в п.в), т.е. углу в 15° .

з) т.к. $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$, то строим угол в 15° , потом строим перпендикуляр к одной из сторон построенного угла, проходящий через его вершину. Один из полученных углов будет 75° .

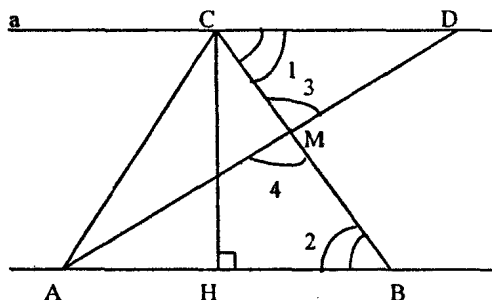
и) т.к. $105^\circ = 90^\circ + 15^\circ$, то это другой из углов, полученных в пункте

316.

P_1 _____ Q_1

P_2 _____ Q_2

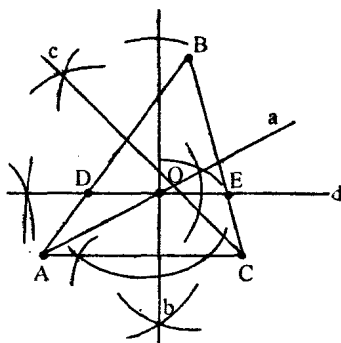
P_3 _____ Q_3



Построить: $\triangle ABC$, $CH = P_2Q_2$, $AM = P_3Q_3$, $AB = P_1Q_1$

План построения:

Строим параллельные прямые на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из них отмечаем точку A и откладываем AB , равный стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом, $2 P_3Q_3$. Строим середину AD – M , где D – пересечение окружности и второй прямой, и строим прямую BM . $\triangle ABC$ – иско-мый. BM пересекается со второй из параллельных прямых в точке C . Получаем $\triangle ABC$.



Построить: DE

$DE \parallel AC, D \in AB, E \in BC$ и

$DE = AD + CE$

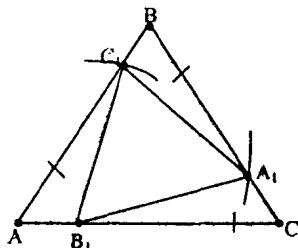
План построения:

- строим биссектрису $\angle A$ – прямую a ;
- строим биссектрису $\angle C$ – прямую c ;
- прямая a пересекается с прямой c в O ;
- строим прямую b , что $O \in b$ и $b \perp AC$;
- строим прямую d , что $d \perp b$ и $O \in d$;
- a пересекается с AB в D , c пересекается с BC в E ;
- получаем отрезок DE .

Доказательство:

a – биссектриса $\angle A$; c – биссектриса $\angle C$; $d \perp b$, $b \perp AC$, значит $d \parallel AC$.
 $d \cap AB$ в D , $d \cap BC$ в E , следовательно, по задаче 245 имеем $DE = AD + CE$.

318.



Дано: $B_1 \in AC, AB = BC = AC$

Построить: $A_1 \in BC, C_1 \in AB$, что $\triangle A_1B_1C_1$ – равносторонний

План построения:

- строим окружность w_1 с центром в B радиусом B_1C
- w_1 пересекает BC в A_1

- в) строим окружность w_2 с центром в A радиусом B_1C
 г) w_2 пересекает AB в C_1
 д) получаем $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (т.к. ΔABC – равносторонний) и $AB = BC = AC$,
 $AB_1 = AC - B_1C$, $B_1C = AB - AC_1$, $CA_1 = BC - BA_1$, $B_1C = AC_1 = BA_1$ (по построению), значит $AB_1 = BC_1 = CA_1$, значит $\Delta AC_1B_1 = \Delta BA_1C = \Delta CB_1A_1$ (по 2-му признаку равенства треугольников).

Тогда $B_1C_1 = A_1C_1 = A_1B_1$, и значит $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, что и требовалось доказать.

319

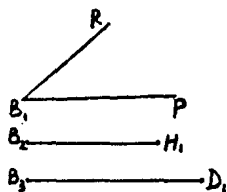


рисунок а

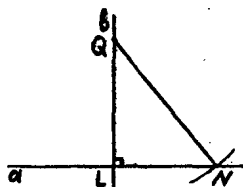


рисунок б

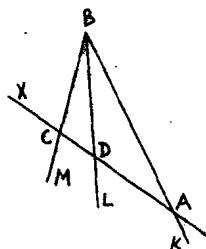


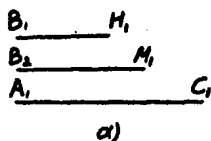
рисунок в

Пусть надо построить ΔABC , и даны углы RB_1P и отрезки: B_2H_1 , равный высоте треугольника, B_3D_1 , равный медиане треугольника (см. рис. а). Построим произвольную прямую a , отметим на ней точку L и через точку L проведем прямую в перпендикулярную прямой a (см. пункт 23 учебника). На прямой v от точки L отложим отрезок LQ , равный данному отрезку B_2H_1 . Построим окружность с центром в точке Q и радиусом B_3D_1 , она пересечет прямую a в точке N (см. рис. б). Построим произвольный луч BM , отложим от него угол MBK равный данному углу RB_1P (см. пункт 23 учебника). Построим биссектрису BL угла MBK , отложим отрезок BD равный данному отрезку B_3D_1 (см. рис. в). От луча DB отложим угол BDX равный углу QNL , луч DX пересечет луч BM в точке C . Проведем прямую CD , она пересечет луч BK в точке A . Треугольник ABC есть искомый.

Задачи повышенной трудности

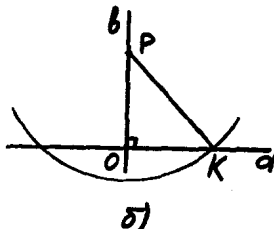
320

Пусть даны три отрезка B_1H_1 – высота треугольника, A_1C_1 – сторона треугольника B_2M_1 – медиана треугольника.



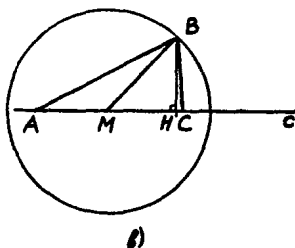
Построим треугольник ABC по стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

Проведем прямую a и построим прямую b , перпендикулярную прямой a . Пусть O – точка пересечения прямых a и b . На прямой b отложим отрезок $OP = B_1H_1$. Построим окружность с центром в точке P и радиусом B_2M_1 , она пересечет прямую a в точке K .



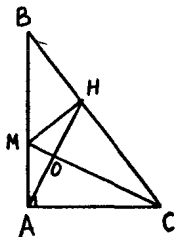
Теперь проведем прямую c на ней отметим отрезок $AC = A_1C_1$, построим к нему серединный перпендикуляр, который пересекает отрезок AC в точке M и $AM = MC$. Построим окружность с центром в точке M и радиусом B_2M_1 .

На прямой c от точки M отложим отрезок $MN = OK$. Через точку N проведем прямую перпендикулярную прямой c . Точка B пересечения этой прямой с окружностью является третьей вершиной искомого треугольника ABC . Однако при построении могут получиться четыре различных, но равных треугольника.



321

На стороне ВС от точки С отложим отрезок $CH = AC$. Проведем отрезок $АН$. Построим серединный перпендикуляр к отрезку $АН$, он пересечет отрезок $АН$ в точке O , а отрезок AB в точке M , являющейся-ся искомой точкой, т.к. $AM = MN$ и $MN \perp BC$.



Докажем это: $AC = CH$ по построению, CM – общая, значит, $\triangle MAC = \triangle MNC$ (по гипотенузе и катету), следовательно, $AM = MN$.

322

Из условия получаем, что $AB = a \cdot CD$, а $CD = v \cdot AB$, следовательно, $a = \frac{AB}{CD}$, а $v = \frac{CD}{AB}$; $a \cdot v = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{CD}{AB}$; $a = \frac{1}{v}$.

323

Из условия получаем, что $AB = m \cdot E_1F_1$ и $AB = n \cdot E_2F_2$, откуда $m \cdot E_1F_1 = n \cdot E_2F_2$, следовательно, $E_1F_1 = \frac{n}{m} \cdot E_2F_2$, т.е. искомое число $\frac{n}{m}$.

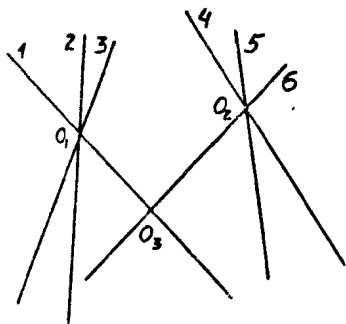
324

Из того, что углы $\angle hk$ и $\angle hl$ смежные следует: $\angle hk = 180^\circ - \angle hl$, $\angle hk + \angle hk = 180^\circ - \angle hl + \angle hk$; $2\angle hk = 180^\circ - \angle hl + \angle hk$; $\angle hk = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle hl + \angle hk)$, $\angle hk = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

Докажем второе утверждение: $\angle hl = 180^\circ - \angle hk$; $\angle hl + \angle hl = 180^\circ + \angle hl - \angle hk$; $2\angle hl = 180^\circ + \angle hl - \angle hk$; $\angle hl = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle hl - \angle hk)$; $\angle hl = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

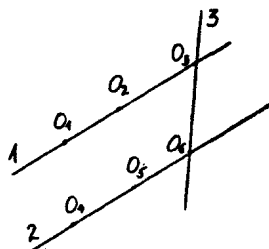
325

Пусть $\angle 6$ является вертикальным для $\angle 3$ а $\angle 7$ является вертикальным для $\angle 4$ тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ а из того что вертикальные углы равны получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$



Из условия следует что можно разбить наши шесть прямых на две тройки пусть прямые 1, 2 и 3 пересекаются в точке O_1 , а прямые 4, 5 и 6 в точке O_2 , а прямые 6 и 1 пересекаются в точке O_3 . По условию через точку O_3 должна проходить еще хотя бы одна прямая, кроме прямых 6 и 1, это возможно только если все три точки O_1 , O_2 и O_3 совпадают.

Предположим противное, тогда через точку O_3 проходит хотя бы одна из прямых 2, 3, 4 или 5, что невозможно, поскольку через две точки O_1 и O_2 или O_2 и O_3 на плоскости можно провести только одну прямую, или какие-то прямые совпадают, что противоречит условию, значит, наше предположение не верно, и все шесть прямых проходят через одну точку.

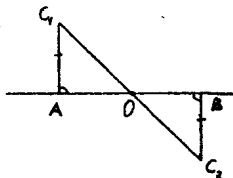


Из условия задачи следует, что наши шесть точек можно разбить на две тройки: пусть прямая 1 проходит через точки O_1 , O_2 и O_3 , а прямая 2 проходит через точки O_4 , O_5 и O_6 . Докажем, что прямые 1 и 2 совпадают: предположим противное.

Тогда через точки O_3 и O_6 проходит прямая 3, и, поскольку две несовпадающие прямые могут пересекаться на плоскости

только в одной точке, то точки O_1 , O_2 , O_4 и O_5 не принадлежат прямой 3, что противоречит условию, следовательно прямые 1 и 2 совпадают, и все шесть точек лежат на одной прямой.

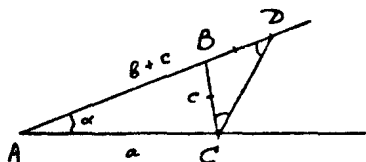
Рассмотрим прямые AC_1 и BC_2 , и секущую на прямую AB , т.к. накрестлежащие углы $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$ по условию, получим, что $AC_1 \parallel BC_2$.



$\angle AC_1C_2 = \angle BC_2C_1$ как накрестлежащие при пересечении параллельных прямых AC_1 и BC_2 секущей C_1C_2 . Пусть точка O – точка пересечения прямых AB и C_1C_2 . $\triangle AC_1O = \triangle BC_2O$ по стороне и двум углам ($\angle OAC_1 = \angle OBC_2$, $\angle AC_1O = \angle BC_2O$, $AC_1 = BC_2$), в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, т.е. $AO = OB$, что и требовалось доказать.

329

Построим треугольник по углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон. Однозначностью построения мы докажем равенство данных треугольников.



Представим, что треугольник уже построен (см. рис.) AD – это сумма двух сторон ($b + c$), $AB = b$. Тогда $BD = BC = c$,

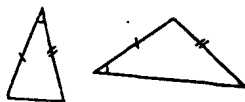
$\Rightarrow \angle BDC = \angle BCD$.

Построение: Проводим прямую, откладываем сторону a , откладываем сумму сторон. Соединяем точки C и D . От CD откладываем угол BDC . Находим точку B . Искомый треугольник – ABC . Построение однозначно.

330

Эти треугольники не могут быть неравными, так как сумма углов треугольника равна 180° , то третьи углы этих треугольников тоже равны, а, следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

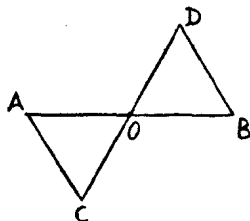
331



Могут. (см. рис.)

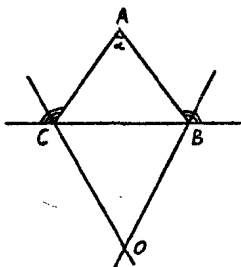
332

В треугольника AOC и BOD $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные. В $\triangle AOC$ $\angle AOC = \angle AOC$ (по свойству равнобедренного треугольника), а в $\triangle BOD$ $\angle BDO = \angle BOD$, следовательно, $\angle ACO = \angle BDO$. Из того, что сумма углов любого треугольника равна 180° следует, что $\angle DBO = \angle CAO$. Следовательно



но, $\triangle AOC = \triangle BOD$ по углу и прилежащим к нему сторонам, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит $OC = OD$.

333

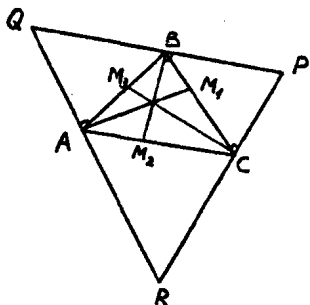


Пусть внешний угол при вершине В равен β , а угол при вершине С равен γ , тогда $\alpha = 180^\circ - ((180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma)) = \beta + \gamma - 180^\circ$; $\beta + \gamma = \alpha + 180^\circ$. Из треугольника ВОС

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + 180^\circ) = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

334

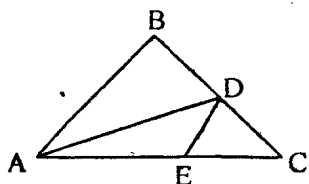


Пусть дан $\triangle ABC$, а прямые, перпендикулярные к биссектрисам треугольника пересекаются в точках Р, Q и R. AM_1 , BM_2 и CM_3 — биссектрисы $\triangle ABC$. $\angle M_1AR = \angle M_1AQ = 90^\circ$ по построению. $\angle M_1AC = \angle M_1AB = \frac{1}{2}\angle BAC$, т.к. M_1A — биссектриса, следовательно, $\angle CAR = \angle BAQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$. Ана-

логично, $\angle BCP = \angle ACR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA$ и $\angle QBA = \angle PBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$. Из $\triangle BPC$: $\angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle BCP = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$, аналогично, $\angle CRA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$, $\alpha \angle AQB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA$. Что и требовалось доказать.

335

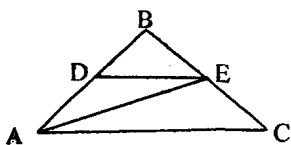
- а) остроугольный;
- б) остроугольный.



Если отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, то этот отрезок меньше большей из двух других сторон (см. задачу №312).

В $\triangle ABC$ AD – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, а сторона AC – наибольшая сторона $\triangle ABC$, следовательно, $AD < AC$.

Теперь рассмотрим $\triangle ADC$, DE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $DE \leq AD$ или $DE \leq DC$, но $AD < AC$ (по доказанному) и $DC \leq BC < AC$ (так как AC – наибольшая сторона $\triangle ABC$), следовательно, $DE < AC$.

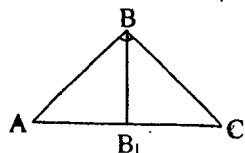


2) Ни один из концов отрезка DE не лежит на наибольшей стороне треугольника (см. рисунок).

В $\triangle ABC$ AE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $AE < AC$, т.к. AC – наибольшая сторона $\triangle ABC$.

Теперь рассмотрим $\triangle AEB$, DE – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, значит, $DE \leq AE$ или $DE \leq BE$, но $AE < AC$ (по доказанному) и $BE \leq BC < AC$ (так как AC – наибольшая сторона $\triangle ABC$), следовательно, $DE < AC$. Что и требовалось доказать.

339.



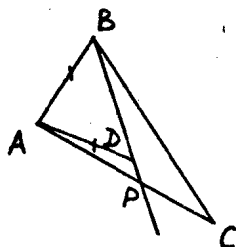
Из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача №173), следует, что $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, так как $\angle BB_1C$ смежный с $\angle AB_1B$ треугольника ABB_1 .

$\angle ABB_1 = \angle CBB_1$, так как BB_1 – биссектриса угла ABC . О доказанном $\angle BB_1C > \angle B_1BA$, следовательно, $\angle BB_1C > \angle CBB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим $\triangle B_1BC$, по доказанному $\angle BB_1C > \angle CBB_1$, следовательно, $BC > B_1C$.

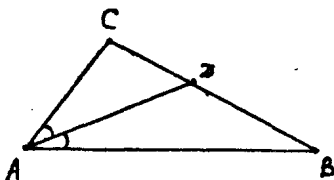
Из того, что $\angle AB_1B$ смежный с $\angle CB_1B$ треугольника CB_1B , следует, что $\angle AB_1B > \angle CB_1B$. На $\angle CB_1B = \angle ABB_1$, следовательно, $\angle AB_1B > \angle ABB_1$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, рассмотрим $\triangle AB_1B$, по доказанному $\angle AB_1B > \angle ABB_1$, следовательно, $BA > B_1A$. Что и требовалось доказать.

340

Проведем луч BD , он пересечет сторону AC в точке P . В треугольнике ABP отрезок AD — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Согласно задаче №312 $AD < AB$ или $AD < AP$, но по условию задачи $AD = AB$, следовательно, $AD < AP$ и $AB = AD$, то есть $AB < AP$. $AC = AP + PC$, следовательно, $AP < AC$, тогда $AB < AP < AC$, то есть $AB < AC$, что и требовалось доказать.



341



По свойству биссектрисы можем записать отношение: $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

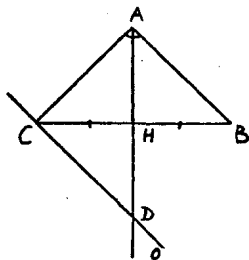
А из того, что $AB > AC$, можем заключить, что $BD > CD$.

Из того, что $AB > AC$, следует также, что $\angle ACB > \angle ABC$.

$\angle ADC = 180^\circ - \angle CAD - \angle ACB$, $\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABC$,
 $\angle CAD = \angle BAD$, $\Rightarrow \angle ADC < \angle ADB$.

342

Рассмотрим $\triangle ABC$, AH — биссектриса и медиана, проведенная из вершины A . Проведем прямую $CO \parallel AB$, точка D — точка пересечения CO с прямой AH . $\triangle AHB = \triangle DHC$ (по стороне и прилежащим к ней углам: $CH = HB$, т.к. AH — медиана; $\angle AHB = \angle DHC$ как вертикальные; $\angle PDC = \angle HAB$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых CD и AB секущей AD , следовательно, $\angle HCD = \angle HBA$).

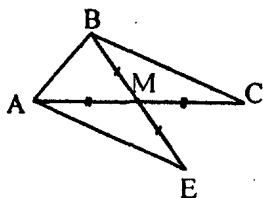


Получаем, что $\angle HDC = \angle HAB = \angle HAC$ (AH — биссектриса $\angle CAB$) и $AB = CD$. $\triangle ADC$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника ($\angle CAD = \angle CDA$), следовательно, $AC = CD = AB$. значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Что и требовалось доказать.

343.

Пусть ABC – данный треугольник, $AB > BC$, BM – медиана.

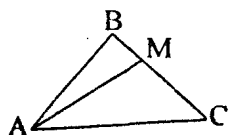


Отметим точку E , такую, что M является серединой отрезка BE .

$\triangle AME = \triangle CMB$ (по двум сторонам и углу между ними: $BM = ME$ по построению, $AM = MC$, так как BM – медиана, $\angle AME = \angle CMB$ – как вертикальные). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, а против рав-

ных сторон лежат равные углы, следовательно, $AE = BC$ и $\angle AEM = \angle CBM$. Из того, что $AB > BC$ и $AE = BC$ следует, что $AB > AE$. Рассмотрим $\triangle ABE$: в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, следовательно, $\angle AEB > \angle ABE$, но $\angle AEB = \angle CBM$, значит, $\angle CBM > \angle ABM$, что и требовалось доказать.

344.

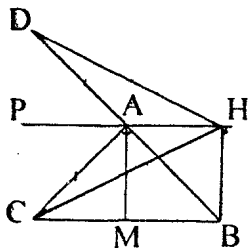


Если $\angle AMB$ не равен $\angle AMC$, то из того, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника (задача №173), следует, что $\angle AMB > \angle MCA$ и $\angle AMB > \angle MAC$, значит, у треугольника AMB и AMC не равны

углы, следовательно, эти треугольники не равны.

Если $\angle AMB = \angle AMC$, допустим, что $\triangle AMB = \triangle AMC$, но в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $AB = AC$, что противоречит условию, следовательно, наше предположение было неверно и $\triangle AMB$ не равен $\triangle AMC$. Что и требовалось доказать.

345.



Продолжим отрезок BA на отрезок $AD = AC$. Пусть AM – биссектриса угла CAB , следовательно, $\angle CAM = \angle BAM$. По условию прямая PA перпендикулярна биссектрисе AM (см. рисунок), следовательно, $\angle BAN = 90^\circ - \angle BAM$ и

$\angle PAC = 90^\circ - \angle CAM$, но

$\angle CAM = \angle BAM$, следовательно,

$\angle BAN = \angle PAC$. $\angle BAN = \angle DAP$ как вер-

тикальные, значит, $\angle PAC = \angle DAP$. $\angle DAN = 180^\circ - \angle DAP$,

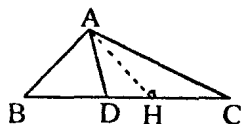
$\angle \text{CAN} = 180^\circ - \angle \text{PAC}$, следовательно, $\angle \text{DAN} = \angle \text{CAN}$.

$\triangle \text{CAN} = \triangle \text{DAN}$ (по двум сторонам и углу между ними: $\text{CA} = \text{AD}$ по построению, AN – общая сторона, $\angle \text{DAN} = \angle \text{CAN}$ по доказанному). В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, значит, $\text{CN} = \text{DN}$. Из неравенства треугольника следует, что $\text{DN} = \text{NB} > \text{DB}$, но $\text{DB} = \text{DA} + \text{AB} = \text{CA} + \text{AB}$. По доказанному $\text{DN} = \text{CN}$, следовательно, $\text{CN} + \text{NB} > \text{CA} + \text{AB}$.

У треугольников BCH и ABC сторона CB – общая. $P_{\triangle \text{BCH}} = \text{CN} + \text{NB} + \text{CB}$; $P_{\triangle \text{ABC}} = \text{CA} + \text{AB} + \text{CB}$, из того, что $\text{CN} + \text{NB} > \text{CA} + \text{AB}$ следует, что $P_{\triangle \text{BCH}} > P_{\triangle \text{ABC}}$. Что и требовалось доказать.

346.

Из доказанного в задаче №341 следует, что $\angle \text{ADC} > \angle \text{ADB}$, но $\angle \text{ADC} + \angle \text{ADB} = 180^\circ$, следовательно, $\angle \text{ADC} > 90^\circ$.

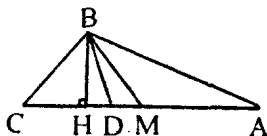


Предположим, что точка H принадлежит лучу DC , тогда $\angle \text{AHD} = 90^\circ$, так как AH – высота $\triangle \text{ABC}$. Рассмотрим $\triangle \text{DAN}$. Сумма углов треугольника равна 180° , но в $\triangle \text{DAN}$ имеем: $\angle \text{ADN} + \angle \text{AND} > 180^\circ$, получаем противоречие, следовательно, точка H лежит на луче DB . Что и требовалось доказать.

347.

Рассмотрим треугольник ABC , у которого $\text{AB} \neq \text{BC}$, $\text{BC} \neq \text{AC}$, $\text{AB} \neq \text{AC}$, пусть BH – высота $\triangle \text{ABC}$, BD – биссектриса $\triangle \text{ABC}$, BM – медиана $\triangle \text{ABC}$.

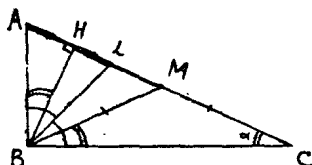
Не ограничивая общности будем считать, что $\text{BC} < \text{AB}$, тогда, по доказанному в задаче №346, получим, что точка H принадлежит лучу DC .



По доказанному в задаче №341, получим, что $\text{AD} > \text{DC}$, но $\text{AD} + \text{DC} = \text{AC}$, следовательно, $\text{AD} > \frac{1}{2} \cdot \text{AC}$. BM – медиана, следовательно, $\text{CM} = \text{AM} = \frac{1}{2} \cdot \text{AC}$. Получаем, что $\text{AD} > \text{AM}$, т.е. точка M при-

надлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит отрезку AD, следовательно, точка M принадлежит лучу DA, а точка D лежит между точками H и M, что и требовалось доказать.

348



$$\angle ABL = \angle LDC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$.
 $\angle ABH = 180^\circ - \angle BAH - \angle AHB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha$.

Треугольник прямоугольный, $\Rightarrow BM = MC$, $\Rightarrow \triangle BMC$ — равнобедренный, $\Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \alpha$, $\Rightarrow \angle BMC = 180^\circ - 2\alpha$ (из треугольника BMC).

$$\angle AMB = 180^\circ - \angle BMC = 2\alpha$$

$$\triangle ABL: \angle ALB = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$$

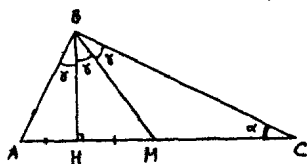
$$\angle BLC \text{ (смежный с } \angle ALB) = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$$

$$\triangle LBM: \angle LBM = 180^\circ - 2\alpha - (135^\circ - \alpha) = 45^\circ - \alpha$$

$$\triangle HBL: \angle HBL = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - \alpha = 45^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle LBM = \angle HBL, \text{ ч.т.д.}$$

349



Обозначим $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC$ через γ , а $\angle ACB$ через α .

BM — биссектриса $\triangle BCH$, тогда по свойству биссектрисы имеем

$$\frac{HM}{BH} = \frac{MC}{BC} \quad (*)$$

В треугольнике ABM BH является биссектрисой и высотой, $\Rightarrow \triangle ABM$ — равнобедренный, $\Rightarrow BH$ — медиана $\Rightarrow AH = HM$.

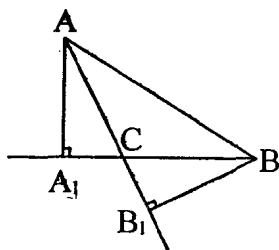
BM — медиана, $\Rightarrow AM = MC$; $AH = HM = AM/2$, $\Rightarrow$ из (*):

$BC = 2BH$, $\Rightarrow$ т.к. $\triangle BHC$ — прямоугольный, $\angle \alpha = 30^\circ$, $\Rightarrow \triangle BHC$

$2\gamma = 60^\circ$, $\Rightarrow \gamma = 30^\circ$, $\Rightarrow \angle ABC = 3\gamma = 90^\circ$, ч.т.д.

350.

Рассмотрим прямоугольный $\triangle BCB_1$, с прямым углом BB_1C (так как BB_1 – высота $\triangle ABC$, следовательно, BB_1 перпендикулярна AC).



В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е. $BC \geq BB_1$, учитывая, что по условию $AA_1 \geq BC$, получаем $AA_1 \geq BC \geq BB_1$. Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACA_1$ с прямым углом AA_1C (т.к. AA_1 – высота $\triangle ABC$, следовательно, A_1 перпендикулярна BC). В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, т.е. $AC \geq AA_1$, учитывая, что по условию $BB_1 \geq AC$, получаем $BB_1 \geq AC \geq AA_1$, по доказанному $AA_1 \geq BC \geq BB_1$, следовательно, $AA_1 = BB_1$.

$BB_1 = AA_1 \geq BC \geq BB_1$, следовательно, $BC = BB_1$ и $\triangle BCB_1$ равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle BCB_1 = \angle BB_1C = 90^\circ$, тогда $\angle CBB_1 = 180^\circ - \angle BCB_1 - \angle BB_1C = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$, следовательно, BB_1 совпадает с BC . $AA_1 = BB_1 \geq AC \geq AA_1$, следовательно, $AC = AA_1$ и $\triangle ACA_1$ равнобедренный, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle ACA_1 = \angle AA_1C = 90^\circ$, тогда $\angle CAA_1 = 180^\circ - \angle ACA_1 - \angle AA_1C = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$, значит, AA_1 совпадает с AC .

По доказанному $AC = AA_1 = BB_1 = BC$ и AC перпендикулярна BC , следовательно, $\triangle ABC$ – равнобедренный и прямоугольный, что и требовалось доказать.

351

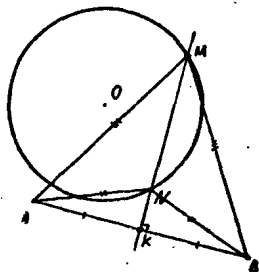
Решена в учебнике на стр. 95.

352

2 случая расположения точек.

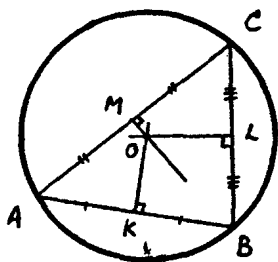
Соединяем точки A и B . Находим середину AB — точку K . Поводим через нее перпендикуляр к AB . Находим точку M . M — искомая точка поскольку MK является одновременно высотой и медианой в $\triangle AMB$, $\Rightarrow \triangle AMB$ — равнобедренный $\Rightarrow AM = MB$.

В случаях 3), 4) задача не имеет решения.



Соединяем точки А и В. Находим К — середину АВ. Через К проводим перпендикуляр к АВ. Его точки пересечения с окружностью — искомые точки.

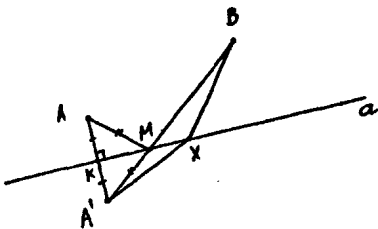
В случае, когда перпендикуляр касается окружности — одно решение, когда не пересекается — нет решений.



Соединяем точки А, В и С. Находим середины отрезков АВ, ВС и АС, соответственно К, L и М. Проводим перпендикуляры (серединные перпендикуляры $\triangle ABC$). Находим точку О — их точку пересечения. Проводим окружность радиуса $AO = BO = CO$ с центром в т. О.

Вокруг треугольника всегда можно описать окружность, поэтому задача не

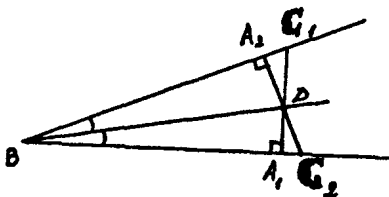
имеет решения, лишь когда лежат на одной прямой.



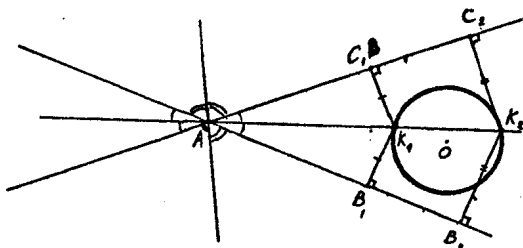
Из точки А опускаем перпендикуляр на a . Пусть К — точка пересечения. С другой стороны прямой откладываем точку A' с условием $AK = A'A$. Соединяем точки A' и В.

Пусть М — пересечение $A'B$ и пр. a . М — искомая точка.

Почему выполняется неравенство треугольника: $AM + MB = A'M + MB$ (т.к. $\triangle AA'M$ — равнобедренный) $= A'B < AX + XB$.



Откладываем угол В. Делим его пополам. Проводим биссектрису, откладываем на ней ВД. Из точки Д опускаем перпендикуляр на любую из сторон угла. Задача имеет 2 решения: $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_2BC_2$.



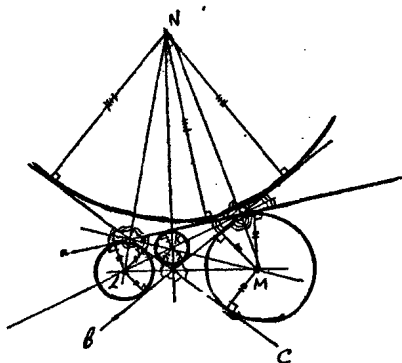
Делим углы пересекаемых прямых. Поводим биссектрисы. Точки пересечения биссектрисы с окружностью — искомые. Например $\triangle AC_1K_1 = \triangle AB_1K_1$ (прямоугольные треугольники с равным острым углом и общей гипотенузой), $\Rightarrow C_1K_1 = B_1K_1$.

Задача может иметь 1, 2, 3, 4 решения или не иметь решения вообще, в зависимости от расположения окружности по отношению к биссектрисе углов.

358

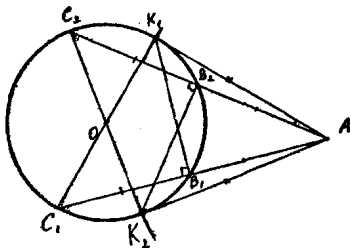
Как и в предыдущей задаче проводим биссектрису углов между пересекаемыми прямыми, а также биссектрисой смежных углов.

Получается 4 решения.



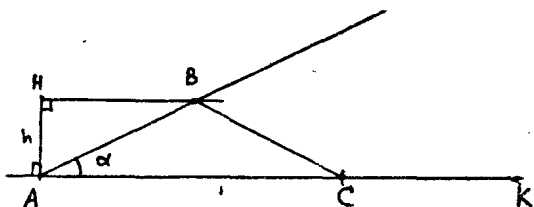
359

Пусть R — радиус окружности. Проводим окружность радиусов $2R$ с центром в т. A и ищем пересечение ее с исходной окружностью — точки K_1, K_2 . Через точки K_1, K_2 проводим диаметры, находим точки C_1, C_2 . Соединяем A с C_1 и C_2 , находим т. B_1 и B_2 . В частности, $\angle C_1B_1K_1 = 90^\circ$ (по свойству диаметра), т.е. K_1B_1 — высота $\triangle AC_1K_1$. Но $\triangle AC_1K_1$ — равнобедренный, т.к. $AK_1 = C_1K_1 = 2R_1 \Rightarrow K_1B_1$ — медиана, $\Rightarrow AB_1 = B_1C_1$.



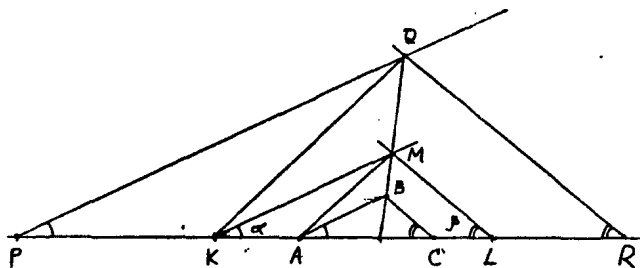
Если расстояние от т. А до окружности = $2R$, то решение одно (надо лишь провести прямую OA), если $> 2R$ — то решений нет.

360



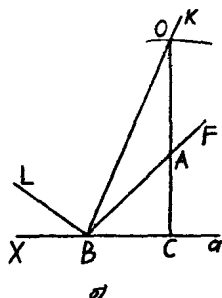
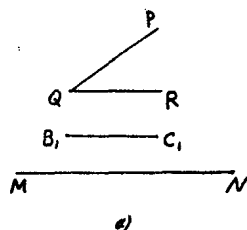
Проводим прямую. Отмечаем точку А — одну из вершин нашего треугольника на прямой отмечаем отрезок, равный периметру треугольника — находим т.к. откладываем заданный угол с вершиной в т. А. Из т. А проводим перпендикуляр к первой проведенной прямой. Откладываем на нем отрезок, равный высоте — находим т. Н. От нее откладываем перпендикуляр к последней прямой, находим его пересечение с другой стороной угла. Нашли точку В. От точки К откладываем отрезок, равный АВ; находим точку С. Соединяем В и С. ABC — искомый треугольник.

361



Проводим прямую. Откладываем на ней отрезок KL , равный периметру треугольника. Строим известные углы с вершинами в точках K и L . Находим пересечение их сторон — точку M . От точки K откладываем на исходную прямую отрезок, равный KM , находим т. P . Аналогично находим т. R . через т. P проводим прямую, параллельную KM , через т. Q — параллельную LM . Их пересечение — т. Q . Проводим прямую QM , а также соединяем Q и K . Через точку M проводим прямую, параллельную KQ , находим т. A , через нее проводим прямую, параллельную KM до пересечения с QM , находим т. B . Через нее проводим прямую, параллельную LM , $\Rightarrow$ т. C . Из подобия треугольников ABC , KLM и PQR получаем, что $AB = AK$, $BC = CL$, т.е. $AB + BC + AC = KL$, т.е. $\triangle ABC$ — искомый.

126



Пусть надо построить $\triangle ABC$, и даны $\angle PQR$ и отрезки B_1C_1 , равный стороне треугольника, и MN , равный сумме двух других сторон треугольника (см. рис. а). Проведем произвольную прямую a , отметим на ней точку B и точку X (см. рис. б). От луча BX отложим угол XBL равный углу PQR (см. пункт 23 учебника). От точки B отложим отрезок BC , равный данному отрезку B_1C_1 . Построим биссектрису BK угла LBC (см. пункт 23 учебника). Построим окружность C радиусом равным MN и центром в точке C , она пересечет луч BK в точке O . Отложим от луча BK $\angle KBF$ равный углу KBC . Луч BF пересечет CO в точке A . Треугольник ABC есть искомый, докажем это.

$\angle KAB = \angle ABC + \angle ACB$ (как внешний).

$\triangle KAB$ равнобедренный (т.к. $\angle BKA = \angle KBA$ по построению).

$$\text{Значит, } \angle KBA = \frac{180^\circ - \angle KAB}{2} = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2}.$$

$$\begin{aligned} \angle KBC &= \angle KBA + \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2} + \angle ABC = \\ &= \frac{180^\circ + \angle ABC - \angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

$\angle LBC = 2\angle KBC = 180^\circ + \angle ABC - \angle ACB$ (так как BK — биссектриса угла LBC).

$$\begin{aligned} \angle PQR &= \angle XBL = 180^\circ - \angle LBC = 180^\circ - 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB = \\ &= \angle ACB - \angle ABC. \end{aligned}$$

$AB = AK$, так как $\triangle KBA$ равнобедренный, значит, $MN = KA + AC =$
 $= AB + AC$ следовательно наши построения верны.

Учебно-методическое издание

Прокопович Александр Николаевич

Домашняя работа по геометрии за 7 класс

Издательство «ЭКЗАМЕН»

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.000454.01.09 от 27.01.2009 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *М.В. Власова, Д.А. Ярош*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебна

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).