Домашняя работа по геометрии за 8 класс

к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»
Л.С. Атанасян и др., М.: «Просвещение», 2001 г.

учебно-практическое
пособие

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники..4

§ 2. Параллелограмм и трапеция..6

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат...17

Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника..36

§ 2. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции...39

§ 3. Теорема Пифагора...47

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугоников.................................70

§ 2. Признаки подобия треугольников.......................................77

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач..85

§ 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника..96

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности..115

§ 2. Центральные и вписанные углы.......................................122

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника................133

§ 4. Вписанная и описанная окружности..............................139

Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора...160

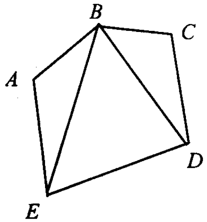
§ 2. Сложение и вычитание векторов....................................166

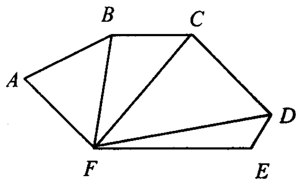
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач................................174

Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники

363.





ΔABE; ΔEBD; ΔBCD

ΔABF; ΔBFC; ΔCFD; ΔDFE

364.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

а) n = 5; $(n-2)\cdot 180=(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$;

б) n = 6; $(n-2)\cdot 180=(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$;

в) n = 10; $(n-2)\cdot 180=(10-2)\cdot 180^\circ = 1440^\circ$,

где n — число углов.

365.

По формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:

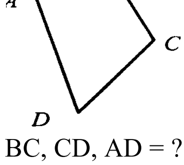
$\alpha n = (n-2)\cdot 180$; $360 = 180n - \alpha n$, откуда следует:

$$n = \frac{360}{180-\alpha}$$

а) $\alpha_1 = 90^\circ$, то n = 4; б) $\alpha_2 = 60^\circ$, то n = 3;

в) $\alpha_3 = 120^\circ$, то n = 6.

366.



Дано: ABCD – четырехугольник;
P_{ABCD} = 8см = 80мм;
AD>AB на 5мм;
AD>BC на 4мм;
AD>CD на 3мм.

AB, BC, CD, AD = ?

Решение:
AD = x, тогда CD = x – 3, BC = x – 4, AB = x – 5,

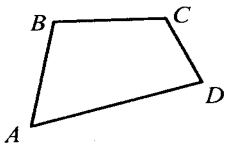
P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD,

80 = x – 5 + x – 4 + x – 3 + x; 92 = 4x; x = 23, следовательно,

AD = 23мм; CD = 20мм; BC = 19мм; AB = 18мм.

Ответ: 18, 19, 20, 23.

367.

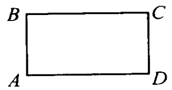


Дано:
P_{ABCD} = 66см, BC>CD на 8см;
BC<AB на 8см,
AD>CD в три раза;
AB, BC, CD, AD = ?

Решение:
BC = x; тогда AB = x + 8; CD = x – 8; AD = 3(x – 8);
P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD;
x + 8 + x + x–8 + 3·(x – 8) = 66, 6x = 90; x = 15, следовательно,
BC = 15см, CD = 7см, AB = 23см, AD = 21см.

Ответ: 7, 15, 21, 23.

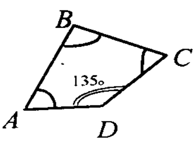
368.



Дано: ABCD – четырехугольник;
∠A = ∠B = ∠C = ∠D;
∠A = ?

Решение: по формуле о сумме углов выпуклого многоугольника имеем:
$(n-2)\cdot 180 = (4-2)\cdot 180° = 360°\cdot$
По условию ∠A = ∠B=∠C=∠D, следовательно, ∠A= 360°:4 = 90°.
Ответ: 90°.

369.

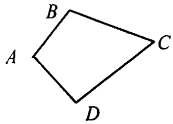


Дано: ABCD – четырехугольник;
∠A = ∠B = ∠C,
∠D = 135°;
∠A, ∠B, ∠C = ?

Решение:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, $\angle A + \angle B + \angle C + 135° = 360°$.
Пусть $\angle A = \angle B = \angle C = x$, тогда $3x = 360° - 135°$; $3x = 225°$;
$x = 75°$, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 75°$.

Ответ: 75°.

370.



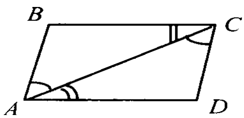
Дано: ABCD – четырехугольник;
$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D = 1:2:4:5$;
$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D = ?$

Решение:
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$,
пусть $\angle A = x$, тогда $\angle B = 2x$, $\angle C = 4x$, $\angle D = 5x$, следовательно,
$x + 2x + 4x + 5x = 360°$; $12x = 360°$; $x = 30°$, откуда
$\angle A = 30°$, $\angle B = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle C = 4 \cdot 30° = 120°$,
$\angle D = 5 \cdot 30° = 150°$.

Ответ: 30°; 60°; 120° и 150°.

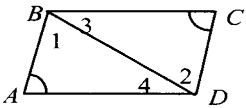
§ 2. Параллелограмм и трапеция

371.



а) Дано: ABCD – четырехугольник;
$\angle BAC = \angle ACD$,
$\angle BCA = \angle DAC$.
Доказать: ABCD – параллелограмм

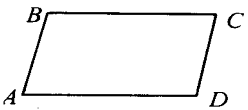
Доказательство:
Рассмотрим ΔABC и ΔCDA:
по условию: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle CAD$, AC – общая;
следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам:
$\Delta ABC = \Delta CDA$, откуда, из определения равных треугольников, следует: BC = AD.
Т. к. $\angle BAC = \angle ACD$ – накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, следовательно, $BC \parallel AD$.
Т.к. BC = AD и $BC \parallel AD$ (из 2), то по 1-му признаку параллелограмма ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.



б) Дано: ABCD – четырехугольник;
AB||CD, ∠A = ∠C.
Доказать: ABCD – параллелограмм.

Доказательство:
AB||CD (по условию), следовательно, ∠1 = ∠2 (накрест лежащие),
т. к. сумма углов треугольника равна 180°, то ∠3 = ∠4.
Рассмотрим ΔABD и ΔCBD
BD – общая, ∠1 = ∠2, ∠3 = ∠4, следовательно, по стороне и двум прилежащим к ней углам ΔABD = ΔCBD,
по определению равных треугольников AB = CD
AB||CD и AB = CD, то по 1-му признаку параллелограмма
ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.

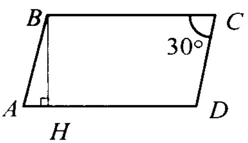
372.



Дано: P_{ABCD} = 48см;
AB, BC = ?

Решение:
а) AD > AB на 3см.
Если AB = x, то AD = x + 3 и P_{ABCD} = 2· (AB + AD), т.е.
48 = 2·(x + (x + 3)); 2x = 21; x = 10,5 см;
AB = CD = x = 10,5см; AD = BC = x + 3 = 13,5см.
б) AD > AB на 7см (AD – AB = 7).
Если AB = x, то AD = x + 7 и P_{ABCD} = 2·(AB + AD), т.е.
48 = 2·(x + (x + 7)); 2x = 17; x = 8,5 см;
AB = CD = x = 8,5см; AD = BC = x + 7 = 15,5см.
в) AD>AB в 2 раза.
Если AB = x, то AD = 2x и P_{ABCD} = 2·(AB + AD), т.е.
48 = 2·(x + 2x); 3x = 24; x = 8 см;
AB = CD = x = 8см; AD = BC = 2x = 16см.

373.

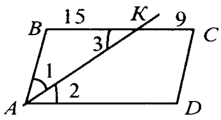


Дано: ABCD – параллелограмм.
P_{ABCD} = 50см;
∠C = 30°, BH⊥CD, BH = 6,5см;
AB, BC = ?

Решение:
По свойству параллелограмма $\angle C = \angle A = 30°$.
Пусть ΔABH – прямоугольный, где $\angle H = 90°$;
$\angle A = 30°$, следовательно, $BH = \frac{1}{2}AB$, т.е.
$AB = 2 \cdot BH = 2 \cdot 6{,}5 = 13$см.
$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$, $50 = 2 \cdot (13 + AD)$; $13 + AD = 25$; $AD = 12$.

Ответ: 13см, 12см.

374.

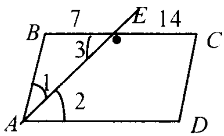


Дано: P_{ABCD} – параллелограмм.
AK – биссектриса $\angle A$;
BK = 15см, KC = 9см;
P_{ABCD} = ?

Решение:
т. к. ABCD – параллелограмм, то $BC \| AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие);
$\angle 2 = \angle 1$ (по свойству биссектрисы), т.е. $\angle 2 = \angle 1$, то и $\angle 1 = \angle 3$, следовательно ΔABK – равнобедренный, т.е.
AB = BK = 15см, а т.к. AB = CD, то CD = 15см;
BC = BK = 15 + 9 = 24см, BC = AD = 24см.
$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$; $P_{ABCD} = 2 \cdot (15 + 24) = 2 \cdot 39 = 78$см.

Ответ: 78см.

375.

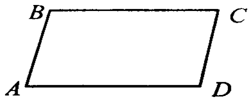


Дано: ABCD – параллелограмм;
AE – биссектриса $\angle A$;
BE = 7см, EC = 14см;
P_{ABCD} = ?

Решение:
т. к. ABCD параллелограмм, то $BC \| AD$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие);
$\angle 2 = \angle 1$ (по свойству биссектрисы), следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, значит, ΔABE – равнобедренный, тогда AB = BE = 7см;
BC = 7 + 14 = 21см, AD = BC = 21см;
$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (7 + 21) = 2 \cdot 28 = 56$см.

Ответ: 56см.

376.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ = ?

<u>Решение:</u>

а) $\angle A = 84°$;
по свойству углов параллелограмма:
$\angle A = \angle C = 84°$; $\angle B = \angle D$;
т.к. $\angle A+\angle B=180°$, то $\angle B=180°-84° =96°$, следовательно, $\angle D=96°$.

Ответ: 84°, 96°, 84°, 96°.

б) $\angle A - \angle B = 55°$;

$$\begin{cases}\angle A - \angle B = 55° \\ \angle A + \angle B = 180°\end{cases}; \begin{cases}\angle A = 55° + \angle B \\ (55° + \angle B) + \angle B = 180°\end{cases}; \begin{cases}\angle A = 55° + \angle B \\ 2\angle B = 125°\end{cases};$$

$$\begin{cases}\angle A = 117°30' \\ \angle B = 62°30'\end{cases}; \ \angle A = \angle C = 117°30'; \angle B = \angle D = 62°30'.$$

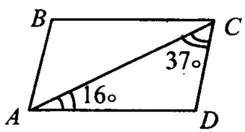
Ответ: 117°30′, 62°30′, 117°30′, 62°30′.

в) $\angle A + \angle C = 142°$;
по свойству параллелограмма: $\angle A = \angle C$,
следовательно: $\angle A = \angle C = 142°:2 = 71°$;
$\angle A + \angle B = 180°$ (свойство параллелограмма);
$\angle B = 180° - 71° = 109°$, $\angle D = \angle B = 109°$.

Ответ: 71°, 109°, 71°, 109°.

г) $\angle A = 2\angle B$;
по свойству параллелограмма: $\angle A + \angle B = 180°$,
$2\angle B + \angle B = 180°$; $3\angle B = 180°$; $\angle B = 60°$, $\angle D = \angle B = 60°$,
$\angle A = 2\angle B = 120°$; $\angle C = \angle A = 120°$.

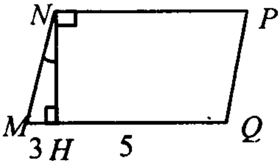
Ответ: 120°, 60°, 120°, 60°.



д) если $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.
$\angle CAD + \angle ACD + \angle D = 180°$
$16° + 37° + \angle D = 180°$; $\angle D = 127°$,
$\angle B = \angle D = 127°$;
по свойству параллелограмма:
$\angle A + \angle B = 180°$; $\angle A + 127° = 180°$, $\angle A = 53°$, $\angle C = \angle A = 53°$.

Ответ: 53°, 127°, 53°, 127°.

377.

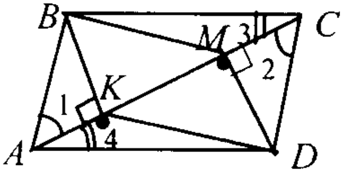


Дано:
$NH \perp MQ$, $\angle MNH = 30°$;
$MH = 3$см, $HQ = 5$см;
MN, MQ = ?
$\angle M$, $\angle N$ = ?

Решение:
ΔMNH – прямоугольный; $\angle M + \angle N + \angle H = 180°$;
$\angle M = 180° – 90° – 30° = 60°$,
т. к. $\angle N = 30°$, то $MN = 2MH$, $MN = 2 \cdot 3 = 6$см; $MN = QP = 6$ см,
$\angle MNP = 30° + 90° = 120°$, $MQ = 3 + 5 = 8$см; $NP = MQ = 8$см.

Ответ: $MN = QP = 6$см; $\angle M = \angle P = 60°$;
$MQ = NP = 8$см; $\angle N = \angle Q = 120°$.

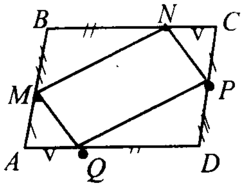
379.



Дано:
$BK \perp AC$, $DM \perp AC$.
Доказать: BMDK –
параллелограмм.

Доказательство:
Рассмотрим ΔABK и ΔCDM
$AB = CD$; $AB \parallel CD$ (по 1-му признаку параллелограмма);
AC – общая, следовательно $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей AC),
значит, $\Delta ABK = \Delta CDM$ (по гипотенузе и остр. углу),
тогда $BK = MD$ (из определения равных треугольников).
Рассмотрим ΔCBM и ΔADK:
$AD = CB$; $AD \parallel CB$ (по 1-му признаку параллелограмма);
AC – общая, следовательно, $\angle 4 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AC), следовательно,
$\Delta ADK = \Delta CBM$ (по гипотенузе и острому углу),
следовательно, $KD = BM$;
$BK = MD$; $KD = BM$, значит,
BMDK – параллелограмм, ч.т.д.

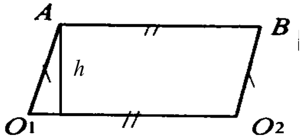
380.



Дано:
$M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $Q \in AD$;
$AM = CP$, $BN = DQ$,
$BM = DP$, $NC = QA$.
Доказать: ABCD, MNPQ – параллелограммы.

Доказательство:
$BC = BN + NC = DQ + QA = AD$; $BC = AD$;
$AB = AM + MB = PC + DP = DC$; $AB = DC$;
следовательно, ABCD – параллелограмм.
Т. к. ABCD – параллелограмм, то по свойству параллелограмма
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Рассмотрим ΔAMQ и ΔCPN;
$AM = CP$, $AQ = CN$, $\angle A = \angle C$,
значит, $\Delta AMQ = \Delta CPN$ (по 2 сторонам и углу между),
следовательно, $MQ = NP$.
Рассмотрим ΔQPD и ΔMBN:
$MB = DP$, $BN = QD$, $\angle B = \angle D$,
следовательно, $\Delta MBN = \Delta QPD$ (по 2 сторонам и углу между),
следовательно, $MN = QP$;
$MQ = NP$, $MN = QP$, тогда
MNPQ – параллелограмм, ч.т.д.

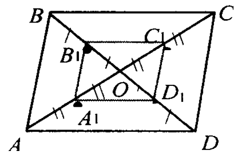
381.



Дано: $O_1A = O_2B$,
$AB = O_1O_2$.
Доказать: $AB \| O_1O_2$.

Доказательство: по условию
$O_1A = O_2B$; $AB = O_1O_2$,
следовательно, ABO_2O_1 – параллелограмм,
значит, $AB \| O_1O_2$.
AH=h – высота параллелограмма, $R \le h \le 0$, где R – радиус колеса.
Если $h = R$, то ABO_1O_2 – прямоугольник,
если h= =0, то AB и O_1O_2 лежат на одной прямой.

382.



Дано: $A_1 \in OA$, $B_1 \in OB$,

$C_1 \in OC$, $D_1 \in OD$, $AA_1 = A_1O$, $BB_1 = B_1O$,

$CC_1 = C_1O$, $DD_1 = D_1O$.

Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм

Доказательство:

ABCD – параллелограмм, следовательно, по свойству диагоналей параллелограмма: $AO = OC$, $BO = OD$;

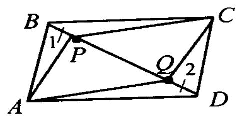
$A_1O = \frac{1}{2} AO$ и $C_1O = \frac{1}{2} OC$, следовательно, $A_1O = C_1O$,

$B_1O = \frac{1}{2} OB$ и $D_1O = \frac{1}{2} OD$, следовательно, $B_1O = D_1O$;

$B_1D_1 \cap A_1C_1 = O$, $A_1O = C_1O$, $B_1O = D_1O$,

следовательно: $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм, ч.т.д.

383.



Дано:

$PQ \in BD$, $PB = QD$.

Доказать: APCQ – параллелограмм.

Доказательство:

Рассмотрим ΔABP и ΔCDQ, по признаку параллелограмма

$AB = CD$ и $AB \| CD$;

$BP = QD$, $\angle 1 = \angle 2$, (накрест лежащие углы при пересечении $AB \| CD$ с секущей BD),

т.е. $\Delta ABP = \Delta CDQ$ (по 2 сторонам и углу между),

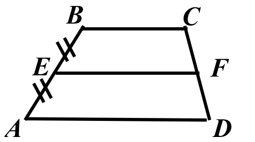
следовательно, $AP = CQ$.

Аналогично, через ΔBPC и ΔADQ получим $PC = AQ$;

$AP = CQ$, $PC = AQ$, следовательно, по признаку

APCQ – параллелограмм, ч.т.д.

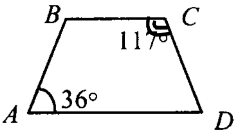
386.



Дано:
$E \in AB$, $AE = EB$;
$F \in CD$, $CF = FD$.
Доказать: $EF \| AD$.

Доказательство:
Пусть E – середина AB. Проведем прямую $EF \| AD \| BC$. Точка F – середина CD по т. Фалеса. Докажем, что EF – единственный. Через точки E и F можно провести только одну прямую (аксиома), т.е. отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции ABCD параллелен основаниям, ч.т.д.

387.

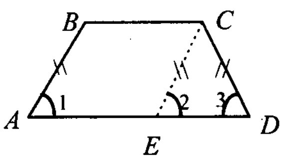


Дано:
$\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$;
$\angle B = ?$
$\angle D = ?$

Решение:
$AD \| BC$, $\angle A + \angle B = 180°$; $36° + \angle B = 180°$; $\angle B = 144°$;
$\angle C + \angle D = 180°$, $117° + \angle D = 180°$; $\angle D = 63°$.

Ответ: 144°, 63°.

388.

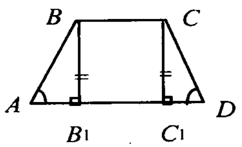


Дано:
$AB = CD$.
Доказать: 1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$;
2) $AC = BD$.

Доказательство:
Проведем $CE \| AB$,
ABCE – параллелограмм, т.е. $AB \| CE$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные,
т. к. ΔECD – равнобедренный, то $\angle 2 = \angle 3$, и, следовательно,
$\angle 1 = \angle 3$, т. е. $\angle A = \angle D$;

$AD \parallel BC$, $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle D + \angle C = 180°$,
$\angle B = 180° - \angle A$, $\angle C = 180° - \angle D$,
т.к. $\angle A = \angle D$, то $\angle B = \angle C$.
Рассмотрим ΔABD и ΔDCA: $AB = CD$, AD – общая,
$\angle A = \angle D$, следовательно, $\Delta ABD = \Delta DCA$ (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно, $BD = AC$.

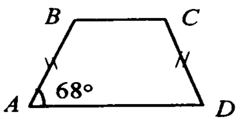
389.



Дано:
а) $\angle A = \angle D$,
$\angle B = \angle C$;
б) $AC = BD$.
Доказать: $AB = CD$.

Доказательство:
а)проведем $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$,
BCC_1B_1 – прямоугольник.
Рассмотрим ΔABB_1 и ΔCDC_1;
$BB_1 = CC_1$ (из прямоугольника BCC_1B_1), $\angle A = \angle D$, следовательно, $\Delta ABB_1 = \Delta CDC_1$ (по катету и острому углу), следовательно, $AB = CD$, что и требовалось доказать.
б) Рассмотрим ΔACC_1 и ΔDBB_1
$AC = BD$, $CC_1 = BB_1$, следовательно, $\Delta ACC_1 = \Delta DBB_1$ (по катету и гипотенузе), следовательно, $AC_1 = B_1D$;
$AB_1 = AC_1 - B_1C_1$, $C_1D = B_1D - B_1C_1$, следовательно $AB_1 = C_1D$
Рассмотрим ΔABB_1 и ΔDCC_1;
$BB_1 = CC_1$, $AB_1 = DC_1$, следовательно, $\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$ (по двум катетам), следовательно, $AB = CD$, ч.т.д.

390.

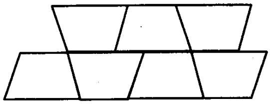


Дано:
$\angle A = 68°$, $AB = CD$;
$\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ = ?

Решение:
трапеция ABCD равнобедренная, следовательно, $\angle A = \angle D = 68°$, а $\angle B = \angle C$,
$\angle A + \angle B = 180°$; $\angle B = 180° - 68° = 112°$; $\angle C = \angle B = 112°$.

Ответ: 112°, 112°, 68°.

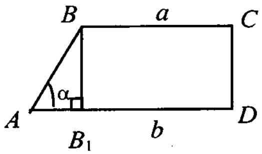
391.



Условие задачи сформулировано некорректно. Доказательство невозможно.

Пример! Пусть S – площадь паркетной плитки в виде равнобедренной трапеции, S_1 – некая площадь, ограниченная стенами. Тогда при $S>S_1$ паркет уложить нельзя.

392.



Дано:
$\angle D = 90°$, $AD = b$,
$BC = a$, $\angle A = \alpha$;
а) AB = ?
б) CD = ?

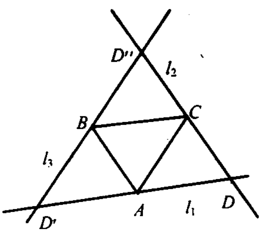
Решение:
а) $a = 4$см, $b = 7$см, $\alpha = 60°$
проведем: $BB_1 \perp AD$; $AB_1 = AD - DB_1$;
$AB_1 = 7 - 4 = 3$см, в ΔABB_1 $\angle A = 60°$ (по усл.), то $\angle B = 30°$, следовательно, $AB_1 = \frac{1}{2}AB$ (свойство прямоугольного треугольника), т.е. $AB = 2 \cdot 3 = 6$см.

Ответ: 6см.

б) если $a = 10$см, $b = 15$см, $\alpha = 45°$; $AB_1 = AD - DB$;
$AB_1 = 15 - 10 = 5$см, следовательно $CD = 5$см (свойство прямоугольника).

Ответ: 5см.

394.

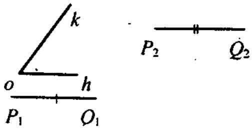


ABCD; AD′BC; ABD″C.
Построение:
1) Соединим точки A, B, C отрезками, получим ΔABC;
2) проведем прямые $l_1 \| BC$; $l_2 \| AB$; $l_3 \| AC$
3) $l_1 \cap l_2 = D$, $l_1 \cap l_3 = D'$, $l_2 \cap l_3 = D''$,
ABCD, AD′BC, ABD″C – искомые параллелограммы.

Следовательно, можно построить 3 параллелограмма, удовлетворяющие данному условию.

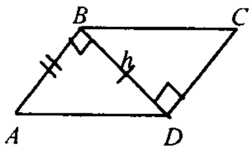
395.

Дано:

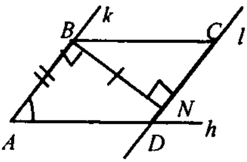


Построить: ABCD – параллелограмм такой, что:
$AB = P_2Q_2$, $h = P_1Q_1$, $\angle A = \angle hk$.

Анализ:



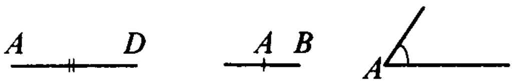
Построение:



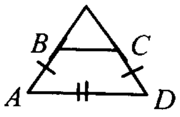
1) построили $\angle A = \angle hk$; $AB = P_2Q_2$;
2) восстановили перпендикуляр в точке B к лучу AB;
$BN \perp AB$, $BN \perp P_1Q_1$;
3) через N проведем прямую $l \parallel AB$;
4) $l \cap h = D$, от D отложим отрезок, равный P_2Q_2 , $DC = P_2Q_2$;
5) соединим BC, получили ABCD – параллелограмм.

397.

а) Дано:

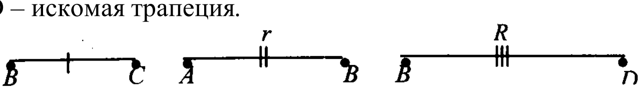


Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, такую, что
AD – основание, AB – боковая сторона.

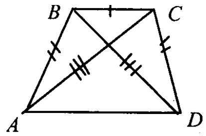


Построение:
1)отрезок AD; 2) $\angle A$;
3) AB, на стороне угла; 4) $\angle D = \angle C$;
5) $DC = AB$;
6) ABCD – искомая трапеция.

б) Дано:



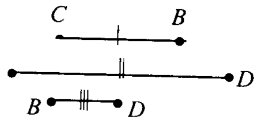
Построить: ABCD – равнобедренную трапецию, где
BC – меньшее основание, AB – боковая сторона, BD – диагональ.



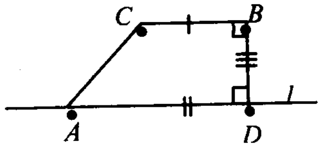
Планы построения:
1) отрезок BC;
2) окружности с центром в B и C и радиусам AB;
3) окружность с центром в B и радиусом BD.
4) Попарное пересечение этих окружностей даст точки A и O.
5) ABCD – равнобедренная трапеция.
Построение возможно только тогда, когда из отрезков BC, AB и BD можно построить треугольник.

398.

Дано:



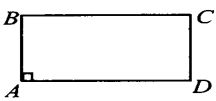
Построить: ABCD – прямоугольную трапецию такую, что CB, AD – основания, BD – меньшая боковая сторона.



План построения:
1) отрезок BC;
2) BD⊥BC;
3) через D проведем l||BC;
4) DA∈l;
5) получаем трапецию ABCD.

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

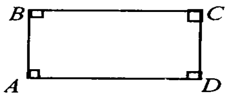
399.



Дано: ABCD – параллелограмм
∠A = 90°.
Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:
ABCD – параллелограмм, следовательно, AB = CD, BC = AD, ∠A = ∠C = 90°, ∠B = ∠D.
Т. к. ∠A + ∠B = 180°, то ∠B = 180° – 90° = 90°.
Т.е. в ABCD стороны попарно равны; все углы прямые, значит, ABCD – прямоугольник.

400.



Дано:

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Доказательство:

$\angle A + \angle B = 180°$;

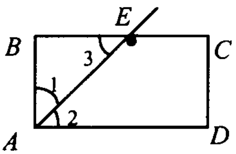
$\angle A$, $\angle B$ – односторонние при AD и BC и секущей AB, следовательно AD||BC;

аналогично, AB||CD; $\angle B$, $\angle C$ – односторонние при CD, AB и секущей BC;

AD||BC, AB||CD, следовательно, ABCD – параллелограмм,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, следовательно, ABCD – прямоугольник, ч.т.д.

401.



Дано:

AE – биссектриса $\angle A$;

P_{ABCD} – ?

Решение:

а) $E \in BC$, BE = 45,6см, EC = 7,85см.

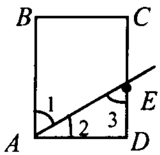
из условия $\angle 1 = \angle 3$: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$ (т.к. AD||BC), значит, ΔABE – равнобедренный и AB = BE = 45,6см

BC = BE + EC, BC = 45,6 + 7,85 = 53,45см, AD = BC = 53,45см.

$P_{ABCD} = 2\cdot(AB + AD)$;

$P_{ABCD} = 2\cdot(45,6 + 53,45) = 198,1$см.

Ответ: 198,1см.



$E \in DC$, CE = 2,7дм, ED = 4,5дм.

ΔAED – равнобедренный (т. к. $\angle 2 =$ $= \angle 3$), следовательно, AD = ED = 4,5дм;

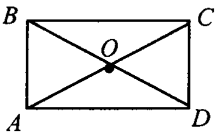
CD = CE + ED = 2,7 + 4,5 = 7,2дм;

$P_{ABCD} = 2\cdot(AD + CD)$;

$P_{ABCD} = 2\cdot(4,5 + 7,2) = 23,4$дм.

Ответ: 23,4дм.

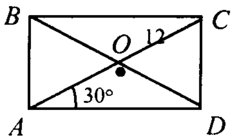
402.



Доказать: Δ AOD и ΔAOB –
– равнобедренные.

Доказательство:
ABCD – прямоугольник, следовательно, по св-вам прямоугольника AC = BD, BO = OD, AO = OC, т.е. AO = OC = OB = OD, значит ΔAOD и ΔAOB – равнобедренные (по определению), т. к. AO = OD и AO = OB.

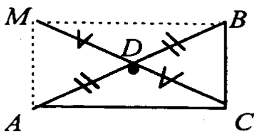
403.



Дано:
AC$\cap$BD = O;
$\angle$CAD = 30°;
AC = 12см;
P_{AOB} = ?

Решение:
ΔACD – прямоугольный (по усл.);
$\angle$A = 30°, значит, CD = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}\cdot 12$ = 6см, AB = CD = 6см;
AO = $\frac{1}{2}$ AC, AO = OB, значит, AO = OB = 6см;
P_{AOB} = AB + BO + AO; P_{AOB} = 6 + 6 + 6 = 18см.
Ответ: 18см.

404.

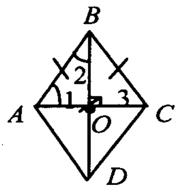


Дано: $\angle$C = 90°; BD = AD;
CD – медиана.
Доказать: CD = $\frac{1}{2}$ AB.

Доказательство:
1) продлим отрезок CD и отметим на луче отрезок DM = CD, AMBC – четырехугольник.

2) Надо доказать, что AMBC – прямоугольник.
Рассмотрим ΔADM и ΔCDB, по условию
AD=AB, MD = DC; $\angle ADM = \angle CDB$ (как вертик.), значит, $\Delta ADM = \Delta CDB$ (по 2 сторонам и углу между ними), следовательно:
AM= BC.
Так же из $\Delta ADC = \Delta BDM$ следует AC = MB.
Значит, AM = BC, AC = MB, $\angle C = 90°$, т.е.:
AMBC – прямоугольник.
3) AB и MC – диагонали прямоугольника AMBC, т.е.
AB = MC, AD = DB = MD = DC, значит, $DC = \frac{1}{2}AB$, ч.т.д.

405.

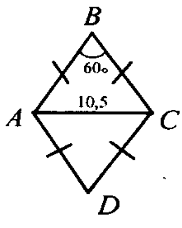


Дано:
AC = AB;
а) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ = ?
б) $\angle 1$, $\angle 2$ = ?

Решение:
1) AB = AC, следовательно, ΔABC – равносторонний, т.е.
$\angle 1 = \angle B = \angle 3 = 60°$;
2) по св-ву углов ромба $\angle A + \angle B = 180°$, т.е.
$\angle A = 180° - 60° = 120°$;
3) ΔABO – прямоугольный, т.е. из св-ва углов
$\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle 60 + \angle 2 = 90°$, $\angle 2 = 30°$.

Ответ: а) 120°, 60°, 120°, 60°; б) 60°, 30°.

406.



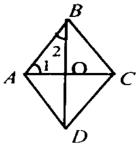
Дано: AB = BC = CD = AD,
$\angle B = 60°$,
AC = 10,5см;
P_{ABCD} = ?

Решение:

ΔABC – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle C$; $\angle B = 60°$, значит, и $\angle A = \angle C = 60°$, т.е. ΔABC – равносторонний,
$AB = BC = AC = 10{,}5$см;
$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10{,}5 = 42$см.

Ответ: 42 см.

407.



Дано:
$\angle B = 45°$;
$\angle 1, \angle 2 = ?$

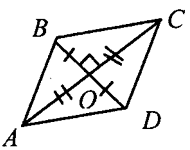
Решение:

1) BD – биссектриса $\angle ABC$, следовательно, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2} \cdot 45° =$
$= 22°30'$
2) ΔABO – прямоугольный, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle 1 = 90° -$
$- 22°30' = 67°30'$.

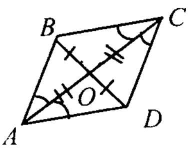
Ответ: $22°30'$ и $67°30'$.

408.

Дано: ABCD – параллелограмм; $\angle BOC = 90°$.
Доказать: ABCD – ромб.
Доказательство:

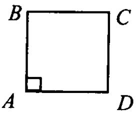


а) $AC \perp BD$.
Из ΔBCO и ΔDCO по св-ву диагоналей следует: $BO = OD$,
CO – общая, значит, $\Delta BCO = \Delta DCO$ (по 2 катетам), т.е. $BC = CD$,
т.к. $BC=AD$, $BC = CD$, то $AB = BC = CD = AD$, следовательно, ABCD – ромб, что и требовалось доказать.



б) AC – биссектриса углов.
ΔACD – равнобедренный по признаку,
т.к. $\angle A = \angle C$, следовательно, $AD = DC$;
$AD = BC$, $AD = DC$, значит, $AD = DC = BC =$
$=AB$, т. е. ABCD – ромб, ч.т.д.

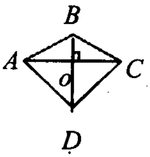
409.



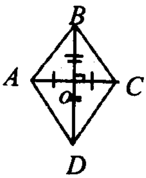
Дано: ABCD – ромб,
$\angle A = 90°$.
Доказать: ABCD – квадрат.

Доказательство:
ABCD – ромб, следовательно:
AB = BC = CD = AD,
$\angle A = \angle C = 90°$,
$\angle A + \angle B = 180°$, т.е. $\angle B = 180° - \angle A = 90°$.
Т.к. все стороны равны и все углы равны 90°, то ABCD – квадрат.

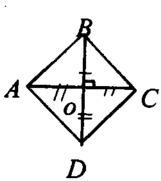
410.



а) нет;

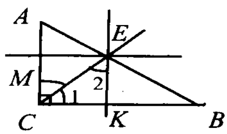


б) нет;



в) да.

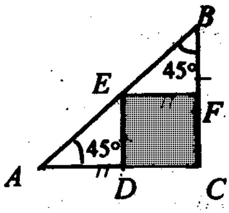
411.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$,
CE – биссектриса;
EK||AC, ME||CK.
Доказать: CMEK – квадрат.

Доказательство:
По условию MC||EK, значит, по определению CMEK – параллелограмм.
По свойству углов параллелограмма $\angle C = \angle E$,
т.к. CE – биссектриса $\angle C$, то EC – биссектриса $\angle E$, значит,
$\angle 1 = \angle 2$ и ΔCKE – равнобедр. (по признаку).
Т.е. CK = EK.
CK = ME, т.к. CMEK – параллелограмм,
следовательно, CMEK – ромб.
$\angle C = 90°$, значит, $\angle E = 90°$, $\angle M = \angle K = 90°$.
Следовательно, CMEK – квадрат, что и требовалось доказать.

412.



Дано: ΔABC,
$\angle C = 90°$,
$AC = BC = 12$см;
$CDEF$ – квадрат, $E \in AB$;
$P_{ADEF} = ?$

Решение:

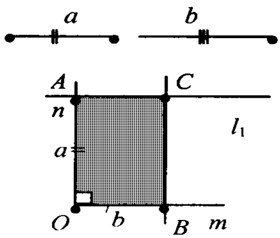
1) ΔABC – равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle B = 45°$, т.е. ΔADE и ΔEFB – равнобедренные прямоугольные треугольники, где $AD = DE$ и $EF = BF$; $CDEF$ – квадрат (по усл.), следовательно, $DE = EF$, т.е. $AD = DE = EF = BF$.

2) $P_{CDEF} = CD + DE + EF + CF$, где $DE = AD$; $EF = BF$;
$P_{CDEF} = CD + AD + BF + CF$, где $CD + AD = AC$; $BF + CF = BC$;
$P_{CDEF} = AC + BC = 12 + 12 = 24$см.

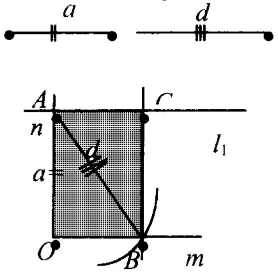
Ответ: 24см.

413.

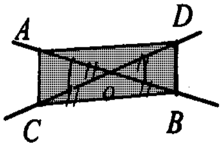
Построить прямоугольник:



а) по 2 смежным сторонам.
Построение:
$\angle mn = 90°$,
на луче n отрезок, равный a,
на луче m отрезок, равный b,
через A и B провести $l_1 \| m$ и $l_2 \| n$,
$l_1 \cap l_2 = C$, OABC – прямоугольник.



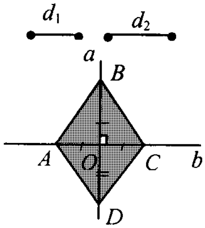
б) по стороне и диагонали.
Построение:
$\angle mn = 90°$,
на луче n отрезок, равный a,
Окр. (A; d), Окр. (A; d)$\cap m$ = C,
через C провести прямую $l_1 \| n$,
через A провести прямую $l_2 \| m$,
$l_1 \cap l_2 = B$,
OABC – искомый прямоугольник.



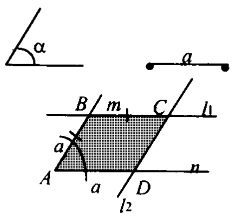
в) по 2 диагоналям и углу между ними.
Построение:
$\angle O = \alpha$.
Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, следовательно от O в разные стороны отложим отрезки, равные $\frac{1}{2}d$: $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}d$,
ADBC – искомый прямоугольник.

414.

Построить ромб.



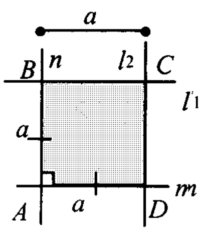
а) по 2 диагоналям
Построение:
диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, $a \perp b$, так же диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, значит, на прямой b от O отложим $OA = OB = OC = \frac{1}{2}d_1$, ABCD – искомый ромб.



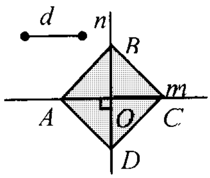
б) по стороне и углу
Построение:
$\angle A = \alpha$, проведем $AB = a$,
через b проведем $l_1 \| n$, $BC = a$,
через C проведем $l_2 \| m$,
получим $l_2 \cap n = D$, то
ABCD – искомый ромб.

415.

Построить квадрат



а) по стороне.
Построение:
построим $n \perp m$, $n \cap m = A$, от A на n отложим $AB = a$ и $AD = a$ на m,
через B и D прямые $l_1 \| m$, $l_2 \| n$,
имеем $l_1 \cap l_2 = C$, тогда
ABCD – искомый квадрат.

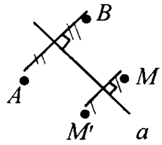


б) по диагонали.
Построим $n \perp m$, $n \cap m = O$,
диагонали взаимно перпендикулярны, равны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, отложим на m

$OA = OC = \frac{1}{2} d$,

$OB = OD = \frac{1}{2} d$ на n, имеем ABCD – искомый квадрат.

416.



Провести к прямой a ⊥ через M, провести окружность с центром O и R=OM. При пересечении окружности с ⊥ получим M′ – искомая.

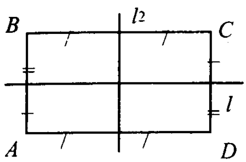
417.

а) 2 оси симметрии – прямая на которой лежит отрезок и серединный перпендикуляр;
б) бесконечное множество осей симметрии – ∀ перпендикуляр и сама прямая;
в) одну ось симметрии – прямая, на которой лежит луч.

418.

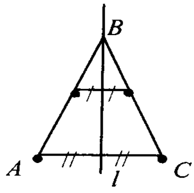
Ш, А, Е, О – имеют ось симметрии.

419.



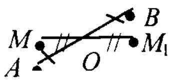
Из определения фигуры, симметричной относительно прямой, следует, что каждая точка прямоугольника имеет симметричную точку прямоугольника относительно любой из прямой l и l_2.

420.



Биссектриса равнобедренного треугольника ABC, опущенная на основание AC, является осью симметрии, т. е. каждая точка AB имеет симметричную точку отрезка BC ΔABC.

421.



M_1 – симметрична M относительно O, где O – середина AB.

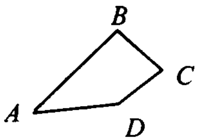
422.

а) да; б) нет; в) да; г) да.

423.

О и Х.

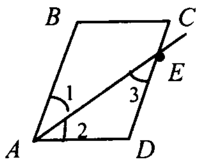
424.



Дано: ABCD – четырехугольник, не все углы равны друг другу.
Доказать: хотя бы один угол – тупой.

Доказательство:
Пусть в четырехугольнике все углы острые, а именно $\angle A < 90°$; $\angle B < 90°$; $\angle C < 90°$; $\angle D < 90°$, то
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360°$, а такого не может быть, т.к. сумма углов четырехугольника равна 360°. Т.е. предположение о том, что все углы острые – неверно. Следовательно, хотя бы один угол – тупой, что и требовалось доказать.

425.

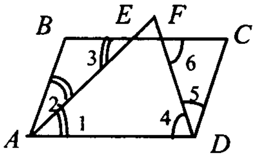


Дано: ABCD – параллелограмм.
P_{ABCD} = 46см, AB = 14см,
AE – биссектриса.
Найти: какую сторону ∩AE ?
отрезки пересечения.

Решение:
1) $P_{ABCD} = 2\cdot(AB + AD)$, $46 = 2\cdot(14 + AD)$, следовательно,
AD = 9см, AD<AB, значит, $E \in DC$;
2) $\angle 1 = \angle 3$ (AB||CD и секущая AE); по условию $\angle 1 = \angle 2$, значит,
$\angle 2 = \angle 3$, т.е. ΔAED – равнобедренный и AD = ED = 9см;
3) CE = CD – ED = 14 – 9 = 5см.

Ответ: 5см, 9см.

426.

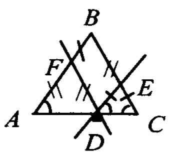


Дано: ABCD – параллелограмм.
AB = 3см, AD = 10см,
AE – биссектриса ∠A,
DF – биссектриса ∠D;
BE, EF, FC = ?

Решение:
1) ΔABE – равнобедренный, т.к. $\angle 2 = \angle 3$, значит,
AB = BE = 3см, так же из ΔDCF следует, что CD = FC =3см;
2) EF = BC – BE – FC, EF = 10 – 6 = 4см.

Ответ: 3см, 4см, 3см.

427.



Дано: ΔABC, AB = BC,
$D \in AC$, DE||AB, FE||AC.
Доказать: P_{AFED} = AB + BC.

Доказательство:
1) ΔABC – равнобедренный, следовательно, ∠A = ∠C;

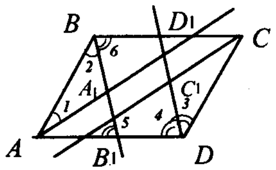
$AB \| DE$, следовательно, как соответственные $\angle A = \angle D$, т.е. $\angle D = \angle C$ и $DE = EC$.

2) $FB \| DE$; $FD \| BE$, следовательно, BEDF – параллелограмм, т.е. $FD = BE$ и $FB = DE$. $FD \| BC$, значит, $\angle C = \angle ADF$, $\angle A = \angle C$, т.е. $\angle A = \angle ADF$, следовательно, $AF = FD$.

3) $P_{FBED} = FB + BE + ED + FD$, где $ED = EC$; $FD = AF$

$P_{AFED} = FB + BE + EC + AF = AB + BC$, что и требовалось доказать.

428.



Дано: ABCD – параллелограмм;

$AB \neq AD$, AA_1; BB_1; CC_1; DD_1 – биссектрисы углов.

Доказать: $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник

Доказательство:

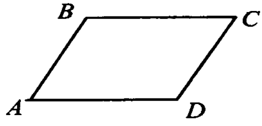
1) по свойству углов параллелограмма $\angle A = \angle B = 180°$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$ ($\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$), следовательно, в ΔABA_1 $\angle A_1 = 90°$ и ΔABA_1 – прямоугольный.

Аналогично: $\angle C_1 = 90°$ в ΔCC_1D;

2) по свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D$, BB_1; DD_1 – биссектрисы, значит, $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6$; $BC \| AD$, следовательно, $\angle 6 = \angle 5$, т.е. $\angle 5 = \angle 4$ как соответственные углы при прямых BB_1 и DD_1 и секущей AD, отсюда $BB_1 \| DD_1$. Аналогично $AA_1 \| CC_1$.

3) $AA_1 \| CC_1$, $BB_1 \| DD_1$, $\angle A_1 = \angle C_1 = 90°$, значит, $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник, что и требовалось доказать.

429.



Дано: ABCD – четырехугольник;

$\angle A + \angle B = 180°$,

$\angle B + \angle C = 180°$.

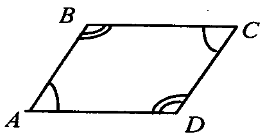
Доказать: ABCD – параллелограмм.

Доказательство:

1) $\angle A$, $\angle B$ – односторонние при прямых AD и BC и секущей AB. Т.к. по условию $\angle A + \angle B = 180°$, то по признаку $AD \| BC$.

2) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние при прямых AB и CD и секущей BC. Т.к. по условию $\angle B + \angle C = 180°$, то по признаку AB||CD.
3) Т.к. AD||BC, AB||CD, то по определению ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.

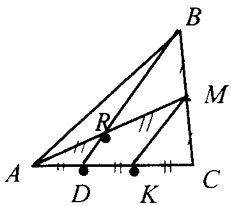
430.



Дано: ABCD – четырехугольник;
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
Доказать: ABCD– параллелограмм.

<u>Доказательство:</u>
1) по свойству суммы углов четырехугольника: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, где $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отсюда следует
$2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 360°$, $\angle A + \angle B = 180°$;
2) $\angle A$, $\angle B$ — односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB, $\angle A + \angle B = 180°$, значит, AD||BC;
3) $\angle B$, $\angle C$ – односторонние углы при прямых AB и CD и секущей BC, $\angle B + \angle C = 180°$, значит, AB||CD;
4) AD||BC, AB||CD, т.е. ABCD – параллелограмм, что и требовалось доказать.

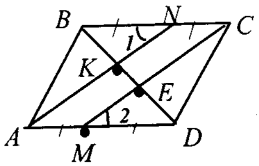
431.



Дано: ΔABC, AM – медиана;
$K \in AM$, AK = KM,
$BK \cap AC = D$.
Доказать: $AD = \frac{1}{3} AC$.

<u>Доказательство:</u>
1) проведем MK||BD, DK = KC (по т. Фалеса);
2) в ΔAMK KD||MR; AK = KM, следовательно, по т. Фалеса AD = = DK;
3) AC = AD + DK +KC, но AD = DK = KC, значит, AC = 3AD, т.е. $AD = \frac{1}{3} AC$, что и требовалось доказать.

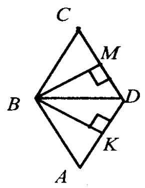
432.



Дано: ABCD – параллелограмм;
M∈AD, AM = MD,
N∈BC, BN = NC;
AN∩BD = K; CM∩BD = E.
Доказать: BK = KE = ED.

Доказательство:
1) Имеем ΔABN и ΔCDM; по свойству параллелограмма AB = CD, BN = MD (по условию), ∠B = ∠D (по усл.), т.е. по двум сторонам и углу ΔABN = ΔCDM, следовательно, AN = MC.
2) По условию NC = AM, и AN = MC, значит, ANCM – параллелограмм, и AN||MC.
3) В ΔBCE: NK||CE;
BN = NC, значит BK = KE (т. Фалеса).
В ΔAKD: ME||AK;
AM = MD, следовательно, KE = ED (т. Фалеса), следовательно, BK = KE = ED, что и требовалось доказать.

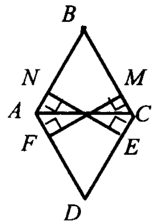
433.



Дано: ABCD – ромб,
BM⊥DC, BK⊥AD.
Доказать: BD – биссектриса ∠KBM.

Доказательство:
1) ∠B = ∠D по св-ву углов ромба, а по св-ву диагонали BD – биссектриса.
2) Надо доказать, что ∠DMB = ∠DBK.
а) Имеем ΔBCM и ΔBAK.
Т.к. ABCD – ромб, BC = BA, ∠C = ∠A, значит ΔBCM = ΔBAK (по гипотенузе и острому углу), т.е. по определению равных треугольников ∠CBM = ∠ABK.
б) ∠MBD = ∠DBC – ∠MBC; ∠DBK = ∠DBA – ∠ABK, значит, ∠MBD = ∠DBK и BD является биссектрисой ∠MBK, что и требовалось доказать.

434.

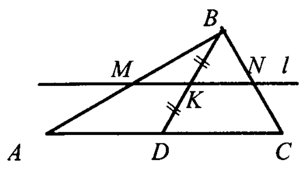


Дано: ABCD– ромб, $AC \cap BD = O$.
Доказать: ON = OM = OE = OF.

Доказательство:

1) Имеем ΔBON и ΔBOM, где BO – общая сторона, по св-ву ромба $\angle NBO = \angle MBO$, т.е. по гипотенузе и острому углу
$\Delta BON = \Delta BOM$.
Следовательно, OM = ON;
2) так же через $\Delta FOD = \Delta EOD$ имеем OE = OF.
3) Имеем ΔAOF и ΔCOM; по св-ву ромба AO = OC и $\angle OAF =$
$= \angle OCM$, т.е. $\Delta AOF = \Delta COM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, OF = OM.
4) Имеем OM = ON, OE = OF, OF = OM, следовательно,
ON = OM= OE = OF. Что и требовалось доказать.

435.

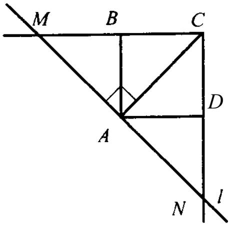


Дано: ΔABC;
$D \in AC$, $K \in BD$, BK = KD.
Доказать: AM = MB, BN = NC.

Доказательство:

1) Проведем через K прямую $l \| AC$.
2) Рассмотрим ΔABD: $MK \| AD$, BK = KD,
из теоремы Фалеса следует: BM = MA,
что и требовалось доказать.
3) Рассмотрим ΔDBC: $KN \| DC$, BK = KD,
из теоремы Фалеса следует BN = NC,
что и требовалось доказать.

436.

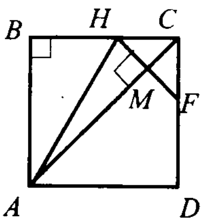


Дано: ABCD – квадрат,
AC = 18,4см;
$A \in l$, $l \perp AC$,
$l \cap BC = M$; $l \cap CD = N$.
MN = ?

Решение:
1) по св-ву квадрата AC – биссектриса $\angle C$, т.е.
$\angle BCA = \angle ACD = 45°$;
2) ΔMAC – прямоугольный $\angle A = 90°$, $\angle C = 45°$, значит, $\angle M = 45°$.
и AM = AC = 18,4см.
Также ΔACN – прямоугольный, AN = AC = 18,4см.
3) MN = MA + AN = 18,4 + 18,4 = 36,8см.

Ответ: 36,8см.

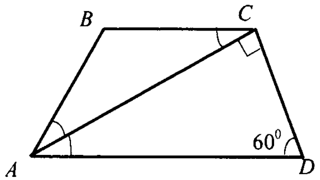
437.



Дано: ABCD – квадрат;
$M \in AC$, AB = AM, $HM \perp AC$.
Доказать: BH = HM = MC.

Доказательство:
1) Имеем ΔHMC и ΔFMC с общей стороной CM,
$\angle HCM = \angle FCM = 45°$, т.е. по катету и острому углу
$\Delta HCM = \Delta FMC$, следовательно, HC = CF, HM = MF.
2) Имеем ΔABH и ΔAMH с общей стороной AH;
AB = AM (по условию),
$\Delta ABH = \Delta AMH$, т.е по катету и гипотенузе, следовательно,
BH = HM.
3) Имеем CM = HM = BH, что и требовалось доказать.

438.



Дано: ABCD – трапеция;
$AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$;
$P_{ABCD} = 20$см, $\angle D = 60°$;
AD = ?

Решение:
1) В ΔACD

$\angle C = 90°$, $\angle D = 60°$, значит, $\angle A=30°$, следовательно, $CD = \frac{1}{2}AD$;

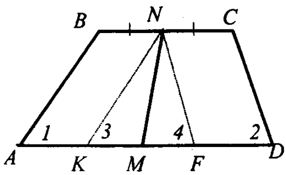
2) т.к. $\angle BAC = \angle CAD = 30°$, то $\angle A = 60°$, следовательно, ABCD – равнобедренный, т.е. CD = AB;
3) т.к. $\angle CAD = \angle BAC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, значит, ΔABC – равнобедренный, т.е. AB = BC;

4) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$, где $CD = \frac{1}{2}AD$, AB = BC = CD,

$20 = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}AD + AD = 2{,}5AD$;
20 = 2,5 AD, AD = 20:2,5 = 8.

Ответ: 8см.

439.



Дано: ABCD – трапеция;
$\angle A + \angle D = 90°$;
BN = NC,
AM = MD.

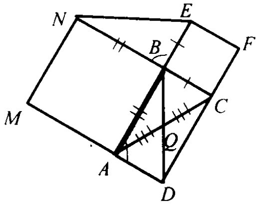
Доказать: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство:
1) Построим NK||AB и NF||CD, ABNK и NCDF – параллелограммы.
2) $\angle 1 = \angle 3$ (соответственные при AB||NK и секущей AK);
$\angle 2 = \angle 4$ (соответственные при NF||CD и секущей FD).
Значит $\angle 3 + \angle 4 = 90°$.
3) В ΔKNF: $\angle 3 + \angle 4 = 90°$, следовательно, $\angle N = 90°$, и
ΔKNF – прямоугольный, NM – медиана.

Значит, $NM = \frac{1}{2}KF$, где $KF = AD - (AK + FD) =$

$= AD - BC$, значит $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, что и требовалось доказать.

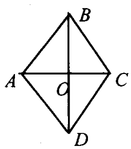
440.



Дано: ΔABC;
ABNM, BEFC – квадраты.
Доказать: $BQ = \frac{1}{2}NE$.

Доказательство:
1) Построим QD = QB, имеем по признаку параллелограмма: ABCD – параллелограмм. AQ = QC, BQ = QD. Следовательно, AD = BC.
2) В ΔBNE и ΔABD:
NB = AB, BE = AD, $\angle B = \angle A$, т.е. по двум сторонам и углу между ними $\Delta BNE = \Delta ABD$, по определению равных Δ NE = BD, т.е. $BQ = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}NE$, что и требовалось доказать.

441.



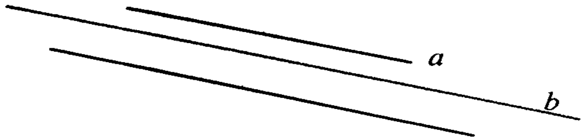
Дано: ABCD – ромб.
Доказать: BD, AC – оси симметрии.

Доказательство:
1) ΔABC и ΔADC – равнобедренные треугольники.
2) Биссектриса BD – ось симметрии равнобедренного треугольника (любая точка отрезка AB имеет симметричную точку отрезка BC относительно BD).

442.

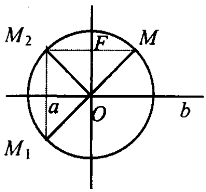
Дано: ABCD – ромб
Доказать: O – ось симметрии.
См. 434.

443.



Бесконечное множество.

444.



Дано: $a \perp b$, $a \cap b = O$;

a, b – оси симметрии окр. (O;R).

Доказать: O – центр симметрии.

<u>Доказательство:</u>

$\Delta MFO = \Delta M_1OF$ по катету и гипотенузе ($OM = OM_1 = R$; OF – общая сторона), т.е. MF = FM, следовательно, M и M_1 – симметричные относительно прямой a.

2) M_1 и M_2 – симметричны относительно прямой b, т.к.

$\Delta\ M_1OQ = \Delta\ M_1OQ$, откуда, $M_1Q = QM_2$.

3) $MF \| b$, $M_1Q \| a$, $\angle O = 90°$, значит, MFOQ – прямоугольник и $\angle M_1 = 90°$.

Следовательно, ΔM_2MM_1 – прямоугольный с $\angle M_1 = 90°$.

Т.е. M_2M_1 – диаметр окружности и $M_2O = OM$,

следовательно, M_2 и M – симметричны относительно O, что и требовалось доказать.

Глава VI. Площадь

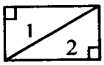
§ 1. Площадь многоугольника

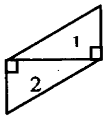
445.

Прямоугольные треугольники

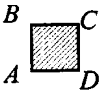
Составить:

1) прямоугольник; 2) параллелограмм; 3) равнобедренный треугольник.



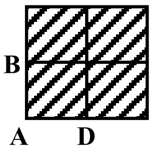


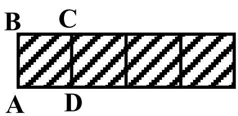
446.

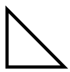


$S_{ABCD} = 1$ ед^2.

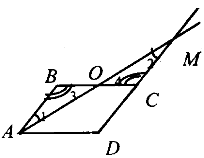
а) квадрат; б) прямоугольник; в) треугольник.







447.



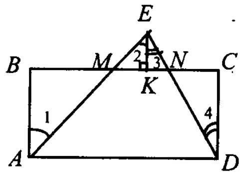
Дано: ABCD – параллелограмм;
CM = CD.
Доказать: $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

<u>Доказательство:</u>

1) В ΔABO и ΔMCO: AB = CM, $\angle 1 = \angle 2$ (накрест леж. при AB||CD и секущей AM);
$\angle 3 = \angle 4$ (накрест леж. при AB||CD и секущей BC), значит, $\Delta ABO = \Delta MCO$ (по стороне и 2 прилежащим углам), т.е. по св-ву площадей $S_{ABO} = S_{MCO}$.

2) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{AOCD}$, где $S_{ABC} = S_{MCO}$;
$S_{AMD} = S_{MCO} + S_{AOCD}$,
$S_{ABCD} = S_{AMD}$, что и требовалось доказать.

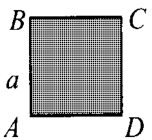
448.



Дано: ABCD – прямоугольникник,
ΔAED, $AE \cap BC = M$,
$ED \cap BC = N$, $AM = ME$.
Доказать: $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

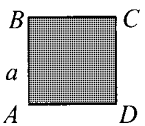
Доказательство:
1) $EK \perp MN$.
В ΔABM и ΔEKM:
$AM = ME$, $\angle 1 = \angle 2$ (т.к. накрест леж. при $AB \| EK$ при секущей AC), значит, $\Delta ABM = \Delta EKM$ (по гипотенузе и острому углу) и по св-ву площадей $S_{ABM} = S_{EKM}$.
2) В ΔKEN и ΔCDN
$EK = CD$, $\angle 3 = \angle 4$ (т.к. накрест лежащие при $KE \| CD$ и секущей ED), т.е. по св-ву площадей $S_{KEN} = S_{CDN}$.
3) $S_{ABCD} = S_{ABM} + S_{AMND} + S_{CDN}$, следовательно,
$S_{AED} = S_{MEK} + S_{AMND} + S_{KEN}$, т.е. $S_{ABCD} = S_{ADE}$,
Что и требовалось доказать.

449.



$S = a^2$;
а) $a = 1{,}2$см, $S = 1{,}44$см^2;
б) $a = \frac{3}{4}$ дм, $S = \frac{9}{16}$ дм^2;
в) $a = 3\sqrt{2}$ м, $S = 18$м^2 .

450.

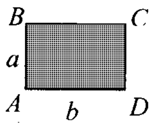


$S = a^2$, или $a = \sqrt{S}$
а) $S = 16$см^2, $a = 4$см;
б) $S = 2{,}25$дм^2, $a = 1{,}5$дм;
в) $S = 12$м^2, $a = 2\sqrt{3}$ м.

451.

$S = 24$см^2 $= 2400$мм^2 $= 0{,}24$дм^2.

452.



S = ab;

а) a = 8,5см, b = 3,2см, S = 27,3см^2;

б) $a = 2\sqrt{2}$ см, b = 3см, S = $6\sqrt{2}$ см^2;

в) a = 32см, S = 684,8см^2, т.к. b = S : a,
b = 21,4см;

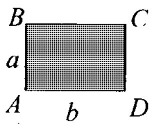
г) b = 4,5см, S = 12,5см^2, 12,5 = a·4,5; a = 2,7см (a = S : b).

453.

S = $a \cdot b$, следовательно,

а) S увеличится в 2 раза, б) S увелич. в 4 раза, в) S не изменится.

454.



Дано: ABCD – прямоугольник

а) AD > AB в 2,5 раза; S_{ABCD} = 250 см^2;

б) S_{ABCD} = 9 м^2; P_{ABCD} = 12м;

AB, AD = ?

Решение:

а) Пусть AB = x, тогда AD = 2,5x см, S = AB·AD;

250 = 2,5x^2, x^2 = 100, x = 10, имеем AB = 10см, AD = 25см;

б) Пусть AB = x, AD = y;

S_{ABCD} = AB·AD; P_{ABCD} = 2(AB + AD);

9 = xy; 12 = 2(x + y), x+y = 6, т.е. x = y = 3; AB = AD = 3см.

455.

1) Найдем площадь каждой плитки: 30·5 = 150см^2.

2) Найдем площадь пола: 5,5·6 = 33м^2 =330000 см^2.

3) 330000:150 = 2200,

т.е. 2200 плиток потребуется для покрытия пола.

Ответ: 2200.

456.

1) Найдем площадь плитки: 15·15 = 225см^2.

2) Найдем площадь стены:3·2,7 = 8,1м^2 = 81000см^2.

3) 81000:225 = 360, т.е. 360 плиток потребуется на облицовку.

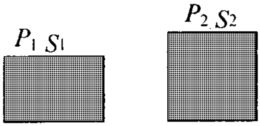
Ответ: 360.

457.

1) $S_{прямоуг.} = a \cdot b = 8 \cdot 18 = 144$ м^2;
2) $S_{прямоуг.} = S_{кв.}$,следовательно, сторона квадрата равна 12 м.

Ответ: 12м.

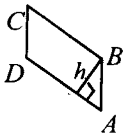
458.



1) $P_1 = 2 \cdot (220 + 160) = 760$м;
$P_1 = P_2$, следовательно, $P_2 = 4 \cdot a$,
где a – сторона квадрата,
$760 = 4a$, a = 190м;
2) $S_1 = 220 \cdot 160 = 35200$ м^2;
$S_2 = 190 \cdot 190 = 36100$ м^2,
т.е. $S_2 - S_1 = 900$м^2. Следовательно, площадь квадратного участка больше площади прямоугольного на 900м^2.

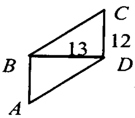
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

459.



$S = ah$;
1) $a = 15$см, $h = 12$см, $S = 180$см^2;
2) $S = 34$см^2, $h = 8{,}5$см, $a = 4$см;
3) $S = 162$см^2, $h = \frac{1}{2}a$, $162 = a \cdot \frac{1}{2}a$; $324 = a^2$;
$a = 18$см;
4) $h = 3a$, $S = 27$, $27 = a \cdot 3a$; $9 = a^2$; $a = 3$, $h = 9$.

460.

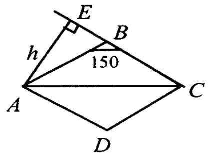


Дано: ABCD – параллелограмм
$BD \perp CD$, BD = 13см, CD = 12см;
S = ?

Решение:
$S = BD \cdot CD = 13 \cdot 12 = 156$ см^2.

Ответ: 156 см^2.

462.



Дано: ABCD – ромб, $\angle B = 150°$,
AB = 6см;
S = ?

<u>Решение:</u>

1) $AE \perp BC$.

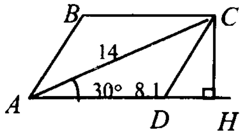
В ΔABE: $\angle E = 90°$, $\angle B = 30°$, следовательно,

$AE = \frac{1}{2} AB = 3$см.

2) $S_{ABCD} = AE \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18$ см^2.

Ответ: 18 см^2 .

463.



Дано: ABCD – параллелограмм;
AD = 8,1см, AC = 14см,
$\angle CAD = 30°$;
S = ?

<u>Решение:</u>

$CH \perp AD$, $S_{ABCD} = AD \cdot CH$.

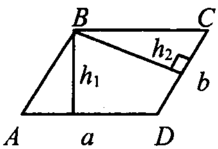
В ΔACH: $\angle H = 90°$, $\angle A = 30°$, следовательно, $CH = \frac{1}{2} AC$,

CH = 7см, т.е.

$S_{ABCD} = 8{,}1 \cdot 7 = 56{,}7$см^2.

Ответ: 56,7см^2.

464.



$S = a \cdot h_1$ или $S = b \cdot h_2$;

а) $a = 18$ см, $b = 30$см, $h_1 = 6$см;

$h_2 > h_1$, $h_2 = ?$, $18 \cdot h_2 = 30 \cdot 6$, $h_2 = 10$.

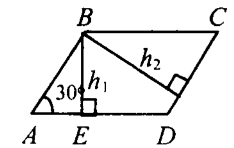
б) $a = 10$ см, $b = 15$см, $h_2 = 6$см;

$h_2 > h_1$, $h_1 = ?$, $10 \cdot 6 = 15 \cdot h_1$, $h_1 = 4$.

в) $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$см, $b = 30$см,

h_2 – ?, $h_1 = ?$, $54 = 4{,}5 \cdot h_1$, $h_1 = 12$, $54 = 6 \cdot h_2$, $h_2 = 9$.

465.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$\angle A = 30°$, $h_1 = 2$см, $h_2 = 3$см;
S = ?

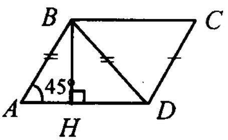
<u>Решение:</u>

1) В ΔABE: $\angle E = 90°$, $\angle A = 30°$, следовательно,
$BE = \frac{1}{2}AB$, $2 = \frac{1}{2}AB$, т.е. AB = 4см;

2) CD = AB = 4см, $S_{ABCD} = CD\cdot h^2 = 4\cdot 3 = 12$ см^2.

Ответ: 12см^2.

466.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$\angle A = 45°$, AD = 15,2см,
BD = AB;
S = ?

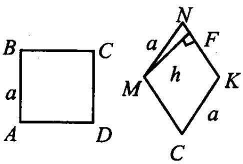
<u>Решение:</u>

1) По условию AB= BD, следовательно ΔABD – равнобедренный, т.к. $\angle A = 45°$, то $\angle D = 45°$, а $\angle B = 90°$.
По свойству медианы прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, имеем: $BH = \frac{1}{2}AD = 7{,}6$см.

2) $S_{ABCD} = BH\cdot AD = 7{,}6\cdot 15.2 = 115{,}52$см^2.

Ответ: 115,52см^2.

467.

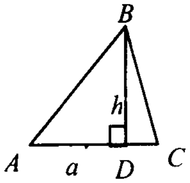


Дано: ABCD – квадрат;
MNKE – ромб;
$P_{ABCD} = P_{MNKE}$.
Сравнить S_{ABCD} и S_{MNKE}.

$S_{ABCD} = a^2$, $S_{MNKE} = a\cdot h$;
ΔMNF – прямоугольный;

MF<MN, следовательно, $h<a$, и соответственно $a^2>ah$, значит, $S_{ABCD} > S_{MNKE}$, что и требовалось доказать.

468.



$S = \frac{1}{2}ah$;

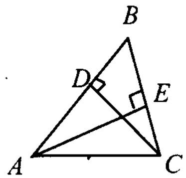
а) a = 7см, h = 11см, следовательно, $S = 38{,}5см^2$;

б) $a = 2\sqrt{3}$ см, h = 5см, следовательно, $S = 5\sqrt{3}\ см^2$;

в) $S = 37{,}8см^2$, a = 14см, следовательно, $37{,}8 = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot h$; h = 5,4см;

г) $S = 12см^2$, $h=3\sqrt{2}$ см, следовательно, $12 = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot a$; $a = 4\sqrt{2}$ см.

469.



Дано: ΔABC;
AB = 16см, BC = 11см;
AE⊥BC;
AE = ?

<u>Решение:</u>

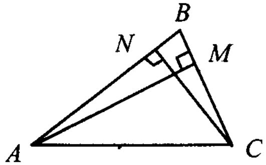
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot DC = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 11 = 88\ см^2$.

Также: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AE$;

$88 = \frac{1}{2}\cdot 22\cdot AE$, откуда AE = 8см.

Ответ: 8 см.

470.



Дано: ΔABC;
AB = 7,5см, BC = 3,2см;
CN⊥AB, CN = 2,4см;
AM⊥BC;
AM = ?

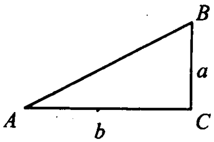
Решение:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 2{,}4 = 9$ см^2, также

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC$; $9 = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot 3{,}2$; откуда AM = 5,625см.

Ответ: 5,625см.

471.



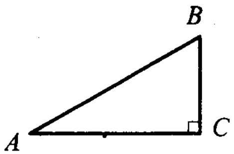
$S = \frac{1}{2} ab$;

а) a = 4см, b = 11см, следовательно $S_\Delta = 22$см^2;

б) a = 1,2дм, b = 3дм, $S_\Delta = 1{,}8$дм^2.

Ответ: 22 см^2; 1,8 дм^2.

472.



Дано: ΔABC, ∠C = 90°;
AC:BC = 7:12 ;
$S_{ABC} = 168$см^2;
AB, BC = ?

Решение:

Пусть x см – 1 часть, следовательно,
AC = 7x см, BC = 12x см;

$S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot BC$, следовательно, $168 = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 12x$;

$x^2 = 4$, x = 2;

AC = 7 · x = 14см; BC = 12 · x = 24см.

Ответ: 14см, 24см.

473.

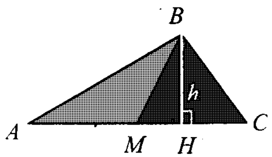
Дано: ΔABC, $C \in m$, $m \| AB$, $D \in m$.
Доказать: $S_{ABC} = S_{ABD}$.
Доказательство:

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CC_1 \perp AB$, или

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DD_1$, $(DD_1 \perp AB)$;

2) Надо доказать, что $CC_1 = DD_1$.
3) В четырехугольнике CDD_1C_1 ;
$CD \| C_1D_1$ ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$);
$CC_1 \| DD_1$ ($CD \in m$, $C_1D_1 \in AB$);
$CC_1 \| DD_1$ ($CC_1 \perp AB$, $DD_1 \perp AB$), значит,
CDD_1C_1 – параллелограмм, где $CC_1 = DD_1$ (по св-ву).
Следовательно, $S_{ABC} = S_{ABD}$.

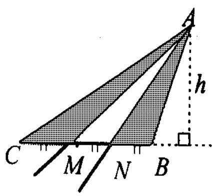
474.



Дано: ΔABC, где
BM – медиана.
Сравнить: S_{ABC} и S_{MBC} .

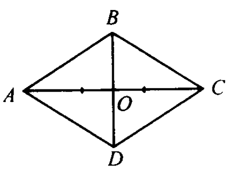
$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH$, т.к. BM – медиана, AM = MC,
$S_{ABC} = S_{MBC}$.

475.



Разделим BC на три равные части, имеем ΔCAM, ΔMAN, ΔNAB.
$S_\Delta = a \cdot h$, следовательно,
$S_{AMC} = CM \cdot h$,
$S_{MAN} = MN \cdot h$,
$S_{NAB} = NB \cdot h$, где $BM = MN = NB = a$.

476.



Дано: ABCD – ромб.
Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

<u>Доказательство:</u>
1) AC, BD – диагонали; $\Delta AOD = \Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD$ – прямоугольные.

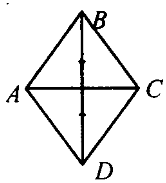
В ΔABO: $S_{ABO} = \frac{1}{2} AO \cdot OB$, где $AO = \frac{1}{2} AC$; $BO = \frac{1}{2} BD$.

2) $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABO} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB = 2 \cdot \frac{1}{4} (AC \cdot BD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

а) $d_1 = 3{,}2$дм, $d_2 = 14$см, следовательно, $S = \frac{1}{2} 32 \cdot 14 = 224$см^2;

б) $d_1 = 4{,}6$дм, $d_2 = 2$дм, следовательно, $S = \frac{1}{2} 4{,}6 \cdot 2 = 4{,}6$дм^2.

477.

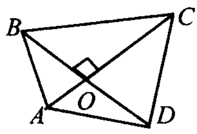


Дано: ABCD – ромб;
$S_{ABCD} = 27$см^2;
AC<BD в 1,5 раза;
AC, BD = ?

Решение:
Пусть AC = x см, тогда BD = 1,5x см;
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $\Rightarrow 27 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1{,}5x$, тогда
$x^2 = 36$; $x = 6$;
AC = 6см, BD = 9см.

Ответ: 6см, 9см.

478.



Дано: ABCD – четырехугольник;
$BD \perp AC$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

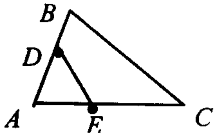
Доказательство:
$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{DOA}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA)$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AO \cdot (OB + OD) + \frac{1}{2}OC \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2}AO \cdot BD +$

$+ \frac{1}{2}OC \cdot BD = \frac{1}{2}BD \cdot AC.$

479.



а) AB = 5см, AC = 6см,
AD = 3см, AE = 2см,
S_{ABC} = 10см^2
S_{ADE} = ?
$\angle$A – общий, значит:

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$ т.е.

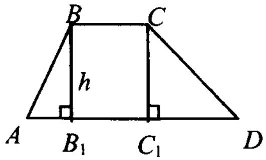
$\frac{10}{S_{\Delta ADE}} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 2}$, $S_{\Delta ADE}$ = 2см;

б) AB = 8см, AC = 3см, AE = 2см, S_{ADE} = 10см^2, AD – ?

$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$, т.е.

$\frac{2}{10} = \frac{AD \cdot 2}{8 \cdot 3}$, откуда AD = 2,4см.

480.



$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AD + CB) \cdot h;$

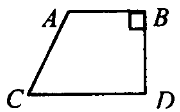
а) AD = 21см, CB = 17см,
h = 7см, следовательно,

$S = \frac{1}{2}(21 + 17) \cdot 7 = 133$см;

б) $\angle$D = 30°, BC = 2см, AD = 10см, DC = 8см, S = ?
Рассмотрим ΔDCC_1: $\angle C_1 = 90°$, $\angle D = 30°$, следовательно,

$CC_1 = \frac{1}{2}CD$, CC_1 = 4см, т.к. CC_1 = h, то h = 4см.

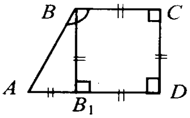
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2+10) \cdot 4 = 24$ см^2.



в) AB = 5см, BC = 8см, CD = 13см,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(5 + 13) \cdot 8 = 72$см^2.

481.

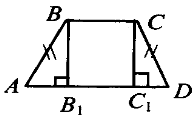


Дано: ABCD – трапеция;
$\angle D = 90°$, BC = CD = 6;
$\angle B = 135°$;
S_{ABCD} = ?

<u>Решение:</u>
1) $BB_1 \perp AD$, в ΔABB_1: $\angle B_1 = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, тогда,
$AB_1 = CD = BB_1 = 6$см,
отсюда $AD = B_1D + AB_1 = 6 + 6 = 12$см
2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot CD = \frac{1}{2}(12 + 6)\cdot 6 = 54$см^2.

Ответ: 54см^2.

482.



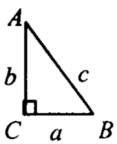
Дано: ABCD – трапеция;
AB = CD;
$\angle B = 135°$;
S = ?

<u>Решение:</u>
1) В ΔABB_1: $\angle B_1 = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, значит, $AB_1 = BB_1 =$
$= 1{,}4$см, также из ΔCC_1D: $C_1D = C_1C = 1{,}4$см;
2) $B_1C_1 = B_1D - C_1D = 3{,}4 \cdot 1{,}4 = 2$ см. Т.к. $B_1C_1 = BC$, то BC=2см;
$AD = AB_1 + B_1D = 1{,}4 + 3{,}4$, $AD = 4{,}8$см;
3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot BB_1 = \frac{1}{2}(4{,}8 + 2)\cdot 1{,}4 = 4{,}76$ см^2.

Ответ: 4,76см^2.

§ 3. Теорема Пифагора

483.

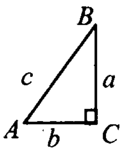


$c^2 = a^2 + b^2$;
а) $a = 6$, $b = 8$, $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = \sqrt{100} =$
$= 10$;
б) $a = 5$, $b = 6$, $c^2 = 25 + 36 = 61$, $c = \sqrt{61}$;

в) $a = \frac{3}{7}$, b = $\frac{4}{7}$, $c^2 = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$, c = $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$;

г) a = 8, b = $8\sqrt{3}$, c^2 = 64 + 192 = 256, c = $\sqrt{256}$ = 16.

484.



$c^2 = a^2 + b^2$;

а) a = 12, c = 13, $13^2 = 12^2 + b^2$, b^2 = 25, b = $\sqrt{25}$ = 5;

б) a = 7, c = 9, 81 = 49 + b^2, b^2 = 34, b = $\sqrt{34}$

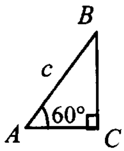
в) a = 12, c = 2b, $4b^2 = 144 + b^2$, $3b^2$ = 144;

b^2 = 48, b = $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

г) $a = 2\sqrt{3}$, c = 2b, $4b^2 = 12 + b^2$, $3b^2$ = 12; b^2 = 4, b = $\sqrt{4}$ = 2;

д) a = 3b, c = , 40 = $9b^2 + b^2$, $10b^2$ = 40; b^2 = 4, b = $\sqrt{4}$ = 2.

485.



Дано: ΔABC, ∠C = 90°;
∠A = 60°, AB = c;
BC = ?

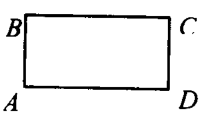
<u>Решение:</u>

1) ∠A = 60°, ∠C = 90°, следовательно, ∠B=30°, значит, AC = $\frac{1}{2}$ c;

2) $BC^2 = AB^2 - AC^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$, т.е. BC = $\frac{c\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{c\sqrt{3}}{2}$

486.



а) AB = 5, AC = 13, AD = ?
$AC^2 = AD^2 + CD^2$, отсюда
$AD^2 = AC^2 - CD^2$;
AD^2 = 169 – 25 = 144;

AD = $\sqrt{144}$ = 12;

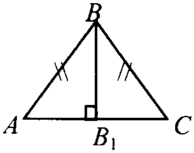
б) CD = 1,5, AC = 2,5, BC = ? $AC^2 = BC^2 + AB^2$, отсюда

$BC^2 = AC^2 - AB^2$, $BC^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$, $BC = \sqrt{4} = 2$;

в) BD = 17, BC = 15, CD = ? $BD^2 = CD^2 + BC^2$, отсюда

$CD^2 = BD^2 - BC^2$, $CD^2 = 289 - 225 = 64$, $CD = \sqrt{64} = 8$.

487.



Дано: ΔABC;
AB = BC = 17см;
AC = 16см, $BB_1 \perp AC$;
BB_1 = ?

Решение:

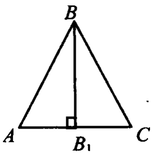
1) известно, что высота равнобедренного треугольника является медианой, следовательно, AB = BC = 8см.

2) В ΔABB_1: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2$, $BB_1^2 = 289 - 64 = 225$; $BB_1 = \sqrt{225} = 15$.

Ответ: 15см.

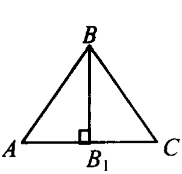
488.



а) ΔABC – равносторонний,
AB = 6см;
h = ?

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

$BB_1^2 = AB_1^2 - AB_1^2$, $BB_1^2 = 36 - 9 = 27$, $BB_1 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;



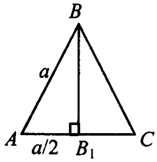
б) ΔABC – равносторонний,
h = 4см;
AB = ?

Пусть $AB_1 = x$, тогда AB = 2x и

$AB_1 = BB_1^2 + AB_1^2$, $4x^2 = 16 + x^2$; $3x^2 = 16$;

$x^2 = \dfrac{16}{3}$, т.е. $x = \sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

489.



Дано: ΔABC – равносторонний;
$AB = a$.

Доказать: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

<u>Доказательство:</u>

1) В ΔABB_1: $AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$, отсюда

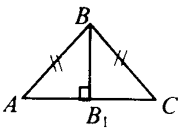
$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$; $BB_1 = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

2) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BB_1 = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

а) $a = 5$, $S_{ABC} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

б) $a = 1{,}2$, $S_{ABC} = 0{,}36\sqrt{3}$; в) $a = 2\sqrt{2}$, $S_{ABC} = 2\sqrt{3}$.

490.



Дано: ΔABC, $AB = BC$;
AB = ? и S_{ABC} = ?

<u>Решение:</u>

а) $AC = 12$см, $BB = 8$см, $BB_1 \perp AC$;

$AB^2 = BB_1^2 + AB_1^2$ (из прямоугольного ΔABB_1);

$AB^2 = 64 + 36 = 100$; $AB = \sqrt{100} = 10$;

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}AC\cdot BB_1$; $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 12 = 48$см^2;

б) $AC = 8$см, $\angle B = 120°$;

1) В ΔABB_1, $\angle B_1 = 90°$, $\angle B = 60°$, значит, $\angle A = 30°$;

пусть $BB_1 = x$, тогда $AB = 2x$,

$AB^2 = AB_1^2 + BB_1^2$; $4x^2 = 16 + x^2$; $3x^2 = 16$; $x^2 = \dfrac{16}{3}$,

$x = \sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, т.к. $AB = 2x$, то $AB = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см, а $BB_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

2) $S_\Delta = \frac{1}{2}$ $AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2;

в) $\angle B = 90°$, $BB_1 = 7$см.

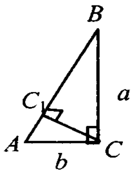
В ΔABB_1: $\angle B = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, следовательно,

$AB_1 = BB_1 = 7$см; $AB^2 = AB_1{}^2 + BB_1{}^2$; $AB^2 = 49 + 49 = 98$;

$AB = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ см;

$S_\Delta = \frac{1}{2} AC \cdot BB$; $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 7 = 49$см^2.

491.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;

$CC_1 \perp AB$;

$CC_1 = ?$

<u>Решение:</u> $c^2 = a^2 + b^2$;

а) $a = 5$, $b = 12$, $c = 144 + 25 = 169$, $c = \sqrt{169} = 13$;

1) в ΔACC_1: $CC_1{}^2 = AC^2 - AC_1{}^2$;

в ΔBCC_1: $CC_1{}^2 = BC^2 - BC_1{}^2$, значит,

$AC^2 - AC_1{}^2 = BC^2 - BC_1{}^2$; $144 - x^2 = 25 - (13 - x)^2$, где $AC_1 = x$;

$144 - x^2 = 25 - 169 + 26x - x^2$;

$26x = 288$; $x = 11\frac{1}{13}$; т.е. $AC_1 = 11\frac{1}{13}$

из ΔACC_1: $AC^2 = CC_1{}^2 + AC_1{}^2$, т.е.

2) $CC_1{}^2 = AC^2 - AC_1{}^2$;

$$CC_1{}^2 = 144 - \left(11\frac{1}{13}\right)^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2 = \frac{144 \cdot 169 - 144 \cdot 144}{169} = \frac{144 \cdot 25}{169}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = 4\frac{8}{13}$$

Ответ: $4\frac{8}{13}$

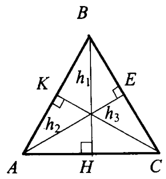
б) $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$; $256 - x^2 = 144 - (20 - x)^2$ (см. выше);

$256 - x^2 = 144 - 400 + 40x - x^2$; $40x = 512$; $x = 12{,}8$, где $x = AC_1$;

$AC_1 = 12{,}8$см, следовательно, $CC_1{}^2 = 16^2 - 12{,}8^2$;

$CC_1{}^2 = 3{,}2 \cdot 28{,}8 = 92{,}16$, $CC = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$см.

492.



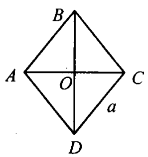
Дано:
AB = BC = 10см;
Ac = 12см;
h_1, h_2, h_3 = ?

<u>Решение:</u>

1) Рассмотрим ΔABH: $AB^2 = BH^2 + AH^2$, следовательно,
$BH^2 = AB^2 - AH^2$, $BH^2 = 100 - 36 = 64$, $BH = \sqrt{64} = 8$см.
2) Рассмотрим ΔAEC: $AE^2 = AC^2 - CE^2$;
ΔABE: $AE^2 = AB^2 - BE^2$, если CE = x, то имеем:
$12^2 - x^2 = 100 - (10 - x)^2$; $144 - x^2 = 100 - 100 + 20x - x^2$;
$20x = 144$; $x = 7{,}2$ см, т.е. x = EC = 7,2см;
3) $AE^2 = AC^2 - CE^2$; $AE^2 = 144 - 51{,}84 = 92{,}16$; $AE = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$.

Ответ: $h_2 = h_3 = 9{,}6$см, $h_1 = 8$см.

493.



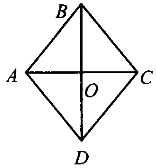
Дано: ABCD – ромб;
AC = 10см, BD = 24см;
S = ?, AB = ?

<u>Решение:</u>

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$см^2.
Рассмотрим ΔABO: $AB^2 = AO^2 + BO^2$, $AB^2 = 5^2 + 12^2$;
$AB = \sqrt{169} = 13$см.

Ответ: 13см; 120см^2.

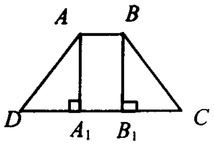
494.



Дано: ABCD – ромб;
AB = 10см, AC = 12см;
S = ?, BD = ?

Решение:
Рассмотрим ΔABO: $BO^2 = AB^2 - AO^2$; $BO^2 = 100 - 36 = 64$;
$BO = \sqrt{64} = 8$см, т.к. $BD = 2BO$, то $BD = 16$см;
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$см^2.
Ответ: 16 см; 96 см^2.

495.



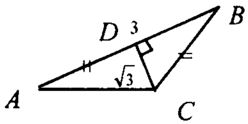
Дано: $ABCD$ – трапеция;
$AB \| CD$;
$S_{ABCD} = ?$

Решение:
а) $AB = 10$см, $BC = DA = 13$см, $CD = 20$см,
по усл. $DA = BC$, следовательно, $\Delta ADA_1 = \Delta BCB_1$ по катету и гипотенузе, где $AA^2{}_1 = AD^2 - DA^2{}_1$; $AA^2{}_1 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$,
$AA_1 = \sqrt{144} = 12$см;
2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC) \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot (10 + 20) \cdot 12 = 180$см^2.
Ответ: 180см^2.
б) $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = BC = 8$см.
Рассмотрим ΔBCB_1: $\angle B_1 = 90°$, $\angle C = 60°$, $\angle B = 30°$, следовательно, $B_1C = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$см;
имеем: $\Delta DAA_1 = \Delta CBB_1$, значит $DA_1 = 4$см;
$DC = DA_1 + B_1C + A_1B_1$; $DC = 4 + 4 + 8 = 16$см; из ΔBB_1C имеем:
$BB^2{}_1 = BC^2 - B_1C^2$; $BB^2{}_1 = 64 - 16 = 48$; $BB_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$;
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot (8 + 16) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ см^2.
Ответ: $48\sqrt{3}$ см^2.
в) $\angle C = \angle D = 45°$, $AB = 6$см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.
по усл. $\angle C = D = 45°$, значит $\Delta DAA_1 = \Delta BCC_1$ (по катету и острому углу) т.к. $DA_1 = A_1A = BB_1 = B_1C_1$, то они равнобедренные
из ΔAA_1D следует: $AD^2 = AA^2{}_1 + DA^2{}_1$;
$162 = x^2 + x^2$; $x^2 = 81$, $x = \sqrt{81} = 9$; $B_1C = BB_1 = 9$см;
$DC = A_1B_1 + DA_1 + B_1C = 6 + 9 + 9 = 24$см;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)\cdot AA_1 = \frac{1}{2}(6 + 24)\cdot 9 = 135$ см^2.

Ответ: 135см^2.

496.

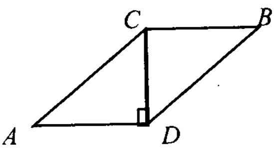


Дано: ΔABC;
$CD \perp AB$, $AD = BC$;
$AB = 3$, $CD = \sqrt{3}$;
$AC = ?$

Решение:
1) Пусть $BC = AD = x$, тогда в ΔDBC: $BC^2 = DC^2 + DB^2$;
$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (3 - x)^2 = 3 + 9 - 6x + x^2$; $6x = 12$; $x = 2$; т.е.
$BC = AD = 2$см;
2) из ΔADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4 + 3 = 7$; $AC = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

497.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$BD \perp AD$;
$P_{ABCD} = 50$см;
$AC - AD = 1$ см;
$CD = ?$

Решение:
1) Пусть $AD = x$ см, тогда $AC = (x + 1)$ см, поскольку
$P_{ABCD} = 2(AC + AD)$, то $50 = 2\cdot(x + x + 1)$;
$25 = 2x + 1$; $2x = 24$; $x = 12$, т.е. $AD = 12$ см, $AC = 13$ см;
2) из ΔACD: $CD^2 = AC^2 - AD^2$;
$CD^2 = 13^2 - 12^2$; $CD^2 = 25$, $CD = \sqrt{25} = 5$ см.

Ответ: 5см.

498.

Является ли треугольник прямоугольным? $a^2 + b^2 = c^2$, где ab – катет, с – гипотенуза.
а) 6, 8, 10: $6^2 + 8^2 = 10^2$, следовательно, да;
б) 5, 6, 7: $5^2 + 6^2 \neq 7^2$, следовательно, нет;

в) 9, 12, 15: $9^2 + 12^2 = 15^2$,

$225 = 225$, следовательно, да;

г) 10, 24, 26: $10^2 + 24^2 = 26^2$,

$676 = 676$, следовательно, да;

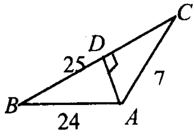
д) 3, 4, 6: $3^2 + 4^2 \neq 6^2$, $25 \neq 36$, следовательно, нет;

е) 11, 9, 13: $11^2 + 9^2 \neq 13^2$, $202 \neq 169$, следовательно, нет;

ж) 15, 20, 25: $15^2 + 20^2 = 25^2$,

$625 = 625$, следовательно, да.

499.



а) Дано: ΔABC;

$AB = 24$см, $BC = 25$см, $AC = 7$см.

Найти: меньшую высоту.

Решение:

Высота, которая опущена на большую сторону, является меньшей.

из ΔABD: $AD^2 = AB^2 - BD^2$;

из ΔACD: $AD^2 = AC^2 - CD^2$,

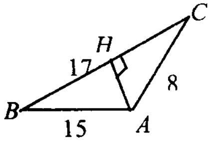
т.е. $AB2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$;

$24^2 - x^2 = 7^2 - (25-x)^2$, где $BD = x$;

$50x = 1152$; $x = 23{,}04$, $x = BD = 23{,}04$ см;

$AD^2 = AB^2 - BD^2$, т.е.

$AD^2 = 24^2 - (23{,}04)^2 = 45{,}1584$; $AD = \sqrt{45{,}1584} = 6{,}72$см.



б) Дано: ΔABC;

$AB = 17$см, $AC = 15$см;

$BC = 8$см.

$CH = ?$

Решение:

из ΔACH: $HC^2=AC^2 - AH^2$;

из ΔBCH: $HC^2 = BC^2 - BH^2$, т.е. $AC^2 - AH^2 = BC - BH^2$;

$225-x^2 = 64-(17-x)^2$; $225-x^2 = 64-289 + 34 - x^2$, где $AH = x$;

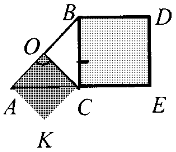
$34x = 540$; $x = 13\frac{4}{17}$, т.к. $AH = x$, то $AH = 13\frac{4}{17}$

$HC^2 = AC - AH^2$;

$HC^2 = 15^2 - (13\frac{4}{17})^2 = \frac{225 \cdot 64}{289}$, $HC = \sqrt{\frac{225 \cdot 64}{28}} = 17\frac{1}{17}$ см.

Ответ: $17\frac{1}{17}$ см.

500.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AC = BC$;
BDEK, AOCK – квадраты.
Доказать: $S_{BDEK} = 2 \cdot S_{AOCK}$.

<u>Доказательство:</u>
1) Пусть $AC = BC = a$, тогда $S_{BDEC} = a^2$;
в ΔAOC: $OC = \frac{1}{2}AB$, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $AB^2 = 2a^2$, т.е.
$AB = a\sqrt{2}$, значит, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и

$$S_{AOCK} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

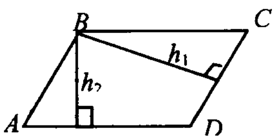
Сравнивая $S_{BDEC} = a^2$ и $S_{AOCK} = \frac{a^2}{2}$, получаем $S_{BDEC} = 2 \cdot S_{AOCK}$.

Что и требовалось доказать.

501.

27га = 0,27км^2 = 270000м^2 .

502.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$P_{ABCD} = 42$ см;
$h_1 = 5$см, $h_2 = 4$см;
$S_{ABCD} = ?$

<u>Решение:</u>
1) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$; т.е. $42 = 2 \cdot (AB + AD)$, следовательно,
$AB = 21 - AD$;

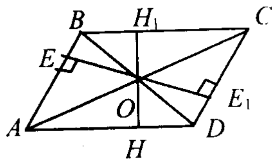
2) $AD \cdot h_2 = AB \cdot h_1$; $AD \cdot 4 = (21 - AD) \cdot 5$;

$AD = 11\frac{2}{3}$, значит, $AB = 21 - 11\frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$ см;

3) $S_{ABCD} = AD \cdot h_2 = 11\frac{2}{3} \cdot 4 = 46\frac{2}{3}$ см^2;

Ответ: $46\frac{2}{3}$ см^2.

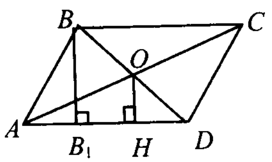
503.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$S_{ABCD} = 24$см^2;
$OH \perp AD$, $OH = 2$см;
$OE \perp AB$, $OE = 3$см;
$P_{ABCD} = ?$

Решение:
$S_{ABCD} = HH_1 \cdot AD$; $24 = 4 \cdot AD$; $AD = 6$см, также
$S_{ABCD} = AB \cdot EE_1$; $24 = AB \cdot 6$; $AB = 4$ см;
$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (6 + 4) = 20$ см.
Ответ: 20 см.

504.



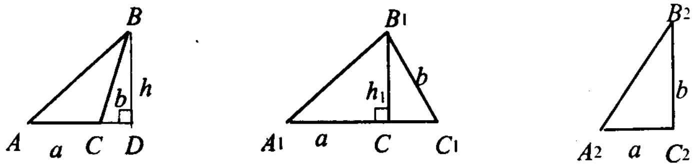
Дано: ABCD – параллелограмм;
$AB = 29$см, $OH \perp AD$,
$AH = 33$см, $HD = 12$см;
$S_{ABCD} = ?$

Решение:
1) $BB_1 \perp AD$, в ΔBDB_1: по свойству диагоналей $BO = OD$;
$B_1H \perp BB_1$ (т.к. $B_1B \perp AD$, $OH \perp AD$), по теореме Фалеса имеем:
$HD = HB_1 = 12$см.
2) В ΔABB_1: $BB^2{}_1 = AB^2 - AB^2{}_1 = 29^2 - (33 - 12)^2 = 400$;
$BB_1 = \sqrt{400} = 20$см; $AD = AH + VD = 45$ см;
3) $S_{ABCD} = AD \cdot BB_1$; $S_{ABCD} = 45 \cdot 20 = 900$см^2.
Ответ: 900см^2.

505.

$S_\Delta = \frac{1}{2}ah$

1) 2) 3)



$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\cdot h;$ $S_{A^1B^1C^1} = \frac{1}{2}a\cdot h_1;$ $S_{A^2B^2C^2} = \frac{1}{2}a\cdot b.$

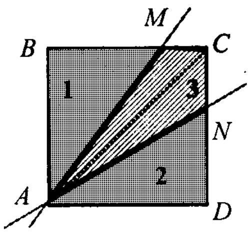
В случаях 1) и 2) h и $h_1 < b$, (в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета).

Сравнивая правые части формул, имеем:

$\frac{1}{2}a\cdot h < \frac{1}{2}a\cdot b;$ $\frac{1}{2}a\cdot h_1 < \frac{1}{2}a\cdot b$, следовательно,

$S_{A'_2B'_2C'_2} = \frac{1}{2}a\cdot b$ – наибольшая.

506.



Пусть AB = a, тогда $S_1 = \frac{1}{2}BM \cdot AB$,

$S_2 = \frac{1}{2}DN \cdot AD$, $S_3 = S_{ABCD} - 2\cdot S_1$.

Пусть $M \in BC$, тогда $BM = \frac{2}{3}BC$, а

$N \in CD$, тогда $DN = \frac{2}{3}CD$, значит,

AM, AN – искомые прямые.

Имеем: $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}a\cdot BM$, $S_{\Delta ADN} = \frac{1}{2}a\cdot DN$,

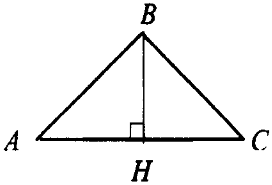
$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}a\cdot MC$, $S_{\Delta ANC} = \frac{1}{2}a\cdot CN$, т.е. DN = BM = MC + CN,

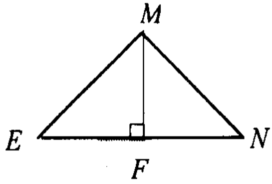
следовательно, (BC + CD) делим на 6 равных частей, именно:

BC и CD на 3 равные части, т.е. $BM = \frac{2}{3}BC$ и $DN = \frac{2}{3}CD$.

507.

В ΔABC: $AB = BC = 13$см, $AC = 14$см;
в ΔEMN: $EM = MN = EN = 12$см;





а) из прямоугольного ΔABH:

$BH^2 = AB^2 - AH^2$;

$BH^2 = 169 - 49 = 120$;

$BH = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2\sqrt{30} = 14\sqrt{30}$ см^2;

б) из прямоугольного ΔEMF:

$MF^2 = EM^2 - EF^2$;

$MF^2 = 144 - 36 = 108$;

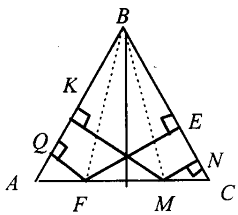
$MF = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$;

$S_{EMN} = \frac{1}{2} \cdot EN \cdot MF$;

$S_{EMN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ см^2;

т.к. $14\sqrt{30} > 36\sqrt{3}$, то $4S_{ABC} > S_{EMN}$.

508.



Дано: ΔABC, $AB = BC$;
$MN \perp BC$, $MK \perp AB$;
$FE \perp BC$, $FQ \perp AB$.
Доказать: $NM + MK = EF + FQ$.

Доказательство:

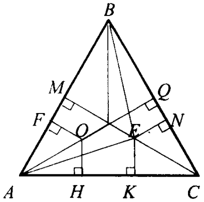
1) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MBC}$ также
$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta FBC}$, т.е.
$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta MBC} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta FBC}$ или

$\frac{1}{2} BC \cdot MN + \frac{1}{2} AB \cdot MK = \frac{1}{2} AB \cdot FQ + \frac{1}{2} BC \cdot EF$,

$AB \cdot (MN + MK) = AB \cdot (FQ + FE)$,

т.е. $MN + MK = FQ + FE$.

509.



Дано: ΔABC;
$AB = BC = AC$;
$EN \perp BC$, $EK \perp AC$, $EM \perp AB$;
$OQ \perp BC$, $OH \perp AC$, $OF \perp AB$.
Доказать: $EN + EK + EM =$
$= OQ + OH + OF$.

Доказательство:

1) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AEC} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta ABE}$, также $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} + S_{\Delta AOB}$, т.е. $S_{\Delta AEC} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta ABE} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta COB} + S_{\Delta AOB}$ или

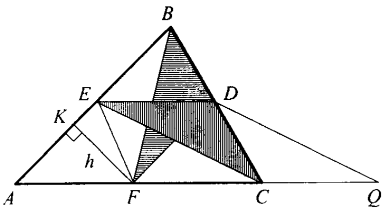
$$\frac{1}{2}AC\cdot EK + \frac{1}{2}BC\cdot EN + \frac{1}{2}AB\cdot EM = \frac{1}{2}\ AC\cdot OH + \frac{1}{2}BC\cdot OQ +$$

$$+ \frac{1}{2}\ AB\cdot OF,$$ имеем:

$AC\cdot EK + EN\cdot BC + AB\cdot EM = AC\cdot OH + BC\cdot OQ + OF\cdot AB$

Что и требовалось доказать.

510.



Дано: ΔABC;
$D \in BC$;
$ED \| AC$, $DF \| AB$.
Доказать: $S_{ACD} = S_{BDF}$.

Доказательство:

1) Проведем $FK \perp BD$, имеем FKBD и AEDF – параллелограммы.
$S_{AEDF} = AE\cdot h$, $S_{FKDB} = KB\cdot h$, $AE = KB$, следовательно,
$S_{AEDF} = S_{FKDB}$;

$\Delta FBD = \frac{1}{2}$ FKDB, следовательно, $S_{\Delta FDB} = \frac{1}{2}S_{FKDB} = \frac{1}{2}S_{AEDF}$ (1);

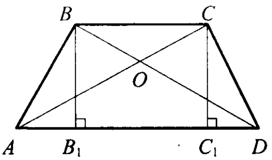
2) Проведем $CQ \| ED$, $CQ = ED$, имеем QCED – параллелограмм и параллелограмм AEDF, у которых стороны равны; т.е.
$S_{QCED} = S_{AEDF}$;

$\Delta EDC = \frac{1}{2}$ параллелограмма QCED, следовательно,

$S_{\Delta EDC} = \dfrac{1}{2} S_{QCED} = \dfrac{1}{2} S_{AEDF}$ (2);

3) Сравнивая (1) и (2) имеем: $S_{\Delta EDC} = S_{\Delta FDB}$.
Что и требовалось доказать.

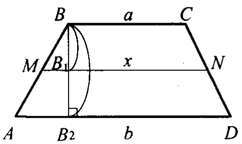
511.



Дано: ABCD – трапеция;
$AC \cap BD = 0$.
1) Сравнить: S_{ABC} и S_{ACD} .
2) Сравнить: $S_{ABO} = S_{CDO}$.
Доказать: $AO \cdot OB = OC \cdot OD$.

1) Сравнивая ΔABD и ΔACD, имеем:
$S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot BB_1$; $S_{ACD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot CC_1$, $BB_1 = CC_1$, т.е.
$S_{ABD} = S_{ACD}$;
2) $S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD}$; $S_{CDO} = S_{ACD} - S_{AOD}$,; $S_{ABO} = S_{CDO}$;
3) в ΔAOB и ΔCOD вертикальные углы $\angle AOB = \angle DOC$, следовательно, $\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta CDO}} = \dfrac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т.е. $1 = \dfrac{AO \cdot OB}{CO \cdot OD}$, т.е. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$, что и требовалось доказать.

512.



Дано: ABCD – трапеция;
$BC = a$, $AD = b$;
$MN \| AD$
$S_{AMND} = S_{MBCN}$;
$MN = ?$

<u>Решение:</u>
Пусть MN = x см, тогда
1) $S_{AMND} = \dfrac{1}{2} (b + x)(h - h_1) = \dfrac{1}{2} (x+a)h_1$, т.е.
$(h-h_1)(b+x) = (x+a)h_1$; $h(b+x) = (a+b+2x)h_1$;
2) $S_{ABCD} = S_{AMND} + S_{MBCN}$, т.е. $\dfrac{1}{2}(a + b) \cdot h = (b+x)(h-h_1) + \dfrac{1}{2} (x+a)h_1$
или $(a+b) \cdot h = (b+x)h + (a-b)h_1$; $(a-x)h = (a-b)h_1$.
3) Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}(b+x)\cdot h=(a+b+2x)\cdot h_1\\(a-x)\cdot h=(a-b)\cdot h_1\end{cases};$$

$(a–x)(a+b+2x) = (b+x)(a–x)$;

$a^2 + ab +2ax–ax–bx–2x^2 = ab+ax–b^2–bx$, $a^2 – 2x^2 + b^2 = 0$;

$2x^2 = a^2+b^2 = 0$; т.е. $x^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$, a $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

Ответ: $MN = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

513.

Дано: ABCD – ромб;

$d_1 = 18$м, $d_2 = 24$м;

$P_{ABCD} = ?$, $h = ?$

Решение:

1) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2 = \dfrac{1}{2}\cdot 18\cdot 24 = 216$м.

2) Из ΔABO: $AB^2 = AO^2 + BO^2$, т.е.

$AB^2 = 9^2 + 12^2$; $AB^2 = 225$; $AB = \sqrt{225} = 15$м;

3) $S_{ABCD} = h\cdot AB$; $216 = h\cdot 15$; $h = 14{,}4$м;

4) $P_{ABCD} = 4\cdot AB = 4\cdot 15 = 60$м.

Ответ: 60м, 14,4 м.

514.

Дано: ABCD – ромб, $S_{ABCD} = 540$см, $d = 4{,}5$дм, $OH\perp AB$;

$OH = ?$

Решение:

1) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2$; т.е. $540 = \dfrac{1}{2}\cdot 45\cdot d_2$; отсюда $d_2 = 24$м;

$AO = \dfrac{1}{2}d_1 = 22{,}5$см; $OB = \dfrac{1}{2}d_2 = 12$м;

2) из ΔABO: $= AB^2 = AO^2 + OB^2$;

$AB^2 = 506{,}25 +144 = 650{,}25$; $AB = \sqrt{650{,}25} = 25{,}5$ м;

3) $S_{ABCD} = HH_1\cdot AB$; $540 = HH_1\cdot 22{,}5$;

$HH_1 = 21\dfrac{3}{17}$, $HO = \dfrac{1}{2}HH_1 = 10\dfrac{10}{17}$ м.

515.

а) Дано: ΔABC, $AB = BC = 20$см, $\angle A = 30°$;
$S_{ABC} = ?$
<u>Решение:</u>

1) из ΔABM: $\angle H = 90°$, $\angle A = 30°$, следовательно, $BH = \frac{1}{2}AB =$

$= \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$см.

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} 20\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}$ см;

$AH^2 = AB - BH^2 = 400 - 100 = 300$, $AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ см,

значит $AC = 20\sqrt{3}$ см.

б) Дано: ΔABC, $AB = BC$; $AH \perp BC$, $AH = 6$см, $\angle CAH = 45°$
Найти: $S_{ABC} = ?$
<u>Решение:</u>
1) в ΔAMC: $\angle H = 90°$, $\angle A = 45°$, значит, $\angle C = 45°$, следовательно, $AH = HC = 6$см;

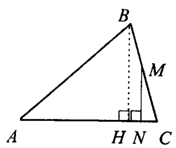
$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 36 + 36 = 72$, следовательно $AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

2) $\angle C = 45°$ и $AB = BC$, следовательно $\angle BAC = 45°$, значит ΔABC – прямоугольный, значит, AH и AB совпадают, следовательно,

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$см^2.

Ответ: 18 см^2.

516.



Дано: ΔABC, $BC = 34$см;
$MN \perp AC$, $BM = MC$;
$AN = 25$см, $NC = 15$см;
$S_{ABC} = ?$

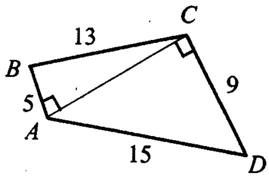
<u>Решение:</u>
1) $BH \perp AC$; из ΔBCH: $BM = MC$, $MN || BH$, значит, $NC = NH = 15$см;
2) из ΔBCH: $BC^2 = BH^2 + HC^2$, т.е. $BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH^2 = 34 - 30 = 256$, $BH = \sqrt{256} = 16$см;

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 16 = 320$см^2.

Ответ: 320 см^2.

517.



Дано: ABCD – четырехугольник;
AB = 5см, BC = 13см;
CD = 9см, DA = 15см, AC = 12см;
S_{ABCD} = ?

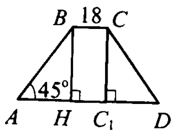
<u>Решение:</u> $BC^2 = BA^2 + AC^2$, т.е. $AC^2 = BC^2 - BA^2$.
Т.к. $AB^2 = 25$, $BC^2 = 169$ (по усл.), то $AC^2 = 169–25 = 144$.
Т.к. $CD^2 = 81$, $AD^2 = 225$ (по усл.), то $AC^2 = 225–81 = 144$,
следовательно, ΔABC и ΔACD – прямоугольные, имеющие общую сторону AC = 12см.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AB\cdot AC + \frac{1}{2}AC\cdot CD;$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(5\cdot 14 + 9\cdot 14) = 98\text{ см}^2.$$

Ответ: 98 $см^2$.

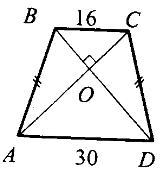
518.



а) Дано: ABCD – трапеция;
AB = CD, BC = 18см;
BH = 9см, ∠A = 45°;
S_{ABCD} = ?

<u>Решение:</u>
1) из ΔABH: ∠H = 90°, ∠A = 45°, значит, ∠B = 45°, значит, HB = =AH = 9см;
ABCD – равнобедр., значит AH = CD_1 = 9см и AD = 36см.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)\cdot BH = \frac{1}{2}(18+36)\cdot 9 = 243см^2$.



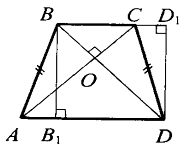
б) Дано: ABCD – трапеция;
AB = CD;
AB = 16см, AD = 30см;
AC⊥BD;
S_{ABCD} = ?

Решение:

1) ABCD – равнобедр., значит, BD = AC и OD = AO; BO = OC;
из ΔBOC: $BO^2 + OC^2 = 16^2$; $2x^2 = 256$; $x = 8\sqrt{2}$, где x = BO = OC;
в ΔAOD: $AO^2 + OD^2 = AD^2$; $2y^2 = 900$; $y = 15\sqrt{2}$, где y = AO = OD;
$AC = AO + OC = 8\sqrt{2} + 15\sqrt{2} = 23\sqrt{2}$;

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, т.е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 23\sqrt{2} = 529$см^2.

519.



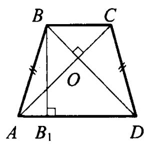
Дано: ABCD – трапеция;
$AC \perp BD$;
$BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$;
$S_{ABCD} = ?$

Решение:

1) Проведем: $DD_1 \perp BC$, имеем BB_1DD_1 – прямоугольник;
$S_{B^1BD^1} = S_{ABCD}$ (т.к. $S_{\Delta ABB^1} = S_{\Delta CDD^1}$, S_{B^1BCD} - общая).

2) Надо доказать, что BB_1DD_1 – квадрат,
т.к. ABCD – параллелограмм, то $AC = B_1D_1$;
из $BD \perp AC$, $AC \parallel B_1D_1$ следует, что $BD \perp B_1D_1$, $BD = B_1D_1$,
но т.к. четырехугольник, диагонали которого равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам – квадрат, то
$BB_1 = BD_1 = h$; $= S_{B'BD'D} = S_{ABCD} = h^2$.
Ответ: h^2

520.



Дано: ABCD – равнобедренная трапеция;
$AC \perp BD$, AB = CD;
AD + BC = 2*a*;
$S_{ABCD} = ?$

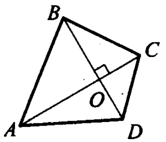
Решение:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BB_1$, $S_{ABCD} = BB_1^2$ (см. 519), следовательно,

$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot BB_1 = BB_1^2$, где $a = BB_1$, т.е. $S_{ABCD} = a^2$.

Ответ: $S_{ABCD} = a^2$.

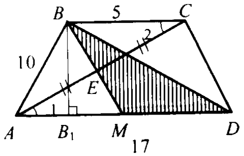
521.



Дано: ABCD – четырехугольник;
$AC \perp BD$.
Доказать: $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

Доказательство:
Рассмотрим ΔAOB, ΔBOC и ΔAOD.
$AD^2 + BC^2 = (AO^2 + OD^2) + (BO^2 + OC^2) = (AO^2 + BO^2) + (OD^2 +$
$+ OC^2) = AB^2 + CD^2$ (по теореме Пифагора).

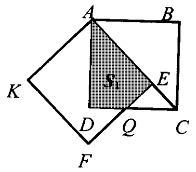
522.



Дано: ABCD – трапеция;
AB = CD;
AD = 17см, BC = 5см;
AB = 10см;
$BM \cap AC = E$, AE = EC;
S_{BDM} = ?

Решение:
1) из ΔABB_1: $BB_1{}^2 = AB^2 – AB^2 = 10^2 – ((17–5):2)^2 = 100–36 = 64$,
$BB_1 = \sqrt{64} = 8$см;
2) из ΔAEM и ΔBEC: AE = EC, $\angle AEM = \angle BEC$,
$\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при $AD \| BC$ и сек. AC), значит,
$\Delta BEC = \Delta AEM$ (по стороне и 2 прилежащим углам), и AM=BC=5см,
MD = AD – AM = 17–5 = 12см;
3) $S_{BDM} = \frac{1}{2} MD \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$см^2.
Ответ: 48 см^2.

523.



Дано: ABCD, AEFK – квадраты;
AB = AE = a;
S_1 = ?

Решение:
1) из прямоугольного ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$, т.е.
$AC = a\sqrt{2}$;

2) EC = AC – AE = $a\sqrt{2} - a$;

3) $S_{ECQ} = \frac{1}{2}$ EC·EQ, но EC = EQ, следовательно, $S_{ECQ} = \frac{1}{2}(EC)^2$;

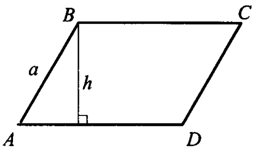
$$S_{ECQ} = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{(3-2\sqrt{2})\cdot a^2}{2}$$

$$S_1 = S_{ABC} - S_{ECQ} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2})a^2 =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a^2 + \sqrt{2}a^2 = a^2(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $a^2(\sqrt{2} - 1)$.

524.



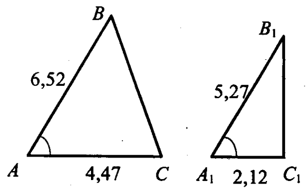
Дано: ABCD – параллелограмм;
$a = 11{,}735$ м;
$h<a$ на 3, 485м;
S = ?

Решение:

$S_{ABCD} = a\cdot h$; h (по условию) = 11,735–3,485 = 8,25 м; следовательно S = 11,735·8,25 = 96,8138 $м^2$;

а) S ≈ 96,814 $м^2$, б) S ≈ 96,81 $м^2$, в) S ≈ 96,8 $м^2$.

525.

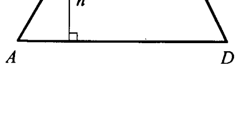


Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$;
AB = 6,52см, AC = 4,47см;
A_1B_1 = 5,27см;
A_1C_1 = 2,12см.
Найти: $S_{\Delta ABC}/S_{\Delta A_1B_1C_1}$ – ?

Решение:

т.к. $\angle A = \angle A_1$, то $S_{\Delta ABC}/S_{\Delta A_1B_1C_1}$ = 6,52·4,47/5,27·2,12 ≈ 2,61.

526.



Дано: ABCD – трапеция;
BC = 1,17 дм, AD = 3,58см;
h = 2,33дм.
Найти: S_{ABCD} – ?

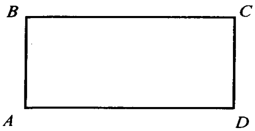
Решение:

S = (AD + BC)·h;

$$S = \frac{1}{2}(1{,}17 + 3{,}58)\cdot 2{,}33 = 2{,}375\cdot 2{,}33 = 5{,}53375 \approx 5{,}53дм^2.$$

Ответ: 5,53$дм^2$.

527.



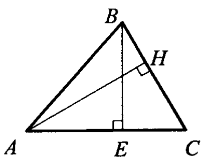
Дано: S_{ABCD} = 17,635см;
AB = 5,28см.
Найти: AD – ?

Решение:

AD = 17,635:5,28 = 3,3399621...см;

а) AD ≈ 3,34см; б) AD ≈ 3,3см.

528.



Дано: ΔABC;
BC = 5,62м, AC = 4,35м;
BE⊥AC.
Найти: BE – ?

Решение:

1) $S\Delta = \frac{1}{2}BC\cdot AH$; $S\Delta = \frac{1}{2}\cdot 5{,}62\cdot 4{,}35 = 12{,}2235м^2$;

2) $S\Delta = \frac{1}{2}AC\cdot BE$, $\qquad 12{,}2235 = \frac{1}{2}\cdot 7{,}19\cdot BE$,

следовательно, BE= 3,400139 ≈ 3м 40см.

Ответ: 3м 40см.

529.

а) a = 2,5см, b = 1,7см; S = 2,5·17 = 4,25$см^2$,
можно S = (4±1)$см^2$;
б) a = 3,2см, b = 2,5см; S = 3,2·2,5 = 8$см^2$,
можно S = (8±1)$см^2$;

в) a = 5,6см, b = 7,2см; S = 5,6·7,2 = 40,32см^2, нет, т.к. 39,05 ≤ S ≤ 41,61см^2.

530.

$c^2 = a^2+b^2$,
если a = 7,25, b = 3,67, то
$c^2 = 7{,}25^2 + 3{,}67^2 = 52,\ 5625 + 13{,}4689$;
$c^2 = 66{,}0314$; c ≈ 8,13см.

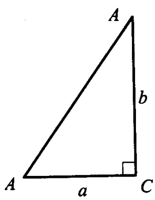
531.

$c^2 = a^2 + b^2$
а) если a<c в три раза, найти b – ?
a = 11,2:3 = 3,7333... ; $b^2 = c^2 – a^2$;

$$b^2 = 11{,}2^2 - (\frac{11{,}2}{3})^2 = \frac{11{,}2^2 \cdot 9 - 11{,}2^2 \cdot 1}{9} = \frac{11{,}2^2 \cdot 8}{9} = \frac{125{,}44 \cdot 8}{9} = \frac{1003{,}52}{9} =$$

=111,5022;
b = 10,559446...
б) b ≈ 10дм 6см = 106см; в) 105,6см.

532.



a ≈ 3,5см, b ≈ 4,8см;
$c^2 = a^2 + b^2$;
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$;
$c = \sqrt{3{,}5^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{12{,}25 + 23{,}04} =$
$= \sqrt{35{,}29} \approx 5{,}94053$.

а) Нельзя, т.к. 5,80 см ≤ c ≤ 6,08см.
б) Можно, т.к. c = (5,9 ± 0,2)см.

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников

533.

Дано: AB = 15см, CD = 20см;

$\frac{AB}{CD} = ?$

Решение: $\frac{AB}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Если длины отрезков выразить в миллиметрах, то их соотношение не изменится.

534.

а) имеем: AB = 12 ед., CD = 6 ед., $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$; M_1M_2 = 2ед.;

MM_1 = 2 ед.; $\frac{MM_1}{M_1M_2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\frac{CD}{AD} = \frac{MM_1}{M_1M_2}$ – пропорциональны;

б) AB = 9ед., BC = 3ед., CD = 6 ед.

MM_2 = 3ед., MM_1 = 1ед., M_1M_2 = 2ед.

$\frac{AB}{MM_2} = 3$; $\frac{BC}{MM_1} = 3$; $\frac{CD}{M_1M_2} = 3$.

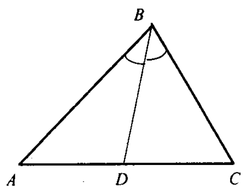
Т.е. $\frac{AB}{MM_2} = \frac{BC}{MM_1} = \frac{CD}{M_1M_2}$ – пропорциональны.

в) AB = 9ед., BD = 9ед.; MM_1 = 1ед.; M_1M_2 = 2ед;

$\frac{AB}{MM_1} = 9$; $\frac{BD}{M_1M_2} = 4{,}5$.

Т.е. $\frac{AB}{MM_1} \neq \frac{BD}{M_1M_2}$, следовательно, отрезки непропорциональны.

536.

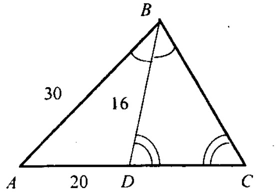


а) Дано: ΔABC;
BD – биссектриса,
BC = 9см,
DC = 4,5см;
AD = 7,5см;
AB = ?
Решение:

BD – биссектриса, следовательно,

$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$; $\frac{7{,}5}{AB} = \frac{4{,}5}{9}$; $\frac{5}{AB} = \frac{3}{9}$; AB = 15.

Ответ: 15см.



б) Дано: ΔABC;
BD – биссектриса;
AB = 30, AD = 20,
BD = 16;
$\angle BDC = \angle C$;
DC = ?

Решение:

1) BD – биссектриса, следовательно, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{30}{20}$, т.е.

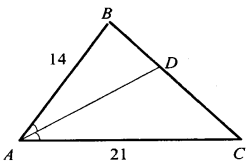
$\frac{BC}{DC} = \frac{3}{2}$, BC = 3x, DC = 2x;

2) $\angle BDC = \angle C$, BD = BC, значит, 16 = 3x, $x = 5\frac{1}{3}$, BC = 3·x = 5;

3) $DC = 2 \cdot x = 2 \cdot 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$

Ответ: $10\frac{2}{3}$

537.



Дано: ΔABC
AD – биссектриса;
AB = 14см, BC = 20см;
AC = 21см;
BD и DC = ?

Решение:

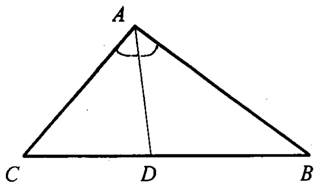
AD – биссектриса, следовательно, $\frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB}$

Пусть DC = x см, тогда BD = 20 – x см, $\frac{x}{21} = \frac{20 - x}{14}$;

2x = 60 – 3x; x = 12; x = DC = 12см; BD = 20 – x = 20 – 12 = 8см.

Ответ: BD = 8 см, DC = 12 см.

538.



Дано: ΔABC;
AD – биссектриса;
CD = 4,5см, BD = 13,5см;
P_{ABC} = 42см;
AB и AC = ?

<u>Решение</u>:
CB = CD + DB = 4,5 + 13,5 = 18см;
P_{ABC} = AB + BC + CA = AC + AB + 18 = 42, т.е.
AC + AB = 24 (1);

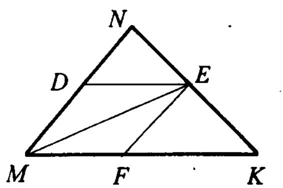
3) AD – биссектриса, следовательно, $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{DB}$,

$\frac{AC}{4{,}5} = \frac{AB}{13{,}5}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}$ (2).

Т.е. AC = x, AB = 3x.
4) Подставляя (2) в (1),имеем:
x+3x = 24, 4x = 24, x = 6; т.к. AC = x, AB = 3x, то
AC = 6см, AB = 18см.

Ответ: 6; 18.

539.



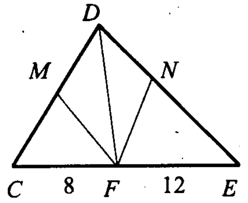
Дано: ΔMNK;
MDEF – ромб;
$D \in MN$, $E \in NK$, $F \in MK$;
MN = 7см, NK = 6см,
MK = 5см;
NE, EK = ?

<u>Решение</u>:
1) ME – диагональ ромба MDEF, следовательно, ME – биссектриса (по свойству диагоналей ромба), т.е. $\frac{MN}{NE} = \frac{MK}{EK}$ (1).

Пусть NE = x, тогда EK = 6 – x, из (1) следует: $\frac{7}{x} = \frac{5}{6 - x}$

7(6–x) = 5x, 12x = 42, x = 3,5;
NE = 3,5см, EK = 2,5см.
Ответ: 3,5; 2,5.

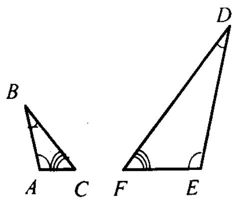
540.



Дано: ΔCDE;
$P_{CDE} = 55$см;
DMFN – ромб;
$M \in CD$, $F \in CE$, $N \in DE$;
CF = 8см, EF = 12см;
CD и DE = ?

Решение:
1) DF – диагональ ромба DNFM, DF – биссектриса (св-во ромба), следовательно: $\frac{DC}{CF} = \frac{DE}{FE}$, $\frac{DC}{8} = \frac{DE}{12}$, т.е. $\frac{DC}{DE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, значит, DE = 3x.
2) P_{CDE} = CD + DE + CE, т.е.
55 = 2x + 3x+ 8 + 12, x = 7;
DC = 2·7 = 14см; DE = 3·7 = 21см.
Ответ: 14; 21.

541.

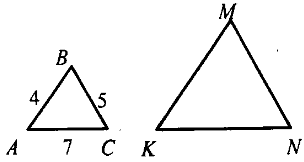


Дано: ΔABC и ΔDEF;
$\angle A = 106°$, $\angle E = 106°$;
$\angle B = 34°$, $\angle = 34°$;
AC = 4,4см, DE = 15,6см;
AB = 5,2см, FD = 22,8см;
BC = 7,6см, EF = 13,2см.
Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Доказательство:
1) $\angle A = \angle E = 106°$, $\angle B = \angle D = 34°$, $\angle C = \angle F = 40°$.
Все углы соответственно равны.
2) $\frac{AC}{FE} = \frac{4,4}{13,2} = \frac{1}{3}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{5,2}{15,6} = \frac{1}{3}$, $\frac{BC}{DF} = \frac{7,6}{22,8} = \frac{1}{3}$,
$\frac{AC}{FE} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$;
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Т.к. стороны соответственно пропорциональны с $k = \frac{1}{3}$, углы соответственно равны.

542.

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta KMN$;



AB и KM, BC и MN – сходные;
AB = 4см, BC = 5см, CA = 7см;
$\frac{KM}{AB} = 2{,}1$;
KM, MN, KN = ?

<u>Решение</u>:

1) $\Delta ABC \sim \Delta KMN$, следовательно, $\frac{AM}{KM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{KN}$;

$\frac{4}{KM} = \frac{5}{MN} = \frac{7}{KN}$

2) $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$, следовательно, $KM = 2{,}1 \cdot 4 = 8{,}4$;

$5 \cdot 2{,}1 = MN = 10{,}5$; $7 \cdot 2{,}1 = KN$; $KN = 14{,}7$.

Ответ: 8,4; 10,5; 14,7.

543.

Дано: $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$.

Доказать: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$

<u>Доказательство:</u>

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит, $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$,

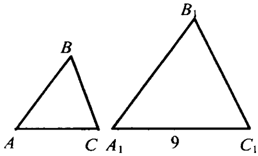
т.к. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1$, то:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1},$$

по условию $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$, а из $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ следует:

$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$, т.е. $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

544.



Дано: $S_{ABC} = 75м^2$;
$S_{A_1B_1C_1} = 300м^2$;
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
$A_1C_1 = 9м$;
$AC = ?$

Решение:

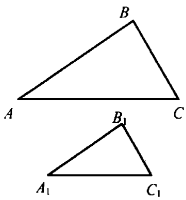
а) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{75}{300} = k^2$, $k^2 = \frac{1}{4}$,

$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

б) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$, где $A_1C_1 = 9$ см, т.е.

$AC = 4{,}5м$. Ответ: 4,5 м.

545.



Дано: $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$;
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{5}$
$S_{ABC} > S_{A_1B_1C_1}$ на 77 $см^2$;
S_{ABC}, $S_{A_1B_1C_1} = ?$

Решение:

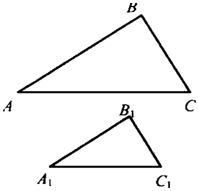
Пусть $S_{A_1B_1C_1} = x$ $см^2$, тогда $S_{ABC} = (x+77)см^2$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с $k = \frac{6}{5}$, имеем: $\frac{x + 77}{x} = \left(\frac{6}{5}\right)^2$

$25(x + 77) = 36x$, $x = 175$; $S_{ABC} = 252см^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 175$ $см^2$.

Ответ: 252; 175.

546.



Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
$S_{A_1B_1C_1} = 87{,}5см^2$;
$k = 1:1000000$;
$S_{ABC} = ?$

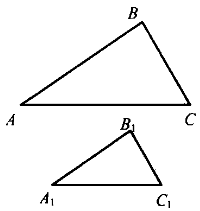
Решение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 100000^2$;

$S_{ABC} = 87,\ 5\cdot10^{10} = 87{,}5\cdot10^{11}$см^2;
$87{,}5\cdot10^{11}$см$^2 = 87{,}5$км^2.

Ответ: 87,5 км^2.

547.

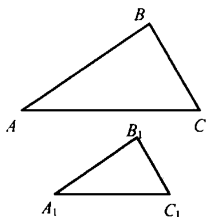


Дано: ΔABC пропорционален $\Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом k.

Доказать: $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$.

Доказательство:
1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ с коэффициентом k, следовательно
$A_1B_1 = k\cdot AB,\ B_1C_1 = k\cdot BC,\ A_1C_1 = k\cdot AC$
2) $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \dfrac{k\cdot A_1B_1 + k\cdot B_1C_1 + k\cdot A_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$
$= \dfrac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k.$
Что и требовалось доказать.

548.



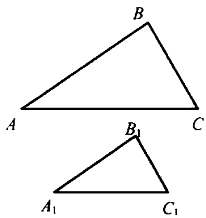
Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
$BC = 1{,}4$м, $B_1C_1 = 56$см;
$\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = ?$

Решение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{140}{56} = 2{,}5$; $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

549.



Дано: $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$;
AB = 15см,
AC = 30см;
BC = 20см;
$P_{A_1B_1C_1} = 26$см;
A_1B_1; B_1C_1; A_1C_1 = ?

Решение:

1)$P_{ABC} = AB + BC + AC$; $P_{ABC} = 15 + 20 + 30 = 65$см;

2) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{65}{26} = 2{,}5$,

значит, k = 2,5, т.к. треугольники пропорциональны, то

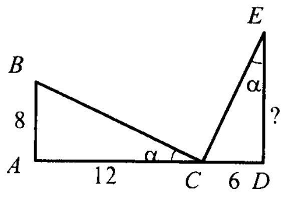
3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2{,}5$; $A_1B_1 = \frac{AB}{2{,}5} = \frac{20}{2{,}5} = 6$см;

$B_1C_1 = \frac{20}{2{,}5} = 8$см; $A_1C_1 = \frac{30}{2{,}5} = 12$см.

Ответ: 6; 8; 12.

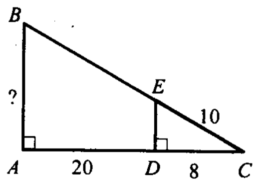
§ 2. Признаки подобия треугольников

550.



а) Из условия следует:
$\angle C = \angle E = \alpha$,
$\angle A = \angle D = 90°$,
значит, $\Delta ABC \sim \Delta DCE$ (по двум углам), значит

$\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DC}$; $\frac{8}{6} = \frac{12}{ED}$, ED = 9.

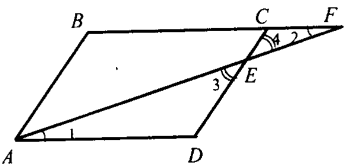


б)
1) Из условия следует:
$\angle A = \angle D = 90°$
$\angle C$ – общий, то
$\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (по двум углам),
значит, по теореме Пифагора:

$DE = \sqrt{100-64}$, $DE = 6$;

2) $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$; $\frac{AB}{6} = \frac{28}{8}$; $AB = 21$. Ответ: 9; 21

551.



а) Дано: ABCD – параллелограмм;
$E \in CD$, $AE \cap BC = F$;
DE = 8см, EC = 4см,
BC = 7см, AE = 10см;
EF, FC = ?

Решение:

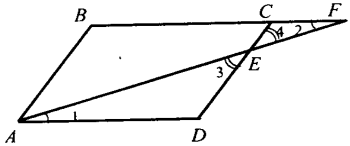
1) ΔAED и ΔFCE;

$\angle 2 = \angle 1$ (накрест лежащие при $AD \| BC$ и секущей AF),

$\angle 4 = \angle 3$ (вертикальные), значит,

$\frac{AE}{FE} = \frac{AD}{FC} = \frac{DE}{CE}$; $\frac{10}{FE} = \frac{7}{FC} = \frac{8}{4}$;

2) $\frac{7}{FC} = \frac{8}{4}$ и $\frac{10}{FE} = \frac{8}{4}$; следовательно FC = 3,5см; FE = 5см.



б) Дано: ABCD – параллелограмм
AB = 8см, AD = 5см,
CF = 2см;
DE, EC = ?

Решение:

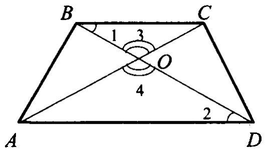
ΔAED подобен ΔFED, значит $\frac{DE}{EC} = \frac{AD}{FC} = \frac{AE}{FE}$; $\frac{DE}{EC} = \frac{5}{2}$

DE + EC = CD = 8см , значит $\frac{DE}{8 - DE} = \frac{5}{2}$;

Решая это уравнение с неизвестным DE, получим

7DE = 40, значит $EC = 8 - 5\frac{5}{7} = 2\frac{5}{7}$ см.

552.



Дано: ABCD – трапеция;
$AC \cap BD = O$;
OB = 4см, OD = 10см;
DC = 25см;
AB = ?

Решение:

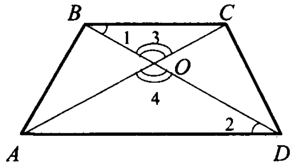
1) ΔAOB и ΔCOD;

$\angle 2 = \angle 1$ (накрест лежащие при $AD \| BC$ и секущей AF);

$\angle 4 = \angle 3$ (вертикальные), значит,

ΔAOB и ΔCOD пропорциональны (по 2 углам);

$\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$; $\frac{AO}{CO} = \frac{4}{10} = \frac{AB}{25}$, отсюда AB = 10см.



б) Дано: ABCD – трапеция;

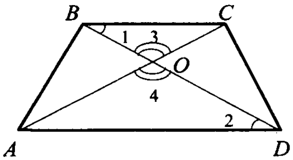
$AC \cap BD = O$;

AB = a, DC = b;

$\frac{AC}{OC}$ и $\frac{BO}{OD} = ?$

Решение: 1) $\Delta AOB \sim \Delta COD$ (см. выше), значит $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$

Ответ: $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{a}{b}$



в) Дано: ABCD – трапеция

$AC \cap BD = O$

AB = 9,6дм, DC = 24см,

BC = 15см

AO = ?

Решение:

$\Delta AOB \sim \Delta COD$, следовательно

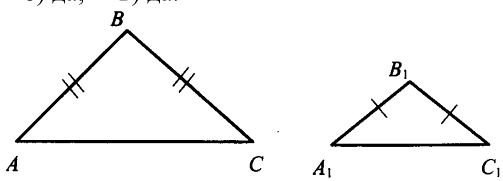
$\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$; $\frac{AO}{OC} = \frac{96}{24}$

AO + OC = AC = 15; OC = 15 – AO

т.е. $\frac{96}{24} = \frac{AO}{15 - AO}$; 4(15–AO) = AO; AO = 12см.

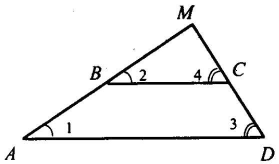
553.

а) да; б) да; в) да.



Треугольники равнобедренные, имеют по одном равному углу, следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника и теореме о сумме углов треугольника, находим другие углы, т.е. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам).

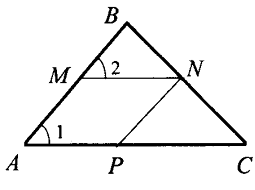
554.



Дано: ABCD – трапеция;
BC = 5 см, AD = 8см;
CD = 3,6см, AB = 3,9 см;
$AB \cap CD = M$;
MC, MB = ?

Решение:
1) ΔAMD и ΔBMC;
$\angle 2 = \angle 1$ (соответственные при AD||BC и секущей AB),
$\angle 4 = \angle 3$ (соответственные при AD||BC и секущей DC),
значит $\Delta AMD \sim \Delta BMC$ (по двум углам), следовательно,
$\frac{AM}{BM} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}$. Пусть BM = x, а MC = y, тогда AM = 3,9 + x,
DM = 3,6 + y; $\frac{3{,}9 + x}{x} = \frac{3{,}6 + y}{y} = \frac{8}{5}$;
2) $\frac{3{,}9 + x}{x} = \frac{8}{5}$; 19,5 = 3x; x = 6,5;
$\frac{3{,}6 + y}{y} = \frac{8}{5}$; y = 6, т.е. BM = 6,5см, MC = 6см.
Ответ: 6,5; 6.

555.



Дано: ΔABC;
$M \in AB$, $N \in BC$; $P \in CA$;
MN||AC, NP||AB;
AB = 10см, AC = 15см;
PN:MN = 2:3;
AM, MN, NP, AP = ?

Решение:
ΔABC и ΔMBN;
$\angle B$ – общий, $\angle 2 = \angle 1$ (соответственные при AC||MN и секущей AB), значит, $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (по двум углам).

Т.е.: $\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AC}{MN}$ (1);

2) PN:MN = 2:3, т.е. PN = 2x, MN = 3x;

AMNP – параллелограмм, следовательно, PN = AM = 2x,

MN = AD = 3x.

3) Подставляем в (1):

$\dfrac{10}{10-2x} = \dfrac{15x}{3x}$; 10x = 5(10–2x); 20x =50; x = 2,5;

AM = PN = 2·2,5 = 5см AP = MN = 3·2,5 = 7,5см.

Ответ: 5; 5; 7,5; 7,5.

б) AM, MN, NP и AP = ?, AM = AP, AB = a, AC = b.

Решение:

1) AM = AP, следовательно, AMNP – ромб.

Пусть AM = x, тогда из ΔABC~ΔMBN следует, что

$\dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BC}{BN} = \dfrac{AC}{MN}$; $\dfrac{b}{x} = \dfrac{a}{a-x}$;

ax = ab – bx; x = $\dfrac{ab}{a+b}$; AM = MN = NP = AP = $\dfrac{ab}{a+b}$

557.

Дано: ∠A, BC||DE, CE = 10см, AD = 22см, BD = 8см.

Найти: AC = ?

Решение:

Т.к. BC||DE, значит; $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB}{AC}$, т.е. AB = AD – BD = 22–8 = 14см;

$\dfrac{14}{AC} = \dfrac{8}{10}$, AC = 17,5см;

б) AB = 10, AC = 8см, BC = 4см, CE = 4см;

BD, DE = ?

1) BC||DC, следовательно, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CE}$; $\dfrac{BD}{4} = \dfrac{10}{8}$; BD = 40:8 = 5см;

2) ΔABC~ΔADE (∠A – общий, ∠B = ∠D

как соответственные при BC||DC и секущей AD), значит:

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$; $\dfrac{10}{15} = \dfrac{4}{DE}$; DE = 6см;

в) AB:BD = 2:1, DE = 12см; BC = ?

ΔABC~ΔADE, значит, $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AB}{AO}$;

$AD = AB + BD = 3$,

$\frac{BC}{12} = \frac{2}{3}$,

$3BC = 24$, $BC = 8$см.

558.

Дано: a, b – прямые;

$AA_1 \| BB_1 \| CC_1$.

Доказать: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1B_1}$.

Доказательство:

1) Проведем $c \| b$ так, что $A \in C$, B_2, $C_2 \in c$.

2) В ΔABB_2 и ΔACC_2: $\angle A$ – общий

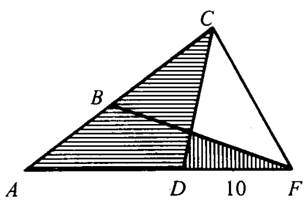
$\angle C = \angle B$ (соответственные при $BB_1 \| CC_1$ и секущей AC), ΔABB_2 пропорционален ΔACC_2 по двум углам,

значит, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$

По свойству параллелограмма имеем: $AB_2 = A_1B_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$, следовательно,

$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; по свойству пропорции $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

559.



Дано: $\angle A$

$AB = 5$см, $AC = 16$см;

$AD = 8$см, $AF = 10$см;

$\Delta ACD \sim \Delta AFB = ?$

Доказательство:

В ΔACD и ΔAFB:

$\angle A$ – общий,

по усл.: $\frac{AB}{AD} = \frac{5}{8}$; $\frac{AF}{AC} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$, значит,

$\Delta ACD \sim \Delta AFB$ (по двум сторонам и углу между ними), что и требовалось доказать.

560.

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
а) $AB = 3$см, $BC = 3$см, $AC = 7$см; $B_1A_1 = 4{,}5$ см; $B_1C_1 = 7{,}5$ см; $C_1A_1 = 10{,}5$ см;
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 = ?$

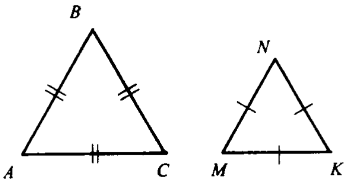
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{4{,}5}{3} = \frac{3}{2};\ \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{7{,}5}{7} = \frac{3}{2};\ \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{10{,}5}{7} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).
б) $AB = 1{,}7$ см, $BC = 3$см, $AC = 4{,}2$см;
$A_1B_1 = 340$см, $B_1C_1 = 600$см, $A_1C_1 = 840$см;
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 = ?$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{340}{17} = \frac{200}{1};\ \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{600}{3} = \frac{200}{1};\ \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{840}{4{,}2} = \frac{200}{1}.$$

Вывод: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

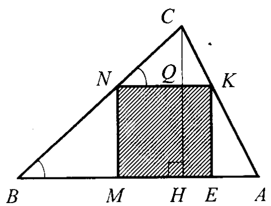
561.



Дано: ΔABC и ΔMNK;
$AB = BC = AC$;
$MN = NK = MK$;
$\Delta BC \sim MNK$ – ?

<u>Доказательство:</u>
1) Т.к. ΔABC – равносторонний, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$,
т.к. ΔMNK – равносторонний, то $\angle M = \angle N = \angle K = 60°$;
2) $\angle M = \angle N = \angle K = \angle A = -B = \angle C = 60°$, следовательно,
$\Delta ABC \sim \Delta MNK$ по двум углам.

562.



Дано: ΔABC
$AB = a$, $CH \perp AB$, $CH = h$;
$MNKE$ – квадрат;
$MN = ?$

Решение:

В ΔABC и ΔKNC, где $\angle C$ – общий,

$\angle N = \angle B$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей BC),

значит $\Delta ABC \sim \Delta KNC$ по двум углам,

т.е. $\dfrac{CH}{CQ} = \dfrac{AB}{NK}$ (1).

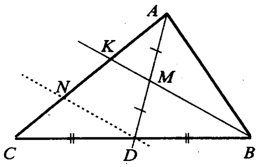
Пусть $MN = NK = KE = ME = x$, тогда $CQ = h - x$.

Подставляя в (1), имеем: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{h}{h - x}$

$a(h-x) = hx$; $ah = hx + ax$; $x = \dfrac{ah}{a + h} = MN$.

Ответ: $MN = \dfrac{ah}{a + h}$

563.



Дано: ΔABC,
AD – медиана;
$M \in AD$;
$BM \cap AC = K$;
$\dfrac{AK}{KC} = ?$

Решение:

а) Проводим $ND \parallel KB$, M – середина AD.

1) В ΔAKM и ΔAND: $\angle A$ – общий;

$\angle N = \angle K$ (соответственные при $KB \parallel AD$ и секущей AN), значит,

$\Delta AKM \sim \Delta AND$ (по двум углам), т.е. $\dfrac{AK}{AN} = \dfrac{1}{2}$

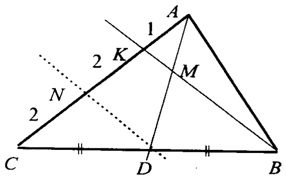
2) В ΔCND и ΔCKB: $\angle C$ – общий;

$\angle B = \angle D$ (соответственные при $ND \parallel KB$ и секущей DB), значит,

$\Delta CND \sim \Delta CKB$ (по двум углам), т.е. $\dfrac{CN}{CK} = \dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{AK}{AN} = \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{CN}{CK} = \dfrac{1}{2}$, отсюда:

$AK = NK = CN$, т.е. и $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{1}{2}$, что и требовалось доказать.



б) $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$

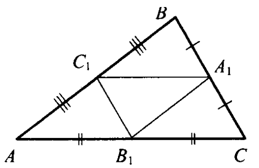
1) в $\Delta AKM \sim \Delta AND$ $\dfrac{AK}{AN} = \dfrac{1}{3}$

2) в $\Delta NCD \sim \Delta CKB$ (по двум углам) $\dfrac{CN}{CK} = \dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{AK}{AN} = \dfrac{1}{3}$, т.е. $\dfrac{AK}{AN} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{CN}{CK} = \dfrac{1}{2}$, значит, $CN = NK = 2$; т.е. $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{1}{4}$, что и требовалось доказать.

§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

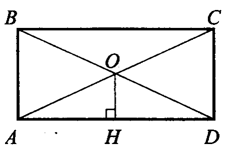
564.



Дано: ΔABC, $AB = 8$см, $BC = 5$см, $AC = 7$см
$A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$
A_1, B_1, C_1 – середины сторон
$P_{A\ B_1C_1} = ?$

Решение:
Т.к. A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 – средние линии ΔABC, то
$A_1C_1 = \dfrac{1}{2}AC$; $B_1C_1 = \dfrac{1}{2}BC$; $A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB$;
$A_1C_1 = 8{,}5$ см; $B_1C_1 = 2{,}5$ см; $A_1B_1 = 4$ см;
$P_{A\ B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = 3{,}5 + 2{,}5 + 4 = 10$ см.
Ответ: 10 см.

565.



Дано: $ABCD$ – прямоугольник;
$AC \cap BD = O$;
$OH \perp AD$, $OH = 2{,}5$см;
$AB = ?$

Решение:

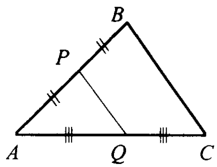
1) В ΔAOH и ΔACD: $\angle A$ – общий,

$\angle D = \angle H = 90°$, значит, $\Delta AOH \sim \Delta ACD$, т.е. $\frac{AO}{OC} = \frac{OH}{CD}$;

O – середина AC, следовательно, $AO = \frac{1}{2}AC$, и $\frac{OH}{CD} = \frac{1}{2}$, т.е.

$2OH = CD$; $CD = 2 \cdot 2{,}5 = 5$см, т.к. $CD = AB$, то $AB = 5$ см.
Ответ: 5 см.

566.



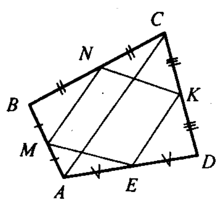
Дано: ΔABC
$P \in AB$, $AP = PB$;
$Q \in AC$, $AQ = QC$;
$P_{APQ} = 21$см;
$P_{ABC} = ?$

Решение:
1) P и Q– середины сторон AB и AC, следовательно, PQ – средняя линия ΔABC,

$PQ = \frac{1}{2}BC$;

2) $P_{ABC} = AB+BC + AC = 2AP +2\ PQ + 2AQ = 2P_{APQ} = 2 \cdot 21 = 42$см.
Ответ: 42 см.

567.



Дано: ABCD – четырехугольник;
M, N, K, E – середины сторон.
Доказать: MNKE – параллелограмм.

Доказательство:
1) В ΔABC и ΔMBN: $\angle B$ – общий из условия,

$\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$, значит,

$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е.

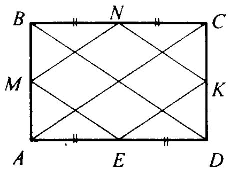
$MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

2) В ΔABC: KE – средняя линия ΔADC, т.е. $KE = \frac{1}{2}AO$ и $KE \parallel AC$.

3) Имеем: $MN = KE = \frac{1}{2}AC$, $AC \parallel KE \parallel MN$, следовательно,

MNKE – параллелограмм по признаку, что и требовалось доказать.

568.



а) Дано: ABCD – прямоугольник;
M, N, K, E – середины сторон.
Доказать: MNKE – ромб.

Доказательство:
1) ME – средняя линия ΔABD (по определению). Значит,

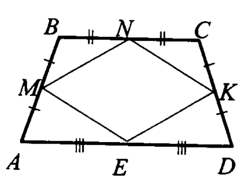
$ME = \frac{1}{2}BD$ (средняя линия ΔABD) и $ME \parallel BD$; NK – средняя линия ΔBCD, т.е. $NK = \frac{1}{2}BD$ и $BD \parallel ME \parallel NK$.

Имеем: $NK = ME = \frac{1}{2}BD$, $ME \parallel BD \parallel NK$, значит,

MNKE – параллелограмм.
2) Аналогично:

$MN = EK = \frac{1}{2}AC$, $MN \parallel KE \parallel AC$.

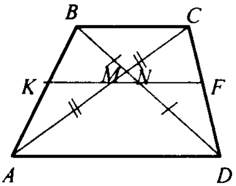
3) По св-ву диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $ME = MN$, т.е. MNKE – ромб (по определению), что и требовалось доказать.



б) ABCD – равнобедренная трапеция;
M, N, K, E – середины сторон.
Доказать: MNKE – ромб.

Доказательство:
Аналогично доказанному выше:
$AC = BD$ – диагонали.

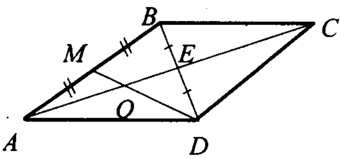
569.



Дано: ABCD – трапеция;
$M \in AC$, $AM = MC$;
$N \in BD$, $BM = ND$.
Доказать: 1) $MN \| AD$;
2) $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

Доказательство:
1) По теореме Фалеса: средняя линия KF трапеции ABCD проходит через середины AC и BD, следовательно, $MN \in KF$ и $MN \| AD$.
2) Используя свойство средней линии трапеции:
ΔACD: $MF = \frac{1}{2} AD$; ΔBCD: $NF = \frac{1}{2} BC$;
$MN = MF - NF = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

570.

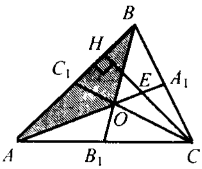


Дано: ABCD – параллелограмм;
$AC = 18$см;
$M \in AB$, $AM = MB$;
$MD \cap AC = O$;
AO, OC = ?

Решение:
1) Рассмотрим ΔABD, где DM, AE – медианы и $AE \cap DM = O$, из св-ва медианы получаем: $AO:OE = 2:1$.
2) По свойству диагонали параллелограмма $AE = 9$см тогда, $AO = 6$см, $OE = 3$см, отсюда, $OC = OE + EC = 3 + 9 = 12$см.

Ответ: 6см, 12см.

571.



Дано: ΔABC, AA_1, BB_1 – медианы;
$AA_1 \cap BB_1 = O$;
$S_{ABO} = S$;
$S_{ABC} = ?$

Решение:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, $S_{ABO} = \frac{1}{2}AB \cdot HE$, имеем $\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{CH}{HE}$

ΔHCC_1 и ΔECO: $\angle C$ – общий,

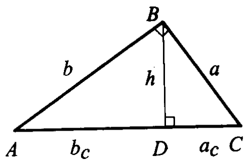
$\angle E = \angle H = 90°$ (соответственные при $AB \| OC$ и секущей CH), т.е.

$\Delta HCC_1 \sim \Delta ECO$ (по двум углам), значит,

$\frac{CC_1}{CO} = \frac{CH}{HE} = \frac{3}{2}$, $CH = \frac{3}{2}EC = 3HE$, т.е.

$\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{3EH}{HE} = 3$, значит, $S_{ABC} = 3S$, что и требовалось доказать.

572.



а) Дано: $b_c = 25$, $a_c = 16$;

h, a, b = ?

Решение:

1) $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$; 2) $c = b_c + a_c = 25 + 16 = 41$;

3) $b = \sqrt{c \cdot b_c} = \sqrt{41 \cdot 25}$; $b = 5\sqrt{41}$; 4) $a = \sqrt{c \cdot a_c} = 4\sqrt{41}$.

Ответ: 20; $5\sqrt{41}$; $4\sqrt{41}$.

б) Дано: $b_c = 36$, $a_c = 64$;

h, a, b =?

Решение:

1) $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = 6 \cdot 8 = 48$; 2) $c = b_c + a_c = 100$;

3) $a = \sqrt{a_c \cdot c} = 8 \cdot 10 = 80$; 4) $b = \sqrt{b_c \cdot c} = 6 \cdot 10 = 60$.

Ответ: 80; 48; 60.

в) Дано: $b = 12$, $b_c = 6$;

a, c, a_c = ?

Решение:

1) $b^2 = b_c \cdot c$; $c = \frac{b^2}{b_c}$; 2) $c = b_c + a_c$; $a_c = c - b_c = 24 - 16 = 8$;

3) $a = \sqrt{a_c \cdot c} = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}$.

Ответ: 24; 18; $12\sqrt{3}$.

г) Дано: $a = 8$, $a_c = 4$;

b, c, b_c = ?

<u>Решение</u>:

1) a = $\sqrt{a_c \cdot c}$; c = a^2/a_c = 64:4 = 16;

2) c = $b_c + a_c$; $b_c = c - a_c$ = 16 – 4 = 12;

3) b = $\sqrt{b_c \cdot c}$ = $\sqrt{12 \cdot 16}$ = $8\sqrt{3}$.

Ответ: 16; 12; $8\sqrt{3}$.

д) Дано: a = 6, c = 9;

h, b, a_c, b_c = ?

<u>Решение</u>:

1) h = $\sqrt{b_c \cdot a_c}$ = 6·8 = 48;

2) c = $b_c + a_c$ = 100;

3) a = $\sqrt{a_c \cdot c}$ = 8·10 = 80;

4) b = $\sqrt{b_c \cdot c}$ = 4·10 = 60.

Ответ: $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; 4; 5.

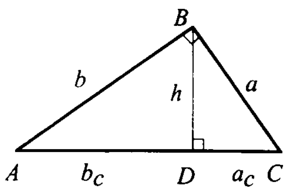
573.

Выразить a_c и b_c через a, b, c; $a^2 = b^2 + c^2$ (*)

$a^2 = a_c \cdot c$; $a_c = a^2 : c = a^2 : \sqrt{a^2 + b^2}$ (из (*));

$b^2 = b_c \cdot c$; $b_c = b^2 : c = b^2 : \sqrt{a^2 + b^2}$ (из(*)).

574.



Дано: ΔABC – прямоугольный

Доказать:

1) $h = \dfrac{ab}{c}$

2) $\dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{b^2}{b_c}$

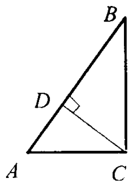
<u>Доказательство:</u>

1) $b_c = \dfrac{b^2}{c}$; $a_c = \dfrac{a^2}{c}$, отсюда, $h = \sqrt{b_c \cdot a_c} = \sqrt{\dfrac{b^2}{c} \cdot \dfrac{a^2}{c}} = \dfrac{ab}{c}$

2) $b^2 = b_c \cdot c$, т.е. $c = \dfrac{b^2}{b_c}$; $a^2 = a_c \cdot c$, т.е. $c = \dfrac{a^2}{a_c}$,

имеем: $\dfrac{b^2}{b_c} = \dfrac{a^2}{a_c}$, что и требовалось доказать.

575.



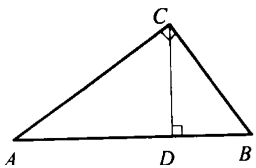
Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;
$AC:BC = 3:4$;
$AB = 50$мм;
$CD \perp AB$;
$AD, BD = ?$

Решение:
1) $AC = 3x$; $BC = 4x$; $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $(3x)^2 + (4x)^2 = 2500$;
$25x^2 = 2500$; $x = 10$, т.е. $AC = 30$мм, $BC = 40$мм;

2) $AD = \dfrac{AC^2}{AB} = \dfrac{900}{50} = 18$; $\quad BD = \dfrac{BC^2}{AB} = \dfrac{1600}{50} = 32$.

Ответ: 18мм; 32 мм.

576.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;
$AC:BC = 6:5$;
$CD \perp AB$,
$AD>DB$ на 11см;
$AB = ?$

Решение:

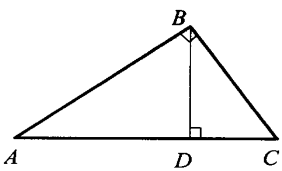
1) $\dfrac{CB^2}{DB} = \dfrac{AC^2}{AD}$

Пусть $BD = x$ см, тогда $AD = x + 11$см; $\dfrac{36}{x+11} = \dfrac{25}{x}$

$36x = 25\ (x+11)$; $x = 25$, т.е. $D = 25$см, $AD = 36$см;
2) $AB = AD + DB = 25 + 36 = 61$ см .

Ответ: 61см.

577.



Дано: ΔABC;
$AB = 5$см, $BC = 12$см;
$AC = 13$мм;
$BD \perp AC$;
$AD, CD = ?$

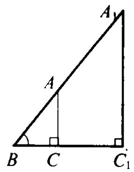
Решение:
ΔABC – прямоугольный по теореме Пифагора (25 + 144 = 169),
$\angle B = 90°$.

2) $CD = \dfrac{CB^2}{AC} = \dfrac{144}{13} = 11\dfrac{1}{13}$

$AD = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{25}{13} = 1\dfrac{12}{13}$

Ответ: $11\dfrac{1}{13}$; $1\dfrac{12}{13}$

579.



Дано: $BC_1 = 6{,}3$м;
$BC = 3{,}4$м;
$AC = 1{,}7$м;
$A_1C_1 = ?$

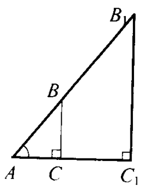
Решение:
В ΔABC и ΔA_1BC_1: $\angle B$ – общий,
$\angle C_1 = \angle C = 90°$, значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$ (по двум углам), т.е.

$\dfrac{AB}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{BC_1}$; $\dfrac{1{,}7}{A_1C_1} = \dfrac{3{,}4}{6{,}3}$, отсюда

$B_1C_1 = \dfrac{12}{13} = 6{,}936.$

Ответ: 6,936 м.

580.



Дано: $AC_1 = 10{,}2$м;
$AC = 2{,}5$м;
$BC = 1{,}7$м;
$B_1C_1 = ?$

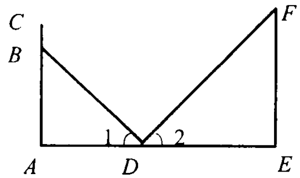
Решение:
В ΔABC и ΔAB_1C_1: $\angle A$ – общий,
$\Delta C_1 = \angle C = 90°$, значит, $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ (по двум углам),

т.е. $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}$,

т.е. $B_1C_1 = \frac{17 \cdot 10{,}2}{2{,}5} = 6{,}936$.

Ответ: 6,936.

581.



Дано: AC = 165см;
BC = 12см;
AD = 120см;
DE = 4,8м;
$\angle 1 = \angle 2$;
FE = ?

Решение:

1) В ΔABD и ΔEFD: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle E = 90°$, $\angle A = 90°$, значит, $\Delta ABD \sim \Delta EFD$ (по двум углам) и

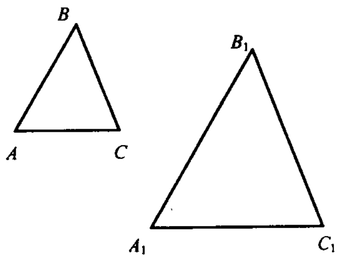
$$\frac{BD}{FD} = \frac{AD}{ED} = \frac{AB}{EF};$$

2) AB = AC – BC = 165 –12 = 153см; имеем:

$\frac{153}{EF} = \frac{120}{480}$, отсюда EF = 153·4 = 612 см.

Ответ: 612см.

582.



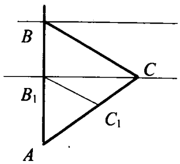
Дано: $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$;
AC = 42м,
A_1C_1 = 6,3см;
A_1B_1 = 7,2см;
AB = ?

Решение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\frac{AB}{7{,}2} = \frac{4200}{6{,}3}$, отсюда: $AB = \dfrac{7{,}2 \cdot 4200}{6{,}3} = \dfrac{72 \cdot 4200}{63} = 8 \cdot 600 = 4800.$

Ответ: 48м.

583.



Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
$AC = 100$м,
$AC_1 = 32$м,
$AB_1 = 34$м,
$BB_1 = ?$

Решение:
1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следовательно,

$\dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$, $\dfrac{AB}{34} = \dfrac{100}{32}$, $AB = \dfrac{34 \cdot 100}{32} = 106{,}25$;

2) $BB_1 = AB - AB_1 = 106{,}25 - 34 = 72{,}25$ м.

Ответ: 72,25 м.

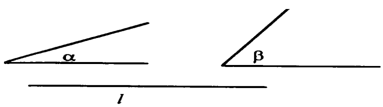
585.

Дано:

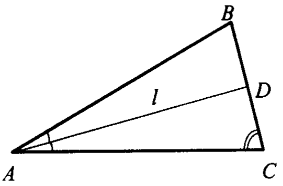
Разделить на отрезки: а) 2:5; б) 3:7; в) 4:3.
Построение:
а) AB делим на 7 равных частей.
Проводим произвольный луч AC, откладываем 7 равных отрезков. Соединяем BM. Через точк M_1, M_2, M_6 строим прямые, параллельные прямой BM. По теореме Фалеса имеем:
$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_4D_5 = D_5D_6 = D_6B$; $AD_2 : D_2B = 2:7$.

586.

Дано:



Построить: ΔABC: $\angle A = \alpha$,
$\angle C = \beta$,
$AD = l$.



Построение:

1) $\angle A = \alpha$.

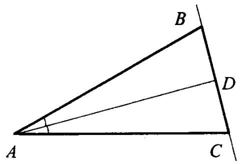
2) Провести биссектрису $\angle A$, $AD = l$.

3) Строим $\angle D = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

Сторона $\angle D$ пересечет сторону угла А в точке С.

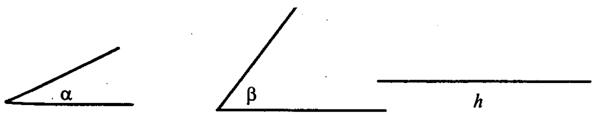
4) Строим угол, смежный с $\angle ADC$. Сторона этого угла пересечет другую сторону $\angle A$ в точке В.

5) ΔABC – искомый



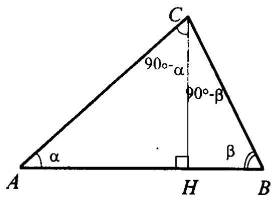
587.

Дано:



Построить: ΔABC: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $CH \perp AB$, $CH = h$.

Анализ:



Построение:

1) Строим прямую l;

2) $CH \perp l$, $CH = h$, $H \in l$;

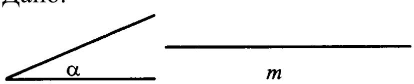
3) $\angle C = 90° - \beta$, одна из сторон пересекает прямую в точке В;

4) $\angle C = 90° - \alpha$ в другой полуплоскости, одна из сторон пересекает прямую в точке А;

5) ΔABC – искомый.

588.

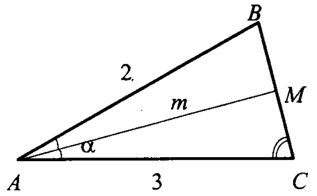
Дано:



Построить ΔABC: $\angle A = \alpha$,

$AM = m$.

Анализ:



Построение:

1) $\angle A = \alpha$.

2) На одной из сторон угла A отложить 2 одинаковых отрезка, а на другой – 3 таких же отрезка.

Соединить FN.

3) Найти середину NF.

4) На луче AO – отрезок AM = m.

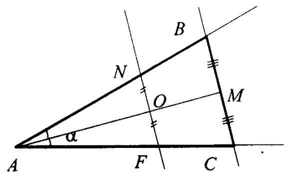
5) Через M строим прямую $l \parallel NF$.

6) $l \cap AF = C$; $l \cap AN = B$.

7) ΔABC – искомый: $\Delta ANF \sim \Delta ABC$, где $\angle A$ – общий;

$\angle B = \angle N$ (соответственные при $NF \parallel BC$ и секущей AB).

NO = OF, значит, BM = MC, т.е. AM – медиана.



§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

591.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;

sin, cos, $tg\angle A$ и $\angle B$ = ?

<u>Решение</u>: $AB^2 = AC^2 + BC^2$;

а) BC = 8, AB = 17, т.к. $AC^2 = AB^2 - BC^2$, то

$AC = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$;

$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $\sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$

$\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$ $\qquad$ $\cos\angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$

$tg\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$ $\qquad$ $tg\angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{8}$

б) BC = 21, AC = 20, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то

$AB = \sqrt{441+400} = \sqrt{841} = 29;$

$\sin\angle A = \cos\angle B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$ $\sin\angle B = \cos\angle A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29}$

$\mathrm{tg}\angle A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21}{20}$ $\mathrm{tg}\angle B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{20}{21}$

в) $BC = 1$, $AC = 2$, т.к. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\cos\angle B = \sin\angle A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\angle A = \sin\angle B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{tg}\angle A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$ $\mathrm{tg}\angle B = \dfrac{AC}{BC} = 2$

г) $AC = 24$, $AB = 25$, т.к. $BC^2 = AB^2 - AC^2$, то

$BC = \sqrt{625-576} = \sqrt{49} = 7$

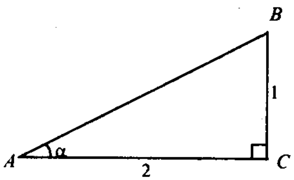
$\sin\angle A = \cos\angle B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{7}{25}$ $\sin\angle B = \cos\angle A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{24}{25}$

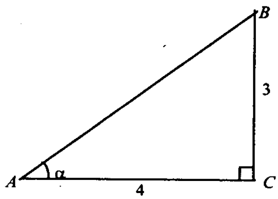
$\mathrm{tg}\angle A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{7}{24}$ $\mathrm{tg}\angle B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{24}{7}$

592.

Построить $\angle\alpha$, если:

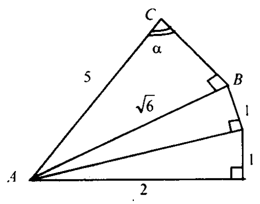
а) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ б) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$

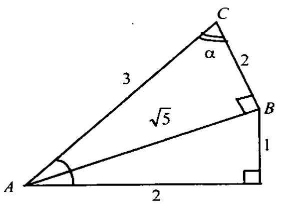




в) $\cos\alpha = 0{,}2$; г) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2}{3}$

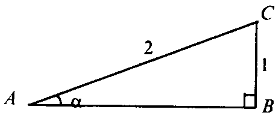
$\angle C$ – искомый угол; $\angle C$ – искомый угол;





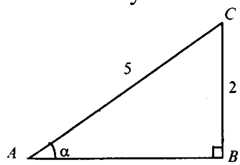
д) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\sin\alpha = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\angle A$ – искомый угол;



е) $\sin\alpha = 0,4$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2}{5}$

$\angle A$ – искомый угол.



593.

а) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = ?$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, следовательно

$\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$;

б) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$; $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = ?$

аналогично а):

$\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

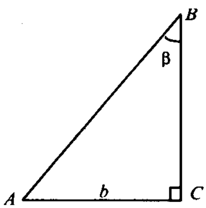
в) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = ?$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$;

г) $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$; $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = ?$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ $\qquad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

594.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;
$\angle B = \beta$, $AC = b$.
Выразить: BC и $\angle A$, AB.

Решение:

1) Из определения: tg∠B = $\frac{AC}{BC}$, т.е.

BC = $\frac{AC}{tg\angle\beta} = \frac{b}{tg\beta}$, AB = $\frac{b}{\sin\beta}$

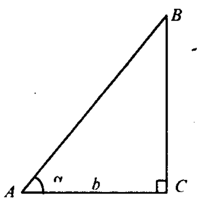
∠A = 90° – β;

2), b = 10см, β = 50°; BC = $\frac{10}{tg50^o} \approx \frac{10}{1,1918} \approx$ 8,39см;

∠A = 40°; AB = $\frac{10}{\sin50^o} \approx \frac{10}{0,766} \approx$ 13,05.

Ответ: $\frac{b}{tg\beta}$; 90° – β; $\frac{b}{\sin\beta}$; ≈ 8,39; 40°; ≈ 13,05.

595.



Дано: ΔABC, ∠C = 90°
∠A = α, AC = b.
Выразить: BC и ∠B, AB.

Решение:

1) tgα = $\frac{BC}{AC}$, отсюда AB = b:cosα; BC = b·tgα;

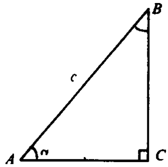
∠B = 90° – α

2) b = 12·tg42° = 12·0,9004 ≈ 10,8см

AB = $\frac{12}{\cos 42^o} = \frac{12}{0,7431} \approx$ 16,15см; ∠B = 90° – 42° = 48°.

Ответ: b·tgα; $\frac{b}{\cos\alpha}$ 90° – α ≈ 11см; ≈ 16см; 48°.

596.

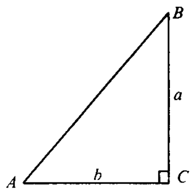


Дано: ΔABC, ∠C = 90°;
∠A = α, AB = c;
BC, AC и ∠B = ?

Решение:
1) $BC = AB \cdot \sin\angle A = c \cdot \sin\alpha$; $AC = AB \cdot \cos\angle A = c \cdot \cos\alpha$;
$\angle B = 90° - \alpha$;
2) $c = 24$см, $\alpha = 35°$: $BC = 24 \cdot \sin 35° = 24 \cdot 0{,}5736 \approx 14$см;
$AC = 24 \cdot \cos 35° = 24 \cdot 0{,}8192 \approx 20$см;
$\angle B = 90° - 35° = 55°$.

Ответ: $c \cdot \sin\alpha$; $c \cdot \cos\alpha$; $90° - \alpha$; ≈14см; ≈20см; 55°.

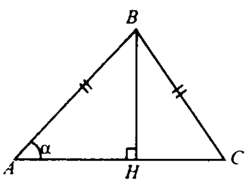
597.



Дано: $\angle C = 90°$;
$BC = a$, $AC = b$;
AC, $\angle A$ и $\angle B$ = ?

Решение:
1) $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (по т. Пифагора);
а) $\sin\angle B = \cos\angle A = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; б) $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\angle B = \dfrac{b}{a}$
2) $a = 12$см, $b = 15$, $AB = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{396} \approx 19$см;
$\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{12}{15} \approx 0{,}8$, т.е. $\angle A \approx 38°39'$;
$\operatorname{tg}\angle B = \dfrac{15}{12} = 1{,}25$, т.е. $\angle B \approx 51°21'$.

598.

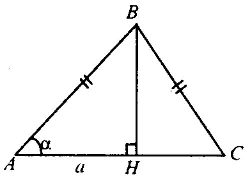


а) Дано: $AB = BC$;
$\angle A = \alpha$, $AB = b$;
S_{ABC} = ?

Решение: $BH \perp AC$;
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BH$,

из ΔABH: $BH = AB \cdot \sin\angle A = b \cdot \sin\alpha$, $AH = AB \cdot \cos\angle A = b \cdot \cos\alpha$, следовательно,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.



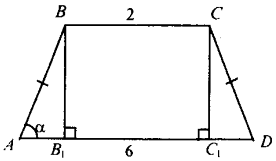
б) Дано: $AB = BC$;
$\angle A = \alpha$, $AC = a$;
$S_{ABC} = ?$

Решение:

ΔABH: $BH = AH \cdot \text{tg}\angle A = \frac{a}{2} \cdot \text{tg}\alpha$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \text{tg}\alpha = \frac{1}{4} a^2 \text{tg}\alpha$.

599.



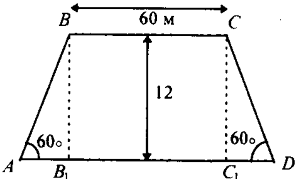
Дано:
$AB = CD$;
$BC = 2$см, $AD = 6$см;
$\angle A = \alpha$;
$S_{ABCD} = ?$

Решение:
ABCD – равнобедренная трапеция, следовательно,
$\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$, где $AB_1 = C_1D = (6 - 2):2 = 2$см.
В ΔABB_1: $BB_1 = AB_1 \cdot \text{tg}\angle A$; $BB_1 = 2 \cdot \text{tg}\alpha$, значит,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BB_1$; $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (6 + 2) \cdot 2 \cdot \text{tg}\alpha = 8\ \text{tg}\alpha\text{см}^2$.

Ответ: 8 $\text{tg}\alpha$.

600.



Дано:
$BC = 60$ м;
$h = 12$ м;
$\angle A = \angle D = 60°$;
$AD = ?$

Решение:

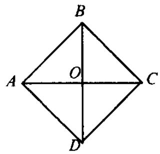
1) ΔABB_1: $BB_1 : \cos\angle A = AB_1$, отсюда $AB_1 = 12 : \operatorname{tg}60° = 12 : \sqrt{3} =$
$= 4\sqrt{3}$ м;

2) $C_1D = AB_1 = 4\sqrt{3}$ м;

3) $AD = AB_1 + B_1C_1 + C_1D = 4\sqrt{3} + 60 + 4\sqrt{3} \approx 60 + 13{,}9 = 73{,}9$ м.

Ответ: 73,9м.

601.

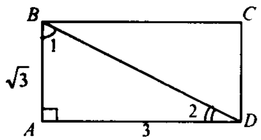


Дано: ABCD – ромб;
$AC = 3$, $BD = 2\sqrt{3}$;
$\angle A$, $\angle B$ = ?

Решение:

ΔAOB: $AO = 1$, $BO = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\angle BAO = \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$, значит, $\angle BAO =$
$= 60°$, т.е. $\angle ABO = 90° - 60° = 30°$;
AC, BD – биссектрисы углов A и B, значит, $\angle B = 60°$, $\angle A = 120°$.

602.



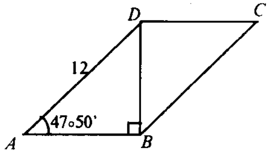
Дано: ABCD – прямоугольник;
$AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$;
$\angle 1$, $\angle 2$ = ?

Решение:

ΔABD: $\operatorname{tg}\angle 1 = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, т.е. $\angle 1 = 60°$, значит,
$\angle 2 = 90° - 60° = 30°$.

Ответ: 60° и 30°.

603.

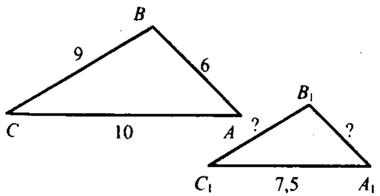


Дано: ABCD – параллелограмм;
$BD \perp AB$, $AD = 12$см;
$\angle BAD = 47°50'$;
S_{ABCD} = ?

Решение:
$S_{ABCD} = AB \cdot BD$;
1) $AB = AD \cdot \cos\angle A$;
$AB = 12 \cdot \cos 47°50' \approx 12 \cdot 0{,}6712 \approx 8{,}06$см;
$BD = AD \cdot \sin\angle A$; $BD = 12 \cdot \sin 47°50' \approx 12 \cdot 0{,}7412 \approx 8{,}89$см;
2) $S_{ABCD} = 8{,}06 \cdot 8{,}89 \approx 71{,}76$ см^2.

Ответ: ≈ 72см^2.

604.



Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
AB = 6СМ, BC = 9см,
AC = 10см, $A_1C_1 = 7{,}5$см;
A_1B_1; B_1C_1 = ?

Решение:

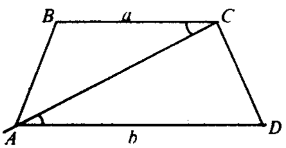
$\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$, следовательно; $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$;

$\frac{6}{A_1B_1} = \frac{10}{7{,}5} = \frac{9}{B_1C_1}$, отсюда:

$A_1B_1 = \frac{6 \cdot 7{,}5}{10} = 4{,}5$, а $B_1C_1 = \frac{9 \cdot 7{,}5}{10} = 6{,}75$.

Ответ: 4,5см, 6,75см.

605.



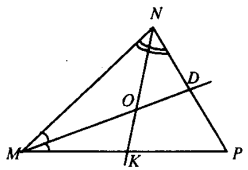
Дано: ABCD – трапеция;
$\Delta ABC \sim \Delta DCA$, AD = b,
BC = a.
Доказать: $AC^2 = ab$.

Доказательство:

$\Delta ABC \sim \Delta DCA$, значит, $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CA} = \frac{AC}{DA}$

$AC^2 = BC \cdot DA$ (свойство пропорции),
т.е. $AC^2 = a \cdot b$, что и требовалось доказать.

606.



Дано: ΔMNP;
MD, NK – биссектрисы;
$MD \cap NK = O$;
MN = 5см, NP = 3см, MP = 7см;
OK: ON = ?

Решение:

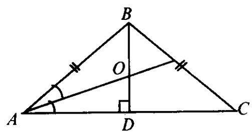
1) NK – биссектриса, следовательно, $\frac{MN}{MK} = \frac{NP}{KP}$, $\frac{5}{MK} = \frac{3}{KP}$, пусть MK = x, тогда KP = 7 – x, значит, $\frac{5}{x} = \frac{3}{7 - x}$; 35 – 5x = 3x, x = MK = $=4\frac{3}{8}$ см;

2) MD – биссектриса, следовательно, $\frac{MK}{KO} = \frac{MN}{NO}$

$\frac{MK}{MN} = \frac{KO}{NO} = \frac{4\frac{3}{8}}{5} = \frac{35}{8{,}5} = \frac{7}{8}$ (свойство пропорций).

Ответ: OK:ON = 7:8.

607.



Дано: ΔABC;
AB = BC;
$BD \perp AC$, BD = 30см;
AO – биссектриса;
BO, OD = ?

Решение:

1) В ΔABC: AB:AD = 3:2, AD = 2x, AB = 3x;
$AB^2 = AD^2 + BD^2$; $4x^2 + 900 = 9x^2$; $x^2 = 180$; $x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ см, значит, $AB = 18\sqrt{5}$ см, $AD = 12\sqrt{5}$;

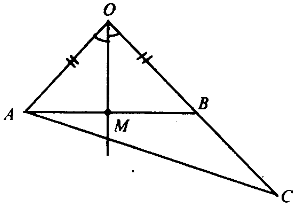
2) AO – биссектриса, следовательно, $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$

пусть DO = x, тогда BO = 30 – x, значит, $\frac{18\sqrt{5}}{30 - x} = \frac{12\sqrt{5}}{x}$

3x = 2(30–x); x = 12; т.е. DO = 12см, BO = 30–12 = 18см.

Ответ: 12; 18.

608.



Дано: ΔAOB, $AO = OB$, $C \in OB$;
OM – биссектриса $\angle AOB$.
Доказать: $MA<MC$.

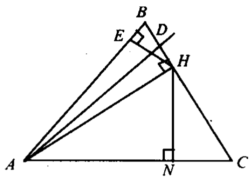
<u>Доказательство:</u>

OM – биссектриса, следовательно, $\frac{AO}{AM} = \frac{OC}{MC} = \frac{OB+BC}{MC}$;

$AO < (OB + BC)$, $\frac{AO}{AM} = \frac{OB+BC}{MC}$, следовательно,

$AM < MC$, что и требовалось доказать.

609.



Дано:
ΔABC, $D \in BC$;
$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.
Доказать: AD – биссектриса.

<u>Доказательство:</u>

AH – высота ΔABD и ΔACD, т.е. $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$ (1).

Так же $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE$, $S_{ADC} = \frac{1}{2} BT \cdot AC$, имеем:

$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}$ (2).

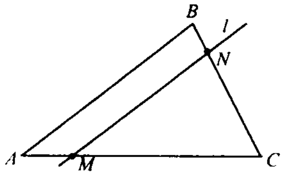
Сравнивая (1) и (2) имеем:

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot BD}{DN \cdot AC}$, $\left(\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ по условию}\right)$,

$1 = \frac{DE}{DN}$, значит,

$DE = DN$, AD – биссектриса (по свойству).

610.



Дано: ΔAOC;
$l \cap AC = M$, $l \cap BC = N$;
AM:MC = 2:7;
AB = 10см, BC = 18см,
CA = 21,6см;
MC, NC, MN = ?

Решение:

1) В ΔABC и ΔMNC: ∠C – общий,
∠M = ∠A (соответственные при AB||l и секущей AC),
значит ΔABC~ΔMNC (по 2 углам), т.е.

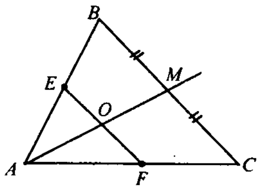
$$\frac{BC}{NC} = \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MC} = \frac{9}{7};$$

2) $\frac{AB}{MN} = \frac{9}{7}$; $\frac{BC}{NC} = \frac{9}{7}$; $\frac{AC}{MC} = \frac{9}{7}$;

$MN = \frac{7}{9} AB = \frac{7}{9} \cdot 10 = 7\frac{7}{9} \cdot$ см;

$NC = \frac{7}{9} \cdot 18 = 14$ см; $MC = \frac{7}{9} \cdot AC = \frac{7}{9} \cdot 21,6 = 16,8$ см.

611.



Дано: ΔABC;
AM – медиана, EF||BC;
$AM \cap EF = O$.
Доказать: EO = OF.

Доказательство:

В ΔAOF и ΔAMC: ∠A – общий,
∠C = ∠F (соответственные при EF||MC), значит ΔAOF~ΔAMC (по 2 углам), т.е.

$$\frac{OF}{MC} = \frac{AO}{AM}, \text{ отсюда } OF = \frac{OA \cdot MC}{AM} \qquad (1)$$

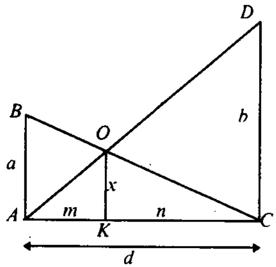
В ΔAOE и ΔAMB: ∠A – общий,
∠B = ∠E (соответственные при EF||BC), значит,
ΔAOE~ΔAMB (по 2 углам), т.е.

$\frac{OE}{BM} = \frac{AO}{AM}$, отсюда $OE = \frac{AO \cdot BM}{AM}$ (2).

Сравним (1) и (2):

$OF = \frac{OA \cdot MC}{AM}$; $OE = \frac{AO \cdot BM}{AM}$, т.к. MC = BM, то можно сделать вывод, что OF = OE.

612.



Дано: AB = *a*, DC = b;
AK = m, KC = n;
AC = d, OK = x.
Доказать:

а) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$

б) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$;

x = ?

<u>Решение</u>:

1) В ΔADC и ΔAOK: ∠A – общий,

∠K = ∠C = 90°, значит, ΔADC~ΔAOK (по 2 углам), т.е.

$\frac{DC}{OK} = \frac{AC}{AK}$, отсюда $\frac{b}{x} = \frac{d}{m}$

2) В ΔABC и ΔKOC:

∠C – общий, ∠A = ∠K = 90°, значит,

ΔABC~ΔKOC (по 2 углам)

$\frac{AB}{KO} = \frac{AC}{KC}$, отсюда $\frac{a}{x} = \frac{d}{n}$

3) $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$ и $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$,

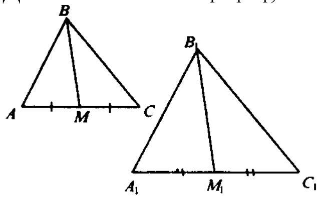
значит $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d} + \frac{d}{d} = 1$ ($\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$), что и требовалось доказать.

4) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$; $\frac{xb + ax}{ab} = 1$; $\frac{x(a+b)}{ab} = 1$,

т.е. $x = \frac{ab}{a+b}$.

613.

а) Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1};$$

BM, B_1M_1 – медианы.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

<u>Доказательство:</u>

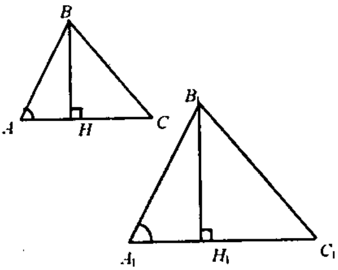
В ΔABM и $\Delta A_1B_1M_1$ по условию

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A_1C_1}$$,следовательно,

$\Delta ABM \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам), значит, $\angle A = \angle A_1$.

2) Из условия $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\angle A = \angle A_1$ (см. выше);

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по 2 сторонам и углу между ними).



б) Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$\angle A_1 = \angle A$;

$$\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

$BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

<u>Доказательство:</u>

1) В ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$: $\angle A = \angle A_1$,

$\angle H = \angle H_1 = 90°$, значит, $\Delta ABH \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по 2 углам),

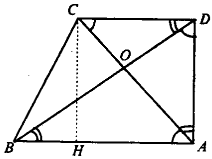
т.е. $\frac{AH}{A_1H_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

2) В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, значит,

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$: (по 2 сторонам и углу между ними).

Что и требовалось доказать.

614.



Дано: ABCD – трапеция;
$\angle A = 90°$;
$AC \perp BD$, $BD \cap CA = O$;
AB = 6см, AD = 4см;
DC, DB,CB = ?

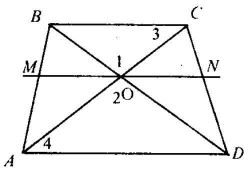
<u>Решение</u>:
1)
$BD^2 = AB^2 + AD^2$ (т. Пифагора); $BD^2 = 36+16 = 52$; $BD = \sqrt{52} =$
$=2\sqrt{13}$ см;
2) ΔADC и ΔBAD; $\angle D = \angle A = 90°$; $\angle C = \angle D$, значит,
$\Delta ADC \sim \Delta BAD$ (по двум углам), т.е.
$\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BD}$; $\frac{DC}{4} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{BD}$; $DC = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$
3) $BH = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$

из прямоугольного ΔBCH: $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + \left(3\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= 16 + \frac{100}{9} = \frac{244}{9}$, т.е. $BC = \sqrt{\frac{244}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{61}$ см.

Ответ: $2\sqrt{13}$ см ; $2\frac{2}{3}$ см; $\frac{2}{3}\sqrt{61}$ см.

615.



Дано: ABCD – трапеция;
$AC \cap BD = O$;
MN||AD;
AD = a, BC = b;
MN = ?

<u>Решение</u>:
1) В ΔAOD и ΔCOB: $\angle 2 = \angle 1$ (вертикальные),
$\angle 4 = \angle 3$ (накрест лежащие при AD||BC и секущей AC),
значит $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (по двум углам), т.е.
$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}$.

2) В ΔABD и ΔMBO: $\angle B$ – общий,
$\angle M = \angle A$ (соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AC),
значит $\Delta ABD \sim \Delta MBO$ (по двум углам), т.е.

$\frac{BD}{BO} = \frac{AD}{OM}$, отсюда $OM = \frac{AD \cdot BO}{BD} = \frac{a \cdot BO}{BD}$

3) $\Delta BDC \sim \Delta ODN$ (по двум углам), следовательно

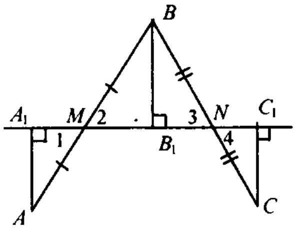
$\frac{BC}{ON} = \frac{BD}{OD} = \frac{DC}{DC}$, т.е. $ON = \frac{BC \cdot OD}{BD} = \frac{b \cdot OD}{BD}$

4) $MN = ON + MO = \frac{b \cdot OD}{BD} + \frac{a \cdot BO}{BD} = \frac{b \cdot OD + a \cdot BO}{BD}$;

$$BD = OB + OD = OB + \frac{a}{b} OB = OB \cdot \frac{b + a}{b}$$

$\frac{a \cdot BO + b \cdot \frac{a}{b} OB}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{OB(a + a)}{OB \cdot \frac{a+b}{b}} = \frac{2ab}{a + b}$, что и требовалось доказать.

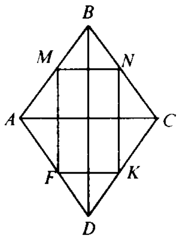
616.



Дано: ΔABC;
MN – средняя линия;
$AA_1 \perp MN$, $BB_1 \perp MN$,
$CC_1 \perp MN$.
Доказать: $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

<u>Доказательство:</u>
1) В ΔAA_1M и ΔBB_1M: $AM = MB$,
$\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные), значит,
$\Delta AA_1M = \Delta BB_1M$ (по гипотенузе и острому углу),
т.е. $AA_1 = BB_1$ (1).
2) В ΔBB_1N и ΔCC_1N: $BN = NC$,
$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные), т.е.
$\Delta BB_1N = \Delta CC_1N$ (по гипотенузе и острому углу), значит,
$AA_1 = BB_1$ (2).
3) Сравним (1) и (2), получим $AA_1 = BB_1 = CC_1$, что и требовалось доказать.

617.



Дано: ABCD – ромб;
M, N, K, F – середины сторон.
Доказать: MNKF – прямоугольник.

Доказательство:

1) В ΔABD: FM – средняя линия, следовательно,

$BD \| FM$ и $FM = \frac{1}{2}BD$.

В ΔBCD: $NK \| BD$ и $NK = \frac{1}{2}BD$.

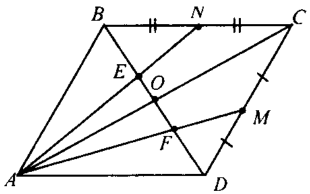
По признаку FMNK – параллелограмм.

2) $BD \| FM \| NK$, $DB \perp AC$ (по свойству диагонального ромба), значит $NK \perp AC$ и $FM \perp AC$;

$MN \| AC \| FK$, $FM \perp AC$, значит, FM.MN, $NK \perp AC$,

$FK \perp FM$ и $NK \perp MN$, $NK \perp FK$, следовательно, MNFK – прямоугольник, что и требовалось доказать.

618.



Дано: ABCD – параллелограмм;
$M \in CD$, $CM = MD$;
$N \in BC$, $BN = NC$;
$AN \cap BD = E$, $AM \cap BD = F$.
Доказать: $BE = EF = FD$.

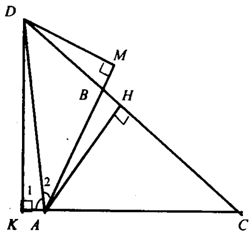
Доказательство:

1) В ΔABC: AN, BO – медианы,
$BE:EO = 2:1$ (свойство медиан).

2) В ΔACD: $DF:FO = 2:1$.

3) В параллелограмме ABCD диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, $BO = OD$;
$BE + EO = OF + FD$, значит, $BE = EF = FD$;
$2x = 1x + 1x = 2x$, что и требовалось доказать.

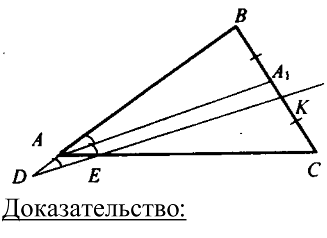
619.



Дано: ΔABC;
AD – биссектриса;
$AD \cap BC = D$.
Доказать: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

<u>Доказательство:</u>
1) $AH \perp DC$ (AH – высота для ΔABD и для ΔADC);
$S_{ABD} = \frac{1}{2}$ $AH \cdot BD \cdot$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}$ $AH \cdot CD$, имеем:
$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$ (1);
2) $S_{ABD} = \frac{1}{2}$ $DM \cdot AB$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}$ $DK \cdot AC$, $DK = DM$;
в ΔADK и ΔADM: DA – общая, $\angle 1 = \angle 2$, т.е.
$\Delta ADK = \Delta ADM$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно,
$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$ (2).
3) Сравнивая (1) и (2), имеем по свойству пропорциональности:
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD}$,
что и требовалось доказать.

620.



Дано: ΔABC;
AD – биссектриса,
$K \in BC$, $BK = KC$;
$KD \parallel AA_1$.
Доказать: $BD = EC$.

<u>Доказательство:</u>
1) AA_1 – биссектриса, следовательно: $\frac{AB}{BA_1} = \frac{AC}{A_1C}$
2) $\Delta DBK \sim \Delta ABA_1$ (по двум углам: $\angle B$ – общий, $\angle A = \angle D$),

т.е. $\dfrac{DB}{BA}=\dfrac{BK}{BA_1}$, $BD=BK\cdot\dfrac{BA}{BA_1}$ (1);

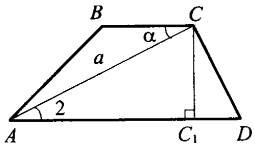
3) $\Delta AA_1C \sim \Delta EKC$ ($\angle C$ – общий, $\angle A = \angle C$),т.е. $\dfrac{AC}{KC}=\dfrac{AC}{EC}$,

$EC = KC\cdot\dfrac{AC}{A_1C}$ (2).

4) Сравнивая (1) и (2), имеем: $BK = KC$,

$\dfrac{BA}{BA_1} = \dfrac{AC}{A_1C}$, т.е. $BD = EC$, что и требовалось доказать.

621.



Дано: ABCD – трапеция;
$AD + BC = b$, $AC = a$;
$\angle ACB = \alpha$;
$S_{ABCD} = ?$

Решение:

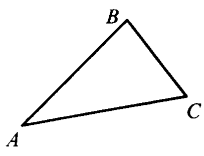
$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC)\cdot CC_1$;

ΔCC_1A: $\angle C_1 = 90$, $\angle A = \alpha$, $AC = a$, т.е. $CC_1 = a\sin\alpha$;

2) $BC + AD = b$, следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$.

Ответ: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$.

622.



Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
$2S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$.
Построить: $\Delta A_1B_1C_1$.

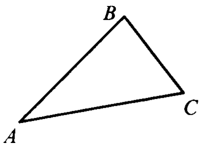
Построение:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, значит, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$;

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{2}$, значит, $k^2 = \frac{1}{2}$, т.е. $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Используя свойство параллельных прямых строим $\Delta A_1B_1C_1$, стороны которого в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ больше ΔABC.

623.

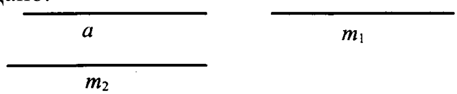


Дано: A, B, C – середины сторон; некоторого $\Delta A_1B_1C_1$.
Построить: $\Delta A_1B_1C_1$.

Построение:
1) Через точки A, B, C строим прямые $a \| BC$;
$b \| AC$; $c \| AB$.
2) a, b, c попарно пересекутся в точках A_1; B_1; C_1. $\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

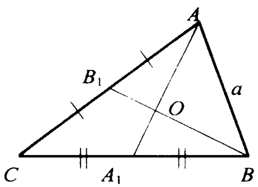
624.

Дано:



Построить: ΔABC: $AB = a$, $AA_1 = m_1$, $BB_1 = m_2$

Анализ:



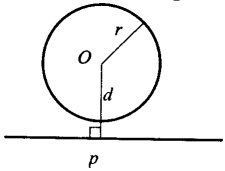
Построение:
1) $AB = a$;
2) $AA_1 = m_1$, $O \in AA_1$ и $O \in BB_1$, медианы пересекаются и делятся этой точкой AO: $OA_1 = 2:1$ $BO:OB_1 = = 2:1$.
3) Строим Окр. $\left(A;\ R_1 = \frac{2}{3}m_1\right)$ и Окр. $\left(B;\ R_2 = \frac{2}{3}m_2\right)$. Они пересекутся в точке O.
4) Лучи AO и BO продлеваем на длину $AA_1 = m_1$ и $BB = m_2$.
5) BA_1 и AB_1 пересекутся в точке C.
6) ΔABC – искомый.

Глава VIII. Окружность

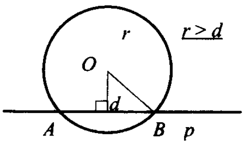
§ 1. Касательная к окружности

631.

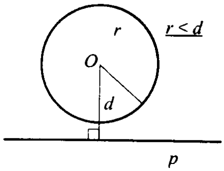
Определить взаимное расположение прямой p и окружности;



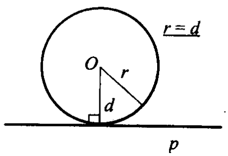
а) r = 16см; d = 12см;
r>d, следовательно, прямая и окружность пересекаются в двух точках.



б) r = 5см; d = 4,2см;
r>d, следовательно l∩Окружность (O; r) = {A; B};
в) r = 7,2дм; d = 3,7дм;
(a; O) пересекаются в двух точках.

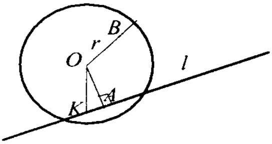


г) r = 8дм; d = 1,2дм;
r<d, следовательно, прямая и окружность не пересекаются.



д) r = 5дм; d = 50дм, следовательно, r = d, значит, прямая и окружность касаются.

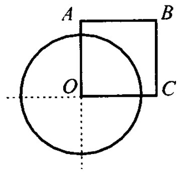
632.



Дано: окружность (O; r);
OA = d, OB = r;
d<r, A∈l.
Доказать: l – секущая.
<u>Доказательство:</u>

1) Пусть $l \perp OA$, тогда $d<r$ и l – секущая (по опр.).
2) Пусть l не $\perp OA$, тогда $OK \perp l$ ΔOAK – прямоугольный
т.к. OA – гипотенуза, то $OA>OK$;
$r>OA$, $r>OK$ (по условию), следовательно, l – секущая по определению.
Что и требовалось доказать.

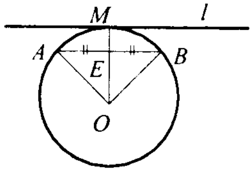
633.



Дано: $ABCO$ – квадрат;
$AB = 6$см.
Окружность (O; 5см).
Определить: какие из прямых OA, AB, BC и AC секущие по отношению к окружности (O; 5см).

$r < AB$, значит, прямые OA и OC – секущие.

634.

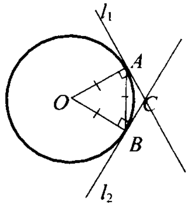


Дано: Окружность (O; R)
AB – хорда;
$OM = R$, $AB \cap OM = E$;
$AE = EB$;
$M \in l$ – касательная.
Доказать: $l \parallel AB$.

Доказательство:
1) В ΔAOB: $AO = OB = AB = R$, следовательно,
$\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.
2) По свойству касательных $OA \perp l$, значит,
$\angle\alpha = 90° - \angle A = 90° - 60° = 30°$.

Ответ: 30°.

636.

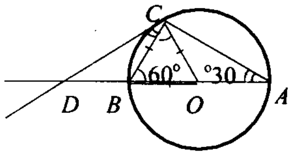


Дано: Окр (O; R);
$AB = R$;
$l_1 \cap l_2 = C$;
$\angle ACB = ?$

Решение:

1) $AB = OA = OB = R$, $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.
2) Из свойства касательных $OA \perp l_1$, $OB \perp l_2$, значит,
$\angle CAB = \angle CBA = 90° - 60° = 30°$.
3) ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, т.е. $\angle C = 180° - 60° = 120°$.
Ответ: 120°.

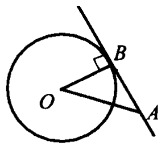
637.



Дано: Окр $(O;R)$;
$AB = 2R$;
$\angle CAB = 30°$;
$CD \cap AB = D$.
Доказать: ΔACD – равнобедренный.

Доказательство:
1) $AO = OC = R$, следовательно, ΔAOC – равнобедренный, т.е.
$\angle C = \angle A = 30°$;
2) $OC \perp CD$, следовательно, $\angle ACD = \angle OCA + \angle DCO$;
$\angle ACD = 30° + 90° = 120°$;
3) ΔACD: $\angle D + \angle A + \angle C = 180°$,
$\angle D + 30° + 120° = 180°$, $\angle D = 30°$, т.е.
$\angle A = \angle D = 30°$, следовательно,
$AC = CD$ и ΔACD – равнобедренный.
Что и требовалось доказать

638.

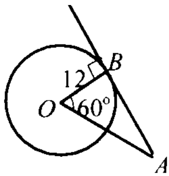


Дано: Окр (O; 1,5см);
AB – касательная;
OB = 1,5см, OA = 2см;
AB = ?

Решение:
1) AB – касательная (по усл.), следовательно $OB \perp AB$ и ΔAOB – прямоугольный;
$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 4 - 2,25 = 1,74$ (по т. Пифагора), т.е.
$AB = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ см.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ см.

639.



Дано: Окр (O; 12см);
AB – касательная;
$\angle AOB = 60°$;
AB = ?

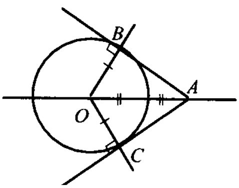
<u>Решение</u>:

1) AB – касательная (по усл.), следовательно, $OB \perp AB$;

из ΔAOB: $tg\angle O = \dfrac{AB}{OB}$, отсюда:

$AB = OB \cdot tg\angle O = 12 \cdot tg60° = 12\sqrt{3}$ (см).

640.



Дано: Окр (O; 4,5см);
OA = 9см;
AB, AC – касательные;
$\angle BAC = ?$

<u>Решение</u>:

1) В ΔAOB: $\angle B = 90°$, $OA = 9$, $OB = 4{,}5$, т.е. $OB = \dfrac{1}{2}$ OA.

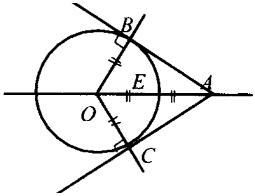
Имеем: $\angle OAB = 30°$.

2) Также, из $\Delta AOC \angle OAC = 30°$.

3) $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30° + 30° = 60°$.

Ответ: 60°.

641.



Дано: Окр (O; R);
AB, AC – касательные;
$OA \cap$Окр (O; R) = E;
OE = EA;
$\angle BAC = ?$

Решение:

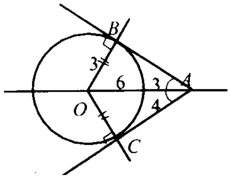
1) OE = OC = OB = R (OA = 2OE = 2R);

2) $\Delta AOB: OB = \frac{1}{2}OA$, следовательно, $\angle BAO = 30°$, а $\angle B = 90°$;

3) AO – биссектриса $\angle BAC$, значит, $\angle BAC = 60°$.

Ответ: 60°

642.



Дано: OB = 3см, OA = 6см;
AB, AC, $\angle 3$, $\angle 4$ = ?

Решение:

1) В ΔAOB: $\angle B = 90°$, $AB^2 = OA^2 - OB^2$ (по т. Пифагора);

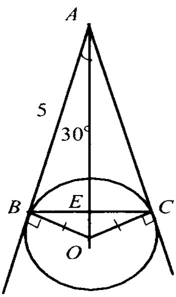
$AB^2 = 36 - 9 = 27$; $AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см;

2) $\sin\angle 3 = \frac{OB}{AO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, значит, $\angle 3 = 30°$;

3) $\Delta AOB = \Delta AOC$, т.е. $AC = AB = 3\sqrt{3}$ см; $\angle 4 = \angle 3 = 30°$.

Ответ: $3\sqrt{3}$ см; $3\sqrt{3}$ см; 30°, 30°.

643.



Дано: Окр (O; R);
AB, AC – касательные;
AB = 5см, $\angle OA = 30°$;
BC = ?

Решение:

1) В ΔAOB: $\angle B = 90°$;

$\angle A = 30°$, следовательно, $BO = \frac{1}{2}AO$.

Пусть BO = x, тогда AO = 2x

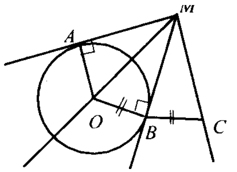
$AO^2 = BO^2 + AB^2$; $4x^2 = x^2 + 25$; $x = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

2) В ΔBOC: $\angle O = 120°$, т.е., в ΔBOE $\angle BOE = 60°$.
Отсюда $\angle OBE = 30°$; $BE = BO \cdot \cos\angle B$, т.е.

$BE = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30° = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5}{2} = 5$см.

Ответ: 5см.

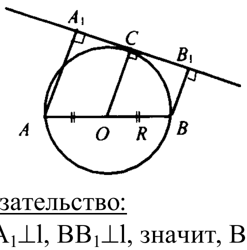
644.



Дано: Окр (O; R);
AM, BM – касательные;
OB = BC.
Доказать: $\angle AMC = 3\angle BMC$.

Доказательство:
1) В ΔOMB и Δ CMB: MB – общая,
OB = BC, значит $\Delta CMB = \Delta OMB$ (по двум катетам), т.е.
$\angle OMB = \angle CMB$;
2) $\angle BMO = \angle AMO$ (свойство параллельных отрезков);
3) $\angle AMC = \angle AMO + \angle BMC + \angle OMB$, $\angle AMC = 3 \cdot \angle$, т.к.
$\angle OMB = \angle BMC = \angle AMO$, что и требовалось доказать.

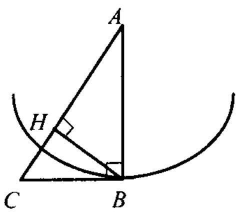
645.



Дано: Окр (O; R);
AB = 2R;
$C \in l$ – касательная;
$AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$.
Доказать: $A_1C = CB_1$.

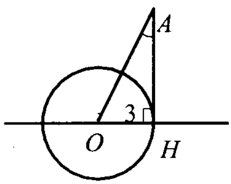
Доказательство:
1) $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, значит, $BB_1 \parallel AA_1$, т.е.
ABCD – прямоугольная трапеция.
2) Т.к. $OC \perp l$, то $OC \parallel AA_1 \parallel BB_1$, OA = BO, $O \in AB$,
т.е. по т. Фалеса OC – средняя линия трапеции
и $A_1C = CB_1$, что и требовалось доказать.

646.



Из условия $CB \perp AB$;
AB = R Окр (A; AB),
значит по признаку
CB – касательная к Окр (A; AB).
2) Из условия $CB \perp AB$,
CB = r Окр (C; CB), значит по признаку
AB – касательная к Окр (C; BC).
3) Пусть Окр (B; BC), тогда AC секущая к этой окружности, (BC>BH).
Пусть Окр (B; AB), тогда AC секущая к этой окружности, (AB>BH).

647.



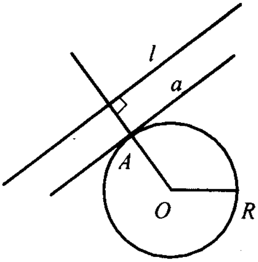
Дано: Окр (O; 3см).
Найти: является ли AH касательной?

а) OA = 5см, AH = 4см.
В ΔAHO: OA = 5, AH = 4, OH = 3, по т. Пифагора
$5^2=4^2+3^2$; 25 = 25, следовательно, ΔAHO – прямоугольный, т.е.
$\angle OHA = 90°$ и AH является касательной;
б) $\angle HAO = 45°$, OA = 4см.
В ΔAHO:
OH = 3, OA = 4, $\angle HAO = 45°$.
Допустим: $\angle H = 90°$, тогда AH = OH = 3, т.е. $AO = 3\sqrt{2}$, а это противоречит условию AO = 4, следовательно, предположение неверно и AH не является касательной.
в) $\angle HAO = 30°$, OA = 6см.
В ΔAHO: OA = 6, OH = 3, $\angle A = 30°$;
$OH = \frac{1}{2}OA$, значит, $\angle H = 90°$, т.е.

AH является касательной.

648.

Дано:



а) Построить касательную к окружности, параллельную l.

Построение:

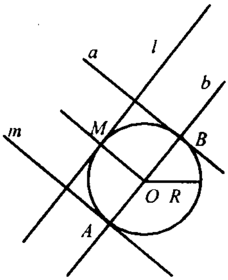
1) Строим OM⊥l.

2) OM∩Окр (O;R) = A.

3) Через точку A проведем прямую $a \parallel$ l.

4) a – искомая касательная.

Дано:



б) Построить касательную к окружности, перпендикулярную l.

Построение:

1) Строим OM⊥l

2) Через точку O проводим прямую b ∥ l.

3) b∩Окр (O;R) = {A; B}.

4) Через A или B проводим прямую $a \parallel$ l.

3) b∩Окр (O;R) = {A; B}.

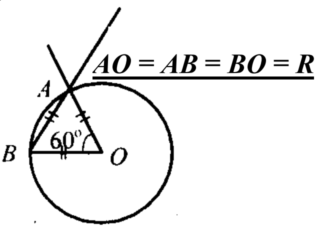
4) Через A или B проводим прямую $a \parallel$ OM.

5) a или a_1 – является иском касательные.

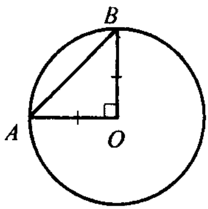
§ 2. Центральные и вписанные углы

649.

а)

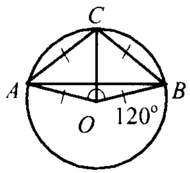


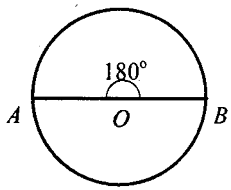
б)



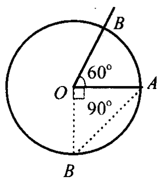
в) ΔABO и ΔBOC – равносторонние.

г)





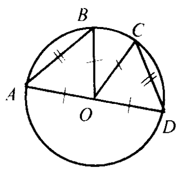
650.



Дано: Окр: (О; 16)
АВ = ?

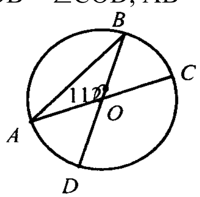
Решение:
а) $\angle AOB = 60°$, значит ΔAOB – равносторонний и АВ = 16
б) $\angle AOB = 90°$, значит, ΔAOB – прямоугольный и $AB=16\sqrt{2}$
в) $\angle AOB = 180°$, значит, $AB = AO + OB = 2\cdot16 = 32$.

651.



а) Дано: Окр (О;R);
АВ = CD.
Доказать: АВ = CD.

Доказательство:
В ΔAOB и ΔCOD: OC = OA = R, OD = OB = R,
из усл.:AB = CD, т.е.
$\Delta AOB = \Delta COD$ (по трем сторонам), т.е.
$\angle AOB = \angle COD$, AB = CD.



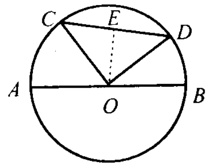
б) Дано: Окр (О;R);
АВ = CD;
CD и CBD = ?

Решение:

1) AB = CD (см. выше),
$\angle AOB = 112°$, значит,
AB = 112 и CD = 112°.
2) Т.е. $\angle CBD = 360° - 112° = 248°$.

Ответ: 112° и 248°.

652.

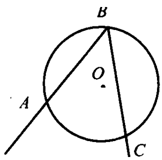


Дано: AC = 37°;
BD = 23°;
R = 15см;
CD = ?

Решение:
1) $CD = 180° - (AC + DB) = 180° - 60° = 120°$;
2) из ΔCOD: $\angle O = 120°$, OD = OC = 15см,
т.к. $OE \perp CD$, $\sin\angle EOD = \dfrac{ED}{OD}$; т.е. $ED = OD \cdot \sin\angle EOD =$
$= 15 \cdot \sin\angle 60° = 15 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см и $CD = 2 \cdot ED = 15\sqrt{3}$ см.

Ответ: $15\sqrt{3}$ см.

653.



Дано: $\angle ABC$ – вписанный;
$\angle ABC = ?$

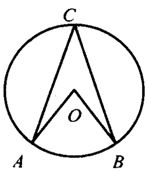
Решение:
$\angle ABC = \overline{AC} : 2$.
а) $\overline{AC} = 48°$, следовательно, $\angle ABC = 24°$;
б) $\overline{AC} = 57°$, следовательно, $\angle ABC = 28°34'$;
в) $\overline{AC} = 90°$, следовательно, $\angle ABC = 45°$;
г) $\overline{AC} = 124°$, следовательно, $\angle ABC = 62°$;
д) $\overline{AC} = 180°$, следовательно, $\angle ABC = 90°$.

654.

а) $\angle x = \frac{1}{2}(360° - 80° - 152°) = 64°$; в) $\angle x = (180° - 112°):2 = 34°$;

б) $x = 360° – (60° + 125°) = 175°$; г) $x = 360° - (215° + 40°) = 105°$.

655.



Дано: $\angle ABC > ACB$ на 30°;
AOB, ACB = ?

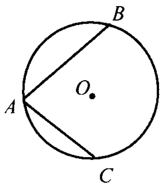
Решение:

Пусть $\angle ACB = x$, тогда $\angle AOB = x + 30°$;

$\angle AOB = AB$, следовательно, $\angle AOB = \frac{1}{2} AB$; $x = \frac{1}{2}(x + 30°) = 30°$,

значит, $\angle ACB = 30°$, $\angle AOB = 60°$.

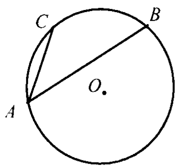
656.



а) Дано: $AB = 115°$;
$AC = 43°$.
Найти: $\angle BAC$ – ?

Решение:

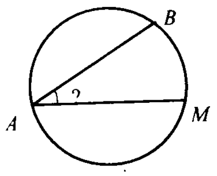
$\angle BAC = \frac{1}{2} BC$; отсюда $BC = 360° - (115° + 43°) = 202°$, следовательно, $\angle BAC = 101°$;



б) $\angle BAC = \frac{1}{2} BC$, где
$BC = AB - AC = 115° - 43° = 72°$,
т.е. $\angle BAC = \frac{1}{2} BC = 36°$.

Ответ: 101° или 36°.

657.



Дано: $\overline{AB} = 140°$

$M \in \overline{AB}$, $\overline{AM} : \overline{MB} = 6:5$;

$\angle BAM = ?$

Решение:

1) AMB = 360°; где $\overline{BA} = 360° - 140° = 220°$;

$\overline{AM} : \overline{MB} = 6:5$, следовательно, $\overline{AM} = 6x$, $\overline{AM} + \overline{MB} = 220°$;

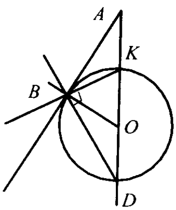
$\overline{MB} = 5x$; $6x + 5x = 220$; $x = 20$,

т.е. $\overline{AM} = 20 \cdot 6 = 120°$, $\overline{MB} = 20 \cdot 5 = 100°$;

2) $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$.

Ответ: 50°

658.



Дано: AB – касательная;

AD – секущая;

D∈Окр(O; R);

BD = 110°20′;

∠BAD, ∠ADB = ?

Решение:

1) т.к. ∠BKD – вписанный, то

$\angle BKD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} 110°20' = 55°10'$.

2) Имеем $\angle DBK = \frac{1}{2} DK = 90°$, следовательно,

$\angle DBA = 90° - \angle BKD$; $\angle BDA = 89°60' - 55°10' = 34°50'$;

3) OB = OD = R, значит, ΔBOD – равнобедренный, т.е.

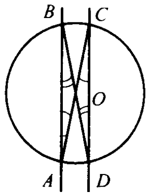
$\angle DBO = \angle BDO = 34°50'$, следовательно,

$\angle DBA = \angle DBO + \angle OBA = 34°50' + 90° = 124°50'$, значит,

$\angle BAD = 180° - (124°50' + 34°50') = 179°60' - 159°40' = 20°20'$.

Ответ: 20°20′ и 34°50′.

659.



Дано: AB||CD.
Доказать: AD = BC.

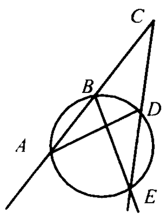
<u>Доказательство:</u>

1) $\angle$BAC и ACD – накрест лежащие при AB || CD и секущей AC, т.е. $\angle$BAC = $\angle$ACD;

2) т.к. $\angle ACD = \frac{1}{2} AD$ и $\angle BAC = \frac{1}{2} CB$, то

CB = AD, что и требовалось доказать.

660.



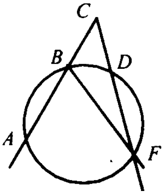
Дано: AC, AE – секущие;
$\angle$ACE = 32°;
AE = 100°;
BD = ?

<u>Решение</u>:

1) $\angle$ABE – вписанный, следовательно, $\angle ABE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} 100° = 50°$;

2) т.к. $\angle$EBC и $\angle$ABE смежные, то
$\angle$BED = 180°(130° + 32°) = 18°, следовательно,
BD = 2·$\angle$BED = 2·18° = 36°.
Ответ: 36°.

661.



Дано: AC, FC – секущие;
AF = 140°, BD = 52°;
$\angle$ACF = ?

Решение:

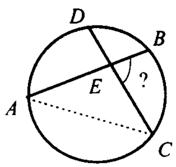
1) Т.к. $\angle ABF$ – вписанный, то $\angle ABF = \frac{1}{2} AF = 70°$.

2) Т.к. $\angle BFD$ – вписанный, то $\angle BFD = \frac{1}{2} BD = 26°$.

3) Из ΔBCF: $\angle F = 26°$, $\angle B$ (смежный с $\angle ABF$) = 180°–70° = 110°;
$\angle C = 180° - (26° + 110°) = 44°$.

Ответ: 44°.

662.



Дано:
$AB \cap CD = E$;
AD = 54°, BC = 70°;
$\angle BEC$ = ?

Решение:

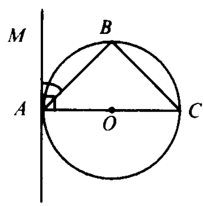
1) Т.к. $\angle ACD = \frac{1}{2}$ AD, то $\angle ACD = 27°$;

$\angle BAC = \frac{1}{2}$ BC, т.е. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 70° = 35°$;

2) ΔAEC: $\angle E = 180° - (\angle C + \angle A)$;
$\angle E = 180° - (35° + 27°) = 118°$.
3) Т.к. $\angle BEC$ и $\angle AEC$ – смежные, то $\angle BEC = 180° - 118° = 62°$.

Ответ: 62°.

663.



Дано:
AC – диаметр;
Окр(O;R);
AB – хорда, AM – касательная;
$\angle MAB < 90°$.
Доказать: $\angle MAB = \angle ACB$.

Доказательство:

1) $B = \frac{1}{2} AC = 90°$, следовательно, ΔABC – прямоугольный,

$\angle C = 90° - \angle BAC$ (1).

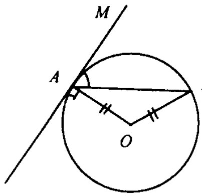
2) AM – касательная к окружности, значит, $AM \perp AC$ и

$\angle MAB = 90° - \angle BAC$ (2).

3) Сравнивая (1) и (2), имеем:

$\angle C = \angle MAB$, что и требовалось доказать.

664.



Дано: AM – касательная;

AB – хорда.

Доказать: $\angle MAB = \frac{1}{2} AB$.

Доказательство:

Т.к. AO = BO = R, ΔAOB – равнобедренный, следовательно,

$\angle B = \angle A = \alpha$, т.е. $\angle AOB = 180° - 2\alpha$ (1),

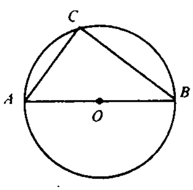
$\angle AOB$ – центральный, значит, $\angle AOB = AB$.

Т.к. AM – касательная, $AM \perp AO$, т.е. $\angle MAB = 90° - \alpha$.

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} AB$, что и требовалось доказать.

665.



Дано: A, B, C$\in$Окр, AB –диаметр.

Доказать: $\angle C > \angle A$, $\angle C > \angle B$.

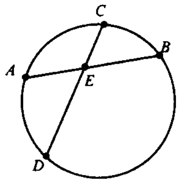
Доказательство:

1) Т.к. $\angle ACB$ – вписанный, то $\angle ACB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$,

следовательно ΔABC – прямоугольный, т.е. $\angle C > \angle B$, $\angle C > \angle A$.

$\angle A + \angle B = 90°$ (по свойству углов прямоугольного треугольника), следовательно, каждый из углов меньше $\angle C$.

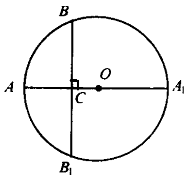
666.



Дано: $AB \cap CB = E$;
$ED = ?$

Решение:
а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2{,}5$, по свойству хорд имеем:
$AE \cdot EB = CE \cdot ED$; $5 \cdot 2 = 2{,}5 \cdot ED$, отсюда
$ED = \frac{10}{2{,}5} = \frac{100}{25} = 4$;
б) $AE = 16$, $EB = 9$, $CE = ED$, значит, $AE \cdot EB = CE \cdot ED$;
$16 \cdot 9 = x \cdot x$; $x^2 = 16 \cdot 9$; $x = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$;
в) $AE = 0{,}2$; $BE = 0{,}5$; $CE = 0{,}4$, значит, $AE \cdot EB = EC \cdot ED$, т.е.
$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}4ED$; $ED = 0{,}1 : 0{,}4 = 0{,}25$.

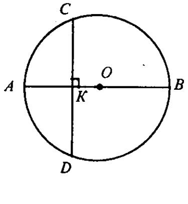
667.



Дано: A_1A – диаметр;
$AA_1 \perp BB_1$, $AA_1 \cap BB_1 = 0$;
$AC = 4$см, $CA_1 = 8$см;
$BB_1 = ?$

Решение:
1) $AA_1 \perp BB_1$, следовательно, OC – высота равнобедренного ΔBOB_1, следовательно, OC – медиана, значит, $BC = CB_1$;
2) $AC \cdot CA_1 = BC \cdot CB_1$ (св-во хорд), т.е.
$4 \cdot 8 = x \cdot x$; $x^2 = 32$, $x = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $BB_1 = 2BC = 8\sqrt{2}$ см.
Отсюда, $BB_1 = 8\sqrt{2}$ см.

668.

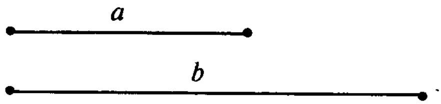


Дано: AB – диаметр,
$CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$.
Доказать: $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$.

Доказательство:
1) $CD \perp AB$, следовательно, $CK = KD$ (см. 667).
2) По свойству хорд: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, т.к. $CK = KD$, то
$AK \cdot KB = CK^2$; $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$, что и требовалось доказать.

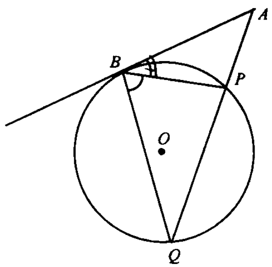
669.

Дано:



Построить: AB: $AB = \sqrt{a \cdot b}$,
Построение:
проводим прямую l, на ней откладываем два отрезка $KN = a$, $NM = b$;
строим окружность с центром на l и диаметром KM;
проводим прямую, перпендикулярную l, через точку N;
перпендикуляр пересекает окружность в точках A и B, имеем:
AB – искомый отрезок.

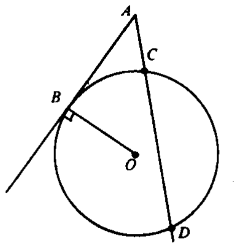
670.



Дано: AB – касательная;
AQ – секущая.
Доказать: $AB^2 = AP \cdot AQ$.

Доказательство:
В ΔABP и ΔAQB:
$\angle A$ – общий, $\angle Q = \angle B$, следовательно,
$\Delta ABP \sim \Delta AQB$, т.е. $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$
$AB^2 = AQ \cdot AP$ (по свойству пропорции), что и требовалось доказать.

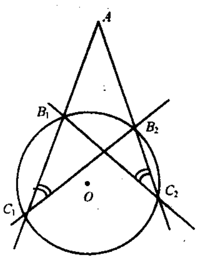
671.



Дано: AB – касательная;
AD – секущая;
CD = ?

Решение:
а) AB = 4см, AC = 2см, тогда AB2 = AC·AD;
пусть CD = x, тогда $4^2 = 2(x + 2)$; 16 = 2x + 4,
x = 6, т.е.CD = 6см.
Ответ: 6 см.
б) AB = 5см, AD = 10см, тогда AB2 = AC·AD;
25 = AC·10, отсюда AC = 2,5см;
CD = AD·AC = 10 – 2,5 = 7,5см.
Ответ: 7,5 см.

672.

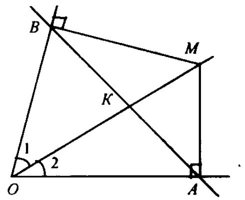


Дано: AC_1 и AC_2 – секущие.
Доказать: $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

Доказательство:
1) В ΔAC_1B_2 и ΔAC_2B_1:
$\angle A$ – общий, $\angle C2 = \angle C1 = \frac{1}{2} B_1B_2$, т.е.
$\Delta AC_1B_2 \sim \Delta AC_2B_1$ (по двум углам), значит,
$\frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_2}{AB_1}$ (из свойства пропорции), т.е.
$AC_1 \cdot AB_1 = AB_2 \cdot AC_2$, что и требовалось доказать.

§ 3. Четыре замечательные точки треугольника

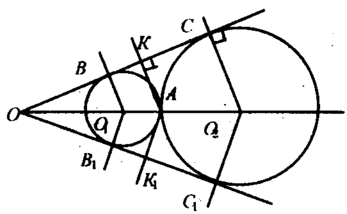
674.



Дано: $\angle O$;
OM – биссектриса;
$MA \perp OA$,
$MB \perp OB$.
Доказать: $AB \perp OM$.

Доказательство:
1) В ΔMOB и ΔMOA: OM – общая, т.к. OM – биссектриса, то $\angle 1 = \angle 2$, значит,
$\Delta MOB = \Delta MOA$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OB = OA$ и ΔAOB – равнобедренный.
2) В ΔOBK и ΔOAK: $OB = OA$,
$\angle 1 = \angle 2$, OK – общая, значит,
$\Delta OBK = \Delta OAK$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е.
$BK = KA$, следовательно, OK – медиана, тогда по св-ву медианы равнобедренного Δ $OK \perp BA$, что и требовалось доказать.

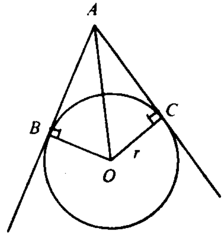
675.



Дано: $\angle O$;
Окр(O_1; R)$\cap$Окр(O_2;r) = A.
Доказать: O_1; $O_2 \in OA$.

Доказательство:
1) BC и B_1C_1 – касательные к окружностям, значит,
$O_1B \perp BC$, $O_2C \perp BC$ и, $O_2C_1 \perp B_1C_1$, $O_1B_1 \perp B_1C_1$, т.е.
точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$ (по свойству биссектрисы),
2) т.к. $AK = AK_1$ (по свойству биссектрисы), то A лежит на биссектрисе.

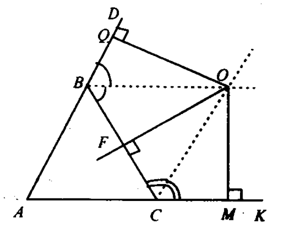
676.



Дано: AB, AC – касательные к Окр (O;r).
Найти: а) OA; б) r.

<u>Решение</u>:
а) r = 5см, $\angle A = 60°$ (усл.);
1) $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, следовательно, AO является биссектрисой.
2) В ΔACO:
$\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AO = 2 \cdot 5$, OC = 5см, т.е.
AO = 2OC (из прямоуг. треугольника AOC),
$AO = 2 \cdot 5 = 10$см;
б) AO – биссектриса, тогда в ΔAOC: $\angle A = 45°$, $\angle C = 90°$,
$\angle O = 45°$, т.е. AC = OC = r;
$14^2 = 2r^2$; $r^2 = 98$ (т. Пифагора), $r = 7\sqrt{2}$.

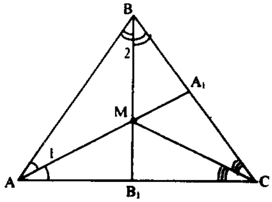
677.



Дано: ΔABC;
BO, CO – биссектрисы.
Доказать: O – центр окружности,
AB, AC и BC – ее касательные.

<u>Доказательство:</u>
1) BO – биссектриса $\angle CBD$, следовательно,
$OQ \perp BD$ и $OF \perp BC$ равны (свойство биссектрисы);
2) CO – биссектриса $\angle BCK$, следовательно, $OF \perp BC$ и $OM \perp CK$,
равны (свойство биссектрисы).
3) Имеем: OQ = OF, OF = OM, т.е.
OQ = OM = OF – радиусы окружности с центром в точке O,
а AC, BC, AB – касательные.

678.

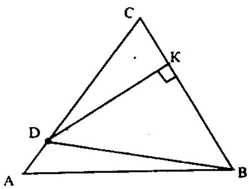


Дано:
ΔABC;
AA_1; BB_1 – биссектрисы;
$AA_1 \cap BB_1 = M$.
Найти: $\angle ACM$ и $\angle BCM$.

Решение:
а) $\angle AMB = 136°$
1) M – точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1, следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$ и $\angle ACM = \angle BCM$;
2) ΔABM: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, т.е.
$\angle 1 + \angle 2 = 180° - 136° = 44°$;
3) ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$;
$\angle C = 180° - (\angle B + \angle A)$, $2\cdot(\angle 1 + \angle 2) = 2\cdot 144° = 88°$;
$\angle C = 180° - 88° = 92°$, т.е. $\angle BCM = \angle ACM = 46°$;
б) $\angle AMB = 111°$.
Имеем: $\angle C = 180° - 2\cdot(180° - 111°)) = 42°$, т.е.
$\angle ACM = \angle BCM = 21°$.

Ответ: а) 46°; 46°; б) 21°; 21°.

679.



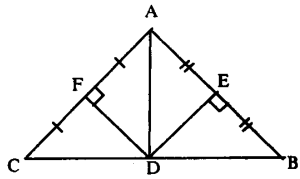
Дано: ΔABC;
$DK \perp BC$, $CK = KB$;
а) AD и CD = ?
б) AC = ?

Решение:
а) BD = 5см, AC = 8,5см,
DK – серединный перпендикуляр к BC, следовательно, BD = DC (по св-ву), т.е. DC = 5см, тогда
AD = AC –DC = 8,5 – 5 = 3,5см;
б) BD = 11,4см, AD = 3,2 см,
DK – серединный перпендикуляр к BC, следовательно,
DC = BD = 11,4см;

AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 + 14,6см.

Ответ: а) 5см; 3,5см; б) 11,4см и 14,6см.

680.



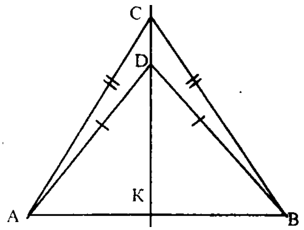
Дано: ΔABC;
FD⊥AC, ED⊥AB;
CF⊥FA, AE = EB.
Доказать:
а) D – середина BC;
б) ∠A = ∠B + ∠C.

Доказательство:
а) 1) DE⊥AB, AE = EB, следовательно, BD = AD, по свойству серединного перпендикуляра;
2) FD⊥AC, CF = FA, следовательно, CD = DA, по свойству серединного перпендикуляра.
3) Имеем: AD = BD, CD = DA, т.е.
CD = DB, значит D – середина CB;
б) ∠A = ∠CAD + ∠DAB;
ΔACD – равнобедренный, значит, ∠CAD = ∠C;
ΔADB – равнобедренный, значит, ∠DAC = ∠B, т.е.
∠A = ∠B + ∠C, что и требовалось доказать.

681.

Дано: ΔABC – равнобедренный;
EE_1⊥AB, $AE_1 = E_1B$;
P_{ABC} = 27см, AB = 18см;
AC = ?
Решение:
В ΔAEC: P_{AEC} = AE + EC + AC, по свойству серединного перпендикуляра AE = BE, значит,
P_{ABC} = BE + EC + AC,
P_{AEC} = BC + AC, где BC = AB по условию, т.е.
P_{AEC} = AB + AC,   27 = 18 + AC,
AC = 9см.
Ответ: 9 см.

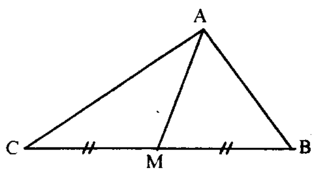
682.



Дано: ΔABC, $AC = CB$;
ΔADB, $AD = DB$.
Доказать: $CD \perp AB$ и $AK = KB$.

Доказательство:
1) Из условия $AC = CB$, $C \in l_1$, $l \perp AB$, где
l – серединный перпендикуляр
$AD = DB$, следовательно, $D \in l_1$, где $l_1 \perp AB$
Имеем: C и D лежат на одном серединном перпендикуляре к AB,
и l и 1 совпадают, т.к.
$AK = KB$;
$AK = KB$, а именно:
через K проведены два перпендикуляра к одному отрезку, но это невозможно по теореме, l и l совпали, значит,
$CD \perp AB$, $CD \cap AB = K$, $AK = KB$.

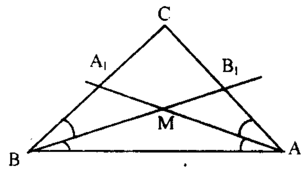
683.



Дано: ΔABC;
$AB \neq AC$;
AM – медиана.
Доказать: AM не $\perp BC$.

Доказательство:
1) Пусть $AM \perp BC$.
2) В ΔAMC и ΔAMB:
AM – общая, $CM = MB$, т.е.
$\Delta AMC = \Delta AMB$ (по двум катетам), значит,
$AC = AB$, но это противоречит условию $AB \neq AC$.
3) Следовательно, наше предположение неверно, и AM не $\perp BC$, что и требовалось доказать.

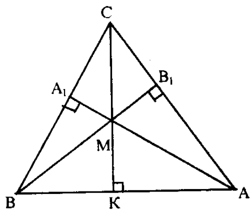
684.



Дано: ΔABC;
$AC = BC$;
AA_1, BB_1 – биссектрисы;
$AA_1 \cap BB_1 = M$.
Доказать: $CM \perp AB$.

Доказательство:
$AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно, CM – биссектриса $\angle C$, опущенная на основание равнобедренного треугольника, т.е. $CM \perp AB$, что и требовалось доказать.

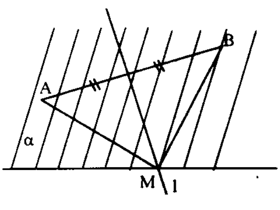
685.



Дано: ΔABC;
$AA_1 \cap BB_1 = M$;
$AC = BC$;
$BB_1 \perp AC$, $AA_1 \perp BC$.
Доказать: $CM \perp BA$,
$BK = KA$.

Доказательство:
1) $AA_1 \cap BB_1 = M$, следовательно по замечательному свойству треугольника: $CM \perp AB$.
2) В ΔBCK и ΔACK: CK – общая, $BC = AC$, т.е.
$\Delta ACK = \Delta BCK$ (по катету и гипотенузе), значит,
$KA = BK$, что и требовалось доказать.

687.

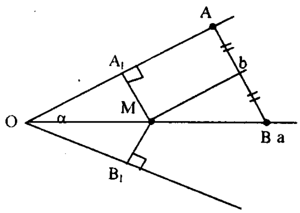


Дано: a;
$A, B \in a$;
Построить: $M \in a$, $AM = MB$.

Построение:
1) Строим отрезок AB.
2) Строим $l \perp AB$, где l – серединный перпендикуляр к отрезку AB
3) l пересекает в точке M.

4) M – искомая точка.

688.

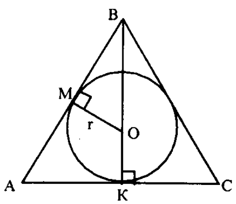


Дано: $\angle\alpha$, AB.
Построить: M, такую, чтобы
$MA_1 \perp OA_1$;
$MB_1 \perp OB_1$ и
AM = MB.

Построение:
Строим биссектриссу $\angle O$.
Строим серединный перпендикуляр к AB.
$a \cap b = M$.
M – искомая точка.

§ 4. Вписанная и описанная окружности

689.

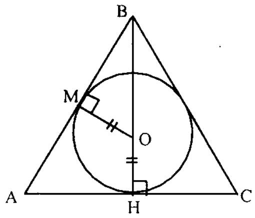


Дано: ΔABC;
AC = 10см, AB = BC = 13см;
Окр. (O;r) – вписана в ΔABC;
r = ?

Решение:
В ΔABK и ΔOBM:
$\angle B$ – общий, $\angle M = \angle K = 90°$, т.е.
$\Delta ABK \sim \Delta OBM$ (по двум углам), значит,
$\frac{BK}{BM} = \frac{AK}{OM} = \frac{AB}{OB}$;
$AB^2 = AK^2 + BK^2$ (т. Пифагора); $13^2 = 5^2 + BK^2$; BK = 12;
$\frac{13}{12-r} = \frac{12}{BM}$, $5(12–r) = 13r$, $r = 3\frac{6}{8} = 3\frac{1}{3}$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ см.

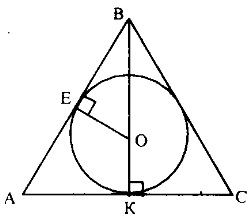
690.



Дано: ΔABC;
$AB = BC = 60$см;
$BO:OH = 12:5$;
$BH \perp AC$ – центр вписанной окружности;
$AC = ?$

Решение:
В ΔABH и ΔOBM: $\angle B$ – общий, $\angle M = \angle B = 90°$, т.е.
$\Delta ABH \sim \Delta OBM$ (по двум углам), значит, $\frac{BH}{BM} = \frac{AH}{OM} = \frac{AB}{OB}$;
$BM = 12x$, $OM = 5x$, следовательно,
$\frac{60}{12x} = \frac{AH}{5x}$; $AH = \frac{60 \cdot 5x}{12x}$; $AH = 25$см.
Отсюда, $AC = 2 \cdot AH = 50$см.

691.

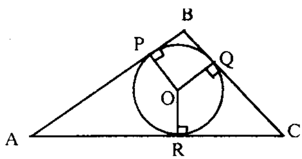


Дано: ΔABC;
$BE = 2$см, $AE = 3$см;
$AB = BC$.
Найти: P_{ABC} – ?

Решение:
1) $AE = AK$ (свойство касательных отрезков),значит, $AK = 3$см и $AC = 6$см;
2) $AB = AE + EB = 3 + 4 = 7$см;
3) $P_{ABC} = 7 + 7 + 6 = 20$см.

Ответ: 20см.

692.

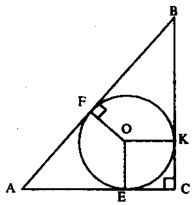


Дано: ΔABC;
Окр $(O; R)$ – вписана;
$AB = 10$см, $BC = 12$см, $CA = 5$см;

AP, PB, BQ, QC, CR, RA = ?

<u>Решение</u>:
PB = BQ, QC = CR, AR = AP (по св-ву касательных отрезков).
Пусть PB = x, тогда QC = 12–x и AP = 10 – x,
AR + RC = 5, 12 – x + 10 – x = 5 $\Rightarrow$ x = 8,5,
PB = BQ = 8,5см, AP = AR = 1,5см, RC = QC = 3,5 см.

693.

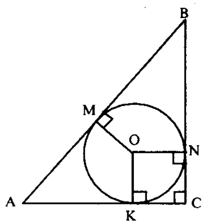


Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;
P_{ABC} = ?

<u>Решение</u>:
а) AB = 26см, r = 4см;
P_{ABC} = AB + BC + AC = 26, P_{ABC} = BK + KC + CE + AE;
P_{ABC} = 26 + 8 + BK + AE, FB + FA = 26, P_{ABC} = 26 + 8 + 26 = 60см.
б) AF = 5см, FB = 12см;
1) AF = AE = 5см, FB = BK = 12см (св-во касательных отрезков).
Пусть EC = CK = r,
тогда AC = 5+r; BC = 12+r;
$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (т. Пифагора для ΔABC)
$17^2 = (5+r)^2 + (12 + r)^2$,
$2r^2 + 34r - 120 = 0$, $r^2 + 17r - 60 = 0$, ищем корни уравнения
$\left[\begin{array}{l} r_1 = -20 \text{ – не подходит по смыслу} \\ r_2 = 3 \end{array}\right.$,следовательно, EC = r_2 = 3см;
2) P_{ABC} = AB + BC + AC = (5 + 12) + (5 + 3) + (12 + 3) = 40см.

Ответ: 40см.

694.

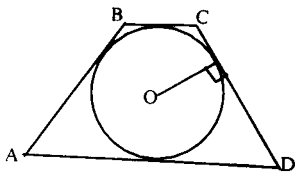


Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$;
AB = c;
AC + CB = m;

d – ?

Решение:
По свойству касательных отрезков: NB = MB, КС = CN, АМ=АК.
Пусть АК = АМ = х, тогда BN = МВ = с – х и, т.к.
АС + СВ = m, то
$(x + r) + (c – x) + r = m$, $2r = m – c$, $d = m – c$.

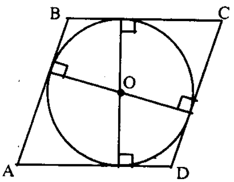
695.



Дано: ABCD – четырехугольник;
Окр (O; R) – вписана;
AB + CD = 15см;
P_{ABCD} = ?

Решение:
1) ABCD – описанный четырехугольник, следовательно,
AB + CD = AD + BC, т.е. AD + DC = 15см;
2) P_{ABCD} = AB + CD + BC + AD = 30см.

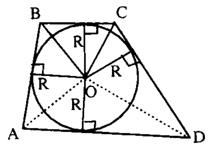
696.



Дано: ABCD – параллелограмм;
Окр (O; R) – вписана.
Доказать: ABCD – ромб.

Доказательство:
ABCD – описанный около Окр (O; R), следовательно,
AB + CD = AD + BC.
Мы знаем, что стороны в параллелограмме попарно равны, следовательно, запишем: 2AB = 2AD, т.е.
AB = AD (соседние стороны равны), следовательно, ABCD – ромб. Что и требовалось доказать.

697.



Дано: ABCD – описанный четырехугольник.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$.

<u>Доказательство:</u>

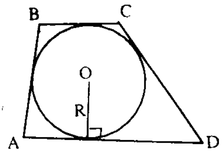
$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{ABO}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R + \frac{1}{2} AD \cdot R + \frac{1}{2} AB \cdot R =$

$= \frac{1}{2} R\,(AB + BC + CD + AD) = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot R$.

Что и требовалось доказать.

698.



Дано: ABCD – описанный четырехугольник ;
AB + CD = 12см, R = 5см;
S_{ABCD} = ?

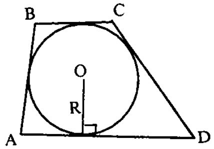
<u>Решение</u>:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 12 = 24$см, следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$см^2.

Ответ: 60см^2.

699.



Дано: ABCD – описанный четырехугольник;
AB + CD = 10см, $S_{ABCD} = 12$см^2;
R = ?

<u>Решение</u>:

1) ABCD – описанный, следовательно, $P_{ABCD} = 2 \cdot 10 = 20$см;

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} R \cdot P_{ABCD}$, т.е. $R = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 12}{20} = 1{,}2$ см.

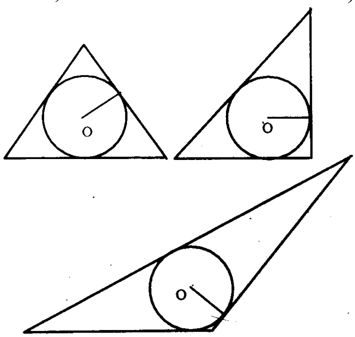
Ответ: 1,2см.

700.

Суммы противоположных сторон ромба равны, следовательно, в любой ромб можно вписать окружность.

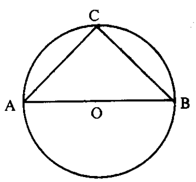
701.

а) остроугольный; б) прямоугольный;



в) тупоугольный.

702.



Дано: ΔABC – вписан в Окр (O;R);
AB – диаметр;
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ = ?

<u>Решение</u>:
а) BC = 134°;

$\angle A = \dfrac{1}{2} BC = 67°$, $\angle B = 90° - 67° = 23°$, $\angle C = \dfrac{1}{2} AB = 90°$.

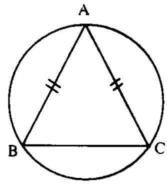
Ответ: 90°, 67°, 23°.
б) AC = 70°;

$\angle C = 90°$ (опирается на диаметр), $\angle B = \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{1}{2} \cdot 70° = 35°$;

$\angle A = 90° - 35° = 55°$.

Ответ: 90°, 35°, 55°.

703.



Дано: ΔABC – вписанный;
$AB = AC$, $BC = 102°$;
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ = ?

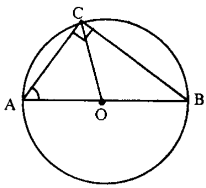
Решение:

$\angle A = \frac{1}{2}$ $BC = 51°$;

$AB = AC$, следовательно, $\angle B = \angle C = (180° - 51°):2 = 64°30'$.

Ответ: $51°$; $64°30'$; $64°30'$.

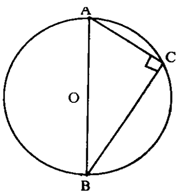
704.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ – вписанный в Окр $(O;R)$.
Доказать: 1) $O \in AB$;
2) $OA = OB$.

Доказательство:
1) $\angle C = 90°$, следовательно, $AB = 180°$, значит,
AB – диаметр Окр $(O;R) \Rightarrow O \in AB$ и $AO = OB$.
2) AC, BC и AB = ? Если $AB = d$ и $\angle A = \alpha$;
ΔABC – прямоугольный, следовательно,
$BC = AB \cdot \sin\angle A$, т.е. $BC = d \cdot \sin\alpha$;
$AC = AB \cdot \cos\angle A$, т.е. $AC = d \cdot \cos\alpha$.

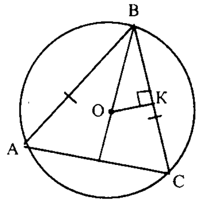
705.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ – вписанный;
OA = ?

Решение:
а) AC = 8, BC = 6, $AB^2 = AC^2 + BC^2$;
$AB^2 = 64 + 36 = 100$, $AB = \sqrt{100} = 10$, следовательно, AO = 5см;
б) AC = 18, $\angle B = 30°$, тогда $AC = \frac{1}{2}AB$,
т.е. AB = 2AC = 36см, тогда AO = 18см.

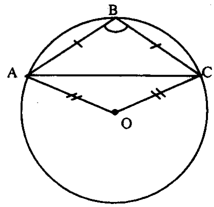
706.



Дано: ΔABC – вписанный;
AB = BC = AC;
OB = 10см;
AB = ?

Решение:
1) ΔABC – равносторонний, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$;
2) В ΔBKO: $\angle K = 90°$, $\angle B = 30°$, $OB = 10°$, значит,
$BK = OB \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$;
3) $BC = 2BK = 10\sqrt{3}$.

707.

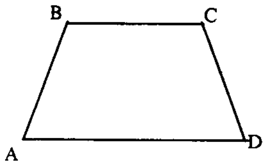


Дано: ΔABC – вписанный;
AB = BC = 8, $\angle B = 120°$;
d = ?

Решение:
1) ΔABC – равнобедренный, следовательно,
$\angle C = \angle A = (180° - 120°):2 = 30°$;
2) $\angle C = \frac{1}{2}AB$, т.е. $AB = 60°$, $\angle A = \frac{1}{2}BC$, т.е. $BC = 60°$, значит,
$\angle ABC = 120°$ и $\angle AOC = 120°$;

3) ABCO – параллелограмм (т.к. ∠A = ∠C, ∠B = ∠O), т.е.
AB = OC, BC = AO (по свойству);
AB = BC = 8, OC = OA = 8см;
4) d = 2r = 2·8 = 16см.

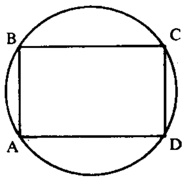
708.



а) В прямоугольнике все углы прямые, следовательно, суммы противоположных углов равны по 180°, что является необходимым условием для того, чтобы описать окружность около 4-хугольника.

б)
1) ∠A = ∠D, ∠C = ∠B (по свойству равнобедренной трапеции);
2) ∠B + ∠A = 180°, ∠C + ∠D = 180° (по свойству равнобедренной трапеции)
Имеем: ∠A + ∠C = ∠B + ∠D = 180° необходимое условие для того, чтобы можно было описать окружность.
Т.е. около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

709.



Дано: ABCD – параллелограмм вписанный.
Доказать: ABCD – прямоугольник.

<u>Доказательство:</u>
ABCD – вписанный, следовательно, ∠C + ∠A = 180°; ∠D + ∠B = =180°,
но по свойству углов параллелограмма ∠C = ∠A и ∠B = ∠D,
т.е. ∠A = ∠C = ∠B = ∠D = 90°, значит
ABCD – прямоугольник (по определению).

710.

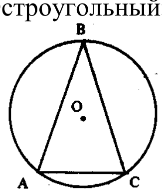
Дано: ABCD – трапеция вписанная

Доказать: AB = CD

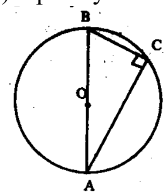
<u>Доказательство:</u>
1) ABCD – вписанная трапеция, следовательно
$\angle B + \angle D = 180°$, $\angle C + \angle A = 180°$ (1);
Так же: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ (2);
по свойству углов при AD||BC.
2) Сравниваем (1) и (2):
$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle A + \angle B = 180°$, т.е. $\angle B = \angle C$;
$\angle B + \angle D = 180°$, $\angle A + \angle B = 180°$, т.е. $\angle A = \angle D$.
Имеем: углы при верхнем и нижнем основаниях попарно равны, следовательно, ABCD – равнобедренная.

711.

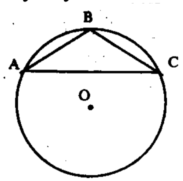
1) Остроугольный:



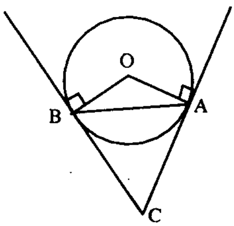
2) Прямоугольный:



3) Тупоугольный:



712.

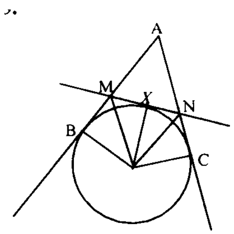


Дано: Окр(O; R);
AB – хорда;
AC, BC – касательные.
Доказать: $AC \cap BC = C$.

<u>Доказательство:</u>
1) $\angle BAC = \frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\angle ABC = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (см. 644), тогда, $\angle BAC =$
$= \angle ABC < 90°$, т.к. $AB < 180°$, значит,
хорда AB не является диаметром.
2) $\angle ABC = \angle BAC \neq 90°$, следовательно,
AC не$\perp$AB, BC не $\perp$AB, значит, $AC \cap BC$.

Что и требовалось доказать.

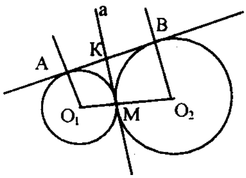
713.



Дано: Окр(O;R);
AB, AC – касательные;
$X \in BC$, $X \in l$;
l – касательная;
$AB \cap l = M$, $AC \cap l = N$.
Доказать: P_{ABCD} и $\angle MON$ не зависят от выбора точки X.

Доказательство:
1) $P_{ANM} = AM + AN + MN$;
$BM = MX$ и $XN = NC$ (свойство касательных отрезков), т.е.
$P_{ANM} = NA + (MX + XN) + AM = NA + MB + NC + AM = AB + AC$,
что и требовалось доказать.
2) $\angle MON = \angle XON + \angle MOX$;
$\Delta BMO = \Delta MXO$ (по катету $BM = MX$ и гипотенузе MO), значит
$\angle MOX = \angle BOM$.
Также из $\Delta CON = \Delta XON$: $\angle CON = \angle XON$, т.е. $\angle MON = \angle BOM +$
$+\angle CON$, а именно, не зависит от X, что и требовалось доказать.

714.



Дано: Окр(O_1; R) и Окр(O_2; r);
Окр(O_1; R)$\cap$ Окр(O_2; r) = M;
a – общая касательная;
AB – касательная.
Доказать: $M \in$ Окр(K; $\frac{1}{2}$AB).

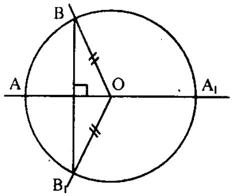
Доказательство:
1) M – точка касания окружностей, a – их касательная;
$a \perp O_1O_2$;
2) по свойству касательных к окружности $O_1A_1 \perp AB$, $O_2B \perp AB$,
т.е. $O_1A \| O_2B$ (по свойству параллельных прямых).
3) В $MKBO_2$:
$BO_2 = MO_2 = R$, $\angle M = \angle B = 90°$, т.е. $MKBO_2$ – квадрат.
4) Также, $AKMO_1$ – квадрат, т.е. $MK = KB = AK$, значит,

К равноудалена от А, М, В, т.е. К – центр окружности радиуса АК, где АК = $\frac{1}{2}$ АВ.

Имеем: М$\in$Окр (К; $\frac{1}{2}$ АВ). т.к. МК = АК = $\frac{1}{2}$ АВ,

прямые AO_1, BO_2, O_1O_2 – касательные к этой окружности.

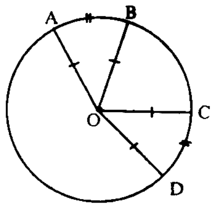
715.



Дано: Окр(О; R);
AA_1 – диаметр, BB_1 – хорда;
$AA_1 \perp BB_1$.
Доказать: $AB = AB_1 < 180°$.

Доказательство:
1) $BO = OB_1 = R$, следовательно, ΔB_1BO – равнобедренный из усл. $OA \perp BB_1$, значит $AB = AB_1$;
2) $AB + AB_1 = BB_1$ (или $2AB = BB_1$);
$BB_1 = 180°$ – наибольшее значение,
допустим, BB_1 – диаметр окружности , но это противоречит условию, значит, $BB_1 < 180°$,
т.е. $AB = BB_1 < 90° < 180°$.

716.

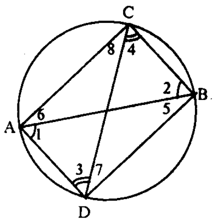


Дано: А, В, С, D$\in$Окр(О; R);
АВ = СВ.
Доказать: АВ = СВ

Доказательство:
1) По св-ву АВ = DC, следовательно, $\angle AOB = \angle DOC$.
2) В ΔAOB и ΔDOC: OC = AO = R, OD = OB = R,
$\angle AOB = \angle DOC$, значит,
$\Delta AOB = \Delta DOC$ (по двум сторонам и углу между ними),

значит, AB = CD, что и требовалось доказать.

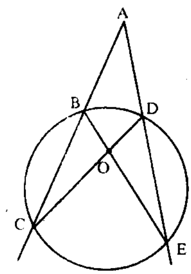
717.



Дано: AB – диаметр;
Окр(O; R);
AD||CB.
Доказать: CD – диаметр.

<u>Доказательство:</u>
1) AD||CB, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$ (накрест лежащие);
2) ΔACB, ΔABD – прямоугольные треугольники,
$\angle D = \angle C = 90°$, AB – общая, $\angle 1 = \angle 2$, т.е.
$\Delta ABC = \Delta ABD$ (по гипотенузе и углу), значит,
$\angle 8 = \angle 7 = 90° - \angle 4$, $\angle 6 = \angle 5$.
3) В ΔACD:
$\angle A + \angle D + \angle C = 180°$;
$\angle A + \angle 3 + 90° - \angle 3 = 180°$, т.е. $\angle A = 90°$
Имеем: $CD = 2\angle A = 180°$, значит,
CD – диаметр окружности, что и требовалось доказать.

719.



Дано: Окр(O; R);
AC, AE – секущие.
Доказать: $\angle CAE = \frac{1}{2}$ (CE – BD).

<u>Доказательство:</u>
1) В ΔACD: $\angle A = 180° - (\angle C + \angle D)$ (I);
2) $\angle D = 180° - \angle CDE$, $\angle CDE$ – вписанный, следовательно,
$\angle CDE = \frac{1}{2}CE$, т.е. $\angle D = 180° - \frac{1}{2}CE$ (1);

$\angle C$ – вписанный, следовательно, $\angle C = \frac{1}{2}BD$ (2).

Подставим в I формулу значения (1) и (2), имеем:

$\angle A = 180° - (180° - \frac{1}{2}CE + \frac{1}{2}BD) = 180° - 180° - \frac{1}{2}CE + \frac{1}{2}BD =$

$= \frac{1}{2}(CE - BD)$, что и требовалось доказать.

720.

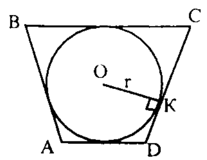
Вершина разностороннего треугольника не может лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне, т.к. каждая точка серединного перпендикуляра должна быть равноудалена от концов отрезка, к которому проведен этот перпендикуляр (по св-ву). А это условие не выполняется, т.к. AB≠AC≠BC.

721.

Необходимым условием вписать окружность в четырехугольник является равенство сумм длин противоположных сторон, значит квадрат – единственный прямоугольник, который удовлетворяет этому условию. Следовательно, прямоугольник,

описанный около окружности – квадрат.

722.



Дано: ABCD – четырехугольник, описанный около Окр(O; r);
AB:CD = 2:3; AD:BC = 2:1;
$S_{ABCD} = S$.
Найти: AB, BC, CD, AD – ?

<u>Решение</u>:

1) ABCD – описанный, следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}P_{ABCD} \cdot OK$, т.е.

$P_{ABCD} = \frac{2S_{ABCD}}{OK} = \frac{2S}{R}$

2) Также, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$

ABCD – описанный, следовательно,

$CD + AB = AD + BC = \frac{1}{2} P_{ABCD}$, т.е.

$$\begin{cases} CD + AB = \frac{S}{r} \\ AD + BC = \frac{S}{r} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x + 2x = \frac{S}{r} \\ y + 2y = \frac{S}{r} \end{cases};$$

x см – длина 1 части, y см – длина 1 части

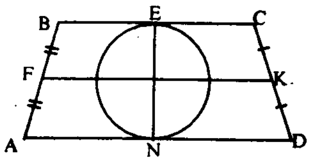
$$\begin{cases} 5x = \frac{S}{r} \\ 3y = \frac{S}{r} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{S}{r} \\ y = \frac{S}{r} \end{cases}.$$

Имеем:

$AB = 2 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{2S}{5r}$, $BC = 2 \cdot \frac{S}{3r} = \frac{2S}{3r}$, $CD = 3 \cdot \frac{S}{5r} = \frac{3S}{5r}$, $AD = \frac{S}{3r}$

Ответ: $\frac{2S}{5r}$; $\frac{3S}{5r}$; $\frac{2S}{3r}$; $\frac{S}{3r}$.

723.



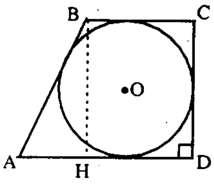
Дано: ABCD – трапеция;
BC, AD – касательные к Окр(O; R);
FK – средняя линия.
Доказать: $O \in FK$.

Доказательство:

1) BC – касательная, следовательно, $OE \perp BC$,
AD – касательная, следовательно, $ON \perp AD$;
$BC \| AD$ (из определения трапеции), значит,
FN – единственный перпендикуляр к BC и AD, проходящий через точку O.

2) FK – средняя линия трапеции, следовательно, $FK \| BC \| AD$ и $FK \cap EN = O$ и $EO = ON$ (т. Фалеса).

725.



Дано: ABCD – трапеция;
$\angle D = 90°$;
$BC = a$; $AD = b$;

CD = ?

Решение:

В ΔABH: $\angle H = 90°$, $AH = b - a$;

ABCD – описанный, следовательно, $AB + CD = AD + BC = a + b$, т.е. $AB + BH = a + b$.

Пусть $BH = x$, тогда $AB = (a + b) - x$

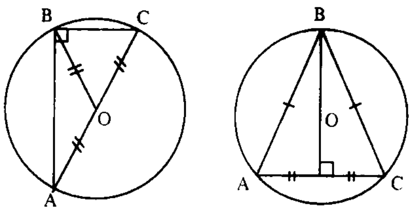
$BH^2 = AB^2 - AH^2$ (по т. Пифагора), т.е.

$x^2 = (a + b)^2 - 2x(a + b) + x^2 - (b - a)^2$

$x^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2x(a + b) + x^2 - b^2 + 2ab - a^2$

$2x(a + b) = 2ab$, $x = \dfrac{2ab}{2(a+b)} = \dfrac{ab}{(a+b)}$

726.



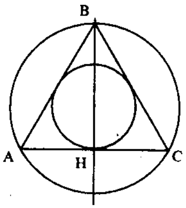
Дано: ΔABC – вписанный в Окр(O; R)
$O \in$ медиане
Доказать: ΔABC – равнобедренный или прямоугольный

Доказательство:

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам ΔABC. Т.к. $O \in$ медиане, значит медиана и серединный перпендикуляр совпадают, т.е. треугольник равносторонний или равнобедренный (одна из медиан является серединным перпендикуляром к основанию).

O – лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника BO = AO = OC.

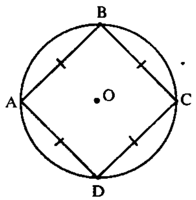
727.



Дано: ΔABC, AB = BC;
O_1 – центр вписанной окружности;
O_2 – центр описанной окружности;
$BH \perp AC$, AH = HC.
Доказать: O_1, $O_2 \in BH$.

Доказательство:
1) O_2 – центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, значит, $O_2 \in HB$, т.к. $HB \perp AC$.
2) O_1 – центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, значит, $O_1 \in HB$, HB – биссектриса (свойство высоты равнобедренного треугольника).
3) Имеем: $O_2 \in HB$ и $O_1 \in BH$.

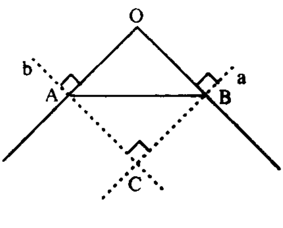
728.



Дано: ABCD – ромб вписанный.
Доказать: ABCD – квадрат.

Доказательство:
ABCD – вписанный, следовательно, $\angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180°$.
В ромбе $\angle D = \angle B$, $\angle C = \angle A$, то $\angle C = \angle B = \angle A = \angle D = 90°$, следовательно, ABCD – квадрат.

730.

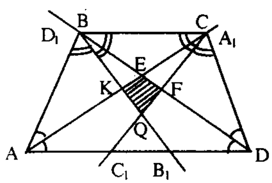


Дано: ΔAOB;
$a \perp b$, $b \perp OA$;

$a \cap b = C$.
Доказать: около ACBO можно описать окружность.

<u>Доказательство:</u>
1) $a \perp b$, $b \perp OA$, следовательно, $\angle AOC = \angle OBC = 90°$, т.е. $\angle OBC + \angle OAC = 180°$.
2) В четырехугольнике $\angle A + \angle B + \angle O + \angle C = 360°$;
$\angle C = \angle O = 180°$, а именно:
суммы противоположных углов равны по 180°, и около AOBC можно описать окружность.

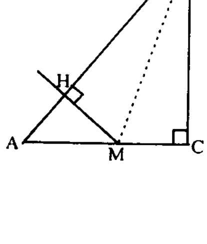
731.



Дано: ABCD – трапеция;
AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – биссектрисы.
Доказать: около KEFQ можно описать окружность.

<u>Доказательство:</u>
1) $\angle A + \angle B = 180°$ (как односторонние при BC||AD и секущей AB), следовательно, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90°$.
Из ΔABK: $\angle 1 + \angle 2\ (=90°) + \angle K = 180°$, где $\angle 2 = 90°$, т.е. $\angle K = 90°$.
2) Также, из $\Delta CFD \Rightarrow \angle F = 90°$.
3) Имеем: в четырехугольнике KEFQ
$\angle F + \angle K = 90° + 90° = 180°$, т.е.
$\angle E + \angle Q = 180°$, значит, около KEFQ можно описать окружность.

732.



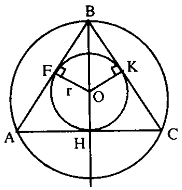
Дано: ΔABC, $M \in AC$;
$MH \perp AB$.
Доказать: $\angle MHC = \angle MBC$.

Доказательство:
В четырехугольнике HBCM
$\angle C = \angle H = 90°$, т.е. $\angle C + \angle H = 180°$, тогда
$\angle M + \angle B = 180°$, значит около HBCM можно описать окружность.

$\angle MHC$ – вписанный, следовательно, $\angle MBC = \frac{1}{2}$ HC, значит,

$\angle MHC = \angle MBC$, что и требовалось доказать.

733.



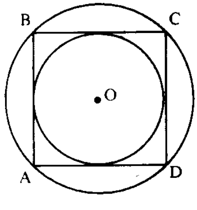
Дано: ΔABC;
$AB = BC = AC$;
$R = 10$см;
$r = ?$

Решение:
1 ΔABC – равносторонний, следовательно, центры окружностей совпадают.
2) $HB \perp AC$, следовательно,
BH – биссектриса (свойство равностороннего треугольника).
Т.е. в ΔFBO: $\angle F = 90°$, $\angle B = 30°$, $BO = 10$см, значит,

OF лежит против $\angle R = 30°$, т.е., $FO = \frac{1}{2} BO = 5$см.

Ответ: 5см.

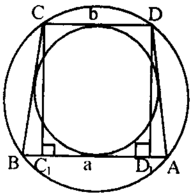
734.



Дано: ABCD – параллелограмм, вписанный и описанный.
Доказать: ABCD – квадрат.

Доказательство:
1) ABCD – вписанный, следовательно, $\angle C+\angle A=180°$, $\angle D+\angle B=90°$, т.е. ABCD – квадрат.
2) ABCD – описанный, следовательно, CD + AB = AD + BC
В параллелограмме BC = AD, AB = CD, значит,
AB = BC = CB = AD, т.е., ABCD – ромб, но
$\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$, значит этот ромб – квадрат.
Четырехугольник вписанный и описанный одновременно – квадрат.

735.

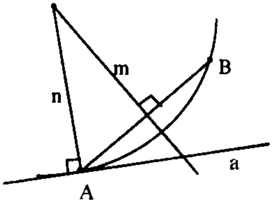


Дано: ABCD – трапеция вписанная и описанная;
AB = a, CD = b;
r = ?

Решение:
1) ABCD – трапеция вписанная в окружность, следовательно, ABCD – равнобедренная трапеция и BC = AD;
2) ABCD – трапеция, описанная около окружности, значит,
AD + BC = CD + AB = b + a, BC = DA = $\frac{a+b}{2}$, $BC_1 = \frac{a-b}{2}$
3) ΔBCC_1: $\angle C_1 = 90°$; по т. Пифагора $\Rightarrow$
$CC_1^{\,2} = BC_2 - BC_1^{\,2}$, т.е. $CC_1^{\,2} = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{4ab}{4}$ = ab, имеем: $CC_1 = \sqrt{ab}$.
Но $r = \frac{1}{2}CC_1$, значит, $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{ab}}{2}$

736.

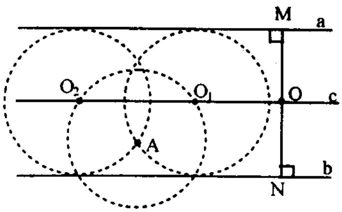


Дано: $A \in a$, $B \notin a$.
Построить окружность такую, чтобы $B \in$ Окр,

a – касалась окружности в точке A.

Построение:
AB.
Строим серединный перпендикуляр m к AB.
Из точки A строим перпендикуляр n к прямой a
$n \cap m = O$ – центр искомой окружности.

737.



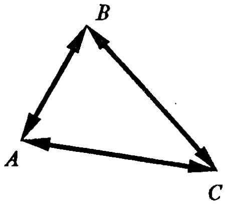
Дано: a||b, $A \notin a$, $A \notin b$.
Построить окружность, такую, чтобы
$A \in$ Окр.
a, b – касательные к Окр.

Построение:
1) a и b — касательные к одной окружности, a||b, значит, они проходят через концы диаметра.
r = ?
а) восстановим перпендикуляр из $M \in a$ к прямой b;
б) построим серединный перпендикуляр к MN;
с) $\cap MN = O$, ON = MO = R;
в) проведем окружность с центром в точке A и радиусом R;
г) окружность пересекает прямую в двух точках O_2 и O_1,
O_2 и O_1 – есть центры искомых окружностей.

Глава IX. Векторы

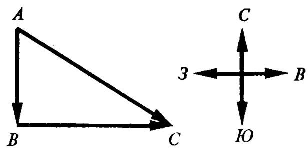
§ 1. Понятие вектора

738.



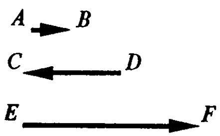
$\overline{BA}$, начало – т. B, конец – т. A.
$\overline{CA}$, начало – т. C, конец – т. A.
$\overline{AB}$, начало – т. A, конец – т. B.
$\overline{BC}$, начало – т. B, конец – т. C.
$\overline{AC}$, начало – т. A, конец – т. C.
$\overline{CB}$, начало – т. C, конец – т. B.

739.



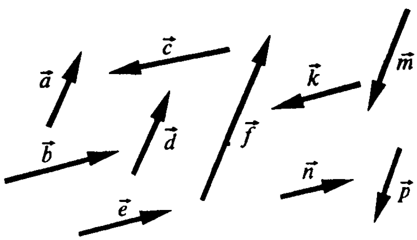
Масштаб: в 1 см 100 км, т.е. 1: 10000000.

740.



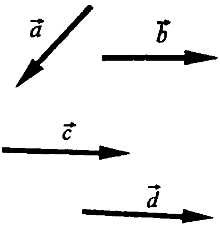
а) $|\overline{AB}| = 1$ см, $|\overline{DC}| = 2{,}5$ см, $|\overline{EF}| = 4{,}5$ см;
б) $|\overline{AB}| = 3$ см, $|\overline{EF}| = 1$ см, $|\overline{CD}| = 1{,}5$ см.

741.



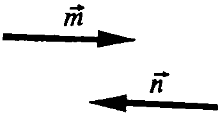
а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{d}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{l}$;
б) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{e}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{h}$;
в) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{k}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$;
г) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{g}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{m}$.

742.



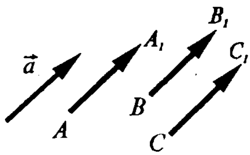
а) $|\vec a| = |\vec b| = 3$ см;
$\vec a$ и $\vec b$ – неколлинеарны.

б) $\vec c \uparrow\uparrow \vec d$, $|\vec c| = |\vec d| = 3{,}5$ см. $\vec c = \vec d$.
Векторы равны, т.к. их длины равны и они сопоставимы



в) $\vec m \uparrow\downarrow \vec n$, $|\vec m| = |\vec n| = 3$ см.

743.

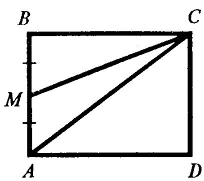


$\overline{AA_1} = \vec a$, т.к. $|\overline{AA_1}| = |\vec a|$ и $\overline{AA_1} \uparrow\uparrow \vec a$.
$\overline{BB_1} = \vec a$, т.к. $|\overline{BB_1}| = |\vec a|$ и $\overline{BB_1} \uparrow\uparrow \vec a$.
$\overline{CC_1} = \vec a$, т.к. $|\overline{CC_1}| = |\vec a|$ и $\overline{CC_1} \uparrow\uparrow \vec a$.

744.

Векторные величины – скорость и сила, т.к. для них необходимо знать не только числовое значение, но и направление.

745.



Дано: ABCD – прямоугольник,
AB = 3 см, BC = 4 см,
M – середина AB.
Найти: $|\overline{AB}|$, $|\overline{BC}|$, $|\overline{DC}|$,
$|\overline{MC}|$, $|\overline{MA}|$, $|\overline{CB}|$, $|\overline{AC}|$ – ?

Решение:
1) в прямоугольнике противоположные стороны равны, значит, CD = 3 см, AD = 4см. Из ΔACD:

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ (см^2) (т. Пифагора),

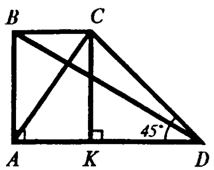
M – середина AB, следовательно, $MB = MA = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (см).

В ΔBCM $\angle B = 90°$ по т. Пифагора:

$MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{18{,}25}$ (см).

2) Длиной вектора называется длина отрезка, соединяющая начало вектора и конец, имеем: $|\overline{AB}| = 3$ см, $|\overline{BC}| = 4$ см, $|\overline{DC}| = 3$см, $|\overline{CB}| = 4$ см, $|\overline{MA}| = 1{,}5$ см, $|\overline{MC}| = \sqrt{18{,}25}$ см, $|\overline{AC}| = 5$ см.

746.



Дано:

$\angle D = 45$, $\angle A = 90°$,

$D = 12$ см, $AB = 5$ см.

$|\overline{BD}|, |\overline{CD}|, |\overline{AC}| = ?$

Решение:

1) В ΔABD ($\angle A = 90°$);

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ (т. Пифагора);

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ (см) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{BD} = 13$ см.

2) Построим $CK \perp AD$. ABCK – прямоугольник, значит,

$AK = BC$, $AB = CK = 5$ см.

3) В ΔCKD: $\angle K = 90°$, $\angle D = 45°$, значит, $\angle KCD = 180° - 90° - 45° =$

$= 45°$,

ΔCKD – равнобедренный, т.е. $CK = KD = 5$ см.

В ΔCKD: ($\angle K = 90°$) по т. Пифагора:

$CD^2 = CK^2 + KD^2$, значит,

$CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$ (см) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{CD} = 5\sqrt{2}$ см.

4) $CK = AB = 5$ см и $BC = AK$, $KD = 5$см, т.е.

$AK = AD - KD = 12 - 5 = 7$ (см); $BC = 7$ см.

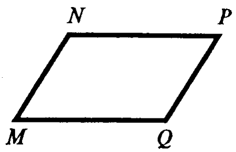
В ΔABC по т. Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, значит,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$ (см) $\Rightarrow$

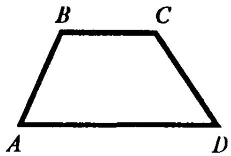
$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{74}$ см.

747.



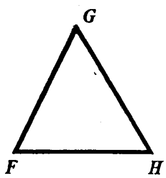
а) MNPQ – параллелограмм.

Коллинеарные векторы: $\overline{NP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{PN}$, $\overline{QM}$;
где: $\overline{NP}\uparrow\uparrow\overline{MQ}$ и $\overline{NP}\uparrow\downarrow\overline{PN}$, $\overline{NP}\uparrow\downarrow\overline{QM}$,
$\overline{PN}\uparrow\uparrow\overline{QM}$ и $\overline{PN}\uparrow\downarrow\overline{NP}$, $\overline{PN}\uparrow\downarrow\overline{MQ}$.
Коллинеарные векторы: $\overline{MN}$, $\overline{NM}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{QP}$,
причем: $\overline{MN}\uparrow\uparrow\overline{QP}$ и $\overline{MN}\uparrow\downarrow\overline{NM}$, $\overline{MN}\uparrow\downarrow\overline{PQ}$
$\overline{PQ}\uparrow\uparrow\overline{NM}$ и $\overline{PQ}\uparrow\downarrow\overline{MN}$, $\overline{PQ}\uparrow\downarrow\overline{QP}$.



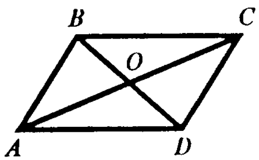
б) ABCD – трапеция.

Коллинеарные векторы: $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$,
причем: $\overline{BC}\uparrow\uparrow\overline{DA}$ и $\overline{BC}\uparrow\downarrow\overline{DA}$, $\overline{BC}\uparrow\downarrow\overline{CB}$
$\overline{DA}\uparrow\uparrow\overline{CB}$ и $\overline{DA}\uparrow\downarrow\overline{BC}$, $\overline{DA}\uparrow\downarrow\overline{AD}$.



в)
Коллинеарные векторы:
$\overline{FG}\uparrow\downarrow\overline{GF}$,
$\overline{GH}\uparrow\downarrow\overline{HG}$,
$\overline{FH}\uparrow\downarrow\overline{HF}$.

748.

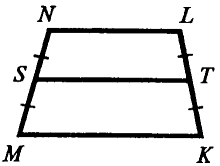


а) т.к. $|\overline{DC}|=|\overline{AB}|$, $\overline{AB} = \overline{DC}$,
(AB = DC – противолежащие стороны параллелограмма); AB||DC, т.е.
$\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{DC}$
б) $\overline{BC}\uparrow\downarrow\overline{DA} \Rightarrow \overline{BC}\neq\overline{DA}$,
в) $\overline{AO} = \overline{OC}$, $(|\overline{AO}| = |\overline{OC}|)$.

Т.к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то AO = $\frac{1}{2}$AC и OC = $\frac{1}{2}$AC, т.е. $\overline{OC}\uparrow\uparrow\overline{AO}$.

г) $\overline{AC} \neq \overline{BD}$, т.к. эти векторы не являются сонаправленными.

749.



Дано:

MN = LK, S – середина MN,
T – середина LK.

$\overline{NL} \neq \overline{KL}$, (эти векторы не сонаправленные).
$\overline{MS} = \overline{SN}$, ($|\overline{MS}| = |\overline{SN}|$) и $\overline{MS}\uparrow\uparrow\overline{SN}$,
MN ≠ KL, (эти векторы не являются сонаправленными).
$|\overline{MK}| \neq |\overline{TS}|$, следовательно, $|\overline{TS}| \neq \overline{KM}$. В MNLK TS – средняя линия, значит,

$$TS = \frac{NL + MK}{2}$$, т.к. NL ≠ MK, то и TS ≠ MK

$\overline{TL} = \overline{KT}$, т.к. $\overline{KT}\uparrow\uparrow\overline{TL}$ и $|\overline{TL}| = |\overline{KT}|$ (т.к. T – середина KL, т.е. TL = KT).

750.

1) Дано: $\overline{AB} = \overline{CD}$
Доказать: середины AD и BC совпадают.
<u>Доказательство:</u>
$\overline{AB} = \overline{CD}$, поэтому и $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$,
т.е. AB||CD и AB = CD.
ABCD: AB||CD и AB = CD, следовательно, ABCD – параллелограмм (по I признаку), диагонали в параллелограмме пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е. середины AD и BC совпадают.
2) Дано: середины отрезков AD и DB совпадают.
Доказать: $\overline{AB} = \overline{CD}$.
<u>Доказательство:</u>
Четырехугольник ABCD: диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т.е.

ABCD – параллелограмм (по III признаку). В параллелограмме противолежащие стороны параллельны и равны, т.е. AB||CD и CD = AB и $\overline{CD}\uparrow\uparrow\overline{AB}$, $|\overline{CD}| = |\overline{AB}|$, следовательно, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

751.

а) $\overline{AB} = \overline{DC}$ и $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ (по усл.).
Определить: вид четырехугольника ABCD.
1) $\overline{DC} = \overline{AB}$, т.е. $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{DC}$, значит, AB||DC, $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, то DC = AB.
В ABCD противолежащие стороны параллельны и равны, т.е. ABCD – параллелограмм (по I признаку).
2) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, т.е. BC = AB, значит смежные стороны равны и все стороны параллелограмма ABCD равны, значит, ABCD – ромб.
б) Дано: $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{DC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны.
Определить: вид четырехугольника ABCD.
$\overline{DC}\uparrow\uparrow\overline{AB}$, т.е. AB||DC и $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны $\Rightarrow$ AD не параллельна BC.
Т.е. в четырехугольнике ABCD две стороны параллельны, а две другие не параллельны, следовательно, ABCD – трапеция.

752.

а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Верно.
б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Верно.
в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, т.е. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ – не может быть.

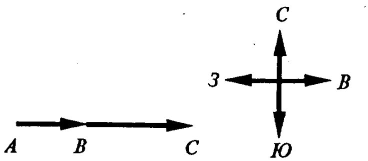
Не верно.
г) если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то не обязательно $\vec{a} = \vec{b}$ (может быть и $\vec{a} \neq \vec{b}$)

Не верно.
д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ($\vec{0}$ сонаправлен с любым вектором).

Верно.

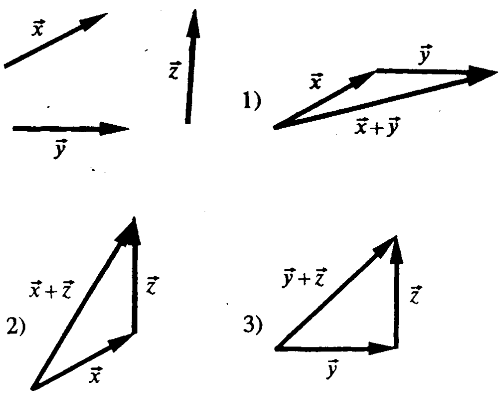
§ 2. Сложение и вычитание векторов

753.

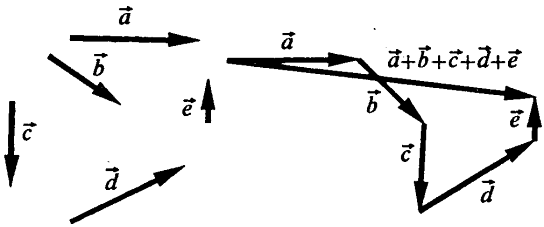


Масштаб: т.е. 1:1 000 000. (в 1 см 10 км); $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

754.

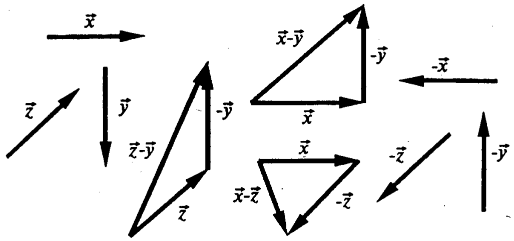


755.

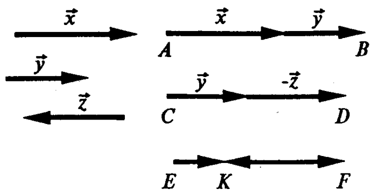


$\overline{AB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{e} + \vec{d}$,

756.



757.



$\overline{CD} = \vec{y} - \vec{z}$;

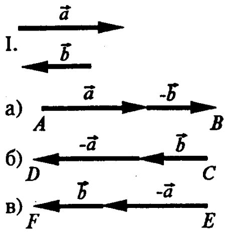
$\overline{AB} = \vec{x} + \vec{y}$;

$\overline{EF} = \vec{x}$, $\overline{FK} = \vec{z}$;

$\overline{EF} + \overline{FK} = \vec{x} + \vec{z}$;

$\overline{EK} = \vec{x} + \vec{z}$.

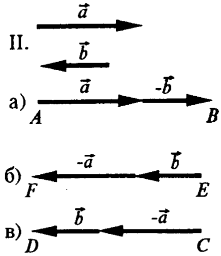
758.



а) $AB = \vec{a} - \vec{b}$;

б) $CD = \vec{b} - \vec{a}$;

в) $EF = -\vec{a} + \vec{b}$.



а) $AB = \vec{a} - \vec{b}$;

б) $EF = \vec{b} - \vec{a}$;

в) $CD = -\vec{a} + \vec{b}$.

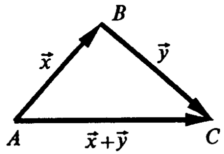
759.

По правилу треугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$;

а) $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MQ}$ и $\overline{MP} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$, тогда, $\overline{MN} + \overline{NQ} = \overline{MP} + \overline{PQ}$;

б) $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}$ и $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{MP}$, тогда, $\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MQ} + \overline{QP}$.

760.



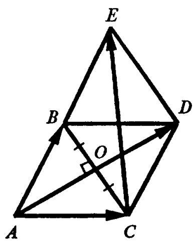
1) Если A, B, C не лежат на одной прямой, то векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{x} + \vec{y}$ образуют ΔABC. По неравенству треугольника AC<AC + BC, т.е. $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

2) Если A, B, C лежат на одной прямой, то векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, но это не так по условию.

761.

По правилу многоугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{AA}$, но $\overline{AA} = \vec{0}$ из определения.

762.



Дано: ΔABC – равносторонний со стороной a.

а) $|\overline{AB} + \overline{BC}| = ?$

б) $|\overline{AB} + \overline{AC}| = ?$

в) $|\overline{AB} + \overline{CB}| = ?$

г) $|\overline{BA} - \overline{BC}| = ?$

д) $|\overline{AB} - \overline{AC}| = ?$

<u>Решение:</u>

а) $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC} = a$.

б) Построим CD||AB и BD||AC. Тогда ABCD – параллелограмм (по определению) и смежные стороны AB = AC = a, следовательно, ABCD – ромб.

По правилу параллелограмма имеем: $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$, значит, $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = AD$, AD – диагональ ромба, следовательно,

AD = 2AO, AO$\perp$BC и O – середина BC. Рассмотрим ΔAOC:
($\angle$O = 90°) по т. Пифагора:

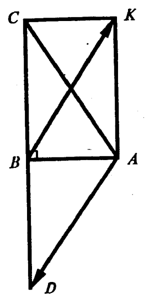
$$AO^2 = AC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$, следовательно,

$$AO = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad AD = 2\cdot AO = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

в) Построим DE||BC и DE = BC. Тогда $\overline{DE} = \overline{CB}$ и $\overline{CD} = \overline{AB}$ (как противолежащие стороны параллелограмма). Значит,
$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{CE}$, CDEB – ромб по построению со стороной a и CDEB = ABDC,тогда, диагональ CE = AD = a$\sqrt{3}$.
г) по правилу треугольника имеем: $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$, т.е.
$\overline{BA} - \overline{BC} = -\overline{AC}$, тогда $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CA}$, $|\overline{BA} - \overline{BC}| = |\overline{CA}|$ = CA =a.
д) по правилу треугольника имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, следовательно,
$\overline{AB} - \overline{AC} = -\overline{BC}$, тогда $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$, $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}|$ = CB =a.

Ответ: a, a$\sqrt{3}$, a$\sqrt{3}$, a, a.

763.



Дано: $\angle$B = 90°,
AB = 6, BC = 8.
а) $|\overline{BA}| - |\overline{BC}|$ и $|\overline{BA} - \overline{BC}|$ = ?
б) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ и $|\overline{AB} + \overline{BC}|$ = ?
в) $|\overline{BA}| + |\overline{BC}|$ и $|\overline{BA} + \overline{BC}|$ = ?
г) $|\overline{AB}| - |\overline{BC}|$ и $|\overline{AB} - \overline{BC}|$ = ?

Решение:
а) $|\overline{BA}| - |\overline{BC}|$ = BA – BC = 6 – 8 = – 2. $|\overline{BA} - \overline{BC}| = \overline{CA}$ = CA.
По т. Пифагора: $AC^2 = BA^2 + BC^2$, значит,
AC = $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$ = 10, значит, $|\overline{BA} - \overline{BC}|$ = 10.
б) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ = 6 + 8 = 14, $|\overline{AB} + \overline{BC}| = \overline{AC}$ = AC = 10.
в) $|\overline{BA}| + |\overline{BC}|$ = 6 + 8 = 14.
Построим AK||BC и AK = BC. Значит, ACKB – параллелограмм

и $\angle CBA = \angle BAK = 90°$, следовательно, ACKB – прямоугольник.
$\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{BK}$, $|\overline{BA} + \overline{BC}| = \overline{BK} = BK$.
($\angle A = 90°$) по т. Пифагора: $AK^2 + AB^2 = BK^2$, значит,
$BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, тогда $|\overline{BA} + \overline{BC}| = 10$.
г) $|\overline{AB}| - |\overline{BC}| = 6 - 8 = -2$.
Построим BD = BC и C, B, D лежат на одной прямой, следовательно,
$\overline{CB} = \overline{BD}$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$.
По т. Пифагора:
$AD^2 = AB^2 + BD^2$, значит,
$AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, значит, $|\overline{AB} - \overline{BC}| = 10$.

764.

Учитывая, что $\overline{AB} = -\overline{BA}$, имеем:
а) $(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{MC}) + (\overline{MD} - \overline{KD}) =$
$= (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CM}) + (\overline{MD} + \overline{DK}) = \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}$.
б) $(\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BD}) - (\overline{MK} + \overline{KD}) =$
$= (\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BD}) - (\overline{MD}) = \overline{AD} - \overline{MD} = \overline{AD} + \overline{DM} = \overline{AM}$.

765.

По правилу треугольника: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, имеем:
$\vec{p} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0}$;
$\vec{q} = (\overline{XY} - \overline{XZ}) + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{ZX} + \overline{YZ} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{XX} = \vec{0}$;
$\vec{r} = (\overline{ZY} - \overline{XY}) - \overline{ZX} = \overline{ZY} + \overline{YX} + \overline{XZ} = \overline{ZX} + \overline{XZ} = \overline{ZZ} = \vec{0}$.

766.

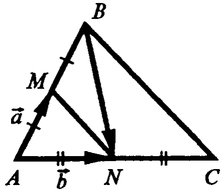
$\overline{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$.

767.

Решение задачи приведено в учебнике.

768.

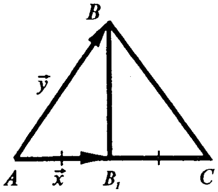
Дано: M – середина AB,



N – середина AC,
$\overline{AM} = \vec{a}$, $\overline{AN} = \vec{b}$;
$\overline{BM}$, $\overline{NC}$, $\overline{MN}$, $\overline{BN}$ = ?

Решение:
$\overline{BM} = -\vec{a}$, т.к. $|\overline{BM}| = |\vec{a}|$, (M – середина AB) и $\overline{BM} \uparrow\downarrow \vec{a}$.
$\overline{NC} = \vec{b}$, т.к. $|\overline{NC}| = |\vec{b}|$, (N – середина AC) и $\overline{NC} \uparrow\uparrow \vec{b}$.
$\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}$, тогда
$\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \vec{b} - \vec{a}$;
$\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{AN} = -\vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}$.

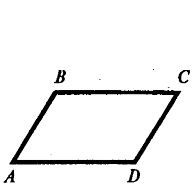
769.



Дано: BB_1 – медиана,
$\overline{AB_1} = \vec{x}$, $\overline{AB} = \vec{y}$;
$\overline{B_1C}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ = ?

Решение:
$\overline{B_1C} = \vec{x}$, т.к. $|\overline{B_1C}| = |\vec{x}|$, ($B_1$ – середина AC) и $\overline{B_1C} \uparrow\uparrow \vec{x}$;
$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{AB_1} = -\overline{AB} + \overline{AB_1} = -\vec{y} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y}$;
$\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{y}$, $|\overline{BA}| = |\vec{y}|$ и $\overline{BA} \uparrow\downarrow \vec{y}$;
$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1C} = -\vec{y} + \vec{x} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{x}$.

770.

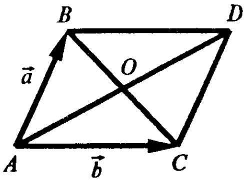


Выразить: $\overline{AC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

б) $\vec{a} = \overline{CB}$, $\vec{b} = \overline{CD}$, CB||AD и CB = AD, $\overline{CB} \uparrow\downarrow \overline{AD}$,
следовательно, $\overline{AD} = -\overline{CB}$, $\overline{DC} = -\overline{CD}$, значит:
$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = -\overline{CB} + (-\overline{CD}) = -\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$.
в) $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{DA}$, DA||BC и DA = BC, $\overline{DA} \uparrow\downarrow \overline{BC}$, тогда
$\overline{BC} = -\overline{DA}$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + (-\overline{DA}) = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$.

771.



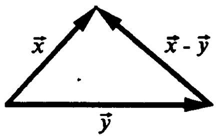
Дано:
$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AD} = \vec{b}$.
Выразить: $\overline{DC} + \overline{CB}$, $\overline{BO} + \overline{OC}$,
$\overline{BO} - \overline{OC}$, $\overline{BA} - \overline{DA}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:
$\overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \vec{a} - \vec{b}$.
$\overline{BO} - \overline{OC} = \overline{BC} = \vec{b}$, (из $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ и $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{AD}$).
$\overline{BO} - \overline{OC} = \overline{BO} + \overline{CO} = \overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{a}$
($\overline{CO} = \overline{OA}$ и тогда $\overline{CO} \uparrow\uparrow \overline{OA}$ и $|\overline{CO}| = |\overline{OA}|$).
$\overline{BA} - \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD} =$
$= -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$.

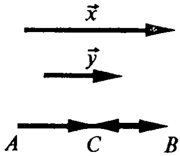
772.

Дано: ABCD – параллелограмм,
X – произвольная точка плоскости.
Доказать: $\overline{XA} + \overline{XC} = \overline{XB} + \overline{XD}$.
Доказательство:
$\overline{XB} = \overline{XA} + \overline{AB}$ – правило треугольника.
$\overline{XC} = \overline{XD} + \overline{DC}$ – правило треугольника.
Имеем:
$\overline{XA} + \overline{XC} = \overline{XB} + \overline{XD}$,
$\overline{XA} + \overline{XD} + \overline{DC} = \overline{XA} + \overline{AB} + \overline{XD}$.
Сравнивая левую и правую части уравнения, имеем:
$\overline{DC} = \overline{AB}$, и это верно.
Из $\overline{DC} \uparrow\uparrow \overline{AB}$ и $|\overline{DC}| = |\overline{AB}|$ (т.к. ABCD –параллелограмм), ч.т.д.

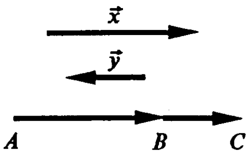
773.



Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны, то по неравенству треугольника имеем:
$|\vec{x}-\vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, т.к. $|\vec{x}-\vec{y}|$, $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ стороны треугольника.



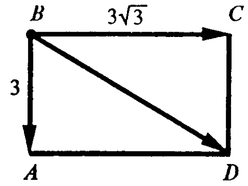
Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны и $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и AC = AB – BC.
$\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{BC} = \vec{y}$, $\overline{AC} = \vec{x} - \vec{y}$, то
$|\vec{x}-\vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны и $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$, то точки A, B, C лежат на одной прямой и $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{AB} = \vec{x}$,
$\overline{BC} = -\vec{y}$, $\overline{AC} = \vec{x}-\vec{y}$, т.е. $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

774.

Пусть парашютист находится в точке B. Равнодействующая силы тяжести ($\overline{AB}$) и силы ветра ($\overline{BC}$) есть $\overline{BD}$, и ABCD – прямоугольник, AB – вертикаль, следовательно, $\angle ABD$ = ?



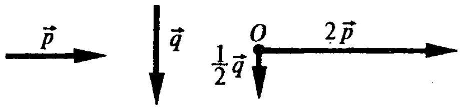
$\overline{BC} = \overline{AD}$ и DC = AD (ABCD – прямоугольник).
($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора:
$BD^2 = AD^2 + AB^2$, значит

$$BD=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6.$$

Т.к. $AB = \frac{1}{2}BD$, то по свойству прямоугольного треугольника имеем: $\angle ADB = 30°$. А значит, ABC катет AB = 3 в 2 раза меньше гипотенузы BD = 6, значит, $\angle ABD = 90° - \angle ADB = 60°$.
Ответ: 60°.

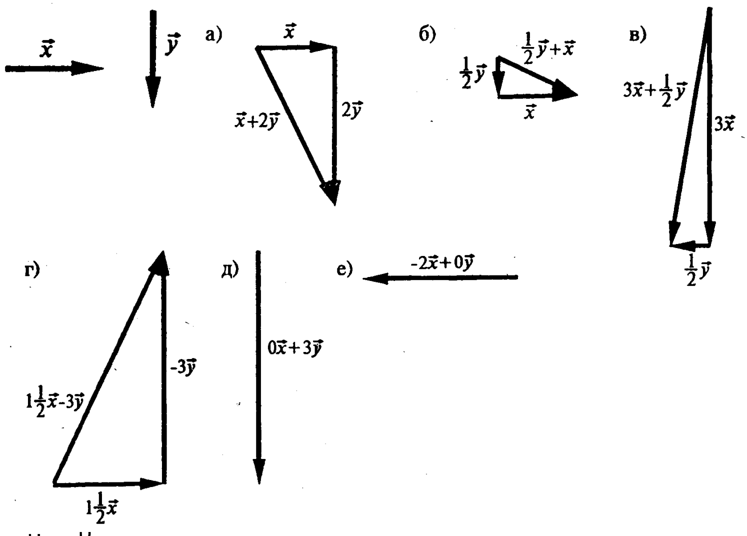
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

775.

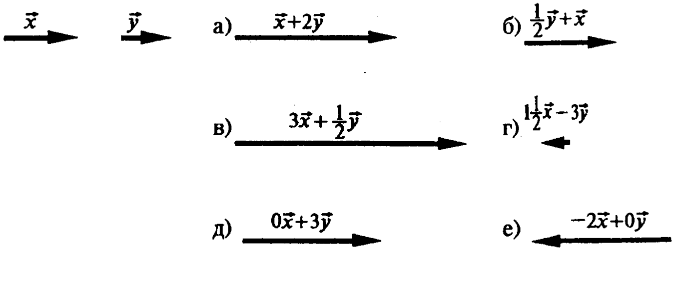


776.

I. $\vec{y}$ и $\vec{x}$ неколлинеарны.



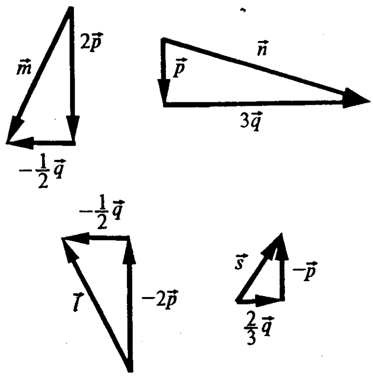
II. $\vec{y}$ и $\vec{x}$ коллинеарны.



777.

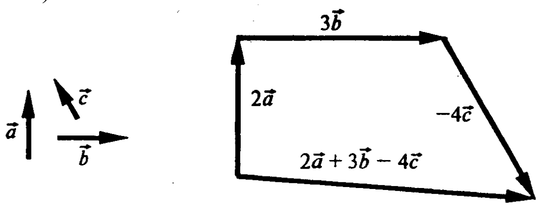
Построить: $\vec m = 2\vec p - \frac{1}{2}\vec q$,

$\vec n = \vec p + 3\vec q$, $\vec l = -2\vec p - \frac{1}{2}\vec q$, $\vec s = \frac{2}{3}\vec q - \vec p$.

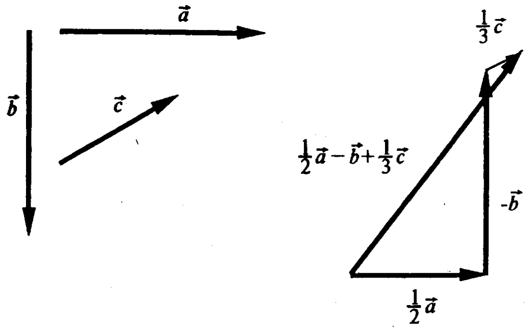


778.

Случай а).



Случай б).



779.

Дано: $\vec{p} = 3\vec{a}$.

<u>Решение:</u>

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{p}$, $-\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{a}\uparrow 3\vec{a}$, $-2\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{p}$, $6\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{p}$.

$||\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$, $|-\vec{a}| = \frac{1}{3}|\vec{p}|$, $|\frac{1}{2}\vec{a}| = \frac{1}{6}|\vec{p}|$, $||-2\vec{a}| = \frac{2}{3}|\vec{p}|$, $|6\vec{a}| = 2|\vec{p}|$.

780.

<u>Решение:</u>

а) $\left|\overline{1\cdot a}\right| = |1|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|$, $1>0$, значит, $\overline{1\cdot a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, т.е. $\overline{1\cdot a} = \vec{a}$.

б) $\left|-\overline{1\cdot a}\right| = |-1|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|$, $-1<0$, значит, $-\overline{1\cdot a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, т.е. $-\overline{1\cdot a} = -\vec{a}$.

781.

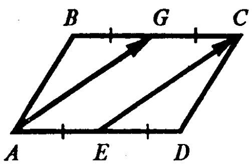
Дано: $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$.

а) $2\vec{x} - 2\vec{y} = 2\cdot(\vec{m}+\vec{n}) - 2\cdot(\vec{m}-\vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} - 2\vec{m} + 2\vec{n} = 4\vec{n}$.

б) $2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} = 2\cdot(\vec{m}+\vec{n}) + \frac{1}{2}\cdot(\vec{m}-\vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} =$
$= 2{,}5\vec{m} + 1{,}5\vec{n}$.

в) $-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = -(\vec{m}+\vec{n}) - \frac{1}{3}(\vec{m}-\vec{n}) = -\vec{m} - \vec{n} - \frac{1}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{n} =$
$= -1\frac{1}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$.

782.



Дано:
$BG = GC$, $AE = ED$,
$\overline{DC} = \vec{a}$, $\overline{CB} = \vec{b}$

Выразить: $\overline{EC}$ и $\overline{AG}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Решение:</u>

$BC = AD$ (т.к. $ABCD$ – параллелограмм).

Тогда $AE = ED = BG = GC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$.

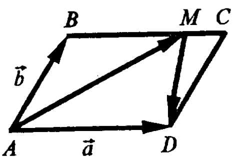
$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC} + \overline{DC} = -\frac{1}{2}\,\overline{CB} + \overline{DC} = -\frac{1}{2}\,\vec{b} + \vec{a} =$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\,\vec{b}$

$AB \| CD$ и $AB = CD$, следовательно, $\overline{AB} = \overline{DC}$.

$\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = \overline{DC} + \frac{1}{2}\,\overline{BC} = \overline{DC} - \frac{1}{2}\,\overline{CB} = \vec{a} - \frac{1}{2}\,\vec{b}$.

783.



Дано:
$BM:MC = 3:1$,
$\vec{a} = \overline{AD}$, $\vec{b} = \overline{AB}$.
Выразить: $\overline{AM}$ и $\overline{MD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Решение:</u>

1) $BM:MC = 3:1$, следовательно, $\overline{BM} = \frac{3}{4}\,\overline{BC}$.

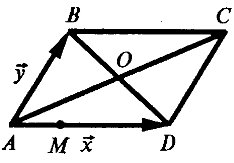
$ABCD$ – параллелограмм, значит, $AB \| BC$, $AD = BC$, значит, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{3}{4}\,\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{3}{4}\,\overline{AD} = \vec{b} + \frac{3}{4}\,\vec{a} = \frac{3}{4}\,\vec{a} + \vec{b}$.

$\overline{AM} + \overline{MD} = \overline{AD}$, следовательно, $\overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \vec{a} - (\frac{3}{4}\,\vec{a} +$

$+\vec{b}) = \vec{a} - \frac{3}{4}\,\vec{a} - \vec{b} = = \frac{1}{4}\,\vec{a} - \vec{b}$.

784.



Дано:
$AM = \frac{1}{2}MD$, $\vec{x} = \overline{AD}$, $\vec{y} = \overline{AB}$.
$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $BO = OD$,
$AO = OC$ – так как $ABCD$ – параллелограмм

а) $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \vec{x} + \vec{y}$,

$\overline{AO} = \frac{1}{2}\,\overline{AC} = \frac{1}{2}\,(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{2}\,\vec{x} + \frac{1}{2}\,\vec{y}$,

$\overline{CO} = \frac{1}{2}\overline{CA} = -\frac{1}{2}\overline{AC} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$,

$\overline{DB} = \vec{y} - \vec{x}, \overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$,

$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{AD} = 2\overline{AD} = \vec{x}$,

$\overline{AD} + \overline{CO} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$,

$\overline{CO} + \overline{OA} = -\overline{AC} = -(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}$;

б) AM = $\frac{1}{2}$MD, значит, $\frac{1}{3}\overline{AD}$ и $\overline{MD} = \frac{2}{3}\overline{AD}$;

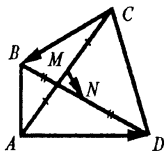
$\overline{MC} = \overline{MD} + \overline{DC} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$,

$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = -\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD} = -\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$,

$\overline{OM} = \overline{AO} + \overline{AM} = -\overline{AO} + \overline{AM} = -(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}) + \frac{1}{3}\vec{x} =$

$= -\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

785.



Дано:
AM = MC, BN = ND.

Доказать: $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

<u>Доказательство:</u>

AM = MC, BN = ND, значит,

$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}) +$

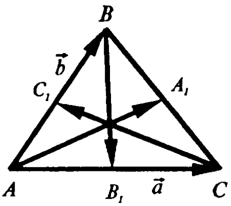
$+ \overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{CD} + \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{CB}) =$

$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{DC} +$

$+ \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{DC} - \overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

Следовательно, $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

786.



Дано: AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, $\vec{a} = \overline{AC}$, $\vec{b} = \overline{AB}$.
Выразить: $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:
Из AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, следует $BA_1 = A_1C$, $B_1C = AB_1$, $AC_1 = C_1B$.

$$\overline{BB_1} = \overline{BA} + \overline{AB_1} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}.$$

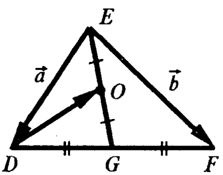
$$\overline{CC_1} = \overline{CA} + \overline{AC_1} = -\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$, значит,

$$\overline{BC} + \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{AC} + \overline{BA} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

787.



Дано: $DG = GF$, $OE = OG$, $\vec{a} = \overline{ED}$, $\vec{b} = \overline{EF}$.
Выразить: $\overline{DO}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\overline{ED} + \overline{DF} = \overline{EF}$, значит, $\vec{a} + \overline{DF} = \vec{b}$, или $\overline{DF} = \vec{b} - \vec{a}$.
$DG = GF$, то

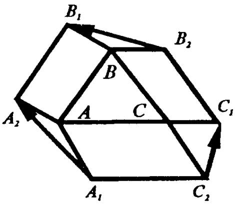
$$\overline{EG} = \overline{ED} + \overline{DG} = \overline{ED} + \frac{1}{2}\overline{DF} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$\overline{ED} + \overline{DO} = \overline{EO}$. Т.к. $OE = OG$, то

$\overline{ED} = \vec{a}$ и $\overline{EG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, имеем: $\overline{DO} = \overline{EO} - \overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{EG} -$

$$-\overline{ED} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

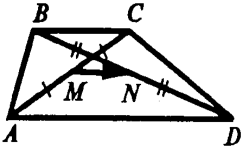
789.



Дано: ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 – параллелограммы.
Доказать: существует треугольник, стороны которого параллельны и равны соответственно A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

<u>Доказательство:</u>
$\overline{AA_1} = \overline{C_2C}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{CC_1} = \overline{BB_2}$, т.к. это стороны параллелограммов.
Докажем, что $\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$;
$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A} + \overline{AA_2} = \overline{C_2C} + \overline{BB_1} = \overline{C_2C_1} + \overline{C_1C} + \overline{BB_2} +$
$+ \overline{B_2B_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1} + \overline{BB_2} - \overline{CC_1} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$.
$\overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_1} + \overline{C_2C_1}$, значит, можно построить треугольник со сторонами, параллельными и равными соответственно сторонам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ч.т.д.

790.



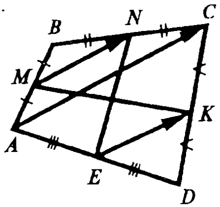
Дано: $AM = CM$; $BN = DN$.
Доказать: $MN \| AD$,
$MN \| BC$, $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$.

<u>Доказательство:</u>

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \overline{AD} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{BA}) + \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{AB}) = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BA} +$$
$$+ \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{BA} =$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC}).$$

$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$, значит, MN ||AD, MN||BC ($\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ – коллинеарны, следовательно, им коллинеарен и вектор $\frac{1}{2}(\overline{AD} - \overline{BC})$ и MN = $\frac{AD - BC}{2}$.

791.



Дано:
M, N, K, E – середины соответственно сторон AB, BC, CD, DA.
Доказать: MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
Построим векторы, $\overline{AC}$, $\overline{EK}$ и $\overline{MN}$:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$;

$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

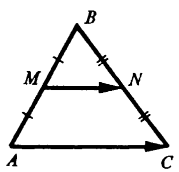
$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$;

$\overline{EK} = \overline{ED} + \overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{EK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, следовательно, $\overline{MN} = \overline{EK}$.

$\overline{MN} = \overline{EK}$, т.е., MN||EK и MN = EK, значит MNKE – параллелограмм по признаку и по свойству параллелограмма MK и NE пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, ч.т.д.

792.



Дано: AM = MB,
CN = NB.
Доказать: MN||AC и MN = $\frac{1}{2}$AC.

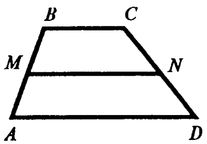
Доказательство:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ и $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} =$

$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$;

т.е. $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, следовательно, MN||AC и $MN = \frac{1}{2}AC$. ч.т.д.

793.

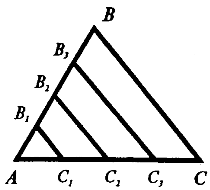


Дано:
AB = 13 см, CB = 15 см,
P_{ABCD} = 48 см, MN – средняя линия
MN = ?

Решение:
P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD, следовательно,
BC + AD + 13 + 15 = 48, значит,
BC + AD = 20;
$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{20}{2}$ = 10 (см) – по св-ву средней линии трапеции.

Ответ: 10 см.

794.



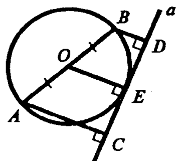
Дано: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$,
$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C$, $B_1C_1 = 3{,}4$;
$B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3 \| BC$;

B_2C_2, B_3C_3 = ?

Решение:
1) $AB_1 = B_1B_2$ и $AC_1 = AC_2$, значит, B_1C_1 – средняя линия ΔAB_2C_2, тогда $B_2C_2 = 2 \cdot B_1C_1 = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$.
$B_2C_2 \| BC$ и $B_2B_3 = B_3B$, $C_2C_3 = C_3C$, значит, B_3C_3 – средняя линия трапеции B_2BCC_2, следовательно, по совйству
$B_3C_3 = \frac{B_2C_2 + BC}{2} = \frac{6{,}8 + 13{,}6}{2} = 10{,}2$.

Ответ: 6,8; 10,2.

795.



Дано:
a – касательная к окружности;
$BD \perp a$, $AC \perp a$, $AC = 18$ см, $BD = 12$см.
$AB = ?$

Решение:

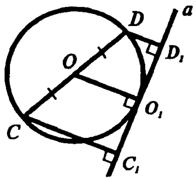
$AO = BO = \frac{1}{2} AB$ – радиусы.

Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, значит $OE \perp a$.
$AC \perp a$ и $BD \perp a$, тогда $AC \parallel BD$, значит, ABCD – трапеция.
$OE \perp a$, $AC \perp a$, $BD \perp a$, тогда $OE \parallel AC \parallel BD$, тогда по т. Фалеса
CE=ED, т.е. OE – средняя линия трапеции ABCD.

$OE = \frac{AC + BD}{2} = \frac{18+12}{2} = \frac{30}{2} = 15$ (см) – по свойству средней линии трапеции.
OE – радиус, следовательно,
$AB = 2 \cdot OE = 2 \cdot 15 = 30$ (см).

Ответ: 30 см.

796.



Дано:
a – касательная
$CC_1 \perp a$, $DD_1 \perp a$,
$CC_1 = 11$ см, $CB = 27$ см.
$DD_1 = ?$

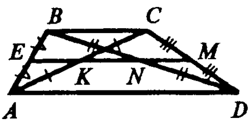
Решение:
$OO_1 \perp a$, следовательно, $OO_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ и $CO = OD$, тогда
OO_1 – средняя линия трапеции CDD_1C_1, значит,

$OO_1 = \frac{CC_1 + DD_1}{2}$, тогда

$13{,}5 = \frac{11 + DD_1}{2}$, или $DD_1 + 11 = 27$, $DD_1 = 16$ см, т.к. OO_1 – радиус.

Ответ: 16 см.

797.



Дано: АК = СК; BN = DB;
EM – средняя линия.

Доказать: что EM проходит через N и К.

<u>Доказательство:</u>

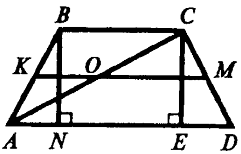
EM||BC||AD (т.к. средняя линия параллельна основаниям).

CM = MD и EM||BC, тогда по т. Фалеса EM проходит через середину отрезка BD, т.е. через N.

AE = EB и EM||BC, тогда по т. Фалеса

EM проходит через середину AC, т.е. через K. ч.т.д.

798.



Дано: AB = CD = 48 см,
KM – средняя линия,
KO = 11 см, MO = 35 см.

Найти: углы трапеции.

KM– средняя линия трапеции, значит, KO – средняя линия ΔABC, т.е. $KO = \frac{1}{2}BC$, или $BC = 2 \cdot KO = 2 \cdot 11 = 22$ (см).

KM – средняя линия трапеции, значит, MO – средняя линия ΔACD, т.е. $MO = \frac{1}{2}AD$, или $AD = 2 \cdot MO = 2 \cdot 35 = 70$ (см).

3) $BN \perp AD$, $CE \perp AD$ – высоты трапеции.

BN = CE, AB = CD, т.к. трапеция равнобедренная, тогда $\Delta ABN = \Delta CED$ (по гипотенузе и катету), следовательно, AN = ED. NBCE – прямоугольник, тогда NE = BC = 22 см и

$ED = AN = \frac{1}{2}(AD - NE) = \frac{1}{2}(70 - 22) = 24$ (см).

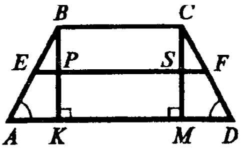
Из ΔCDE: $\angle CED = 90°$, CD = 48 см, ED = 24 см. Если в прямоугольном треугольнике катет в два раза меньше гипотенузы, то он противолежит углу в 30°, следовательно, $\angle ECD = 30°$, $\angle D = 180° - 90° - 30° = 60°$ (по свойству прямоуг. Δ).

$\angle A = \angle D = 60°$, т.к. ABCD – равнобедренная,

$\angle BCD + \angle D = 180°$ (как односторонние при параллельных AD, BC и секущей CD), значит $\angle BCD = 120°$.
$\angle ABC = \angle BCD = 120°$, т.к. ABCD – равнобедренная.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

799.



Дано: BK, $CM \perp AD$;
AB = CD, KD = 7;
EF – средняя длиния;
EF = ?

Пусть KM = a, значит BC = a (KBCM – прямоугольник). Пусть AK = b, значит MD = b ($\Delta ABK = \Delta DCM$ по гипотенузе AB = CD и острому углу $\angle A = \angle D$), т.к. ABCD – равнобедренная.

ΔABK EP – средняя линия, тогда EP = $\frac{1}{2}$b,

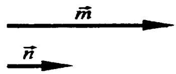
ΔDCM FS – средняя линия, тогда FS = $\frac{1}{2}$b.

EF||BC, следовательно, PS||BC, $PS \perp BK$, PBCS – прямоуг. и PS = BC = a.

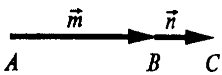
5) EF = EP + PS + SF = $\frac{1}{2}$b + a + $\frac{1}{2}$b = a + b = KM + MD = KD=7см

Ответ: 7 см.

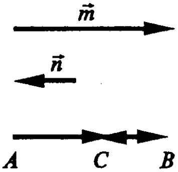
800.



I. Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$.
Доказать: $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.
Выполним сложение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ так: поместим начало вектора $\vec{n}$ в конец вектора $\vec{m}$ и соединим начало вектора $\vec{m}$ и конец вектора $\vec{n}$. Из $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C, тогда AB+BC = AC, и AC = $|\vec{m} + \vec{n}|$, AB = $|\vec{m}|$ и BC = $|\vec{n}|$, значит, $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$.



II. Дано: $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| \geq |\vec{n}|$.
Доказать:
$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.



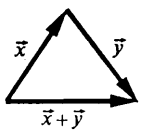
Выполним сложение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ так: поместим начало вектора $\vec{n}$ в конец вектора $\vec{m}$ и соединим затем начало вектора $\vec{m}$ и конец вектора $\vec{n}$. Из $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$ следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой и C лежит между A и B, тогда

AB = AC + BC, и $|\overline{AC}| = |\vec{m} + \vec{n}|$, $|\overline{AB}| = |\vec{m}|$ и $|\overline{BC}| = |\vec{n}|$.

AC = AB – BC, значит $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$.

801.

Доказать: $|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



I. $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколлинеарны.

Неравенство верно, т.к. $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} + \vec{y}|$ стороны треугольника, и по известному неравенству имеем:

$|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$ и $|\vec{x}| < |\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{y}|$, т.е.

$|\vec{x}| - |\vec{y}| < |\vec{x} + \vec{y}|$.

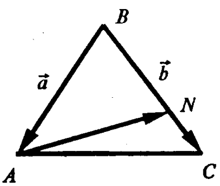
II. Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, то по предыдущей задаче

$|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| + |\vec{n}|$, если $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, и $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m}| - |\vec{n}|$,

если $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, значит, верно.

$|\vec{x}| - |\vec{y}| \le |\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

802.



Дано:

BN = 2NC,

$\vec{a} = \overline{BA}$ и $\vec{b} = \overline{BC}$.

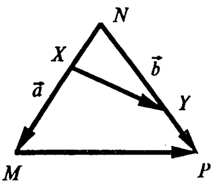
Выразить: $\overline{AN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Решение:</u>

Из $\overline{BN} = 2\overline{NC}$ следует: $\overline{BN} = \dfrac{2}{3}\overline{BC} = \dfrac{2}{3}\vec{b}$.

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = -\overline{BA} + \overline{BN} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}.$$

803.



Дано:

$$\frac{MX}{XN}=\frac{3}{2},\ \frac{NY}{YP}=\frac{3}{2},$$

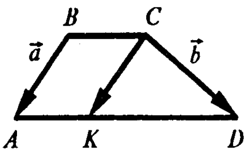
$$\vec{a}=\overline{NM},\ \vec{b}=\overline{NP}.$$

Выразить: $\overline{XY}$, $\overline{MP}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из $\frac{MX}{XN}=\frac{3}{2}$ следует: $\overline{NX}=\frac{2}{5}\overline{NM}$, из $\frac{NY}{YP}=\frac{3}{2}$ следует $\overline{NY}=\frac{3}{5}\overline{NP}$.

$\overline{NX}+\overline{XY}=\overline{NY}$, значит, $\overline{XY}=\frac{3}{5}\overline{NP}-\frac{2}{5}\overline{NM}=\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{a}$.

804.



Дано: $BC=\frac{1}{3}AD$,

$AK=\frac{1}{3}AD$, $\vec{a}=\overline{BA}$, $\vec{b}=\overline{CD}$.

Выразить: $\overline{CK}$, $\overline{KD}$, $\overline{BC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

$BC=\frac{1}{3}AD$ и $AK=\frac{1}{3}AD$, следовательно,

$BC = AK$ и $BC \parallel AK$, тогда $ABCK$ – параллелограмм.

В параллелограмме противолежащие стороны параллельны и равны по свойству, $BA = CK$ и $BA \parallel CK$, тогда, $\overline{CK}=\overline{BA}=\vec{a}$.

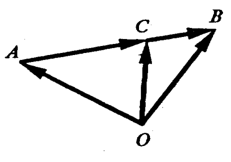
$\overline{CK}+\overline{KD}=\overline{CD}$, значит, $\overline{KD}=\overline{CD}-\overline{CK}=\vec{b}-\vec{a}$.

$\overline{AK}=\frac{1}{3}\overline{AD}$, тогда $\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{KD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$. Тогда

$ABCK$ – параллелограмм, следовательно,

$\overline{BC}=\overline{AK}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

805.



Дано: $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, O – произвольная точка.

Доказать: $\overline{OB}=\frac{1}{3}\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{OC}$.

Доказательство:

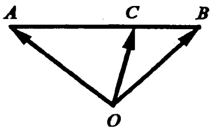
$\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$, следовательно, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$. $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, следовательно,

$\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{2}{3}(\overline{OC} - \overline{OA}) = \frac{2}{3}\overline{OC} - \frac{2}{3}\overline{OA}$, тогда

$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OC} - \frac{2}{3}\overline{OA} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OC}$.

Ч.т.д.

806.



Дано:

AC:CB = m:n, O – произвольная точка.

Доказать: $\overline{OC} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$

Доказательство:

$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, тогда $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Т.к. AC:CB = m:n, следует $\overline{AC} = \frac{m}{m+n}\overline{AB} = \frac{m}{m+n}(\overline{OB} - \overline{OA}) =$

$= \frac{m}{m+n}\overline{OB} - \frac{n}{m+n}\overline{OA}$, тогда

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB} - \frac{m}{m+n}\overline{OA} =$

$= \overline{OA}\,(1 - \frac{m}{m+n}) + \frac{m}{m+n}\overline{OB} = \overline{OA}\,(\frac{m+n}{m+n} - \frac{m}{m+n}) +$

$+ \frac{m}{m+n}\overline{OB} = \frac{m+n-m}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$.

Ч.т.д.

807.

Дано: AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы ΔABC, O – произвольная точка.

Доказать: $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$.

Доказательство:

Имеем:

$\overline{OA} + \overline{AA_1} = \overline{OA_1}$, $\overline{OB} + \overline{BB_1} = \overline{OB_1}$ и $\overline{OC} + \overline{CC_1} = \overline{OC_1}$, тогда складывая почленно правые и левые части равенств, будем иметь:

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$,

Докажем, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$ – нулевой вектор.

По задаче 786 получаем:

$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$, $\overline{BB_1} = \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC})$, $\overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.

Значит: $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) + \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}) +$

$+ \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{BC} +$

$+ \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{BC} =$

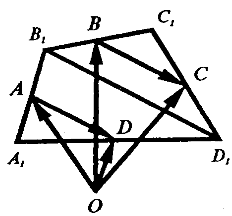
$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ – доказали.

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$, но

$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}$, следовательно,

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$. ч.т.д.

808.



Дано:

A, B, C, D – середины сторон соответственно;

A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1;

O – произвольная точка.

Доказать: $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$.

Доказательство:

1) Построим диагональ B_1D_1.

B – середина B_1C_1, C – середина C_1D_1 и BC = $\frac{1}{2}B_1D_1$.

A – середина A_1B_1, D – середина A_1D_1, следовательно,

AD – средняя линия $\Delta A_1B_1D_1$, значит, $AD \| B_1D_1$ и AD = $\frac{1}{2}B_1D_1$.

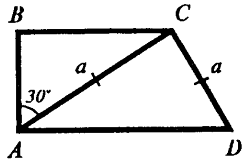
$BC \| B_1D_1$, BC = $\frac{1}{2}B_1D_1$ и AD = $\frac{1}{2}B_1D_1$, тогда $\overline{BC} = \overline{AD}$.

$\overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}$, следовательно,

$\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}$.

$\overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OD}$, следовательно,
$\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{AD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$, тогда
$\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{BC}$ и $\overline{OD} - \overline{OA} = \overline{BC}$, значит,
$\overline{OC} - \overline{OB} = \overline{OD} - \overline{OA}$, или $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$. Ч.т.д.

809.

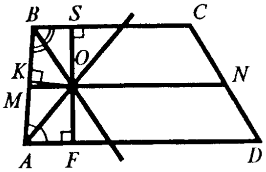


Дано: $\angle A=90°$,
$\angle C = 120°$, $AC = a$, $CD = a$.
средняя линия = ?
<u>Решение:</u>
$\angle C = 120°$, тогда, $\angle D = 60°$, из $\angle C + \angle D = 180°$ (односторонние при параллельных BC, AD и секущей CD);
ΔACD – равнобедренный треугольник, из AC = CD, тогда $\angle DAC = \angle D = 60°$, значит, ΔACD – равносторонний треугольник (все углы равны), AD = a, $\Delta ACD = 60°$, $\angle BCD = 120°$, значит, $\angle ACB = 60°$.
Из ΔABC:
$\angle B = 90°$, $\angle ACB = 60°$, следовательно,
$\angle BAC = 180° - 90° - 60° = 30°$, $BC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$ (по св-ву – в прямоугольном треугольнике против угла в 30° лежит катет, равный половине гипотенузы)
$BC = \frac{1}{2}a$, $AD = a$.
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, т.е.

$$\frac{BC + AD}{2} = \frac{\frac{1}{2}a + a}{2} = \frac{\frac{3}{2}a}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Ответ: $\frac{3}{4}a$.

810.



Дано:
MN – средняя линия,
O – вершина ∠AOB,
AO – биссектриса ∠A,
BO – биссектриса ∠B.
Доказать: O ∈ MN.

<u>Доказательство:</u>
Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. OS⊥BC, OK⊥AB, OF⊥AD.
Из точка O лежит на биссектрисе ∠ABC, следует O равноудалена от сторон BA и BC, тогда OS = OK.
Точка O лежит на биссектрисе ∠BAD, следовательно O равноудалена от сторон AB и AD, тогда OK = OF.
OS = OK и OK = OF, значит, OS = OF, следовательно, O ∈ MN, где MN средняя линия. Ч.т.д.