§6. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

22. Признак возрастания (убывания) функции

279.

а) $f(x)=3-\frac{1}{2}x$;

$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=-\frac{1}{2}<0$ при, $x\in D(f)$ – функция убывает на R;

б) $f(x)=-x^2+2x-3$;

$D(f)=R$;

$E(f)=(-\infty;-2]$;

$f'(x)=2(1-x)$;

$f'(x)<0$: $2(1-x)<0$, $x>1$;

$f'(x)>0$: $2(1-x)>0$, $x<1$;

Функция возрастает при $x\in(-\infty;1]$

и убывает при $x\in[1;+\infty)$;

в) $f(x)=4x-5$;

$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=4>0$ при $x\in D(f)$ – функция возрастает на R;

г) $f(x)=5x^2-3x+1$;

$D(f)=R$;

$E(f)=\left[\frac{81}{100};+\infty\right)$;

$f'(x)=10x-3$;

$f(x)<0$: $10(x-0,3)<0$; $x<0,3$;

$f'(x)>0$: $10(x-0,3)>0$; $x>0,3$;

Функция возрастает, при $x\in[0,3;+\infty)$

и убывает при $x\in(-\infty;0,3]$.

280.

а) $f(x)=-\frac{2}{x}+1$;

$D(f)=R/\{0\}$;

$E(f)=R/\{1\}$;

$f'(x)=\frac{2}{x^2}$;

$f'(x)>0$, при $x \in D(f)$;

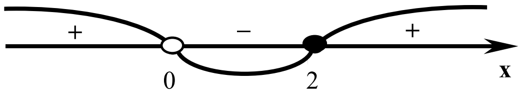
Значит, функция возрастает на $R/\{0\}$;

б) $f(x)=x^2(x-3)$;

$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$;



$f'(x)<0$, при $x \in (0;2)$, $f'(x)>0$, при $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Функция убывает, при $x \in [0;2]$; функция возрастает, при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$.

в) $f(x)=\frac{x-3}{x}$;

$D(f)=R/\{0\}$

$E(f)=R/\{1\}$;

$f'(x)=\frac{3}{x^2}$; $f'(x)>0$, при $x \in D(f)$.

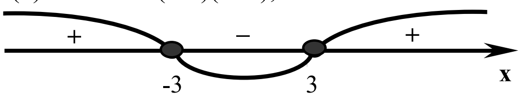
Функция возрастает на $R/\{0\}$.

г) $f(x)=x^3-27x$;

$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$;



$f'(x)<0$ на $(-3;3)$, $f'(x)>0$ на $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

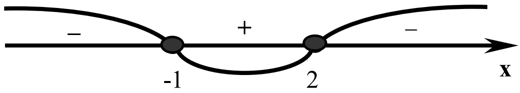
Функция убывает на $[-3;3]$, функция возрастает на $(-\infty;-3]$ и на $[3;+\infty)$.

281.

а) $f(x)=12x+3x^2-2x^3$;

$D(f)=R$; $E(f)=R$;

$f'(x)=12+6x-6x^2=-6(x^2-x-2)=-6(x-2)(x+1)$;



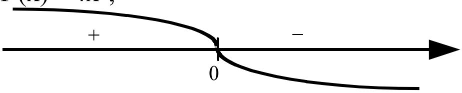
$f'(x)<0$ на $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; $f'(x)>0$ на $(-1;2)$.

Функция убывает на $[-\infty;-1]$ и на $[2;+\infty)$, функция возрастает на $[-1;2]$.

б) $f(x)=4-x^4$;

$D(f)=R$; $E(f)=(-\infty;4]$;

$f'(x)=-4x^3$;



$f'(x)<0$ на $(0;+\infty)$, $f'(x)>0$ на $(-\infty;0)$.

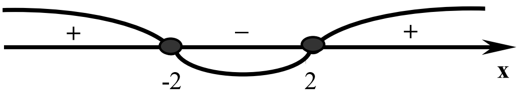
Функция убывает на $[0;+\infty)$, функция возрастает на $(-\infty;0]$.

в) $f(x)=x(x^2-12)$;

$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$;



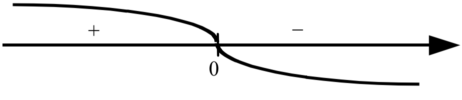
$f'(x)<0$ на $(-2;2)$; $f'(x)>0$ на $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Функция убывает на $[-2;2]$, функция возрастает на $(-\infty;-2]$ и на $[2;+\infty)$.

г) $f(x)=\frac{3}{x^2}$;

$D(f)=R/\{0\}$; $E(f)=R^+$;

$f'(x)=-\frac{6}{x^3}$;

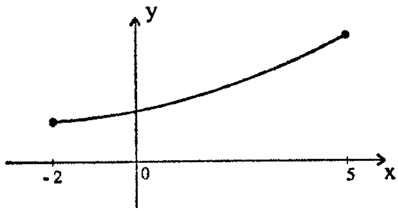


$f'(x)>0$ на $(-\infty;0)$, $f'(x)<0$ на $(0;+\infty)$.

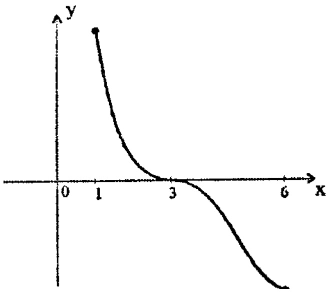
Функция возрастает на $[-\infty;0)$, функция убывает на$(0;+\infty)$.

282.

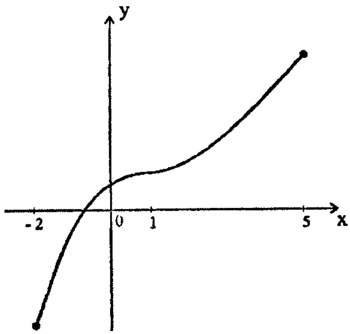
а)



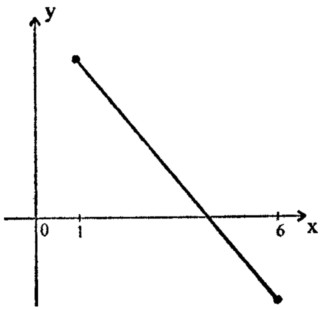
б)



в)



г)



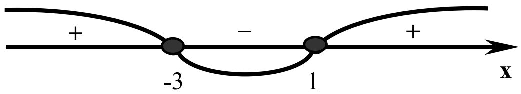
283.

а) $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$;

$D(f)=R$;

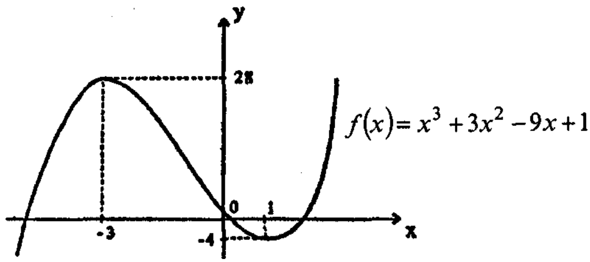
$E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$;



$f'(x)<0$ на $(-3;1)$, $f'(x)>0$ на $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Функция убывает на $[-3;1]$, функция возрастает на $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

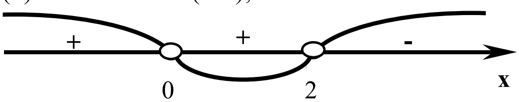


б) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$;

$D(f)=R$;

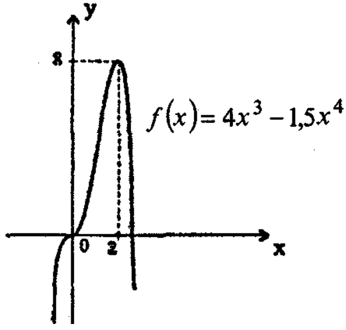
$E(f)=R$;

$f'(x)=12x^2-6x^3=6x^2(2-x)$;

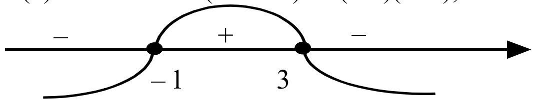


$f'(x)<0$ на $(2;+\infty)$; $f'(x)>0$ на $(-\infty;0)\cup(0;2)$.

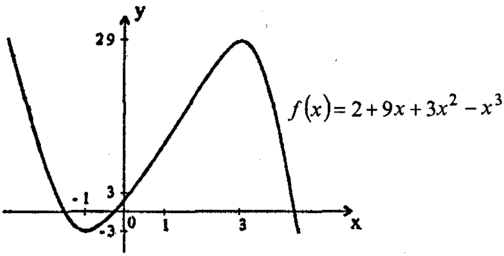
Функция убывает на $[2;+\infty)$, функция возрастает на $(-\infty;2]$.



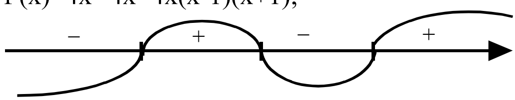
в) $f(x)=2+9x+3x^2-x^3$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;
$f'(x)=9+6x-3x^2=-3(x^2-2x-3)=-3(x-3)(x+1)$;



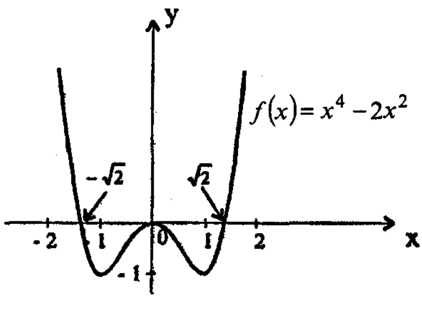
$f'(x)<0$ на $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$; $f'(x)>0$ на $(-1;3)$.
Функция убывает на $[-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$, функция возрастает на $(-1;3]$;



г) $f(x)=x^4-2x^2$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$;



$f'(x)<0$ на $(-\infty;-1)\cup(0;1)$; $f'(x)>0$ на $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.
Функция убывает на $[-\infty;-1]\cup[0;1]$, функция возрастает на $[-1;0]\cup[1;+\infty)$;
$f(-x)=f(x)$ – функция четная;
$f(x)=0$, при $x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$, $x=\pm\sqrt{2}$, $x=0$;



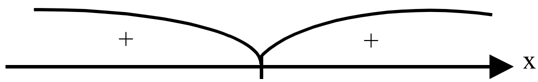
284.

а) f(x)=2-$\dfrac{4}{0,5x-1}$;

D(f)=R\ $\{2\}$;

E(f)=R/ $\{2\}$;

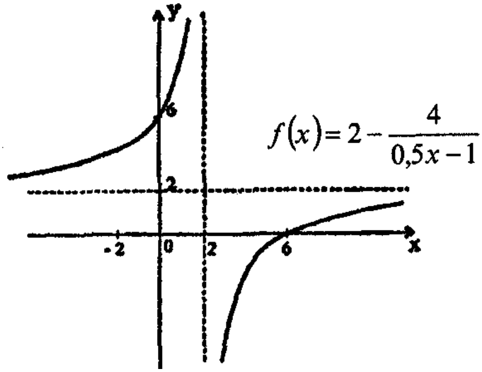
f′(x)=$\dfrac{4}{(0,5x-1)^2}$;



f′(x)>0 на D(f);

Функция возрастает на (-∞;2)$\cup$(2;+∞);

f(x)=0 при $\dfrac{4}{0,5x-1}$=2, x=6;



б) f(x)=|x-3|-2=$\begin{cases}-x+1, x\le 3,\\ x-5, x>3;\end{cases}$

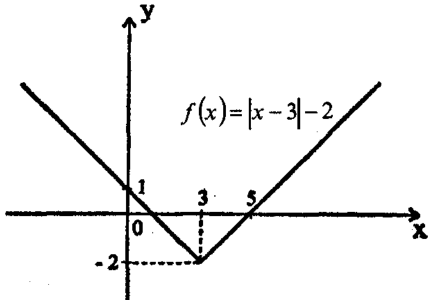
D(f)=R;

E(f)=R;

f′(x)= $\begin{cases}-1, x\le 3,\\ 1, x>3;\end{cases}$

Очевидно, что в точке (3;-2) f(x) не имеет производной; функция убывает на (-∞;3];

функция возрастает на [3;+∞); f(x)=0 при x=1,5.

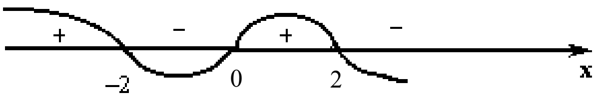


в) $f(x)=8x^2-x^4$;

D(f)=R;

E(f)=R;

$f'(x)=16x-4x^3=-4x(x-2)(x+2)$;

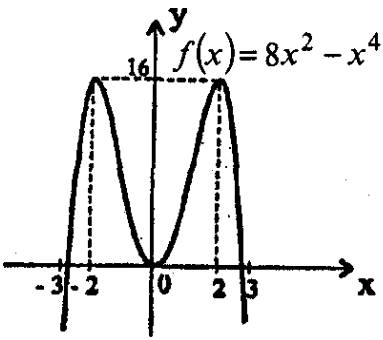


$f'(x)<0$ на $(-2;0)\cup(2;+\infty)$, $f'(x)>0$ на $(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

Функция убывает на $[-2;0]\cup[2;+\infty)$,

функция возрастает на $(-\infty;-2]\cup[0;2]$; $f(-x)=f(x)$ – функция четная;

$f(x)=0$ при $x^2(2\sqrt{2}-x)(2\sqrt{2}+x)=0$, $x=0$, $x=\pm 2\sqrt{2}$.



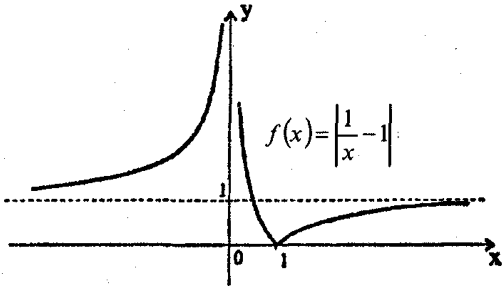
г) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}-1\right|=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, x>1, x<0,\\ \dfrac{1}{x}-1, 0<x\le 1;\end{cases}$

$D(f)=R/\{0\}$;

$E(f)=R^+$;

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, x>1, x<0,\\ -\frac{1}{x^2}, 0<x<1;\end{cases}$$

Очевидно, что в точке (1;0) f(x) не имеет производной;
функция убывает на (0;1],
функция возрастает на $[1;+\infty)\cup(-\infty;0)$.



285.

а) f(x)=3x+cos2x;
D(f)=R;
E(f)=R;
$f'(x)=3-2\sin 2x$; $3-2\sin 2x \geq 1$ для любого $x\in D(f)$, т.е. $f'(x)>0$ при $x\in R$ – функция возрастает на R;

б) $g(x)=-\frac{x^3}{3}-x$;
D(g)=R;
E(g)=R;
$g'(x)=-x^2-1<0$ для любого $x\in D(g)$, т.е. функция убывает на R;

в) $f(x)=x^7+2x^5+3$;
D(f)=R;
E(f)=R;
$f'(x)=7x^6+10x^4\geq 0$ для любого $x\in D(f)$, функция возрастает на R;

г) g(x)=-4x+sin3x;
D(g)=R;
E(g)=R;
$g'(x)=-4x+3\cos 3x$; $-4+3\cos 3x\leq -1$ для любого $x\in D(g)$, $g'(x)<0$ при $x\in R$, т.е. функция убывает на R.

286.

а) $f(x)=x^3-27x+2$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-27=3(x-3)(x+3)$ – функция возрастает на $(-\infty;3]\cup[3;+\infty)$, функция убывает на $[-3;3]$;

$f(-1)=28>0$, $f(1)=-24<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-1;1]$ – существует единственная точка $x_0\in[-1;1]$: $f(x_0)=0$;

$f(4)=-42<0$, $f(6)=56>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[4;6]$ – существует единственная точка $x_0\in[4;6]$: $f(x_0)=0$.

б) $f(x)=x^4-4x-9$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$ – функция возрастает на $[1;+\infty]$, функция убывает на $(-\infty;1]$;

$f(-2)=15>0$, $f(0)=-9<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2;0]$ – существует единственная точка $x_0\in[-2;0]$: $f(x_0)=0$;

$f(2)=-1<0$, $f(3)=60>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[2;3]$ – существует единственная точка $x_0\in[2;3]$: $f(x_0)=0$;

в) $f(x)=x^4+6x^2-8$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=4x^3+12x=4x(x^2+3)$ – функция убывает на $(-\infty;0]$, функция возрастает на $[0;+\infty)$;

$f(-2)=32>0$, $f(-1)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2;-1]$ – существует единственная точка $x_0\in[-2;-1]$: $f(x_0)=0$;

$f(1)=-1<0$, $f(2)=32>0$, $f(x)$ непрерывна и возрастает на $[1;2]$ – существует единственная точка $x_0\in[1;2]$: $f(x_0)=0$;

г) $f(x)=-1+3x^2-x^3$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=6x-3x^2=-3x(x-2)$ – функция возрастает на $[0;2]$, функция убывает на $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$;

$f(-2)=19>0$, $f(0)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[-2;0]$ – существует единственная точка $x_0\in[-2;0]$: $f(x_0)=0$;

$f(2)=3>0$, $f(3)=-1<0$, $f(x)$ непрерывна и убывает на $[2;3]$ – существует единственная точка $x_0\in[2;3]$: $f(x_0)=0$;

23. Критические точки функции, максимумы и минимумы

287.

Слева: точка x_2, $x=0$, точка x_3 и точка x_4 ($f'(x_2)=f'(0)=f'(x_3)=0$, $f'(x_4)$ не существует и эти точки являются внутренними для $D(f)$).

Точка x_2, точка x_4, точка x_5, точка x_6, точка x_7 ($f'(x_7)=0$; $f'(x_2)$, $f'(x_4)$ и $f'(x_6)$ не существует, и все эти точки являются внутренними для $D(f)$).

288.

а) $f(x)=4-2x+7x^2$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=-2+14x$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $x=\frac{1}{7}$;

б) $f(x)=1+\cos 2x$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=-2\sin 2x$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$;

в) $f(x)=x-2\sin x$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=1-2\cos x$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$;

г) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=4-x^2$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $4-x^2=0$, $x=\pm 2$;

289.

Слева: максимум: точки x_2 и x_4: $f'(x_2)=f'(x_4)=0$; минимум: точка x_1 и x_3: $f'(x_1)=f'(x_3)=0$.

Справа: максимум: точки x_1 и x_3: $f'(x_1)$ не существует $f'(x_3)=0$; минимум: точки x_2 и x_4: $f'(x_2)=0$, $f'(x_4)$ не существует.

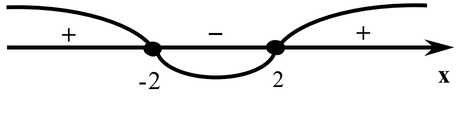
290.

а) $f(x)=5+12x-x^3$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=12-3x^2=-3(x-2)(x+2)$;

$D(f')=R$;



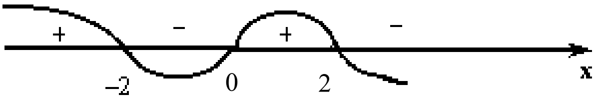
Критические точки $x=\pm 2$, где $x=-2$ – точка минимума, $x=2$ – точка максимума.

б) $f(x)=9+8x^2-x^4$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=16x-4x^3=-3x(x-2)(x+2)$;

$D(f')=R$;



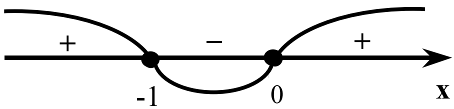
Критические точки $x=\pm 2;0$, где $x=-2$ и $x=2$ – точки максимума, $x=0$ – точка минимума.

в) $f(x)=2x^3+3x^2-4$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$;

$D(f')=R$;



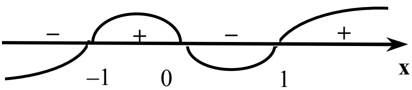
Критические точки $x=-1;0$, где $x=-1$ – точка максимума, $x=0$ – точка минимума.

г) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=2x^3-2x=2x(x-1)(x+1)$;

$D(f')=R$;



Критические точки $x=\pm 1;0$, где $x=\pm 1$ – точки минимума, $x=0$ – точка максимума.

291.

а) $f(x)=\sqrt{x}$;

$D(f)=[0;+\infty)$;

$E(f)=R^+$;

$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$D(f')=(0;+\infty)$.

Т.к. $f'(x)\neq 0$, то функция $f(x)$ не имеет критических точек.

б) f(x)=tgx;

D(f)=R\ $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \middle/ k \in Z\right\}$;

E(f)=R;

f'(x)= $\frac{1}{\cos^2 x}$,

D(f')=D(f).

Т.к. $f'(x) \neq 0$, то функция f(x) не имеет критических точек.

в) f(x)=3x-7;

D(f)=R;

E(f)=R;

f'(x)=3>0 для любого $x \in R$,

D(f')=R.

Т.к. f'(x)>0 для $x \in R$, то функция f(x) не имеет критических точек.

г) f(x)=$3x^5+2x$;

D(f)=R;

E(f)=R;

f'(x)=$15x^4+2>0$ для любого $x \in R$,

D(f')=R.

Т.к. f'(x)>0, то функция f(x) не имеет критических точек.

292.

а) f(x)=sin2x-cosx;

D(f)=R;

f'(x)=2sinx cosx+sinx=2sinx$\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$,

D(f')=R;

f'(x)=0 если x=πk, $k \in Z$ и x=$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$ – это критические точки функции.

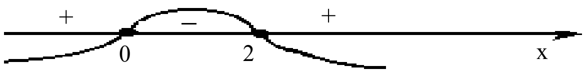
Точки x=$\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ и x=-$\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$ – точки максимума, точки x=πk, $k \in Z$ – точки минимума функции.

б) f(x)=2x+$\frac{8}{x^2}$;

D(f)=R/$\{0\}$;

f'(x)=2-$\frac{16}{x^3}$,

D(f')=R/$\{0\}$;



Единственной критической точкой для f(x) является x=2, т.к. $f'(2)=0$;

в) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=-10\sin x+2\cos 2x-6$,

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $f'(x)=2(1-2\sin^2 x)-10\sin x-6=0$; $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$.

$\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Критическая точка: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

г) $f(x)=x^3-4x+8$;

$D(f)=R$; $E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-4=3\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;

$f'(x)=0$ или $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Критические точки: $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

293.

а) $f(x)=(x-2)^3$;

$D(f)=R$; $E(f)=R$;

$f'(x)=3(x-2)^2$, $D(f')=R$; $f'(x)=0$ при $x=2$ – критическая точка;

б) $f(x)=\begin{cases}-x-2, & x\le -1,\\ x, & -1<x<1,\\ 2-x, & x\ge 1;\end{cases}$

$D(f)=R$;

$f'(x)=\begin{cases}-1, & x<-1,\\ 1, & -1<x<1,\\ -1, & x>1;\end{cases}$

Т.к. в точке x=-1 и x=1 f'(x) не существует, то $x=\pm 1$ – критические точки f(x);

в) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$;

$D(f)=R/\{0\}$;

$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}$,

$D(f')=R/\{0\}$;

$f'(x)=0$: $\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}=0$, $x=\pm 3$ – критические точки;

г) $f(x)=\begin{cases} x+6, & x<-2, \\ x^2, & -2\le x\le 2, D(f)=R; \\ 6-x, & x>2; \end{cases}$

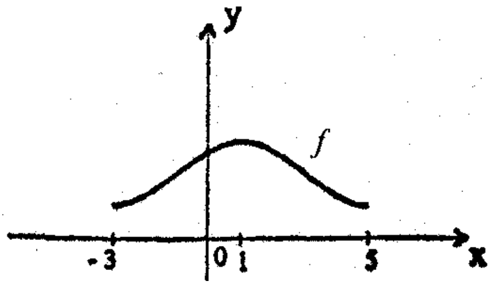
$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<-2, \\ 2x, & -2<x<2, \\ -1, & x>2; \end{cases}$

$f'(x)=0$, при $x=0$ - критическая точка.

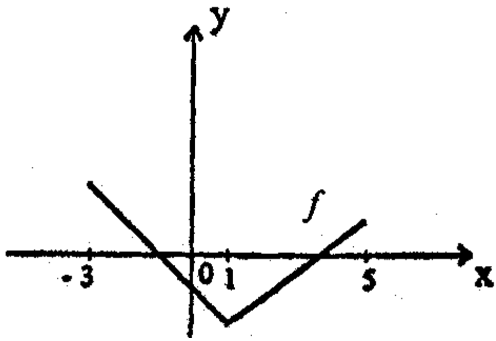
Т.к. в точках $x=-2$ и $x=2$ $f'(x)$ не существует, то $x=\pm 2$ – критические точки.

294.

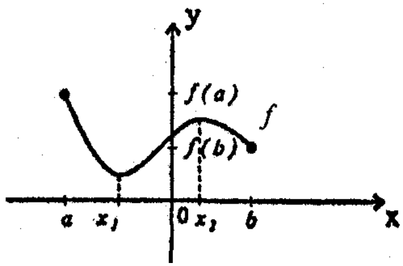
а)



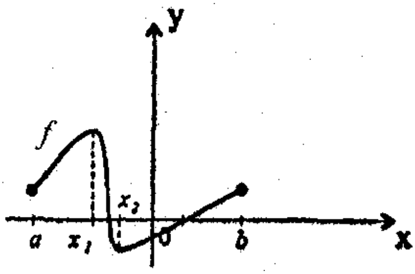
б)



в)



г)



295.

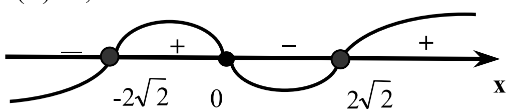
а) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-8x^2$;

$D(f)=R$;

$E(f)=[-32;+\infty)$;

$f'(x)=2x^3-16x=2x(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$;

$D(f')=R$;

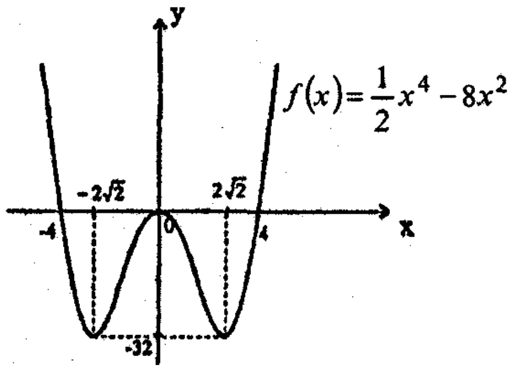


Функция убывает на $(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[0;2\sqrt{2}]$; функция возрастает на $[-2\sqrt{2};0]\cup[2\sqrt{2};+\infty)$.

Точки $x=-2\sqrt{2}$ и $x=2\sqrt{2}$ - точки минимума, $x=0$ – точка максимума;

$f(0)=0$; $f(x)=f(-x)$ – функция является четной;

$f(x)=0$: $\frac{1}{2}x^2(x-4)(x+4)=0$, $x=0$, $x=\pm4$ - точки пересечения функции с осью x;



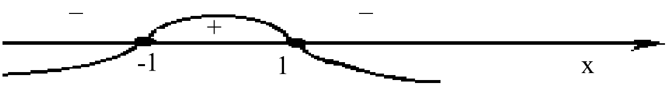
б) f(x)=$\frac{3x}{1+x^2}$;

D(f)=R;

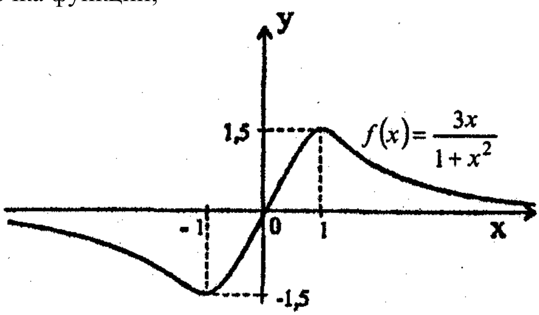
E(f)=$\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$;

f′(x)=$\frac{3(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$,

D(f’)=R;



Функция убывает на (-∞ ;-1]$\cup$[1;+ ∞), функция возрастает на [-1;1]. Точка x=-1 – точка минимума;
x=1 – точка максимума f(x);
f(x)=-f(-x) – функция является нечетной;
(0;0) – точка функции;



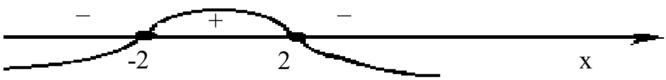
в) $f(x)=2x-\frac{1}{6}x^3$;

D(f)=R;

E(f)=R;

$f'(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$;

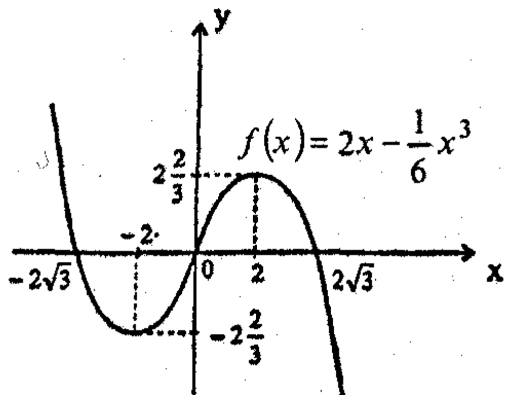
D(f′)=R;



Функция убывает на $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$, функция возрастает на [-2;2]. Точка x=-2 – точка минимума;
x=2 – точка максимума.

$f(x)=0$: $-\frac{1}{6}x(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})=0$;

$x=0$, $x=\pm 2\sqrt{3}$ - точка пересечения с осью x;



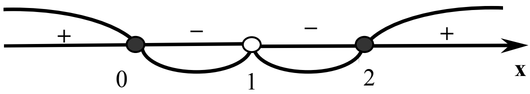
г) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$;

$D(f)=R\setminus\{1\}$;

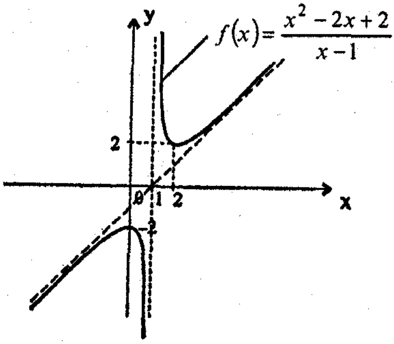
E(f)=R/(-2;2);

$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$;

D(f′)=D(f);



Функция возрастает на $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$, функция убывает на $[0;1)\cup(1;2]$. x=0 – точка максимума;
f(0)=-2.

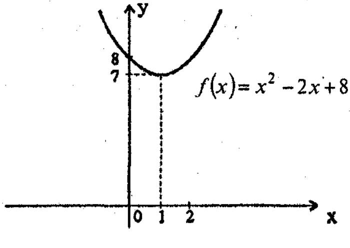


24. Примеры применения производной к исследованию функций

296.

а) $f(x)=x^2-2x+8$;
D(f)=R;
$E(f)=[7;+\infty)$;
f(x) является функцией общего вида.
$x^2-2x+8=0$ – не имеет решений;
f(0)=8; $f'(x)=2(x-1)$, $D(f')=R$;

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
f(x)	↘	7	↗
		min	



б) f(x)=$-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}$;

D(f)=R;

E(f)=$\left[-\infty;\frac{25}{24}\right]$;

f(x) - функция общего вида;

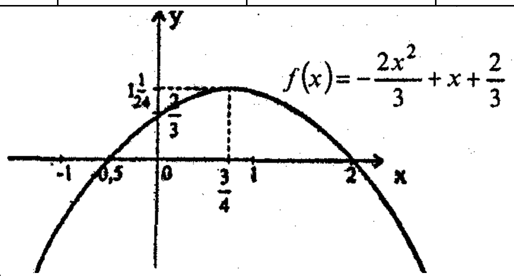
$-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}$=0;

f(0)=$\frac{2}{3}$;

f′(x)=$-\frac{4x}{3}$+1=$-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$;

D(f')=R;

x	$\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$
f(x)	↗	$1\frac{1}{24}$	↘
		max	



в) f(x)=-x^2+5x+4;

D(f)=R;

E(f)=$\left(-\infty;\frac{41}{4}\right]$;

f(x) - функция общего вида.

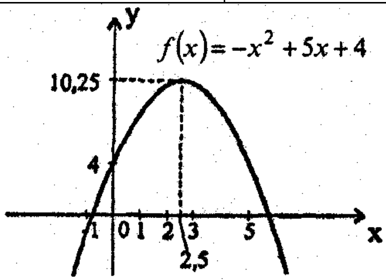
-x^2+5x+4=0;

x=$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$; x=$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$; f(0)=4;

f'(x)=-2x+5=-2(x-2,5);

D(f')=R;

x	(- ∞ ;2,5)	2,5	(2,5;+ ∞)
f(x)	↗	10,25	↘
		max	



г) f(x)= $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$;

D(f)=R;

E(f)= $\left[\frac{63}{256};+\infty\right)$;

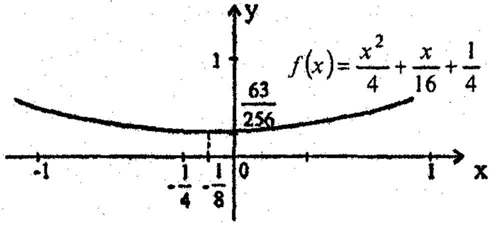
f(x) - функция общего вида.

$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$ =0 – нет решений;

f(0)= $\frac{1}{4}$;

f′(x)= $\frac{x}{2}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{8}\right)$.

x	$\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$	$-\frac{1}{8}$	$\left(-\frac{1}{8};+\infty\right)$
f(x)	↘	$\frac{63}{256}$	↗
		min	



297.

а) $f(x)=-x^3+3x-2$;

$D(f)=R$;

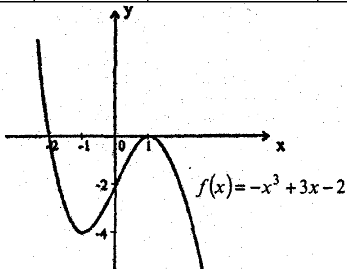
$E(f)=R$;

f(x) – функция общего вида.

$(x-1)(x^2+x-2)=0$; $x=1$, $x=-2$; $f(0)=-2$;

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$;

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	-4	↗	0	↘
		min		max	



б) $f(x)=x^4-2x^2-3$;

$D(f)=R$;

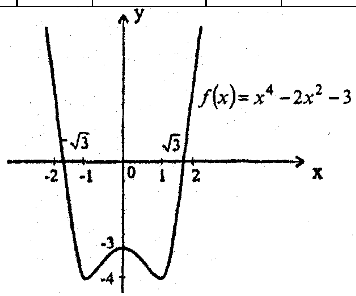
$E(f)=[-4;+\infty)$;

f(-x)=f(x) – функция четная.

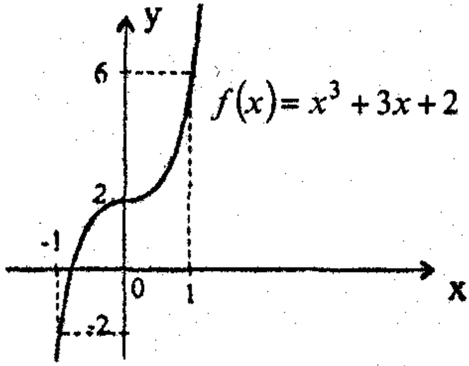
$(x^2-3)(x^2+1)=0$, $x=\pm\sqrt{3}$; $f(0)=-3$;

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$;

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗
		min		max		min	



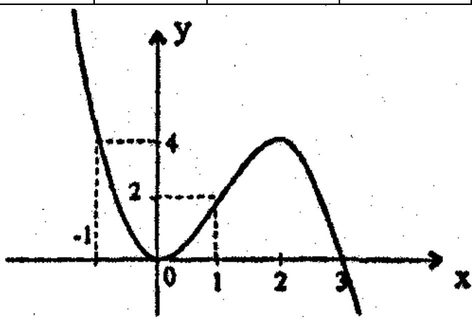
в) $f(x)=x^3+3x+2$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;



f(x) — функция общего вида.
$f(0)=0$; $f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)>0$ – функция возрастает на R;

г) $f(x)=3x^2-x^3$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;
f(x) – функция общего вида;
$x^2(3-x)=0$; $x=0$, $x=3$;
$f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$;

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘
		min		max	



298.

а) $f(x)=1+1,5x-3x^2-2,5x^3$;

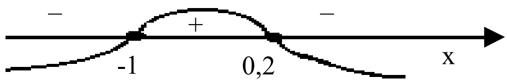
$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=1,5-6x-7,5x^2$;

$D(f')=R=D(f)$;

$f'(x)=0$: $-1,5(5x^2+4x-1)=0$; $x=-1$, $x=0,2$;



Функция убывает на $(-\infty;-1]\cup[0,2;+\infty)$, возрастает на $[-1;0,2]$.

б) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-6x+1$;

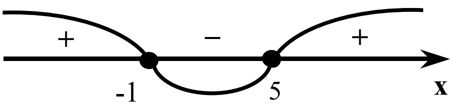
$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=x^4-x^2-6$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $(x^2-3)(x^2+2)=0$; $x=\pm\sqrt{3}$;



Функция возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};+\infty)$,убывает на $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.

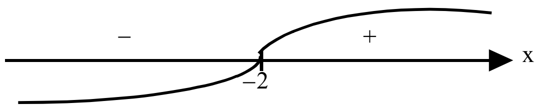
в) $f(x)=\frac{x^4}{4}+8x-5$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=x^3+8$;

$D(f')=R=D(f)$;

$f'(x)=0$: $(x+2)(x^2-2x+4)=0$; $x=-2$;



Функция убывает на $(-\infty;-2]$ и возрастает на $[-2;+\infty)$.

г) $f(x)=x^3-6x^2-15x-2$;

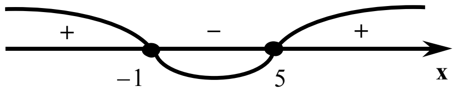
$D(f)=R$;

$E(f)=R$;

$f'(x)=3x^2-12x-15$;

$D(f')=R=D(f)$;

$f'(x)=0$: $3(x-5)(x+1)=0$; $x=-1$, $x=5$;



Функция возрастает на $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$ и убывает на $[-1;5]$.

299.

а) $f(x)=2x-\cos x$; $D(f)=R$; $f'(x)=2+\sin x>0$

б) $f(x)=x^5+4x$; $D(f)=R$; $f'(x)=5x^4+4>0$;

в) $f(x)=\sin x+\frac{3x}{2}$; $D(f)=R$; $f'(x)=\cos x+\frac{3}{2}>0$;

г) $f(x)=2x^3+x-5$; $D(f)=R$; $f'(x)=6x^2+1>0$.

300.

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$;

$D(f)=R$; $E(f)=R$;

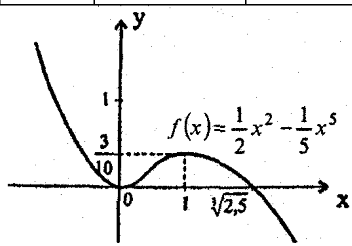
$f(x)$ – функция общего вида;

$f(x)=0$: $\frac{1}{5}x^2(2,5-x^3)=0$; $x=0$, $x=\sqrt[3]{2,5}\approx 1,4$;

$f'(x)=x-x^4=x(x-1)(1+x+x^2)$,

$D(f')=R=D(f)$;

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{3}{10}$	↘



б) $f(x)=4x^2-x^4$;

$D(f)=R$;

$E(f)=(-\infty;4]$;

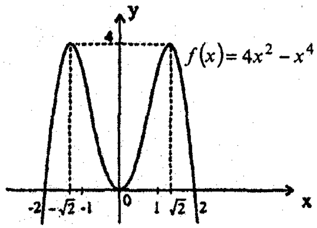
$f(-x)=f(x)$ — функция четная;

$f(x)=0$: $x^2(2-x)(2+x)=0$, $x=0$, $x=\pm 2$;

$f'(x)=8x-4x^3=4x(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$,

$D(f')=R$;

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
f'(x)	+	0	-	0	+	0	-
f(x)	↗	4	↘	0	↗	-4	↘
		max		min		max	



в) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$;

D(f)=R;

E(f)=R;

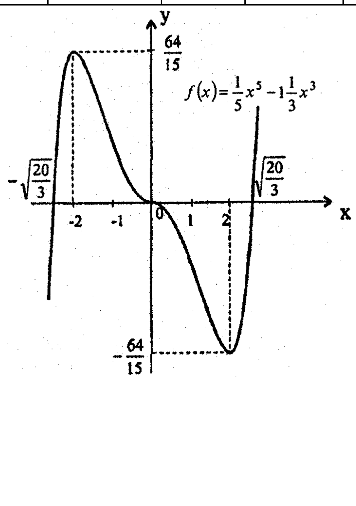
f(-x)=-f(x) – функция является нечетной;

$f(x)=0: \frac{1}{5}x^3\left(x^2-\frac{20}{3}\right)=0$; $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$;

$f'(x)=x^4-4x^2=x^2(x-2)(x+2)$,

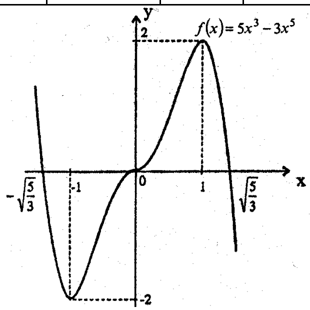
$D(f')=R=D(f)$;

x	$(-\infty;-2)$	-2	(-2;0)	0	(0;2)	2	$(2+\infty)$
f'(x)	+	0	-	0	-	0	+
f(x)	↗	$\frac{64}{15}$	↘	0	↘	$-\frac{64}{15}$	↗
		max				min	



г) $f(x)=5x^3-3x^5$;
D(f)=R;
E(f)=R;
f(-x)=-f(x) – функция является нечетной;
$f(x)=0 : -3x^3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)=0;\quad x=0,\quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\approx\pm 1{,}3;$
$f'(x)=15x^2-15x^4=15x^2(1-x)(1+x)$,
D(f′)=R=D(f);

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	$(1+\infty)$
f’(x)	-	0	+	0	+	0	
f(x)	↘	-2	↗	0	↗	2	↘
		min				max	



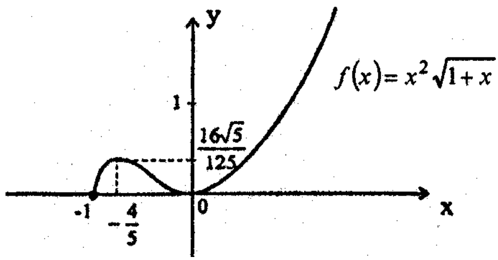
301.

а) $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$;
$D(f)=[-1;+\infty)$; $E(f)=R^+$;
f(x) — функция общего вида;
f(x)=0 при x=-1;0;

$$f'(x)=2x\sqrt{1+x}+\frac{x^2}{2\sqrt{1+x}}=\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{1+x}}=\frac{5x\left(x+\frac{4}{5}\right)}{2\sqrt{1+x}},$$

$D(f')=(-1;+\infty)$;

x	$\left(-1;-\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5};0\right)$	0	$(0;+\infty)$
f’(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	$\frac{16\sqrt{5}}{125}$	↘	0	↗
		max		min	



б) f(x)=$\frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

D(f)=R;

E(f)=[-3;1];

f(x) – функция общего вида;

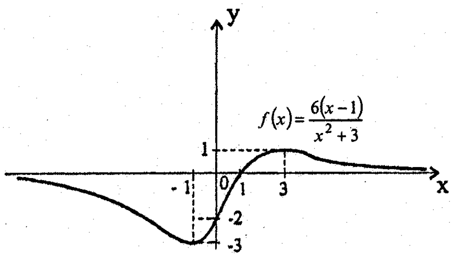
f(x)=0, если x=1;

f(0)=-2;

f′(x)=$\frac{6(x^2+3)-6(x-1)2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-6(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$;

D(f′)=R;

x	(-∞;-1)	-1	(-1;3)	3	(3;+∞)
f’(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	-3	↗	1	↗
		min		max	



в) f(x)=x$\sqrt{2-x}$;

D(f)=(-∞;2];

E(f)=(-∞;1];

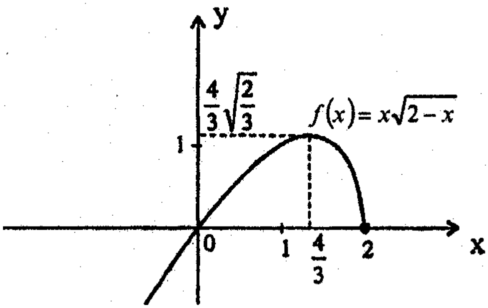
f(x) – функция общего вида;

f(x)=0, если x=0;2;

f′(x)=$\sqrt{2-x}$ - $\frac{x}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}}$,

D(f′)=(-∞;2);

x	$\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3};2\right)$
f’(x)	+	0	-
f(x)	↗	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 1{,}1$	↘
		max	



г) f(x)=$\frac{2x}{1-x^2}$;

D(f)=R/ $\{\pm 1\}$;

E(f)=R;

f(-x)=-f(x) – функция является нечетной;

f(x)=0, если x=0;

f′(x)=$\frac{2(1-x^2)+2x2x}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$,

D(f′)=(-∞ ;-1)$\cup$(-1;1)$\cup$(1;+∞);

f′(x)>0, при x$\in$ D(f′) – функция возрастает на D(f);