302.

а) $f(x)=\sin^2x+\sin x$;

$D(f)=R$;

$E(f)=\left[-\frac{1}{4};2\right]$;

$f(-x)=-f(x)$ – функция общего вида;

$f(x)=0$: $\sin(\sin x+1)=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$ и $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$,

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\sin^2(x+2\pi)=\sin x+\sin^2x$ для любого $x\in D(f)$ – функция периодическая с $T=2\pi$;

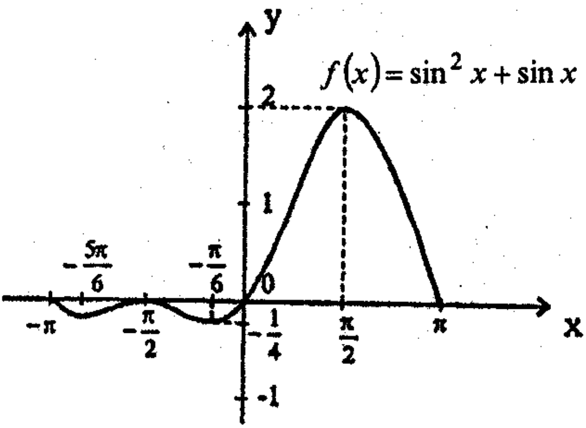
$f'(x)=2\sin x\cos x+\cos x=2\cos x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$;

$D(f')=R$;

$f'(x)=0$: $\cos x=0$, $\sin x=-\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$;

x	$\left(-\pi+2\pi n;-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$	$-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$	$\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$
		min	
x	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$	$-\frac{\pi}{6}+2\pi n$
f'(x)	0	-	0
f(x)	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$
	max		min
x	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$\nearrow$	2	$\searrow$
		max	



б) f(x)=$\frac{2x}{1+x^2}$;

D(f)=R;

f(-x)=-f(x) – функция является нечетной;

f(x)=0, при x=0;

f'(x)=$\frac{2(1+x^2)+2x2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$,

D(f')=R;

Рисунок смотри в предыдущих номерах;

в) f(x)=cos^{2}x-cosx;

D(f)=R;

E(f)=$\left[-\frac{1}{4};2\right]$;

f(-x)=f(x) – функция является четной;

f(x)=0 : cosx(cosx-1)=0,   x=$\frac{\pi}{2}+\pi k$, k$\in$ Z и x=2πk, k$\in$ Z,

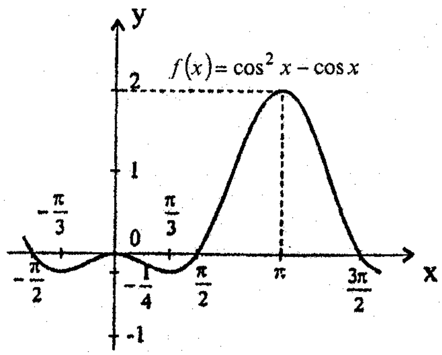
f(0)=0;

f(x+2π)=cos^2(x+2π)-cos(x+2π)=cos^{2}x–cosx=f(x) – функция периодическая с T=2π;

f'(x)=0: sinx=0,   cosx=$\frac{1}{2}$;

x=πk, k$\in$ Z,   x=$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, k$\in$ Z;

x	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$	$-\frac{\pi}{3}+2\pi n$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; 2\pi n\right)$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	$-\frac{1}{4}$	↗
		min	
x	$2\pi n$	$\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$	$\frac{\pi}{3}+2\pi n$
f'(x)	0	-	0
f(x)	0	↘	$-\frac{1}{4}$
	max		min
x	$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$	$\pi+2\pi n$	$\left(\pi+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗	2	↘
		max	



г) f(x)=$\frac{x}{x-1}$;

D(f)=R/ $\{1\}$;

E(f)R/ $\{1\}$;

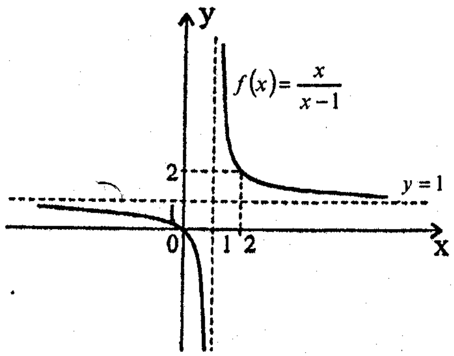
f(x)= – функция общего вида;

f(x)=0, если x=0;

f'(x)=$\frac{x-1+x}{(x-1)^2}$ =-$\frac{1}{(x-1)^2}$,

D(f')=R/ $\{1\}$;

$f'(x)<0$ при $x\in D(f')$, f(x) убывает на $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$;
Прямая y=1 – горизонтальная асимптома для f(x);
x=1 – вертикальная асимптома.



303.

а) f(x)=tgx-x;

D(f')=$R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in Z\right\}$;

f'(x)=$\frac{1}{\cos^2 x}$ -1;

D(f')=D(f)=$R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in Z\right\}$;

f'(x)>0: $\frac{1}{\cos^2 x}>1$.

Следовательно, на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ f'(x)>0,

т.е. функция f(x) возрастает на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

б) f(x)=$\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

D(f)=$(0;+\infty)=R^+$;

f'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$,

D(f')=$(0;+\infty)$=D(f);

f'(x)>0, f(x) возрастает на $(0;+\infty)$.

Т.к. $[1;+\infty)\subset(0;+\infty)$, то f(x) возрастает на $[1;+\infty)$;

в) f(x)=x-sinx;
D(f)=R;
f′(x)=1-cosx,
D(f′)=R=D(f);
f′(x) $\geq$ 0, f(x) возрастает на (0;+ ∞);

г) f(x)=x+ $\frac{\pi}{2}$ -cosx;

D(f)=R;
f’(x)=1+sinx,
D(f’)=R;

f’(x)>0, для любого x $\in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, f(x) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

304.

f(x)=4x^3-3x^2-36x-10;
D(f)=R;
E(f)=R;
f′(x)=12x^2-6x-36=12(x+1,5)(x-2);

x	(- ∞ ;-1,5)	-1,5	(-1,5;2)	2	(2;+ ∞)
f’(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$\nearrow$	23,75	$\searrow$	-62	$\nearrow$
		max		min	

На (- ∞ ;-1,5) f(x) возрастает от - ∞ до 23,75 – существует точка $x_0 \in$ (- ∞ ;-1,5): f(x_0)=0;
на (-1,5;2) f(x) убывает от 23,15 до –62 – существует точка $x_1 \in$ (-1,5;2): f(x_1)=0;
на (2;+ ∞) f(x) возрастает от –62 до + ∞ - существует точка $x_2 \in$ (2;+ ∞): f(x_2)=0.
Итак, уравнение 4x^3-3x^2-36x-10=0 имеет 3 корня.

б) f(x)=$\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x$;

D(f)=R; E(f)=R;
f′(x)=x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1);

x	(- ∞ ;-1)	-1	(-1;1)	1	(1;3)	3	(3;+ ∞)
f’(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	$\searrow$	-2,25	$\nearrow$	1,75	$\searrow$	-2,25	$\nearrow$
		min		max		min	

Из таблицы видно, что f(x) имеет 4 корня.

в) $f(x)=x^4-4x^3-9$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;
$f'(x)=x^3-12x^2=x^2(x-3)$;

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-36	$\searrow$
				min	

На $(-\infty;0)$ $f(x)$ убывает от $-\infty$ до -9 – существует точка $x_0 \in (-\infty;0)$: $f(x_1)=0$;
на $(0;3)$ $f(x)$ убывает от -9 до –36 –$f(x)$ не имеет корней;
на $(3;+\infty)$ $f(x)$ возрастает от –36 до $+\infty$ - существует точка $x_2 \in (3;+\infty)$: $f(x_2)=0$.
Итак, уравнение $x^4-4x^3-9=0$ имеет 2 корня на R.

г) $f(x)=x^2-\frac{x^3}{3}-1$;
$D(f)=R$;
$E(f)=R$;
$f'(x)=2x-x^2=x(2-x)$;

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$
		min		max	

На $(-\infty;0)$ $f(x)$ убывает от $-\infty$ до -1 – существует точка $x_0 \in (-\infty;0)$: $f(x_0)=0$;
на $(0;2)$ $f(x)$ возрастает от -1 до $\frac{1}{3}$ – существует точка $x_1 \in (0;2)$: $f(x_1)=0$;
на $(2;+\infty)$ $f(x)$ убывает от $\frac{1}{3}$ до $-\infty$ - существует точка $x_2 \in (2;+\infty)$: $f(x_2)=0$.
Итак, уравнение $x^2-\frac{x^3}{3}-1=0$ имеет 3 корня на R.

25. Наибольшее и наименьшее значения функции

305.

а) f(x)=x^4-8x^2-9;

f′(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2);

D(f′)=R;

f′(x)=0, при x=0; ± 2;

f(-1)=-16, f(0)=-9, f(1)=-16.

$\max\limits_{[-1;1]}$ f(x)=f(0)=-9, $\min\limits_{[-1;1]}$ f(x)=f(1)=f(-1)=-16;

f(2)=25; f(3)=0;

$\max\limits_{[0;3]}$ f(x)=f(3)=0, $\min\limits_{[0;3]}$ f(x)=f(2)=-25;

б) f(x)=$\frac{x^2+4}{x}$;

D(f′)=R\ $\{0\}$;

f′(x)=0, если x=± 2;

f(-4)=-5, f(-2)=-4; f(-1)=-5;

$\max\limits_{[-4;-1]}$ f(x)=f(-2)=-4, $\min\limits_{[-4;-1]}$ f(x)=f(-4)=f(-1)=-5;

f(1)=5, f(2)=4, f(3)=$\frac{13}{3}$;

$\max\limits_{[1;3]}$ f(x)=f(1)=5, $\min\limits_{[1;3]}$ f(x)=f(2)=4;

в) f(x)=3x^5-5x^3;

D(f)=R;

f′(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1);

D(f′)=R;

f′(x)=0 при x=0; ± 1;

f(0)=0, f(1)=-2, f(2)=56;

$\max\limits_{[0;2]}$ f(x)=f(2)=56, $\min\limits_{[0;2]}$ f(x)=f(1)=-2;

f(3)=594;

$\max\limits_{[2;3]}$ f(x)=f(3)=594, $\min\limits_{[2;3]}$ f(x)=f(2)=56;

г) f(x)=$\frac{x}{x+1}$;

D(f)=R\ $\{-1\}$;

$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

$D(f)=R\setminus\{-1\}$;

f(-3)=1,5, f(-2)=2;

$\max\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-2)=2$, $\min\limits_{[-3;-2]} f(x)=f(-3)=-\frac{3}{2}$;

f(1)=0,5, $f(5)=\frac{5}{6}$;

$\max\limits_{[1;5]} f(x)=f(5)=\frac{5}{6}$, $\min\limits_{[1;5]} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}$.

306.

а) $f(x)=x^3+3x^2-9x$;

D(f)=R;

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$;

D(f′)=R;

f′(x)=0, при x=-3; 1;

f(-4)=20, f(-3)=27, f(0)=0;

$\max\limits_{[-4;0]} f(x)=f(-3)=27$, $\min\limits_{[\ 4;0]} f(x)=f(0)=0$;

f(3)=27, f(4)=76;

$\max\limits_{[3;4]} f(x)=f(4)=76$, $\min\limits_{[3;4]} f(x)=f(3)=27$;

$\max\limits_{[-4;0]} f(x)=\min\limits_{[3;4]} f(x)$;

б) $f(x)=x^4-2x^2+4$;

D(f)=R;

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$;

D(f′)=R;

f’(x)=0, при x=0; ± 1;

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=3\frac{9}{16}$ (f(x) – четная), f(0)=4;

$\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} f(x)=f(0)=4$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=3\frac{9}{16}$;

f(2)=12, f(3)=67;

$\max\limits_{[2;3]} f(x)=f(3)=67$, $\min\limits_{[2;3]} f(x)=f(2)=12$;

$\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} f(x)<\min\limits_{[2;3]} f(x)$;

307.

$s(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$.

$D(s)=[0;+\infty)$;

$v(t)=s'(t)=24t-2t^2=-2t(t-12)$, $D(s')=[0;+\infty)$;

$v'(t)=24t-4t=4(6-t)$,

$D(v')=[0;+\infty)$;

$v'(t)=0$, при $t=6$ (с);

$v(4)=64$(м/с); $v(6=72$(м/с); $v(10)=40$(м/с);

$\max\limits_{[4;10]} v(t)=v(6)=72$(м/с) – наибольшая скорость, при $t=6$с.

308.

$f(x)=21x+2x^2-\frac{x3}{3}$;

$D(f)=R$;

$f'(x)=21+4x-x^2$,

$D(f')=R$;

$f''(x)=4-2x=2(2-x)$,

$D(f'')=R$;

$f''(x)=0$, при $x=2$;

$f'(-2)=9$, $f'(2)=25$, $f'(5)=16$;

$\max\limits_{[-2;5]} f'(x)=f'(2)=25$, $\min\limits_{[-2;5]} f'(x)=f'(2)=9$;

309.

$v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t=-2t(t-12)$;

$a(t)=v'(t)=\frac{1}{2}t^2-12=\frac{1}{2}(t-2\sqrt{6})(t+2\sqrt{6})$,

$D(a)=[0;+\infty)$;

$a'(t)=t$, $D(a')=[0;+\infty)$;

$a(10)=38\left(\frac{м}{с^2}\right)$; $a\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$;

$\min\limits_{[10;50]} a(t)=a(10)=38\left(\frac{м}{с^2}\right)$.

310.

а) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$;

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$,

$D(f')=R$;

f'(x)=0, если x=$\frac{\pi}{2}+\pi n$, n$\in$ Z и x=$(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, k$\in$ Z;

на [0;2π]; f'(x)=0, если x=$\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$;

f(0)=1, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$;

$\max\limits_{[0;2\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1{,}5$; $\min\limits_{[0;2\pi]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$;

б) $f(x)=1{,}5x^2+\frac{81}{x}$;

D(f)=R\{0};

$f'(x)=3x-\frac{81}{x^2}=3x\left(1-\frac{27}{x^3}\right)=3x\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}\right)$;

D(f′)=R\{0};

f′(x)=0, при x=3;

f(1)=82,5; f(3)=40,5, f(4)=44,25;

$\max\limits_{[1;4]} f(x)=f(1)=82{,}5$; $\min\limits_{[1;4]} f(x)=f(3)=40{,}5$;

в) f(x)=2sinx+sin2x;

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2(2\cos^2 x-1)=4\cos^2 x+2\cos x-2$;

D(f′)=R;

$f'(x)=0$: $2\cos^2 x+\cos x-1=0$; cosx=-1, $\cos x=\frac{1}{2}$;

$x=\pi+2\pi n$, n$\in$ Z, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, n$\in$ Z;

на $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$: f′(x)=0 при x=$\pi$; $\frac{\pi}{3}$;

f(0)=1, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, f($\pi$)=0, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$;

$\max\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$;

г) $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$;

D(f)=R\{–2};

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$;

$D(f')=R\setminus\{-2\}$;

$f'(x)=0$ при $x=-1;-3$;

$f(-5)=-\frac{16}{3}$, $f(-3)=-4$, $f(-2,5)=-4,5$;

$\max\limits_{[-5;-2,5]} f(x)=f(-3)=-4$, $\min\limits_{[-5;-2,5]} f(x)=f(-5)=-\frac{16}{3}$.

311.

Пусть одно из слагаемых равно x, тогда второе 24-x. Рассмотрим $f(x)=x^2+(24-x)^2$. Найдем $\min\limits_{[0;24]} f(x)$:

$f'(x)=2x-2(24-x)=4(x-12)$,

$D(f')=[0;24]$;

$f'(x)=0$, при $x=12$;

$f(0)=576=f(24)$, $f(12)=288$;

$\min\limits_{[0;24]} f(x)=f(12)=288$;

Первое слагаемое x=12, а второе слагаемое равно 24-12=12.

312.

Пусть одно из слагаемых равно y, тогда второе 4-y. Рассмотрим $g(y)=y(4-y)$. Найдем $\max\limits_{[0;4]} g(y)$:

$g'(y)=4-y-y=2(2-y)$,

$D(y')=[0;4]$;

$g'(y)=0$, при $y=2$;

$g(0)=g(4)=0$, $g(2)=4$;

$\max\limits_{[0;4]} g(y)=g(2)=4$.

Т.е. y=2 и 4-y=2.

313.

Пусть длина меньшей стороны прямоугольника равна x (м), тогда длина второй стороны равна (24-x) м.

Площадь прямоугольника, как функция x, есть $s(x)=x(24-x)$ ($м^2$), при $x\in(0;24)$. Найдем $\max\limits_{[0;24]} g(x)$:

$s'(x)=24-2x=2(12-x)$,

$D(s')=[0;24]$.

$s(0)=s(24)=0$, $s(12)=144$;

$\max\limits_{[0;24]} s(x)=s(12)=144.$

Следовательно, длина меньшей стороны должна быть 12 м, длина большей стороны 24-12=12 м.

Ответ: 12м.

314.

Пусть первое слагаемое равно x, второе 2x – согласно условию, тогда третье 54-3x. Рассмотрим функцию $h(x)=3x\cdot 2x(18-x)$. Будем искать $\max\limits_{[0;18]} h(x)$:

$h'(x)=216x-18x^2=18x(12-x)$;

$h'(x)=0$, при $x=0;12$;

$h(0)=h(18)=0$, $h(12)=5184$;

$\max\limits_{[0;18]} h(x)=h(12)=5184.$

Итак, первое слагаемое равно 12, второе $2\cdot12=24$, третье 54-3 12=18.

Ответ: 12; 24; 18.

315.

Пусть один из сомножителей равен t, тогда другой равен $\frac{16}{t}$.

Рассмотрим $f(t)=t^2+\left(\frac{16}{t}\right)^2$, и $D(f)=(0;+\infty)$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения f(t) на $(0;+\infty)$.

$f'(t)=2t-\frac{2\cdot256}{t^3}=\frac{2(t^4-256)}{t^3}=\frac{2(t-4)(t+4)(t^2+16)}{t^3}$;

на $(0;+\infty)$: $f'(t)<0$, при $t\in(0;4)$, $f'(t)=0$ при t=4 – точка минимума f(t), при t=4 – минимум.

Итак, один сомножитель равен 4, другой равен $\frac{16}{4}=4$.

Ответ: 4 и 4.

316.

Пусть длина одной стороны равна x (см), тогда длина другой стороны равна $\frac{64}{x}$ (см).

Тогда периметр прямоугольника равен $P(x)=2\left(x+\frac{64}{x}\right)$, причем $D(P)=(0;+\infty)$.

Найдем $\min\limits_{[0;+\infty)} P(x)$.

$P'(x)=2-\dfrac{128}{x^2}=\dfrac{2(x-8)(x+8)}{x^2}$;

на $(0;+\infty)$: $P'(x)<0$, при $x\in(0;8)$; $P'(x)=0$, при $x=8$ и $P'(x)>0$, при $x\in(8;+\infty)$. Точка $x=8$ – точка минимума для $P(x)$ на $(0;+\infty)$, свое наименьшее значение $P(x)$ достигает при $x=8$.

Длина сторон прямоугольника должна быть равна 8 (см).

Ответ: 8 (см) и 8 (см).

317.

$S=S_{осн.}+S_{бок.поверх.}$. При этом $S_{осн.}=x^2$, где x – сторона квадрата в основании;

$S_{бок.поверх.}=4xh$, где h – высота параллелепипеда. По условию

$V=13,5$ (л) или $V=x^2h$, откуда $h=\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{13,5}{x^2}$ (дм). Следовательно,

$S(x)=x^2+4x\dfrac{13,5}{x^2}=x^2+\dfrac{54}{x}$ (дм^2). Найдем min $S(x)$ на R^+:

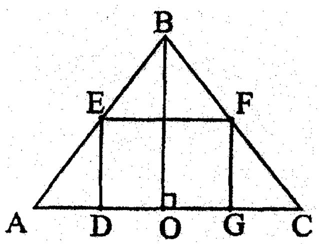
$S'(x)=2x-\dfrac{54}{x^2}=\dfrac{2(x^3-27)}{x^2}=\dfrac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}$;

$S'(x)<0$ на $(0;3)$; $S'(x)=0$ при $x=3$; $S'(x)>0$ на $(3;+\infty)$ – точка $x=3$ есть точка минимума функции $S(x)$ на $(0;+\infty)$.

При $x=3$ (дм), $h=\dfrac{13,5}{3^2}=1,5$ (дм).

Ответ: 3x3x1,5 (дм) – размеры бака.

318.



Обозначим $|ED|=x$.

$\dfrac{|BO|}{x}=\dfrac{|AO|}{|AD|}$;

$|BO|=\sqrt{|AB|^2-|AO|^2}$, $|AO|=\dfrac{1}{2}|AC|=30$ (см);

$|BO| = \sqrt{50^2 - 30^2}$ =40 (см);

$|AD| = \dfrac{|AO|x}{|BO|} = \dfrac{30x}{40}$, $|DG| = |AC| - 2|AD|$ =60-$\dfrac{2 \cdot 30x}{40}$=60-1,5x;

S_{DEFG}=$|ED| \cdot |DG|$ =x(60-1,5x), где x$\in$ (0;30). Найдем $\max\limits_{[0;30)}$ S(x):

S′(x)=60-3x=3(20-x);

S′(x)<0, при x$\in$ (20;30), S′(x)=0, при x=20, S′(x)>0, при x$\in$ (0;20).

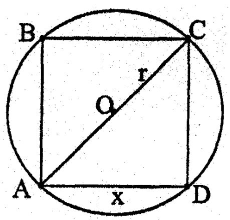
Т.е. наибольшее значение на (0;30) S(x) достигает при x=20.

Тогда:

$|ED| = |FG|$ =20 (см), $|ED| = |EF|$ =60-$\dfrac{60 \cdot 20}{40}$ =30 (см).

Ответ: 20 (см), 30 (см).

319.



Пусть $|AD|$ =x, где 0<x<2r. Тогда $(2r)^2$=x^2+$|CD|^2$,

$|CD| = \sqrt{4r^2 - x^2}$;

S_{ABCD}=S(x)=x$\cdot$ $\sqrt{4r^2 - x^2}$.

Найдем $\max\limits_{(0;22)}$ S(x):

S′(x)= $\sqrt{4r^2 - x^2}$ - $\dfrac{2x^2}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \dfrac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \dfrac{2(\sqrt{2}r - x)(\sqrt{2}r + x)}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$;

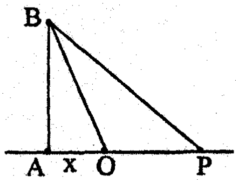
S′(x)>0, при x$\in$ (0; $\sqrt{2}r$), S′(x)=0, при x= $\sqrt{2}r$, S′(x)<0 при, x$\in$ ($\sqrt{2}r$;2r).

Значит, $\max\limits_{(0;2r)}$ S(x)=S($\sqrt{2}r$)=2r^2.

Т.к. r=20 (см), то x=20$\sqrt{2}$ (см).

Ответ: 20$\sqrt{2}$ см, 20$\sqrt{2}$ см.

320.



Время, которое курьер затрачивает на дорогу от точки B до точки P равно:

$t=\frac{|BO|}{8}+\frac{|OP|}{10}$ ч;

$|BO|=\sqrt{9^2-x^2}=\sqrt{81+x^2}$, $|OP|=15-x$, где x – расстояние OA;

$t(x)=\frac{\sqrt{81+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}$, где $x\in[0;15]$.

Найдем $\min\limits_{[0;15]} t(x)$:

$t'(x)=\frac{x}{8\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{10}$;

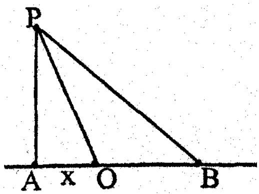
$t'(x)=0$: $\frac{x}{\sqrt{81+x^2}}=0{,}8$; $x^2=0{,}64(81+x^2)$; $x=12$;

$t(0)=\frac{9}{8}+\frac{3}{10}=\frac{21}{8}=2{,}625$; $t(12)=\frac{15}{8}+\frac{3}{10}=2{,}175$; $t(15)=\frac{\sqrt{306}}{8}$;

$\min\limits_{[0;15]} t(x)=t(12)=2{,}175$.

Ответ: 3 (км) от населенного пункта.

321.



Воспользуемся результатами предыдущей задачи, тогда:

$t(x)=\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5}$, где $x\in[0;5]$;

Найдем $\min\limits_{[0;5]} t(x)$

$t'(x)=\dfrac{x}{4\sqrt{9+x^2}}-\dfrac{1}{5}$;

$t'(x)=0$: $\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}=0{,}8$; $x^2=0{,}64(9+x^2)$, $x=4$ (км);

$t(0)=1{,}75$; $t(4)=1{,}45$; $t(5)=\dfrac{\sqrt{34}}{4}$;

$\min\limits_{[0;5]} t(x)=t(4)=1{,}45$.

Ответ: 4 км от ближайшей точки на берегу.

322.

Обозначим искомое число через x, тогда рассматриваемая сумма имеет вид: $S(x)=x+x^2$, $x\in R$.

Найдем $\min\limits_{R} S(x)$:

$S'(x)=1+2x$;

$S'(x)=0$, при $x=-0{,}5$;

на $(-\infty;-0{,}5)$ $S'(x)<0$ – функция убывает на $(-\infty;0{,}5]$,

на $(0{,}5;+\infty)$ $S'(x)>0$ – функция возрастает на $[-0{,}5;+\infty)$,

точка $x=-0{,}5$ - точка минимума $S(x)$ на R;

$\min\limits_{(-\infty;+\infty)} S(x)=S(-0{,}5)=-0{,}25$.

Ответ: -0,5.

323.

Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину c, а длина одного из катетов равна x. Тогда длина другого катета равна $\sqrt{c^2-x^2}$ и площадь треугольника $S(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{c^2-x^2}$, где $x\in(0;c)$.

$S'(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{c^2-x^2}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{c^2-x^2}}=\dfrac{c^2-2x^2}{2\sqrt{c^2-x^2}}=\dfrac{(c-\sqrt{2}x)(c+\sqrt{2}x)}{2\sqrt{c^2-x^2}}$;

$S'(x=0)$, при $x=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$;

$S'(x)>0$, при $x\in\left(0;\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$,

$S'(x)=0$, при $x=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$,

$S'(x)<0$, при $x\in\left(\frac{c}{\sqrt{2}};c\right)$;

$\max\limits_{(0;c)} S(x)=S\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=\frac{c^2}{4}$;

Длина одного катета равна $\frac{c}{\sqrt{2}}$, а длина другого катета

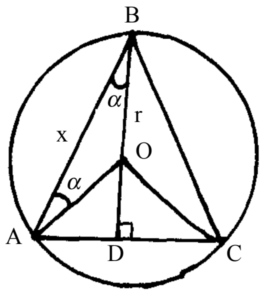
$\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{c}{\sqrt{2}}$ — треугольник равнобедренный, ч.т.д.

324.

Решение этой задачи повторяет решение задачи 319.

$\max\limits_{(0;2r)} S(x)=S(\sqrt{2}r)=2r^2$, где r – радиус окружности. Т.к. длина другой стороны этого прямоугольника равна $\sqrt{4r^2-(\sqrt{2}r)^2}=\sqrt{2}r$, то этот прямоугольник является квадратом со стороной $\sqrt{2}r$.

325.



Пусть |AB|=|BC|=x, $\angle BAO=\angle ABO=\alpha$.

Тогда x=2rcosα, $\cos\alpha=\frac{x}{2r}$;

$|AC|=2x\sin\alpha=2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}}$,

$|BD|=x\cos\alpha=\frac{x^2}{2r}$;

$S_{ABC}(x)=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\frac{x^3}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{4r^2}}=\frac{x^3}{4r^2}\sqrt{4r^2-x^2}$, где $x\in(0;2r)$.

Найдем $\max\limits_{(0;2r)} S(x)$:

$$S'(x)=\frac{3x^2}{4r^2}\sqrt{4r^2-x^2}-\frac{x^4}{4r^4\sqrt{4r^2-x^2}}=\frac{x^2(3r^2-x^2)}{r^2\sqrt{4r^2-x^2}}=$$

$$=\frac{x^2(\sqrt{3}\text{r-}x)(\sqrt{3}r+x)}{r^2\sqrt{4r^2-x^2}};$$

$S'(x)=0$, если $x=\sqrt{3}r$ на $(0;2r)$;

$S'(x)>0$, если $x\in(0;\ \sqrt{3}r)$, $S'(x)<0$, если $x\in(\sqrt{3}r;2r)$;

$$\max_{(0;2r)} S(x)=S(\sqrt{3}r)=\frac{2\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Таким образом, $|AB|=|BC|=\sqrt{3}r$ и $|AC|=\sqrt{3}r$, т.е. треугольник ABC является равносторонним, ч.т.д.