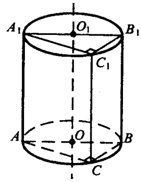
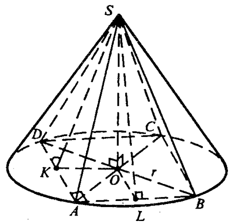
Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар



629. AB — диаметр окружности основания $\angle ACB=90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$BC \perp CC_1$, т.к. CC_1 образующая и перпендикулярна основанию; $BC \perp$ плоскости ACC_1. По признаку перпендикулярности двух плоскостей (п.23) плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости BCC_1B_1.

630. SO перпендикулярна ABCD, SO=h=12 см, AB=8см, BC=6см



OA=OB=r. Ребра пирамиды равны образующим конуса и лежат на поверхности конуса.

BD=2r, BD=$\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}$ =10 см

r=5 см

Вычислим площадь полной поверхности конуса.

$S_{осн}=\pi r^2=\pi \cdot 25$ (см^2)

Из прямоугольного ΔSOA

SA=$\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}$ =13 см

$S_{бок}=\pi rl$, l=SA

$S_{бок}=\pi \cdot 5 \cdot 13=65\pi$ см^2.

$S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}=(25+65)\,\pi=90\pi$ см^2

$S_{ABCD}=AB \cdot BC=6 \cdot 8=48$ см^2

Боковые грани попарно равны. Построим $OK_1\perp DA$, $OL\perp AB$, отрезки SK и SL. По теореме о трех перпендикулярах $SK\perp DA$ и $SL\perp AB$.

OK=$\frac{1}{2}$ AB=4 (см), OL=$\frac{1}{2}$ BC=3 см.

Из Δ SOK: SK=$\sqrt{h^2+OK^2}=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$ см.

$S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}SK\cdot DA=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{10}=12\sqrt{10}$ см^2

Из ΔSOL: SL=$\sqrt{h^2+OL^2}=\sqrt{144+9}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}$ см.

$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}\cdot SL\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sqrt{17}=12\sqrt{17}$ см^2.

$S_{бок}=2\,(S_{\Delta ASD}+S_{\Delta ASB})=2\cdot 12\,(\sqrt{10}+\sqrt{17})=24\,(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ см^2

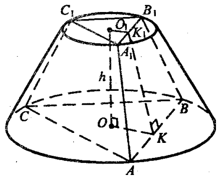
$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}=24\sqrt{10}+24\sqrt{17}+48=24\,(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)$ см^2

$$\frac{S_{пирам}}{S_{кон}}=\frac{24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{90\pi}=\frac{4(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{15\pi}$$

631. а) r=2 см, h=4 см, R=5 см.

Обозначим AC=BC=AB=a, тогда R=$\frac{a}{\sqrt{3}}$, a=R $\sqrt{3}$ =5 $\sqrt{3}$ см.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ см ^{2}.



Обозначим $A_1C_1=B_1C_1=A_1B_1=b$

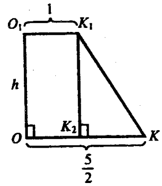
Тогда $r=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $b=r\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$S_{\Delta A_1D_1C_1}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4}=\dfrac{12\cdot\sqrt{3}}{4}$ см ^{2}

Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Построим $OK_1\perp A_1B_1$, $OK\perp AB$, отрезок K_1K. По теореме о трех перпендикулярах $K_1K\perp AB$.

OK, O_1K_r – радиусы вписанных окружностей в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ соответственно.

$OK=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$ см,



$O_1K_1=\dfrac{b}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$ см.

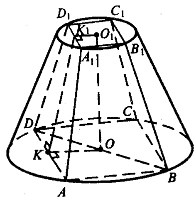
Проведем $K_1K_2\perp OK$. $K_2K_1=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$ см.

Из $\Delta\, K_1K_2K$: $K_1K=\sqrt{h^2+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{16+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{73}{4}}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$ см.

$S_{бок}=3\,S_{\Delta ABB_1A_1}=\dfrac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4}$ см^2

$S_{полн}=S_{бок}+S_{\Delta A_1B_1C_1}=\dfrac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4}+\dfrac{75\sqrt{3}}{4}+\dfrac{12\sqrt{3}}{4}=\dfrac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4}+\dfrac{87\sqrt{3}}{4}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(7\sqrt{73}+29)$ см ^{2}

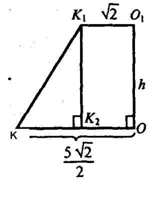


б) Пусть $AB=a$, тогда $R=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$,

$a=R\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ см, $S_{ABCD}=a^2=50$

Обозначим $A_1B_1=b$, тогда $V=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$

$b=r\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ см $\qquad S_{\Delta A_1B_1C_1D_1}=b^2=8$ см ^{2}



Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Построим $O_1K_1\perp D_1A_1$, $OK\perp DA$, отрезок K_1K. По теореме о трех перпендикулярах $K_1K\perp AD$.

$O_1K_1=\dfrac{b}{2}=\sqrt{2}$ см; $\qquad OK=\dfrac{a}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$;

$KK_2 = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см

Из $\Delta K_1 K_2K$:

$K_1K = \sqrt{h^2 + K_2K^2} = \sqrt{16 + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{82}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2}$ см.

$S_{\Delta AA_1D_1D} = \frac{A_1D_1 + AD}{2} \cdot K_1K = \frac{a + b}{2} \cdot K_1K = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \; \frac{\sqrt{82}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{4}$ см

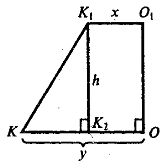
$S_{бок} = 4 \cdot S_{\Delta AA_1D_1D} = 7\sqrt{2} \;\; \sqrt{82}$ см ^{2}.

$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD} + S_{\Delta A_1B_1C_1D_1} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 50 + 8 = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 58 =$

$= (14\sqrt{41} + 58)$ см ^{2}.

в) Обозначим сторону верхнего основания b, нижнего основания a, a > b; радиус верхнего основания — r, нижнего основания — R. Следовательно, b=r, a=R.

Правильный 6-угольник состоит из 6 равносторонних треугольников; высота которых равна радиусу вписанной в 6-угольник окружности равного x, а в нижний 6-угольник – y. Из планиметрии известно, что:



$x = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ см. $y = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см.

Площадь нижнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot y\right) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

Площадь верхнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot x\right) = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Все 6 боковых граней являются равными равнобедренными трапециями. Вычислим высоту трапеции. В плоскости верхнего основания построим отрезок O_1K_1 перпендикулярно к стороне 6-угольника; в нижней плоскости построим ОК перпендикулярно одноименной стороне 6-угольника; проведем отрезок K_1K.

$OK = y$, $O_1K_1 = x$

$$KK_2 = y - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(R - r) = \frac{\sqrt{3}}{2}(5 - 2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$$

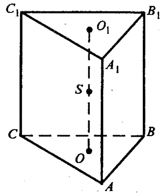
Из ΔK_1K_2K : $K_1K = \sqrt{h^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{64 + 27}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$ см^2.

$S_{бок} = 6 \; \frac{a + b}{2} \cdot KK_1 = 3 \cdot (R + r) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = 3(2 + 5)\frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{21\sqrt{91}}{2}$.

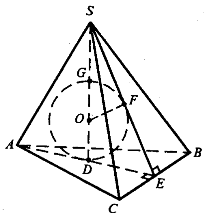
Площадь полной поверхности:

$S_{полн} = S_{бок} + S_{верхн} + S_{нижн} = \dfrac{21\sqrt{91}}{2} + 6\sqrt{3} + \dfrac{75\sqrt{3}}{2} = \dfrac{21\sqrt{91}}{2} + \dfrac{87\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{3}{2}(7\sqrt{91} + 29\sqrt{3})$ см ^{2}.



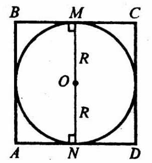
632. Очевидно, что центр сферы лежит в плос-кости α, параллельной основаниям, и проходящей через середины боковых ребер, т.к. она касается всех граней. Кроме того, центр сферы будет совпадать с центром треугольника (т.S), полученным пересечением призмы и плоскости α, а он лежит на отрезке OO_1, соединяющем центры оснований, что и требовалось доказать.



633. Рассмотрим для простоты треугольную правильную пирамиду. SD — высота пирамиды. Построим $AE \perp BC$, отрезок SE. По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp CB$.

Впишем в ΔSDE полуокружность DFG. Центр O окружности лежит на катете SD, и касается сторон DE и SE. ΔSED вместе с полуокружностью DFG повернем вокруг SD. Тогда точка E опишет окружность, вписанную в ΔABC, то есть гипотенуза SE при вращении останется внутри пирамиды, кпроме в трех положений, когда SE совпадает с высотой боковых граней.

Т.е. сфера, образованная вращением полуокружности DFG, имеет единственную общую точку с каждой из боковых граней. Эта сфера касается основания пирамиды в точке D.

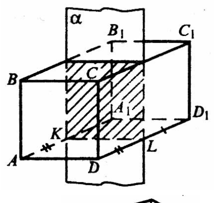


Центр вписанной в пирамиду ΔABC сферы лежит на высоте SD.

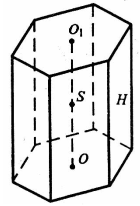
634. а) Рассмотрим сечение, проходящее через ось. Получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы. Обозначим ребро куба через x; $x =$

$= 2R$. Площадь одной грани равна x^2, или $4R^2$.

$S_{полн} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2.$



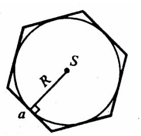
б) Высота призмы O_1O равна диаметру сферы; точки касания сферы с боковыми гранями лежат в сечении призмы плоскостью, которая проходит через середину высоты призмы (центр сферы) перпендикулярно к боковым ребрам.



Пусть сторона правильного 6-угольника равна x, тогда $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Боковая грань — прямоугольник, его площадь равна $H \cdot x$ или $2R \cdot \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cdot R^2.$

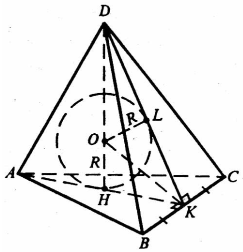
Вычислим площадь боковой поверхности:



$$6\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}R^2=\frac{24}{\sqrt{3}}R^2=\frac{24\sqrt{3}}{3}R^2=8\sqrt{3}R^2.$$

Площадь основания состоит из площадей 6-ти равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}\cdot xR=\frac{1}{2}\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot R=\frac{R^2}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь основания равна $\frac{6R^2}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}R^2=$ $=2\sqrt{3}R^2$. $S_{полн}=8\sqrt{3}R^2+2\sqrt{3}R^2+2\sqrt{3}R^2=12\sqrt{3}R^2$.

в) Все ребра тетраэдра равны; пусть они равны x. Построим AK $\perp$ BC, отрезок DK. В правильном ΔABC AK проходит через центр ΔABC. По теореме о трех перпендикулярах DK $\perp$ BC. $\angle$AKD — линейный угол двугранного угла при основании тетраэдра (все двугранные углы равны).



ΔOKL=ΔOKH, OK — биссектриса $\angle$AKD.

Из ΔDBK: DK=$\sqrt{DB^2-BK^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

HK — радиус вписанной окружности, HK=$\frac{x}{2\sqrt{3}}$.

Пусть $\angle$DKH=φ

В ΔDKH: $\cos\varphi=\frac{HK}{DK}\ \frac{a}{2\sqrt{3}}:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{2a}{2\sqrt{3}\sqrt{3}a}=\frac{1}{3}$.

$\sin\varphi\quad\sqrt{1-cos^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1+\frac{1}{3}}\frac{2\sqrt{2}}{3}:\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

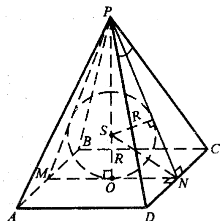
из ΔOHK: $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{HK}}=\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, отсюда HK=$\frac{x}{2\sqrt{3}}=\frac{R}{tg\frac{\varphi}{2}}=2\sqrt{R}$.

x=2 $\sqrt{3}\sqrt{2}$ R=2 $\sqrt{6}$ R.

$S_{\Delta ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\cdot 6\cdot\sqrt{3}}{4}$ R$^{2=}$6 $\sqrt{3}$ R^2

Грани правильного тетраэдра — это равные равносторонние треугольники, поэтому площадь полной поверхности S=4 · $S_{\Delta ABC}$=24 $\sqrt{3}$ R^2.

635. PO — высота пирамиды. Проведем прямую MN параллельную AD через точку O, отрезки PM и PN. По теореме о трех перпендикулярах



PN⊥DC, PM ⊥ AB. Центр сферы совпадает с точкой пересечения биссектрис двугранных углов при основании: также известно, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте пирамиды. Значит, SN — биссектриса ∠PNO — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.

Обозначим AD=x, PN= ℓ .tg $\frac{\varphi}{2}=\frac{x}{2\ell}, \ell=\frac{x}{2tg\frac{\varphi}{2}}$

∠ DPC=φ ∠ PNO= Ψ .

В ΔPON: cos $\Psi=\frac{ON}{PN}=\frac{x}{2\ell}=\frac{x}{2} : \frac{x}{2tg\frac{\varphi}{2}}$ =tg $\frac{\varphi}{2}$

sin $\Psi=\sqrt{1-cos^2\Psi}=\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}$.

В Δ SON: tg $\frac{\varphi}{2}=\frac{SO}{ON}=\frac{2R}{a}$; $\frac{2R}{x}=\frac{sin\Psi}{1+cos\Psi}=\frac{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}{1+tg\frac{\varphi}{2}}$, отсюда x= $\frac{2R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}$,

x= $\frac{2R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{1}{2tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}$;

$$S_{\Delta DCP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})^2}{(1-tg^2\frac{\varphi}{2})\cdot tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})}{(1-tg\frac{\varphi}{2})\cdot tg\frac{\varphi}{2}}$$

$$S_{бок}=4\cdot S_{\Delta DCP}=\frac{4R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\varphi}{2}(1-tg\frac{\varphi}{2})}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{cos\frac{\varphi}{2}+sin\frac{\varphi}{2}}{cos\frac{\varphi}{2}-sin\frac{\varphi}{2}};$$

$\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})$,

отсюда $\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{cos\varphi}{cos\frac{\varphi}{2}-sin\frac{\varphi}{2}}$.

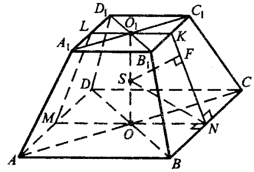
Итак, $S_{бок}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{cos\varphi}{cos^2\frac{\varphi}{2}+sin^2\frac{\varphi}{2}-2sin\frac{\varphi}{2}\cdot cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{cos\varphi}{1-sin\varphi}$.

При R=5 см и φ =60 ° получим:

$$S_{бок}=\frac{4\cdot 25}{tg30^\circ}\cdot\frac{cos\,60^\circ}{1-sin\,60^\circ}=\frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=100\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{100(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{4-3}=$$

$$=100\sqrt{3}(2+\sqrt{3})\text{ см}^2$$

636. Боковые грани — это равнобедренные трапеции.



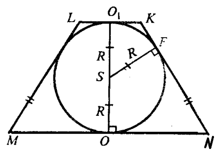
В правильной усеченной пирамиде, центр вписанной в нее сферы лежит на середине отрезка OO_1, где O и O_1 — центры оснований. Это следует из теоремы о центре сферы вписанной в правильную пирамиду. (см. задачу № 633).

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

ML+KN=LK+MN

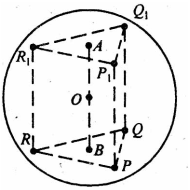
2KN=LK+MN

$KN=\frac{LK+MN}{2}=\frac{B_1C_1+BC}{2}$ (в основаниях — квадраты, $LK=A_1B_1=B_1C_1$ и MN=AB=BC).



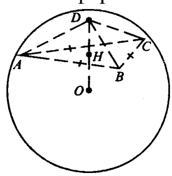
Доказано.

637. а) В основаниях призмы лежат равносторонние треугольники. Пусть A и B — центры оснований.



Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через точку B к верхнему основанию призмы равноудалены от вершин треугольника PQR. Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через т. A, к верхнему основанию призмы, равноудалены от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$. Т.к. призма правильная, то треугольники P_1Q_1R и PQR проектируются один на другой, следовательно, точка B проектируется в точку A и обратно. Поэтому, AB $\perp$ плоскости PQR. Тогда, отрезок AB является геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин каждого из треугольников. A его середина — точка O — равноудалена от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$ и от вершин ΔPQR на расстояние R, равное радиусу описанной около призмы сферы.

б) Построим из вершины D пирамиды высоту DH $\perp$ плоскости ABC. Проведем отрезки HA, HB, HC.

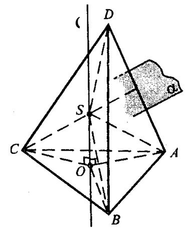


$\Delta DHA=\Delta DHB=\Delta DHC$ (они прямоугольные, DH — общий катет, AD=BD=BC — по условию).

HA=HB=HC=r. r — радиус описанной около Δ ABC окружности.

Проведем отрезок OG $\perp$ плоскости ABC (точка G на рисунке не показана). Проведем отрезки GA, GB, GC, OA, OB, OC, $\Delta DCA=\Delta OGB=\Delta OGC$ (катет OG — общий, OA=OB=OC —R, R — радиус сферы). Значит, GA=GB=GC=r, r — радиус окружности, описанной около ΔABC. Следовательно, вокруг ΔABC можно описать единственную окружность.

Точки H и G совпадают, и точки D, H, O лежат на одной прямой. Следовательно, центр сферы O лежит на высоте пирамиды DH или на продолжении за точку H, что и показано на рисунке.



638. Тетраэдр — это пространственный четырехугольник.

а) Докажем, что через любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну. (см.ниже).

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину. Следовательно, центр сферы, описанной около тетраэдра, принадлежит каждой из плоскостей, проведенных через середины ребрер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам.

Пусть O — центр окружности, описанной около грани ABC тетраэдра, d— прямая, которая проходит через точку O, d $\perp$ плоскости ABC. Все точки прямой d равноудалены от точек A, B и C. (OA=OB=OC=r — радиус описанной окружности). Если точка S $\in$ d, то прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны двум катетам. Следовательно, SA=SB=SC.

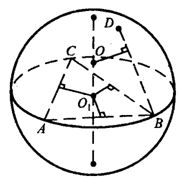
Пусть плоскость α проходит через середину ребра DA и плоскость $\alpha \perp$ DA. Докажем, что d и α пересекаются. Предположим, что $\alpha \parallel$ d.

Если $\alpha \perp$ AD и d $\parallel \alpha$, то AD $\perp$ d. Кроме того, d $\perp$ AB (поскольку d $\perp$ плоскости ABC), и, значит d $\perp$ ABD — по признаку перпендикулярности прямой плоскости.

Таким образом, через точку A проведены две различные плоскости ABC и ABD, перпендикулярные к одной прямой, что невозможно. Значит предположение, что d $\parallel$ α неверно.

Значит, пусть точка S точка пересечения d и α. Тогда SD=SA, т.к. S принадлежит каждой плоскости, проходящей через середину ребра тетраэдра и перпендикуляра к этому ребру.

$O_1 \in$ плоскости ABC.



Пусть точка O равноудаленна от всех вершин тетраэдра.

Расстояние от точки O до одной из вершин тетра-эдра обозначим R. Сфера с центром O и радиусом R проходит через все данные точки. Из этого доказательства следует, что такая сфера может быть только одна.

Что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим двугранный угол. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих граней двугранного угла, это плоскость, которая делит двугранный угол пополам. Значит центр сферы, вписанной в тетраэдр, равноудален от всех граней пирамиды, и он должен принадлежать каждой из биссекторных плоскостей, то есть это точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов тетраэдра. Т.к. все точки биссекторной плоскости лежат между гранями двугранного угла, то центр сферы, вписанной в тетраэдр, всегда находится внутри тетраэдра.

Центр у вписанной сферы может быть только один. Сфера с радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра. Следовательно, в любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.

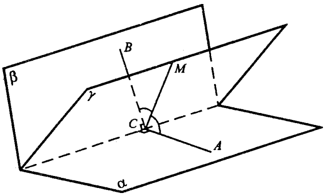
Теперь докажем 2 факта, которые использовались в доказательстве.

1) В любой трехгранный угол можно вписать сферу.

2) Биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

1. $M \in \gamma$

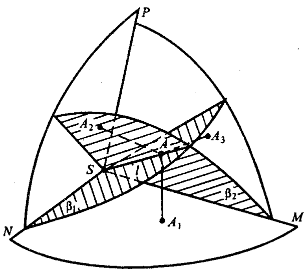
$\angle ACB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β.



Пусть γ делит этот двугранный угол так, что $\angle$ BCM=$\angle$ ACM. Таким образом, γ биссекторная плоскость данного двугранного угла.

Докажем, что биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одному лучу.

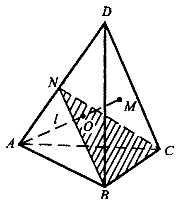
β_1 и β_2 — биссекторные плоскости, их пересечение — луч, с началом в точке S — вершине тетраэдра. Луч обозначим l. Пусть точка A $\in$ l, A — произвольная точка луча. Проведем перпендикуляры AA_1, AA_2, AA_3 на грани трехгранного угла. A $\in \beta_1$, таким образом, $AA_2=AA_1$; A $\in \beta_2$, поэтому $AA_3=AA_1$.



Тогда, $AA_1=AA_2=AA_3$, то есть точка A равноудалена от плоскостей граней NSB и MSB. Значит, точка A находится на биссекторной плоскости двугранного угла с ребром SP. А т.к. точка A произвольная точка, то и весь луч находится в биссекторной плоскости.

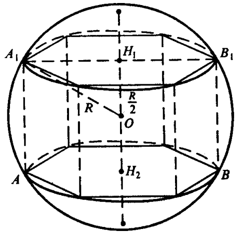
Значит, все три биссекторные плоскости пересекаются по одному лучу, любая точка которых равноудалена.

2. Пусть l — луч, по которому пересекаются биссекторные плоскти трехгранного угла при вершине A, M — точка пересечения луча l и грани BDC. Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссекторная плоскость этого двугранного угла пересечет отрезок AM в точке O$\in$ l, поэтому она равноудалена от плоскостей ABC и ABD и ACD. Расстояние от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, т.к. точка O принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, то есть принадлежит всем биссекторным плоскостям двугранных углов тетраэдра. Таким образом, биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.



Оба утверждения доказаны.

639. а) Центр сферы совпадает с центром куба — точкой пересечения диагоналей куба. Пусть сторона основания и (его ребро) равно x. Тогда диагональ куба d= $\sqrt{3}$ x. С другой стороны, d=2R.



2R= $\sqrt{3}$ x , x= $\frac{2}{\sqrt{3}}$R Площади поверхностей одной грани равна x^2, а полная поверхность куба равна $6x^2$.

$6x^2=6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2=\frac{6\cdot 4}{3}\,R^2=8R^2$

б) H_1 и H_2 — центры оснований призмы; H_1H_2 — высота призмы.

Рассмотрим сечение призмы плоскостью, проходящей через диаметр оснований призмы. Сечение является прямоугольником AA_1B_1B.

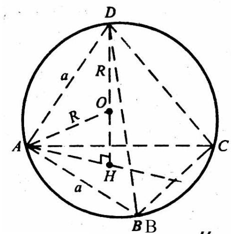
Из прямоугольного ΔOA_1H_1: $A_1H_1=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

A_1H_1 является радиусом описанной окружности около основания призмы, а в правильном 6-угольнике его сторона равна радиусу описанной окружности.

Пусть сторона основания равна x, следовательно, x= $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$S_{бок}=6xR=3\sqrt{3}\,R^2$. $S_{полн}=3\sqrt{3}\,R^2+2\,S_{осн}=3\sqrt{3}\,R^2+3\sqrt{3}\,x^2=3\sqrt{3}\,(R^2+$ $+\frac{R^2\cdot 3}{4})=3\sqrt{3}\,R^2\,\frac{7}{4}=\frac{21\sqrt{3}}{4}\,R^2$

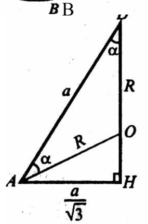
в) Пусть ребро тетраэдра равно x. Центр описанной сферы лежит на высоте DH, точка H — центр ΔABC, поэтому HA= $\frac{x}{\sqrt{3}}$.



Из прямоугольного ΔADH:

DH= $\sqrt{x^2-HA^2}=x\sqrt{\frac{2}{3}}$. $\angle$ ADH= φ

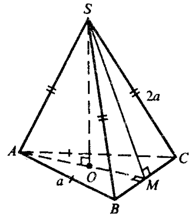
$\cos\varphi=\frac{DH}{AD}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Из ΔAOD по теореме косинусов :

$x^2=2R^2-2R^2\cos(180°-2\varphi)=2R^2+2R^2\cos 2\varphi=2R^2(1+$ $+2\cos^2\varphi-1)=4R^2\cos^2\varphi=\frac{8}{3}R^2$.

Площадь грани тетраэдра равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; равны и их H, значит



$S_{полн}= 4\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3} = \frac{8}{3}R^2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$.

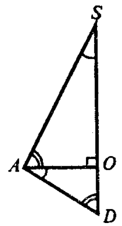
640. SO — высота пирамиды; SO=h.

Пусть O — центр основания пирамиды, M — середина BC, AM — высота в ΔABC.

$AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, $OM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$.

Центры обеих сфер лежат на прямой SO, SO $\perp$ плоскости AB.

Обозначим R — радиус описанной сферы. Продолжим SO до пересечения с описанной сферой в точке D. SD — диаметр шара, $\angle SAD=90°$. Из подобия треугольников OAS и ODA:



$$OD=\frac{AO^2}{OS}=\frac{x^2}{3h}\quad\left(AO=\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$2R=SD=SO+OD=h+\frac{x^2}{3h}=\frac{3h^2+a^2}{3h},$$

$R=\frac{3h^2+x^2}{2\cdot 3h}=\frac{3h^2+x^2}{6h}$. Проведем апофему SM.

Из ΔSMC: $SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{x\sqrt{15}}{2}$.

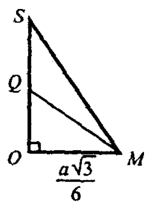
$OM=\frac{x}{2\sqrt{3}}$, поэтому из ΔSOM:

$$h=SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=\sqrt{\frac{15x^2}{4}-\frac{x^2}{12}}=\sqrt{\frac{44x^2}{12}}=x\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$R=\frac{3x^2\cdot\frac{11}{3}+x^2}{6x\sqrt{\frac{11}{3}}}=\frac{12x}{6\sqrt{\frac{11}{3}}}=\frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{11}}=\frac{2x\sqrt{33}}{11}=\frac{2\sqrt{33}}{11}x$$

Вычислим радиус r вписанной сферы.

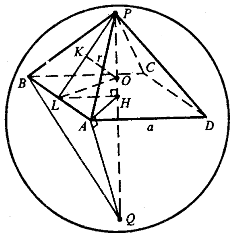
Примем Q — центр вписанного шара, следовательно в ΔSOM; QM — биссектриса $\angle SMO$; QO=r; $SM=\frac{x\sqrt{15}}{2}$.



По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника:

$\frac{OQ}{SQ}=\frac{OM}{SM}$; $\frac{r}{h-r}=\frac{x\sqrt{3}\cdot 2}{6x\sqrt{15}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $h=x\cdot\sqrt{\frac{11}{3}}$.

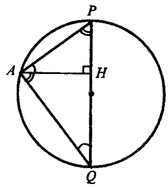
$$r\left(3\sqrt{5}+1\right)=h \qquad r=\frac{x\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{5}+1\right)}=\frac{\left(3\sqrt{5}-1\right)}{4\sqrt{33}}x$$



641. Продолжим высоту пирамиды PH до пересечения со сферой в точке Q. PQ — диаметр и центр описанной сферы лежит на высоте HP, или на ее продолжении за точку H. Соединим отрезком точку A с точкой H. Рассмотрим сечение плоскостью APQ.

$\angle QAP=90°$ так как опирается на диаметр, Из подобия ΔHPA и ΔHAQ ,

$\frac{AH}{PH}=\frac{HQ}{AH}$, $AH^2=HQ\cdot PH$, $PQ=10$, $PH=h$.



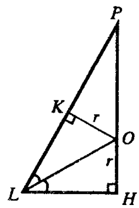
Примем x — сторона основания, следовательно,

$AH=\frac{1}{2}x\sqrt{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\frac{x^2}{2}=h\,(10-h)$. (1)

Построим $HL\perp AB$, отрезок PL. $LH=\frac{x}{2}$, плоскость $PLH\perp$ плоскость ABP. Пусть O — центр вписанной сферы, $OK\perp PL$.

$OH=OK=r$, OL — биссектриса $\angle HLP$.



$PL=\sqrt{h^2+LH^2}=\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}$.

Обозначим $\angle HLP=\varphi$.

$$\sin\varphi=\frac{PH}{LP}=\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}}=\frac{2h}{\sqrt{4h^2+x^2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{4h^2+x^2}}$$

Из Δ OLH: $\frac{OH}{LH}=\frac{r}{\frac{x}{2}}\,2=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$, $r=2=\frac{x}{2}\ \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}.=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1-\frac{x}{\sqrt{4h^2+x^2}}}{\frac{2h}{\sqrt{4h^2+x}}}=\frac{\sqrt{4h^2+x^2}-x}{2h},$$

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4h^2+a^2}-a}{2h}=2, \qquad (2)$$

Решим систему:

$x\sqrt{4h^2+x^2}=x^2+8h$

$$\begin{cases} x\sqrt{4h^2+x^2}=x^2+8h & (3) \\ x^2=2h(10-h). & (4) \end{cases}$$

$x^2(4h^2+x^2)=x^4+64h^2+16x^2h$,

$4h^2x^2+x^4=x^4+64h^2+16x^2h$

Разделим все на 4h, $h\neq 0$

$x^2(4-h)+16h=0$,

Подставим x^2 из (4)

$2(10h-h^2)(4-h)+16h=0$

Разделим обе части на 2h, $h\neq 0$

$(10-h)(4-h)+8=0$

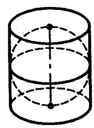
$h^2-14h+48=0$

$h_{1,2}=7\pm\sqrt{49-48}=7\pm 1$

$h_1=8$ или $h_2=6$; $x_1^2=20\cdot 8-2\cdot 64=160-128=32$,

$x_1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,

$x_2^2=20\cdot 6-2\cdot 36=120-72=48$, $x_2=4\sqrt{3}$.



642. Рассмотрим осевое сечение плоскостью ABCD. R — радиус сферы. Очевидно, ABCD — квадрат, $\Delta OBF=\Delta OBH_1$.

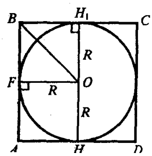
$BH_1=OH_1=R$, BH_1 — радиус основания цилиндра,

$HH_1=2R$ — высота цилиндра.

Вычислим площадь полной поверхности цилиндра.

$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$; $S_{бок}=2\pi\cdot BH_1\cdot HH_1=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$,

$S_{осн}=\pi\cdot BH_1^2=\pi R^2$; $S_{полн}=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$.



Площадь поверхности сферы $4\pi R^2$. $\dfrac{S_{сф}}{S_{полн}}=\dfrac{4\pi R^2}{6\pi R^2}=\dfrac{2}{3}$.

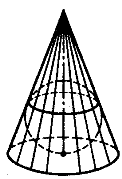
643. Рассмотрим осевое сечение.

а) Высота SH делит ΔASB на два равных треугольника: SH — биссектриса угла φ.

В ΔHBS: $\angle HBS=90^\circ-\dfrac{\varphi}{2}$.

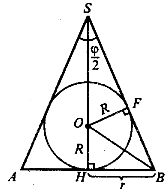
OB — биссектриса $\angle HBS$; следовательно, $\angle HBO=\dfrac{\angle HBS}{2}$.

Из прямоугольного ΔOHB: $\dfrac{R}{r}=\mathrm{tg}\angle HBO=\mathrm{tg}(45^\circ-\dfrac{\varphi}{4})$,



$$r=\frac{R}{\mathrm{tg}(45^\circ-\frac{\varphi}{4})}=\frac{R}{\mathrm{ctg}\left(90^\circ-(45^\circ-\frac{\varphi}{4})\right)}=\frac{R}{\mathrm{ctg}(45^\circ+\frac{\varphi}{4})}=R\,\mathrm{tg}\,(45^\circ+\frac{\varphi}{4}).$$

б) $\frac{R}{r}=\text{tg}(45^\circ-\frac{\varphi}{4})$, $R=r\,\text{tg}\,(45^\circ-\frac{\varphi}{4})$ ($\frac{\varphi}{4}$ — острый угол),



в) $\text{tg}\left(45^\circ-\frac{\varphi}{4}\right)=\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{3}}=tg30^\circ$

$45^\circ-\frac{\varphi}{4}=30^\circ \Rightarrow \varphi=60^\circ$ (φ — острый угол)

644. Рассмотрим осевое сечение. SH — высота конуса;

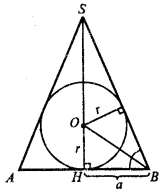
OB — биссектриса $\angle HBS$, $\angle OBH=\frac{\alpha}{2}$.

В ΔOBH: $\frac{r}{BH}=\text{tg}\frac{\alpha}{2}$. Найдем площадь основания конуса, обозначив

HB=a: $S_{осн}=\pi a^2=\frac{\pi r^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Обозначим SB=d. Из ΔSHB: $\frac{a}{d}=\cos\alpha$, $d=\frac{a}{cos\,\alpha}=\frac{r}{tg\frac{\alpha}{2}\cdot cos\,\alpha}$

Вычислим площадь боковой поверхности конуса:

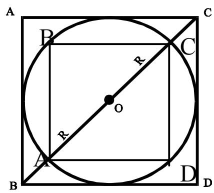


$S_{бок}=\pi\, a\, d\ \frac{\pi r}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r}{\cos\alpha\cdot\text{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi r^2}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$

$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}=\frac{\pi r^2}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\pi r^2}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi r^2}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$=\frac{\pi r^2}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{2\pi r^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}$

645. Рассмотрим осевое сечение.

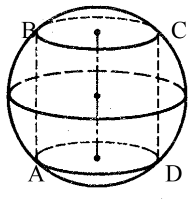


Высота цилиндра равна образующей, а т.к. образующая равна диаметру основания, то ABCD — квадрат.

Обозначим AD=x, радиус сферы равен R.

Из Δ ADC: $AC^2=(2R)^2=x^2+x^2$; $2R=x\sqrt{2}$, $R=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Вычислим площадь сферы $4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{x^2}{2}=2\pi x^2$



Радиус основания цилиндра $\frac{x}{2}$.

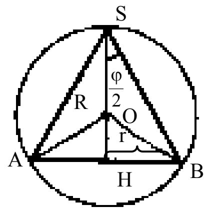
$S_{бок}=2\pi\cdot\frac{x}{2}\cdot x=\pi x^2$ $S_{осн}=\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\pi x^2}{4}$;

$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=\pi x^2+\dfrac{\pi x^2}{4}\cdot 2=\pi x^2+\dfrac{\pi x^2}{2}=\dfrac{3\pi x^2}{2}$;

$\dfrac{S_{полн}}{S_{сф}}=\dfrac{\frac{3\pi x^2}{2}}{2\pi x^2}=\dfrac{3}{4}$.

646. Рассмотрим осевое сечение конуса и сферы. SH — высота конуса SO=OB=OA=R. Тогда из равнобедренного Δ SOB: $\angle$ OSB= $\angle$ SBO= $\dfrac{\varphi}{2}$.

Из прямоугольного треугольника Δ SHB:



$\angle$ OBH= $\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\varphi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$ и

$\dfrac{r}{R}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi$

а) $r=R\cdot\cos\varphi$

б) $R=\dfrac{r}{\cos\varphi}$

в) $\cos\varphi=\dfrac{r}{R}=\dfrac{r}{2r}=\dfrac{1}{2}$ $\varphi=60^\circ$