

В.Е. Бачурин

**Решение контрольных
и самостоятельных
работ по геометрии
за 7 класс**

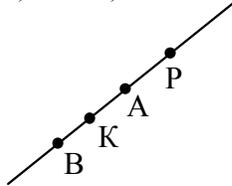
к пособию «Дидактические материалы по геометрии для 7
класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И.
Медяник. — 7-е изд.
— М.: Просвещение, 2001.»

Самостоятельные работы

Вариант 1

С-1

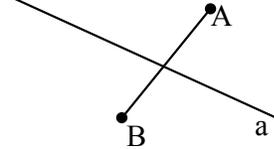
- а) б) точки К и А принадлежат отрезку ВР.



С-2

1. Нет, т.к. тогда бы $AB + BC = AC$, что неверно, т.к. $15 + 6 \neq 9$.

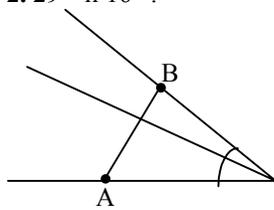
2.



С-3

1. 35° — определение на глаз; 39° — измерения транспортиром.

2. 29° и 16° .



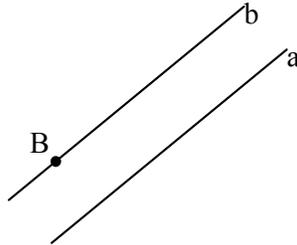
3. Пусть $\angle(ac) = x$. Тогда $\angle(bc) = x - 15$.
Получаем, $40 = x + x - 15$, $2x = 55$, $x = 27,5$.
 $\angle(ac) = 27,5^\circ$; $\angle(bc) = 27,5 - 15 = 12,5^\circ$.

C-4

- Нет. Измерения можно провести циркулем. А именно: длину каждого из отрезков можно сравнить с длинами всех остальных.
- $\angle A_1 = \angle A = 60^\circ$; $\angle C_1 = \angle C = 77^\circ$; $B_1C_1 = BC = 10$ см.

C-5

- b — искомая прямая.



C-6

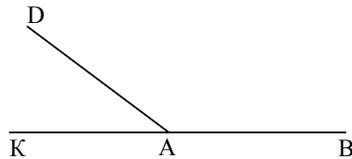
- $BC = DE$, $AB = EP$, $CD = BE$.
- a) $\angle D = \angle A = 35^\circ$, $\angle E = \angle B = 50^\circ$, $\angle F = \angle C = 95^\circ$.
б) $\angle A = \angle D = 85^\circ$, $\angle B = \angle E = 50^\circ$, $\angle C = \angle F = 45^\circ$.

C-7

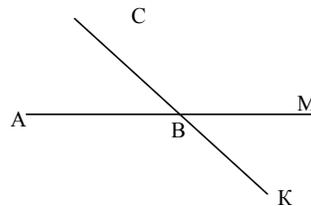
- $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$.
- a) $AB = KP = 2$ см; $BC = PM = 4$ см; $AC = KM = 5$ см.
б) $KP = AB = 4$ см; $PM = BC = 7$ см; $KM = AC = 6$ см.

C-8

- $\angle KAD = 48^\circ$,
 $\angle BAD = 132^\circ$.



- $\angle KBM$ — искомый,
 $\angle KBM = 40^\circ$.



C-9

1. $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$; $180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$; $180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$;
 $180^\circ - 69^\circ = 111^\circ$; $180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$; $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Меньший смежный угол соответствует углу в 100° .

2. а) $65^\circ + 115^\circ = 180^\circ$, значит, могут.

б) $72^\circ + 88^\circ = 160^\circ \neq 180^\circ$, значит, не могут

в) $91^\circ + 99^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$, значит, не могут.

3. Пусть $\angle 1 = 7x$, тогда $\angle 2 = 8x$.

Получаем $7x + 8x = 180^\circ$, $15x = 180^\circ$, $x = 12^\circ$.

$\angle 1 = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ$, $\angle 2 = 8 \cdot 12^\circ = 96^\circ$.

C-10

1. $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$; $180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$; $180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$;
 $180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$; $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$; $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Большой смежный угол соответствует углу в 60° .

2. а) $75 + 85 = 160 \neq 180$, значит, не могут.

б) $94 + 96 = 190 \neq 180$, значит, не могут.

в) $83 + 97 = 180$, значит, могут.

C-11

1. $\triangle ABC = \triangle DBC$, т.к. BC — общая, $AB = DB$,
 $\angle ABC = \angle DBC$ (равенство по первому признаку).

2. $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$, BD — общая, значит,
 $\triangle ABD = \triangle CBD$ (равенство по второму признаку).

C-12

1. Пусть x см — основание, тогда $2x$ см — боковые стороны.

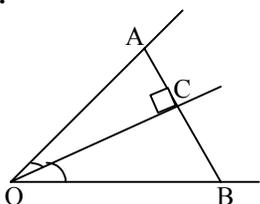
Получаем: $20 = 2x + 2x + x$, $5x = 20$, $x = 4$. Значит, основание равно 4 см, а боковые стороны равны $2x = 2 \cdot 4 = 8$ см.

2. Т.к. у равнобедренного треугольника углы при основании равны, то $\angle CBA = \angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = \angle C_1B_1A_1$. Т.к. к тому же $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку), ч.т.д.

C-13

1. Т.к. $AB = BC$, $AD = CD$, BD — общая, то $\triangle BAD = \triangle BCD$ (по третьему признаку), ч.т.д.

2.



$\triangle AOC = \triangle BOC$ (по второму признаку равенства треугольников), т.к. OC — общая, $\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ$, $\angle AOC = \angle BOC$ (т.к. OC — биссектриса). Значит, $AC = BC$, ч.т.д.

C-14

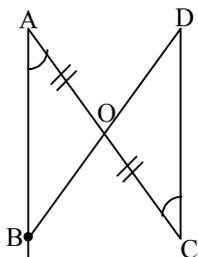
- $\triangle AB_1C_1$ по первому признаку;
 $\triangle ABC_2$ по второму признаку;
 $\triangle A_1BC$ по третьему признаку.
- а) по второму, т.к. в этом случае $\angle A = \angle A_1$;
 б) по первому, т.к. здесь $AC = A_1C_1$;
 в) по третьему, т.к. здесь $BC = B_1C_1$.

C-15

- $\triangle AB_1C_1$ по первому признаку;
 $\triangle AB_2C$ по второму признаку;
 $\triangle A_1BC$ по третьему признаку.
- а) по второму, т.к. в здесь $\angle A = \angle A_1$;
 б) по первому, т.к. здесь $BC = B_1C_1$;
 в) по третьему, т.к. здесь $AC = A_1C_1$.

C-16

- Пусть $\angle 1 = 2x$, тогда $\angle 2 = 3x$.
 Получаем $2x + 3x = 180^\circ$, $5x = 180^\circ$, $x = 36^\circ$.
 $\angle 1 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$; $\angle 2 = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$.

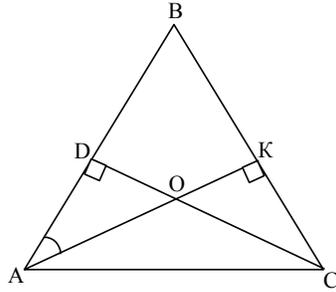


- $\angle BAO = \angle DCO$ (как внутренние накрест лежащие при пересечении AB и CD параллельных прямых секущей AC).
 $\angle AOB = \angle DOC$ (как вертикальные),
 $AO = CO$. Значит, $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку. Значит, $OB = OD$, ч.т.д.

C-17

1. Пусть искомый угол равен x . Тогда получаем $x + x + 40^\circ = 180^\circ$, $2x = 140^\circ$, $x = 70^\circ$. Угол при основании равен 70° .

2.



$$\angle DAO = 60^\circ / 2 = 30^\circ.$$

$\angle ADO = 90^\circ$, т.к. биссектриса CD в равностороннем $\triangle ABC$ является также высотой.

$$\text{Отсюда } \angle DOA = 180^\circ - (\angle ADO + \angle DAO) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ.$$

C-18

1. а) $180^\circ - 18^\circ - 65^\circ = 97^\circ$; б) $180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$;
в) $180^\circ - 53^\circ - 94^\circ = 33^\circ$; г) $180^\circ - 61^\circ - 102^\circ = 17^\circ$.

2. Пусть A, B — углы при основании, C — угол при вершине.

- а) $\angle A = \angle B = 55^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$;
б) $\angle A = \angle B = 70^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$;
в) $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$;
г) $\angle A = \angle B = 28^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 28^\circ = 124^\circ$.

3. Пусть $2x, 3x, 7x$ — углы треугольника. Тогда $2x + 3x + 7x = 180^\circ$, $12x = 180^\circ$, $x = 15^\circ$. Получаем, $2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$, $3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$ — углы треугольника.

C-19

1. а) $180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$; б) $180^\circ - 52^\circ - 111^\circ = 17^\circ$;
в) $180^\circ - 23^\circ - 60^\circ = 97^\circ$; г) $180^\circ - 57^\circ - 90^\circ = 33^\circ$.

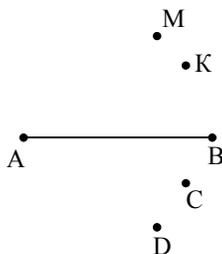
2. Пусть A, B — углы при основании, C — третий угол.

- а) $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = (180^\circ - 90^\circ) / 2 = 45^\circ$;
б) $\angle C = 104^\circ$, $\angle A = \angle B = (180^\circ - 104^\circ) / 2 = 38^\circ$;
в) $\angle C = 48^\circ$, $\angle A = \angle B = (180^\circ - 48^\circ) / 2 = 66^\circ$;
г) $\angle C = 50^\circ$, $\angle A = \angle B = (180^\circ - 50^\circ) / 2 = 65^\circ$.

3. Пусть $3x, 4x, 8x$ — углы треугольника. Тогда $3x + 4x + 8x = 180^\circ$, $15x = 180^\circ$, $x = 12^\circ$. Получаем, $3 \cdot 12^\circ = 36^\circ$, $4 \cdot 12^\circ = 48^\circ$, $8 \cdot 12^\circ = 96^\circ$ — углы треугольника.

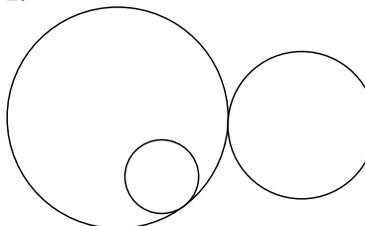
C-20

1.



Все такие точки образуют окружность радиуса AB с центром в точке A .

2.



C-21

1. Проведем прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок a . Далее из левого его конца проводим как из центра окружность радиуса b , а из правого — радиуса c . Одна из точек пересечения этих окружностей дает нам третью вершину треугольника.

2. Строим отрезок O_1B_1 . Проводим окружность произвольного радиуса с центром в точке O и точке O_1 (такого же радиуса). Пусть M и N — точки пересечения окружности с OB и OA соответственно, M_1 — точка пересечения окружности с O_1B_1 . Строим окружность с центром в M_1 радиуса MN . Пусть одна из точек пересечения окружностей — N_1 . Тогда $\angle M_1O_1N_1$ — искомый. $\angle M_1O_1N_1 = \angle BOA$, т.к. $\triangle M_1O_1N_1 = \triangle MON$ (по третьему признаку).

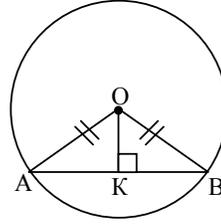
C-22

1. Откладываем от точки M на прямой a равные отрезки MA и MB в обе стороны. Далее проводим две окружности с центром в точках A и B и произвольным радиусом, большим отрезка MA . Искомый перпендикуляр проходит через точку M и точку пересечения окружностей.

2. Откладываем на прямой катет A . Из левого его конца восстанавливаем перпендикуляр к прямой. Из правого конца проводим прямую под углом β . Точка пересечения двух проведенных прямых есть третья вершина треугольника.

С-23

1. $\triangle AOB$ — равнобедренный, т.к. $AO = OB = R$. Поэтому высота OK также медиана. Значит, искомое геометрическое место точек — прямая, проходящая через середину AB и перпендикулярная AB .



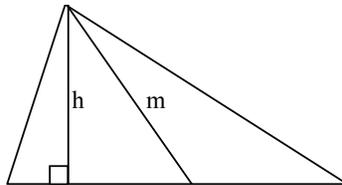
2. Т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка MK , есть серединный перпендикуляр к нему, то искомая точка есть точка пересечения серединного перпендикуляра со стороной BA .

С-24

1. Откладываем с помощью циркуля на произвольной прямой отрезок AB . Далее из точки A проводим прямую под углом 40° , и точки B — под углом 60° . Точка пересечения этих прямых есть точка C .
2. Чтобы провести высоту проведем сначала из вершины окружность произвольного радиуса, так чтобы она пересекала в 2-х точках противоположную сторону. Теперь разделим пополам данный отрезок. Соединим его середину и вершину треугольника.
3. Проведем серединные перпендикуляры к двум сторонам. Точка их пересечения — центр окружности.

С-25

1. Откладываем на произвольной прямой с помощью циркуля отрезок AC . Далее из точки C проводим прямую под углом 50° . И откладываем на этой прямой отрезок BC .
- 2.

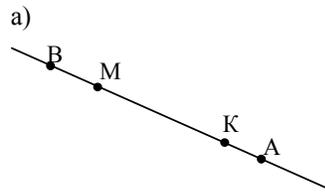


h — высота,
 m — медиана.

3. Проведем биссектрисы двух углов. Точка их пересечения — центр окружности O . Далее из центра восстановим перпендикуляр к одной из сторон. Точку пересечения его с этой стороной обозначим K . Радиус искомой окружности есть OK .

Вариант 2.

С-1



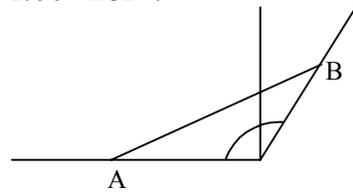
Можно провести только одну прямую.
б) Точки А и В не принадлежат отрезку МК.

С-2

1. $KC = KM + MC = 8 + 3 = 11$ (см).
2. Т.к. АВ пересекает b , то А и В — в разных полуплоскостях. Т.к. ВС не пересекает b , то В и С в одной полуплоскости. Т.е. А и С в разных полуплоскостях. Поэтому АС пересекает b .

С-3

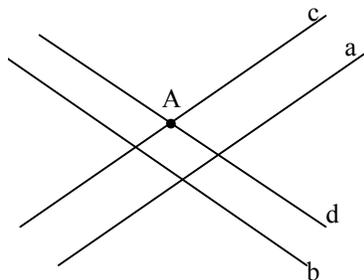
1. 50° — определение на глаз; 60° — измерение транспортиром.
2. 90° и 32° .



3. Пусть $\angle(nk) = x$, тогда $\angle(mk) = 3x$.
Получаем $100^\circ = x + 3x$, $4x = 100^\circ$, $x = 25^\circ$;
 $\angle(nk) = 25^\circ$, $\angle(mk) = 3 \cdot 25 = 75^\circ$.

С-4

1. Есть две пары равных отрезков. Измерять можно либо линейкой, либо циркулем. Равных углов нет.
2. $KP = BC = 6$ м, $\angle K = \angle B = 92^\circ$, $\angle P = \angle C = 26^\circ$.

C-5 $c \parallel a, \quad d \parallel b$ **C-6**

1. Пусть $AD = x$ см, тогда $BD = 4 + x$ (см).
Получаем, $20 = x + 4 + x; \quad 2x = 16; \quad x = 8.$
 $AD = 8$ см; $BD = 4 + 8 = 12$ (см).
2. $AC = PR = 6$ дм; $PQ = AB = 3$ дм; $QR = BC = 4$ дм.
3. Нет, т.к. прямая AB пересекает c из-за того, что A и B в разных полуплоскостях.

C-7

1. Пусть $BC = x$ см, тогда $AB = 4x$ см.
Получаем $20 = x + 4x, \quad 5x = 20, \quad x = 4;$
 $BC = 4$ см; $AB = 4 \cdot 4 = 16$ (см).
2. $\angle B = \angle L = 40^\circ, \quad \angle C = \angle M = 120^\circ, \quad \angle K = \angle A = 20^\circ.$
3. Нет, т.к. тогда бы CD пересекала AB .

C-8

1. Пусть x — искомый угол, тогда $4x$ — смежный угол.
Получаем $4x + x = 180^\circ; \quad 5x = 180^\circ; \quad x = 36^\circ; \quad 36^\circ$ — искомый угол.
2. $\angle A_1OB_1 = \angle AOB = 120^\circ$ (как вертикальные)
 $\angle AOB_1 = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$ (т.к. они смежные).

C-9

1. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 5x$.
Получаем $x + 5x = 180^\circ, \quad 6x = 180^\circ, \quad x = 30^\circ.$
 $\angle 1 = 30^\circ, \quad \angle 2 = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ.$

2. Эти углы не могут быть смежными, т.к. их сумма не равна 180° , значит, они вертикальные. Поэтому они равные. Каждый угол равен $150^\circ / 2 = 75^\circ$.

3. $\angle AVK = \angle ABC / 2 = 130^\circ / 2 = 65^\circ$.

C-10

1. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 40^\circ$.

Получаем $x + x + 40^\circ = 180^\circ$, $2x = 140^\circ$, $x = 70^\circ$.

$\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

2. Эти углы не могут быть вертикальными, т.к. они не равны, поэтому они смежные. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 8x$.

Получаем, $x + 8x = 180^\circ$, $9x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$;

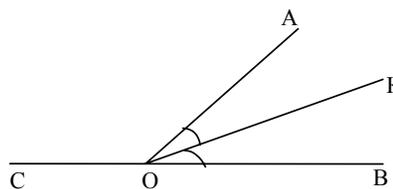
$\angle 1 = 20^\circ$, $\angle 2 = 8 \cdot 20^\circ = 160^\circ$.

3. Пусть $\angle AOB = x$, тогда $\angle COA = 180^\circ - x$,

$\angle AOK = \frac{x}{2}$.

Получаем $180^\circ - x + \frac{x}{2} = 138^\circ$;

$42^\circ = \frac{x}{2}$; $x = 84^\circ$.



Искомый угол равен 84° .

C-11

1. $\triangle DOK = \triangle BOC$, (равенство по первому признаку) т.к. $DO = OB$, $KO = OC$, $\angle DOK = \angle BOC$ (как вертикальные).

2. $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = \angle ABC - \angle ABD = \angle CBD$.

Т.к. $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ABD = \angle CDB$ и BD — общая, то $\triangle ADB = \triangle CBD$ (по второму признаку), ч.т.д.

C-12

1. Пусть основание равно x см, тогда боковые стороны равны $6x$ см.

Получаем $x + 6x + 6x = 26$, $13x = 26$, $x = 2$.

Основание равно 2 см. Боковые стороны равны $6 \cdot 2 = 12$ (см).

2. $BC = AB = A_1B_1 = B_1C_1$;

$\angle A = \angle C = \angle C_1 = \angle A_1$.

Значит, $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) = \angle B_1$.

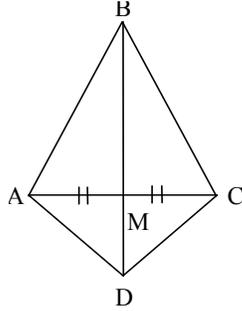
Поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку.

C-13

1. Т.к. $\triangle ABC = \triangle BAD$, то $AC = BD$, $BC = AD$.
Т.к. CD — общая, то $\triangle ACD = \triangle BDC$ по третьему признаку.
2. $\triangle AOC = \triangle BOC$ по первому признаку, т.к. OC — общая, $AO = OB$, $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$. Значит, $\angle ACO = \angle BCO$. Значит, CO — биссектриса $\angle ACB$, ч.т.д.

C-14

1. Пусть x м — боковая сторона, тогда $x + x + 1,3 = 2,5$;
 $2x = 1,2$; $x = 0,6$. $0,6$ м — боковая сторона.
- 2.



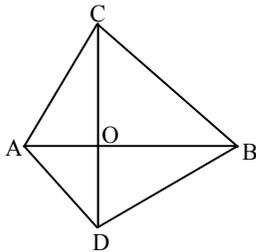
Т.к. $\triangle ABC$ равнобедренный,
то BM — высота.
Значит, $\angle AMD = \angle CMD = 90^\circ$.
Т.к. $AM = MC$ и MD — общая,
то $\triangle AMD = \triangle CMD$ по первому
признаку, ч.т.д.

$$3. \angle DBC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{\angle A_1B_1C_1}{2} = \angle D_1B_1C_1.$$

$\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$. Поэтому $\triangle CBD = \triangle C_1B_1D_1$ по второму признаку, ч.т.д.

C-15

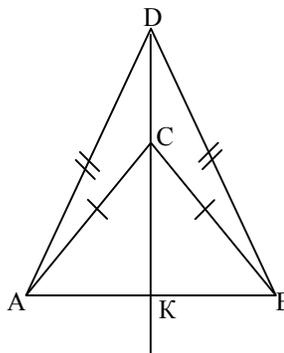
1. Пусть x м — основание, тогда боковая сторона равна $(x + 1)$ м.
Получаем $x + x + 1 + x + 1 = 3,2$; $3x = 1,2$; $x = 0,4$;
 $0,4$ м — основание; $0,4 + 1 = 1,4$ (м) — боковая сторона.
- 2.



Т.к. $\triangle ACB = \triangle ADB$, то $BC = BD$,
 $\angle CBO = \angle DBO$. Т.к. $BC = BD$,
 $\angle CBO = \angle DBO$ и BO — общая,
то $\triangle CBO = \triangle DBO$
(по первому признаку).
Поэтому, $\angle COB = \angle DOB = 180^\circ / 2 = 90^\circ$.
Отсюда, $CO \perp AB$, ч.т.д.

3.

Пусть K — точка пересечения CD с AB . Проведем из точки K перпендикуляр к AB . Он пройдет через точки C и D , т.к. в равнобедренном треугольнике медиана является высотой. Поэтому, $AB \perp CD$, ч.т.д.



C-16

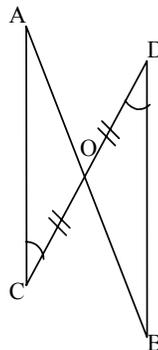
1. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 32^\circ$.

Получаем, $x + x + 32^\circ = 180^\circ$; $2x = 148^\circ$; $x = 74^\circ$.

$\angle 1 = 74^\circ$, $\angle 2 = 74^\circ + 32^\circ = 106^\circ$.

2.

$\triangle COA = \triangle DOB$ (по второму признаку),
т.к. $\angle COA = \angle DOB$ (как вертикальные),
 $\angle ACO = \angle BDO$, $OC = OD$.
Поэтому, $\angle CAO = \angle DBO$, ч.т.д.



C-17

1. $\angle ACB = 180^\circ - \angle BCK = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

$\angle A = \angle ACB = 30^\circ$.

$\angle B = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

2. $\angle DBA = \angle CBD = 20^\circ$ (т.к. BD — биссектриса);

$\angle CAB = 180^\circ - \angle C - 2\angle CBD = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

$\angle ADB = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ$.

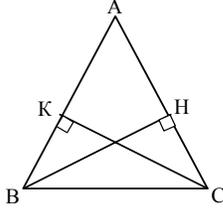
C-18

1. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 50^\circ + x$.

Получаем, $x + 50^\circ + x = 180^\circ$, $2x = 130^\circ$, $x = 65^\circ$.

$\angle 1 = 65^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ + 65^\circ = 115^\circ$.

2. Один из углов треугольника равен $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Если это угол, противолежащий основанию, то углы при основании равны $(180^\circ - 70^\circ) / 2 = 55^\circ$. Если же это угол при основании, то угол против основания составляет $180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.



3. $\angle KCB = 90^\circ - \angle ABC =$
 $= 90^\circ - \angle ACB = \angle HBC$.

Т.к. $\angle KCB = \angle HBC$,
 $\angle KBC = \angle HCB$ и BC — общая, то
 $\triangle KBC = \triangle HCB$ (по второму признаку), поэтому $KC = BH$, ч.т.д.

C-19

1. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = x$. Тогда $x + x = 120^\circ$, $x = 60^\circ$. $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$.

2. Один из углов треугольника равен $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Это угол, противолежащий основанию (т.к. иначе бы сумма углов была бы больше 180°).

Поэтому углы при основании равны $(180^\circ - 100^\circ) / 2 = 40^\circ$.

3. $\angle KAC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle C_1 = \angle K_1A_1C_1$.

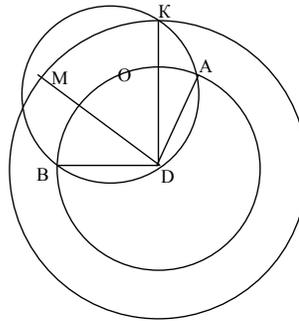
$\angle C = \angle C_1$, $AC = A_1C_1$. Значит $\triangle KAC = \triangle K_1A_1C_1$ (по второму признаку). Поэтому $AK = A_1K_1$, ч.т.д.

C-20

1. Искомые точки есть точки пересечения данной окружности с окружностью радиуса 3 см (и 5 см) с центром в точке D. Таких точек будет по две в каждом случае. Центр окружности не лежит ни на одном из этих отрезков.

2. Пусть O_1 и O — центра данных окружностей, K — точка касания. Точки O_1, O, K лежат на одной прямой.

$OO_1 = OK - O_1K = 15 - 10 = 5$ (см).

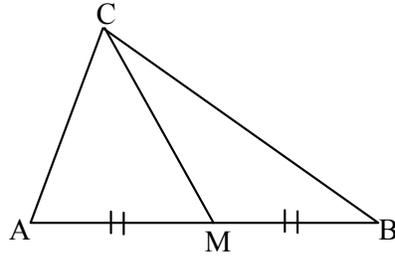


C-21

1. Решение совпадает с №2, C-21, Вариант 1.
2. Решение совпадает с решением соответствующей задачи № 1, C-21, Варианта 1.

C-22

1.

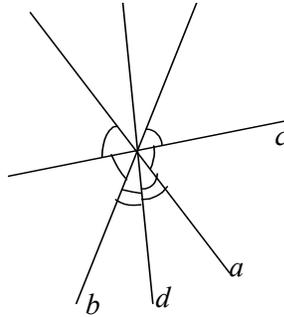


CM — искомая медиана.

2. Задача аналогична задаче построения треугольника по двум сторонам и углу между ними, т.к. у равнобедренного прямоугольного треугольника угол между равными сторонами равен 90° .

C-23

1.



Это прямые c и d . Они являются биссектрисами соответствующих вертикальных углов, т.к. геометрическое место точек равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса угла.

2. Это две точки пересечения данной окружности с серединным перпендикуляром к OA , т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от концов заданного отрезка, есть серединный перпендикуляр к нему.

C-24

1. Задача аналогична построения треугольника по трем сторонам, т.к. в этом случае известны все три стороны искомого треугольника (чтобы их найти, нужно всего лишь поделить стороны исходного треугольника пополам).

2. Т.к. a — касательная, то радиус проходит через точку A перпендикулярно a . Проведем перпендикуляр к a из точки A . Пусть точка B — точка его пересечения с b . Тогда середина AB и есть центр искомой окружности, а ее радиус равен $AB/2$. В самом деле, радиус, проведенный в точку касания с b перпендикулярен b (т.к. $a \parallel b$).

3. Строим отрезок AB . Восстанавливаем к нему серединный перпендикуляр. Пусть O — произвольная точка на нем. Это есть центр искомой окружности, а ее радиус есть OA (точку O нужно выбрать так, чтобы $r > AB/2$).

С-25

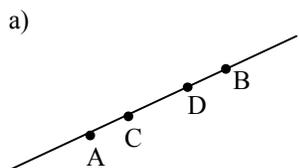
1. Строим биссектрисы углов A и B треугольника ABC . Точка их пересечения дает точку M .

2. Нужно восстановить из точки A перпендикуляр к a длиной 3 см. Конец отрезка (отличный от A) есть центр окружности. Эта окружность касается a , т.к. радиус перпендикулярен a .

3. Проводим из точки C как из центра окружность радиуса d . Проводим из середины AB перпендикуляр к AB . Точка пересечения окружности с перпендикуляром дает центр искомой окружности. Таких точек может быть и две и ни одной (в этом случае задача не имеет решения) в зависимости от величин AB и d и расположения точек A, B, C .

Вариант 3.

С-1



Через A и B можно провести только одну прямую.

б) точки C и D принадлежат отрезку AB .

С-2

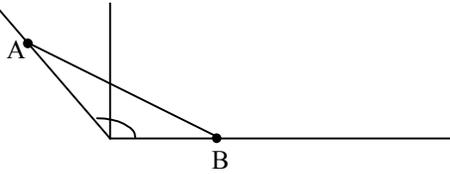
1. $PM = OM + OP = 14 + 8 = 22$ (см).

2. Т.к. KP не пересекает c , то K и P лежат в одной полуплоскости. Т.к. MP пересекает c , то M и P — в разных полуплоскостях. Значит, M и K тоже в разных полуплоскостях. Поэтому, KM пересекает c .

С-3

1. 85° — определение на глаз; 86° — измерение транспортиром.

2.



90° и 45° .

3. Пусть $\angle(ca) = 4x$, тогда $\angle(da) = 2x$.

Получаем: $120^\circ = 4x + 2x$; $6x = 120^\circ$; $x = 20^\circ$.

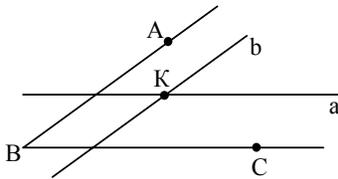
$\angle(ca) = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$; $\angle(da) = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$.

С-4

1. Два равных отрезка. Измерения можно провести циркулем. А именно: длину каждого из отрезков можно сравнить с длинами всех остальных.

2. $\angle K = \angle B = 68^\circ$; $KP = BC = 8$ см; $\angle A = \angle M = 84^\circ$.

С-5



a и b искомые прямые $a \parallel BC$, $b \parallel AB$.

С-6

1. Т.к. BD и CD пересекают прямую, то B и C — в одной полуплоскости, D — в другой. Т.к. AC не пересекает прямую, то A, B, C — в одной полуплоскости. Поэтому AB не пересекает прямую.

2. Если бы точка C принадлежала AB , то $AB = BC + AC$, т.е. $7,5 = 7,8 + 0,3$. А это неверно, значит, точка C не принадлежит AB .

3. Пусть $\angle(ac) = x$, тогда $\angle(bc) = 2x$. Получаем $75^\circ = x + 2x$;
 $3x = 75^\circ$; $x = 25^\circ$. $\angle(ac) = 25^\circ$; $\angle(bc) = 2x = 2 \cdot 25^\circ = 50^\circ$.

С-7

1. Т.к. BD и CD пересекают прямую, то B и C — в одной полуплоскости, D — в другой. Т.к. AB пересекает прямую, то A и B в разных полуплоскостях. Поэтому AC пересекает прямую.

2. Пусть $AC = x$ м, тогда $AB = x + 3$ (м).

Получаем, $12 = x + x + 3$; $2x = 9$; $x = 4,5$.

$AC = 4,5$ (м); $AB = 4,5 + 3 = 7,5$ (м).

3. Нет, т.к. тогда бы $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$

$35^\circ = 45^\circ + 80^\circ$, а это неверно.

С-8

1. Пусть x — искомый угол. Тогда $5x$ — смежный с ним угол.

Получаем, $x + 5x = 180^\circ$; $6x = 180^\circ$; $x = 30^\circ$. 30° — искомый угол.

2. $\angle AOK = \angle COD = 30^\circ$ (как вертикальные);

$\angle DOK = 180^\circ - \angle COD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (т.к. они смежные).

С-9

1. Из любых трех углов два являются вертикальными, т.е. равными. А третий смежный с ними.

Пусть x — вертикальные углы, тогда $180^\circ - x$ — смежный угол.

Получаем, $2x + 180^\circ - x = 200^\circ$; $x = 20^\circ$.

20° — первые два угла. $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$ — третий угол.

2. Пусть A , B и C лежат на одной прямой. Тогда длина одного из отрезков (большого) является суммой длин двух других. Но $5 \neq 4 + 3$, значит, A , B и C не лежат на одной прямой, ч.т.д.

3. Т.к. BC — биссектриса, то $\angle ABC = 2 \angle CBM = 2 \cdot 57^\circ = 114^\circ$.

С-10

1. Пусть x — искомый угол. Тогда $180^\circ - x$ смежный с ним угол.

Получаем, $180^\circ - x + 180^\circ - x = 180^\circ$; $2x = 180^\circ$; $x = 90^\circ$.

90° — искомый угол.

2. Пусть луч c проходит между сторонами $\angle(ab)$.

Тогда $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$; $100^\circ = \angle(ac) + 110^\circ$, $\angle(ac) = -10^\circ$.

А это неверно, т.к. предполагается, что градусная мера угла положительная. Значит, луч c не проходит между сторонами $\angle(ab)$, ч.т.д.

3. Пусть $\angle 1$ — данный угол, $\angle 2$ — смежный с ним. Тогда иско-

мый угол равен $\frac{\angle 1}{2} + 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - \frac{\angle 1}{2} = 165^\circ$.

C-11

1. $\angle BCA = \angle MCD$ (как вертикальные).

Значит, $\angle B = 180^\circ - 90^\circ - \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ - \angle MCD = \angle M$.

Теперь $\triangle ABC = \triangle DMC$ по второму признаку (т.к. $AB = MD$), ч.т.д.

2. $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \angle BCD - \angle BCA = \angle ACD$.

Теперь $\triangle ABC = \triangle CDA$ по второму признаку, т.к. AC — общая и к тому же $\angle BCA = \angle DAC$, ч.т.д.

C-12

1. Пусть x см — боковая сторона, тогда $1,5$ см — основание.

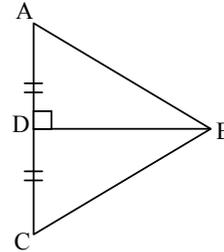
Получаем, $35 = 1,5x + x + x$; $3,5x = 35$; $x = 10$.

10 см — боковая сторона, $1,5 \cdot 10 = 15$ (см) — основание.

2. $\triangle ADB = \triangle CDB$ (по первому признаку), т.к. DB — общая, $AD = DC$,

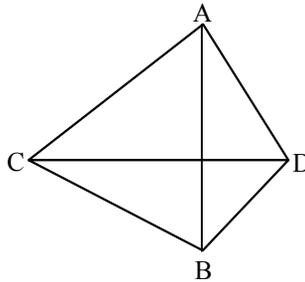
$\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$.

Значит, $AB = BC$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный, ч.т.д.



C-13

1.



Т.к. $\triangle CDA = \triangle CDB$, то $AC = BC$, $AD = BD$. Поэтому $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ — равнобедренные, ч.т.д.

2. Т.к. $\triangle AOD$ — равнобедренный, то $\angle OAD = \angle ODA$.

Т.к. $\angle CAD = \angle BDA$, то $\angle CAO = \angle BDO$.

$\triangle AOC = \triangle DOB$ по второму признаку, т.к. $\angle CAO = \angle BDO$,

$AO = OD$, $\angle COA = \angle BOD$ (как вертикальные), ч.т.д.

C-14

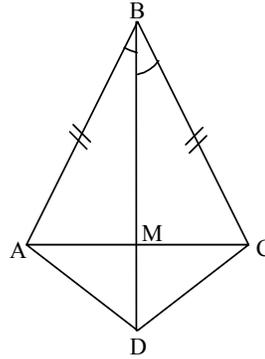
1. Пусть x м — основание, тогда получаем $3,4 = 1,3 + 1,3 + x$; $x = 0,8$.
 $0,8$ м — основание.

2.

Т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный и BM — биссектриса, то BM — высота и медиана.

Значит, $\angle AMD = \angle CMD = 90^\circ$,
 $AM = MC$.

Т.к. MD — общая,
 то $\triangle AMD = \triangle CMD$
 по первому признаку, ч.т.д.



3. Т.к. CD и C_1D_1 — медианы, то $DB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} A_1B_1 = D_1B_1$.

Т.к. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

Т.к. $DB = D_1B_1$, $CB = C_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$,
 то $\triangle CBD = \triangle C_1B_1D_1$, (по первому признаку) ч.т.д.

C-15

1. Пусть x м — боковая сторона, тогда $(x + 1)$ м — основание.
 Получаем, $x + x + x + 1 = 4,9$; $3x = 3,9$; $x = 1,3$.

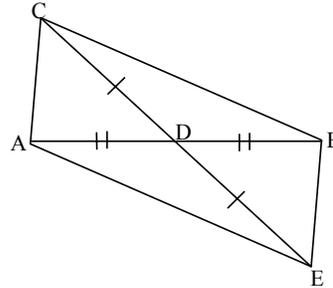
$1,3$ м — боковая сторона; $1,3 + 1 = 2,3$ (м) — основание.

2.

$\triangle ADC = \triangle BDE$ (по первому признаку), т.к. $AD = DB$, $DC = DE$,
 $\angle ADC = \angle BDE$ (как вертикальные). Значит, $AC = BE$.

$\triangle BDC = \triangle ADE$, (по первому признаку) т.к. $BD = AD$, $DC = DE$,
 $\angle BDC = \angle ADE$ (как вертикальные). Значит, $BC = AE$.

Т.к. $BE = AC$, $BC = EA$, AB — общая, поэтому $\triangle BAE = \triangle ABC$ (по третьему признаку), ч.т.д.



3. Пусть K — середина AB . Тогда по свойству равнобедренного треугольника $CK \perp AB$, $DK \perp AB$. Значит, $CD \perp AB$, ч.т.д.

C-16

1. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 4x$.
Т.к. углы внутренние односторонние,
то $x + 4x = 180^\circ$; $5x = 180^\circ$; $x = 36^\circ$.
 $\angle 1 = 36^\circ$; $\angle 2 = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$.

2. Т.к. $\angle APQ$ и $\angle ABC$ — соответственные при пересечении прямых QP и BC секущей AB и $\angle APQ = \angle ABC$, то $QP \parallel BC$.
Т.к. $QP \parallel BC$ и $\angle AQP$ и $\angle ACB$ — соответственные,
то $\angle AQP = \angle ACB$, ч.т.д.

C-17

1. Т.к. $\triangle BMP$ — равнобедренный,
то $\angle BMP = \angle MPB = 180^\circ - \angle BPT = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.

2. Т.к. AD — биссектриса,

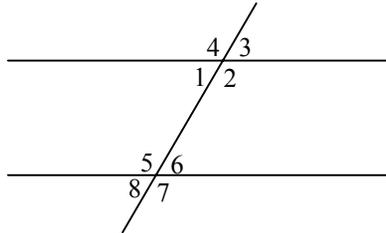
$$\text{то } \angle CAD = \frac{1}{2} \angle A = \frac{60}{2} = 30^\circ.$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ.$$

$$\angle CDA = 180^\circ - (\angle C + \angle CAD) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ.$$

C-18

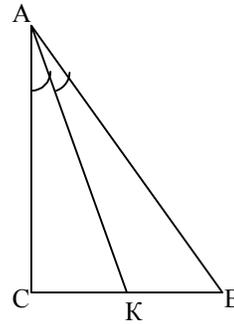
1.



$\angle 6 = \angle 1 = 45^\circ$ (как вертикальные накрест лежащие);
 $\angle 3 = \angle 1 = 45^\circ$; $\angle 8 = \angle 6 = 45^\circ$ (как вертикальные);
 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (т.к. они смежные);
 $\angle 5 = \angle 2 = 135^\circ$ (как внутренние накрест лежащие);
 $\angle 7 = \angle 5 = 135^\circ$, $\angle 4 = \angle 2 = 135^\circ$ (как вертикальные).

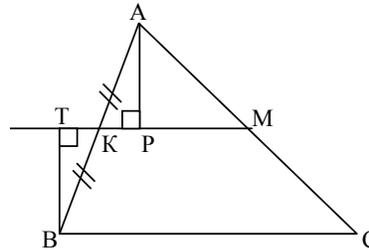
2.

В $\triangle ACK$: $\angle CAK = 180^\circ - (\angle C + \angle CKA) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$.
Т.к. AK — биссектриса,
то $\angle A = 2 \angle CAK = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.
 $\angle B = 180^\circ - (\angle C + \angle A) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$.



3.

$\angle TBK = 90^\circ - \angle TKB = 90^\circ - \angle AKP = \angle KAP$
(т.к. $\angle TKB = \angle AKP$, как вертикальные).
Т.к. $BK = AK$, $\angle TKB = \angle AKP$,
 $\angle TBK = \angle KAP$, поэтому,
 $\triangle BTK = \triangle APK$ (по второму признаку). Значит, $BT = AP$.



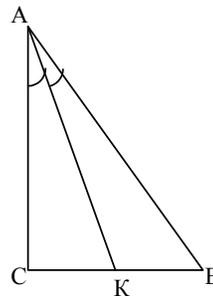
Т.е. вершины A и B равноудалены от прямой KM . Аналогично доказывается, что A и C равноудалены от KM . Поэтому все три вершины равноудалены от KM , ч.т.д.

С-19

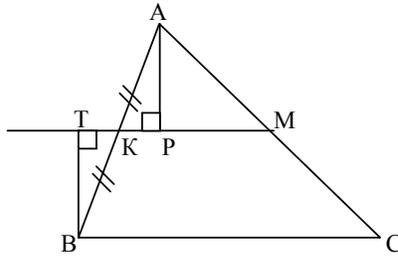
1. Нет, т.к. оставшийся угол либо равен 75° , либо смежен с ним и тогда равен $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

2.

$\angle CAK = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.
Т.к. AK — биссектриса,
то $\angle A = 2 \angle CAK = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.
 $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



3.



$\angle TBK = \angle KAP$ (см. №3, С-18).
Т.к. $TB = AP$, $\angle TBK = \angle KAP$,
 $\angle T = \angle P = 90^\circ$,
то $\triangle TBK = \triangle PKA$. Поэтому,
 $BK = AK$, ч.т.д.

С-20

1. Решение совпадает с аналогичной задачей варианта-2.
2. $4 + 8 = 12$ (см).

С-21

1. Решение совпадает с аналогичной задачей из варианта-1.
2. Проведем прямую, отложим на ней с помощью циркуля сторону ВС. Построим угол γ , одна из сторон которого — ВС. Далее отложим на второй стороне угла отрезок АС.

С-22

1. Делим отрезок MP пополам. Соединяем середину MP с точкой К.
2. Задача аналогична №2 С-21, т.к. в этом случае $\angle \gamma = 90^\circ$.

С-23

1. Очевидно, что это будет прямая, параллельная данным, проходящая между ними и отстоящая от каждой на одинаковое расстояние.
2. Т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от А и В, есть серединный перпендикуляр к АВ, то искомые точки есть точки пересечения этого перпендикуляра с окружностью. Таких точек две.

С-24

1. Проводим прямую, откладываем на ней с помощью циркуля сторону. Строим угол, равный данному, одной стороной которого является наша сторона треугольника. Далее из другого конца стороны треугольника строим окружность радиусом, равным длине биссектрисы. Соединяем центр окружности с точкой ее пересечения со

стороной угла (отличный от исходной стороны треугольника). Далее строим угол равный половине того, чья биссектриса дана. Точка пересечения стороны угла со второй стороной треугольника дает третью вершину треугольника.

2. Решение совпадает с аналогичной задачей варианта-2.

3. Восстанавливаем перпендикуляр к прямой a из точки A . Т.к. окружность касается в той точке прямой a , то центр окружности лежит на перпендикуляре. Далее восстанавливаем серединный перпендикуляр к AB . Точка O пересечения эти перпендикуляров — центр окружности. Точка B лежит на окружности, т.к. $OA = OB$ (по свойству равнобедренного треугольника).

С-25

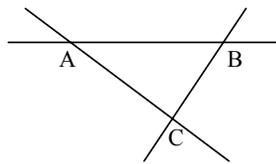
1. Проводим прямую, откладываем на ней сторону. Далее строим два угла, равных данным. Эти углы должны иметь вершинами концы данной стороны. Тогда пересечения сторон угла дает третью вершину треугольника.

2. Восстанавливаем перпендикуляр к b в точке B . Строим середину диаметра. Откладываем на перпендикуляре отрезок длиной равной половине диаметра. Второй конец этого отрезка (первый есть B) — центр окружности.

3. Восстанавливаем серединный перпендикуляр к AB . Центр искомой окружности лежит на нем (по свойству равнобедренного треугольника). Пусть K — точка пересечения перпендикуляра с прямой c . Т.к. A и K лежат на окружности, то ее центр должен лежать на серединном перпендикуляре к AK . Отсюда ясно, что пересечение двух перпендикуляров дает центр окружности O . Ее радиус равен OK (или OA).

Вариант 4.

С-1.



а) три;

б) три;

в) существует одна точка, принадлежащая первым двум прямым. Это точка их пересечения A . Но она не принадлежит третьей прямой, т.к. A , B и C не лежат на одной

прямой. Значит, такой точки не существует.

C-2

1. $BC = BM + MC$, $BM = BC - MC = 14 - 8 = 6$ (см).

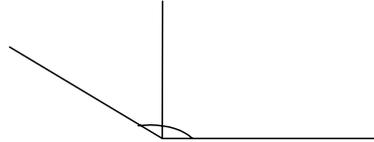
2. а) Т.к. AC и AD не пересекают a , то точки A, D, C — в одной полуплоскости. Т.к. BD не пересекает a , то A, D, C, B — в одной полуплоскости. Значит, BC не пересекает a .

б) если AB и AC пересекают a , то A лежит в одной полуплоскости, B и C — в другой. Значит, BC не пересекает a . Поэтому ответ на исходный вопрос — нет.

C-3

1. 130° — определение на глаз; 120° — измерение транспортиром.

2.



90° и 50° .

3. Т.к. $\angle(ab) = 90^\circ$, то $\angle(ac) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

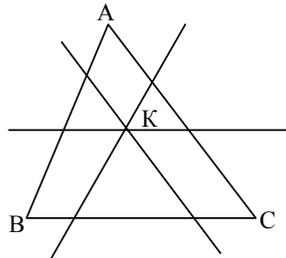
Пусть $\angle(ad) = x$, тогда $\angle(dc) = 2x$. Получаем $x + 2x = 45^\circ$, $3x = 45^\circ$, $x = 15^\circ$. $\angle(ad) = 15^\circ$, $\angle(dc) = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.

C-4

1. Равных углов и равных отрезков на рисунке нет. Измерения можно провести транспортиром и линейкой.

2. $\angle M = \angle P = \angle A = 92^\circ$; $\angle B = \angle K = \angle O = 64^\circ$; $\angle C = \angle D = \angle E = 24^\circ$.

C-5



С-6

1. Точка А, т.к. длина отрезка ВС больше длин остальных отрезков.
2. Нет, т.к. тогда бы выполнялось неравенство $\angle(ab) < \angle(bc)$, $65^\circ < 60^\circ$, что неверно.
3. Если бы пересекала, то две различные прямые имели бы две общие точки, что невозможно.

С-7

1. Нет, т.к. в этом случае длина одного из отрезков (большого) равнялась бы сумме длин двух других, а $7 \neq 5 + 4$.
2. Нет, т.к. в этом случае $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(bc) = 70^\circ + 120^\circ = 190^\circ > 180^\circ$.
3. Если бы a пересекала ВС, то эти две прямые имели бы две общие точки (кроме этой еще и точку А). Но тогда бы они совпадали и тем самым a не пересекала бы ВС. Значит, a не пересекает ВС, ч.т.д.

С-8

1. Пусть $\angle 1 = 4x$, тогда $\angle 2 = 5x$.
Т.к. они смежные, получаем $4x + 5x = 180^\circ$, $9x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$.
 $\angle 1 = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$, $\angle 2 = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$.
2. Пусть x — искомый угол Тогда $180 - x$ — смежный с ним.
Получаем $x = 180^\circ - x + 180^\circ - x$; $3x = 360^\circ$; $x = 120^\circ$.
 120° — искомый угол; $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ — смежные с ним углы.

С-9

1. Два других угла есть смежные с ним.
Поэтому они равны $180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$.
А третий угол — вертикальный с данным. Поэтому он равен 37° .
2. Он, очевидно, равен $\frac{1}{2} \cdot 78^\circ = 39^\circ$.
3. $\angle ACD$ и $\angle BCD$ — смежные.
Поэтому $\angle ACD + \angle BCD = 2 \angle ACD = 180^\circ$.
Значит, $\angle ACD = 90^\circ$. Значит, $AB \perp CD$, ч.т.д.

С-10

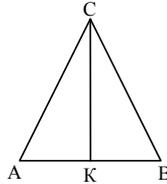
1. Т.к. $\angle(ac) > \angle(ab)$, то луч b проходит между сторонами $\angle(ac)$.
Поэтому $\angle(bc) = \angle(ac) - \angle(ab) = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.
 $\angle(a_1b) = 180^\circ - \angle(ab) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ (т.к. они смежные).
 $\angle(a_1c) = 180^\circ - \angle(ac) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ (т.к. они смежные).
2. Очевидно, искомый угол равен $2 \cdot 67^\circ = 134^\circ$.
3. Т.к. $\angle ABD + \angle CBD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ и у них сторона BD — общая, то они смежные. Значит, A, B, C — лежат на одной прямой, ч.т.д.

С-11

1. $\angle EDK = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - \angle BCK = \angle ACB$.
Т.к. $\angle EDK = \angle ACB$, $AC = DK$, $BC = DE$,
то $\triangle ABC = \triangle KED$ по первому признаку.
2. Т.к. $\angle A$ — общий, $\angle AKD = \angle AOB$, $AK = AO$,
то $\triangle ABO = \triangle ADK$ по второму признаку, ч.т.д.

С-12

1. Пусть $AK = KB = x$ см.
Тогда $5 + x + AC = 30$; $AC = 25 - x$;
 $BC = AC = 25 - x$.
Периметр данного треугольника равен
 $25 - x + 25 - x + x + x = 50$ (см).



2. Пусть AB пересекает биссектрису в точке K . $\triangle OKA = \triangle OKB$ по второму признаку, т.к. OK — общая, $\angle AOK = \angle BOK$,
 $\angle AKO = \angle BKO = 90^\circ$. Поэтому $OA = OB$, ч.т.д.

С-13.

1. Т.к. $AB = AD$, $CB = CD$, AC — общая, то $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по третьему признаку). Поэтому $\angle BAO = \angle DAO$.
 $\triangle BAO = \triangle DAO$ (по первому признаку), т.к. AO — общая, $AD = AB$,
 $\angle BAO = \angle DAO$. Значит, $\angle AOD = \angle AOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (т.к. они смежные). Поэтому $BD \perp CA$, ч.т.д.
2. $\triangle DBC = \triangle ABC$ по второму признаку, т.к. BC — общая,
 $\angle DBC = \angle ABC$, $\angle DCB = \angle ACB$. Значит, $DB = AB$, ч.т.д.

C-14

1. Пусть $AD - BD = x$ см. Тогда $P_{ACD} = AC + CD + x = 28$;
 $P_{ABC} = x + x + AC + BC = 2x + 2AC = 36$;
 $AC = 18 - x$.

Поэтому $CD = 28 - AC - x = 28 - (18 - x) - x = 10$ (см).

2.

Проведем через точку A прямую параллельную BC ,
 через точку C прямую параллельную AB . Пусть B_1
 — их точка пересечения. Тогда $\angle ABB_1 = \angle B_1BC =$
 $= \angle BB_1A = \angle BB_1C$ (как внутренние накрест ле-
 жащие). Значит, $\triangle ABB_1 = \triangle CBB_1$.

Значит, $AB = BC$, ч.т.д.

3. $\triangle DBC = \triangle DB_1C_1$, т.к. $BD = B_1D_1$,

$\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$,

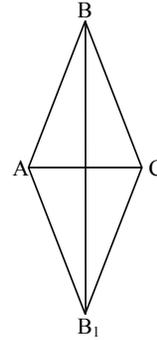
$\angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = 90^\circ$. Поэтому $BC = B_1C_1$.

$\triangle BDA = \triangle B_1D_1A_1$, т.к. $BD = B_1D_1$, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$,

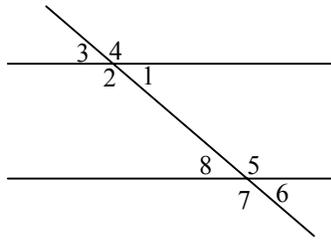
$\angle ADB = \angle A_1D_1B_1 = 90^\circ$. Поэтому, $AB = A_1B_1$.

$\angle B = \angle ABD + \angle CBD = \angle A_1B_1D_1 + \angle C_1B_1D_1 = \angle B_1$.

Т.к. $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ пер-
 вому признаку), ч.т.д.



C-16



1. $\angle 5 = 3\angle 1$. Пусть $\angle 1 = x$, тогда
 $\angle 5 = 3x$.

Получаем $x + 3x = 180^\circ$, $4x = 180^\circ$,
 $x = 45^\circ$.

$\angle 1 = 45^\circ$, $\angle 5 = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

$\angle 8 = \angle 1 = 45^\circ$, $\angle 2 = \angle 5 = 135^\circ$
 (как вертикальные накрест лежащие);

$\angle 3 = \angle 1 = 45^\circ$, $\angle 6 = \angle 8 = 45^\circ$

(как вертикальные);

$\angle 4 = \angle 2 = 135^\circ$, $\angle 7 = \angle 5 = 135^\circ$ (как вертикальные).

2. Т.к. $BC \parallel AD$, то $\angle OAD = \angle OCB$, $\angle ODA = \angle OBC$ (как внут-
 ренние накрест лежащие). Т.к. к тому же $AD = BC$,

то $\triangle OAD = \triangle OBC$ по второму признаку.

Поэтому, $AO = OC$, $OD = OB$, $\angle BOA = \angle COD$ (как вертикальные).

$\triangle ABO = \triangle DOC$ (по первому признаку),

т.к. $\angle BOA = \angle DOC$, $AO = OC$, $DO = OB$, ч.т.д.

C-17

1. Если это угол при основании, то угол, противолежащий основанию, равен $180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

Если же это угол, противолежащий основанию, то углы при основании равны $(180^\circ - 40^\circ)/2 = 70^\circ$.

2. $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$.

$\angle BDA = 90^\circ$, т.к. AD — высота.

$\angle BAD = 180^\circ - (\angle B + \angle BDA) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$.

C-18

1. Т.к. $AB = CD$, $AD = BC$, AC — общая, то $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по третьему признаку). Значит, $\angle BAC = \angle DCA$. Т.к. эти углы есть внутренние накрест лежащие при пересечении прямых AB и CD секущей AC , то $AB \parallel CD$, ч.т.д.

2. Пусть $\angle KAB = x$. т.к. AK — биссектриса, то $\angle CAK = \angle KAB = x$. Т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $\angle B = 2 \angle CAK = 2x$.

Тогда $\angle АКВ = 180^\circ - (\angle KAB + \angle B) = 180^\circ - (x + 2x) = 180^\circ - 3x$.

Получаем, $30^\circ = 180^\circ - 3x$; $3x = 150^\circ$; $x = 50^\circ$.

$\angle B = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$.

Но это невозможно, т.к. сумма углов больше 180° .

Поэтому $\angle АКВ = 150^\circ$. Получаем $180^\circ - 3x = 150^\circ$; $3x = 30^\circ$; $x = 10^\circ$.

$\angle B = 2 \cdot 10^\circ = 20^\circ$. Тогда $\angle C = 180^\circ - 2 \angle B = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

3. Пусть $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ — данные.

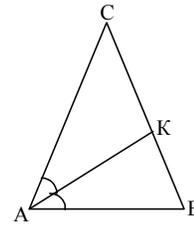
$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и высоты $BH = BH_1$.

$\angle HBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle C_1 = \angle H_1B_1C_1$.

Т.к. $BH = B_1H_1$, $\angle HBC = \angle H_1B_1C_1 = 90^\circ$, $\angle HBC = \angle H_1B_1C_1$, то $\triangle HBC = \triangle H_1B_1C_1$ (по второму признаку). Значит, $BC = B_1C_1$.

$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - \angle A_1 - \angle C_1 = \angle B_1$.

Т.к. $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку), ч.т.д.



C-19

1. Т.к. $\triangle ABC = \triangle ABD$ и они равнобедренные, то $\angle CAB = \angle DBA$. Но, т.к. эти углы есть вертикальные накрест лежащие при пересечении прямых AC и BD секущей AB , то $AC \parallel BD$, ч.т.д.

2. Возможны два случая:

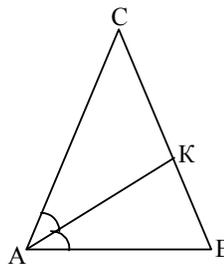
а) $\angle АКВ = 60^\circ$, $\angle АКС = 120^\circ$.

Тогда аналогично №2 из С-18

получим $60^\circ = 180^\circ - 3x$; $3x = 120^\circ$; $x = 40^\circ$.

$\angle В = 2 \cdot 40 = 80^\circ$,

$\angle С = 180^\circ - 2 \angle В = 180 - 2 \cdot 80 = 20^\circ$.



б) $\angle АКВ = 120^\circ$, $\angle АКС = 60^\circ$.

Тогда получим $120^\circ = 180^\circ - 3x$; $3x = 60^\circ$; $x = 20^\circ$.

$\angle В = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $\angle С = 180^\circ - 2 \angle В = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

3. Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — данные.

$AB = A_1B_1$, CH , C_1H_1 — высоты.

$CH = C_1H_1$, CK и C_1K_1 — медианы, $CK = C_1K_1$.

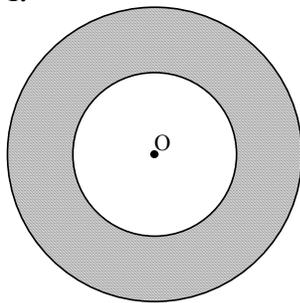
Тогда $\triangle CHK = \triangle C_1H_1K_1$ (по признаку равенства прямоугольных треугольников, по гипотенузе и катету).

Поэтому, $\angle SKH = \angle C_1K_1H_1$. Значит, $\angle SKB = \angle C_1K_1B_1$ (как смежные с равными углами). Значит, $\triangle SKB = \triangle C_1K_1B_1$ (по первому признаку). Поэтому $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Т.к. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, ч.т.д.

С-20

1.



2. Точка касания двух окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры. Т.к. данные окружности имеют общий центр, то точки касания третьей окружности с ними лежат на прямой, проходящей через их центры. Значит, четыре точки — два центра и две точки касания — лежат на одной прямой. При этом точки касания могут лежать либо по дону сторону от общего центра, либо по разные. В первом случае ответ 2 см, во втором случае 6 см.

С-21

1. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$.

Теперь строим угол, равный углу А.

2. Проводим прямую, откладываем на ней с помощью циркуля отрезок равный ВС. Теперь строим два угла, равных β и γ , первый с вершиной в точке В, второй в точке С. Точка пересечения сторон углов дает вершину А.

С-22

1. Для каждой из сторон треугольника проделываем следующую последовательность действий:

- берем раствор циркуля равный длине той стороны треугольника, для которой мы строим серединный перпендикуляр;
- строим две окружности с центрами в вершинах треугольника, прилежащих к данной стороне;
- соединяем точки пересечения этих окружностей, полученная прямая является искомым серединным перпендикуляром.

2. Откладываем сторону a , делим ее пополам. Из ее середины проводим окружность радиуса m , а из конца В проводим угол, равный β . Точка их пересечения дает точку С.

С-23

1. Пусть С — точка искомого геометрического места точек. Проведем через точку С прямую, перпендикулярную данным параллельным a и b . Она пересечет их в некоторых точках А и В.

Имеем: $AB = d$, $AC + BC = 2d$. Точка С не может лежать между А и С, т.к. $AC + BC = 2d \neq d$. Если точка В лежит между А и С, то

$AB + BC = AC$, т.е. $AC = BC + d$. Решая систему:
$$\begin{cases} AC + BC = 2d \\ AC - BC = d \end{cases}$$
 находим:

$AC = 3 \frac{d}{2}$, $BC = \frac{d}{2}$. Если точка А лежит между В и С, то аналогично находим: $AC = \frac{d}{2}$, $BC = 3 \frac{d}{2}$. Поэтому, искомое геометрическое место точек — две прямые, параллельные a и b и отстоящие от них на расстояниях $\frac{d}{2}$ и $3 \frac{d}{2}$.

2. Это точки пересечения биссектрис четырех углов, образовавшихся при пересечении данных прямых с окружностью, т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть его биссектриса.

С-24

1. Т.к. центры и точка касания лежат на одной прямой, то искомое расстояние в случае внешнего касания равно $8 + 12 = 20$ (м). А в случае внутреннего касания $12 - 8 = 4$ (м).

2. Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 см, катетом 2 см. Через второй катет проводим прямую и откладываем на ней в обе стороны от конца катета (не являющегося вершиной прямого угла) равные отрезки длиной $4/2 = 2$ (см). Получаем две другие вершины искомого треугольника.

3. Геометрическое место точек, удаленных на расстоянии d от точки C , есть окружность с центром в C радиуса d . Геометрическое место точек, равноудаленных от a и b , есть прямая d , параллельная им, проходящая между ними на равном расстоянии от каждой. Поэтому искомая точка – есть точка пересечения окружности с прямой.

С-25

1. Нет, т.к. тогда бы центры и точка касания лежали на одной прямой. А в этом случае $30 = 15 + 20$, что неверно.

2. Строим угол в 60° , проводим его биссектрису длиной 3 см. Пусть конец биссектрисы, отличный от вершины угла, есть точка A . Далее проводим из вершины угла окружность радиуса 2 см. Проводим из точки A касательную к окружности. Эта касательная пересекает стороны угла в двух точках — вершинах треугольника.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от a и b , есть прямая, параллельная a и b , проходящая между ними на равном расстоянии от a и b . Для c и d — аналогично. Значит, искомая точка есть точка пересечения этих двух прямых.

Дифференцированные задания

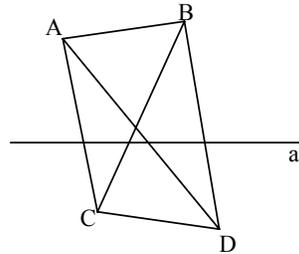
Д-1

1. $AB = AC + CB$.
2. $AB = AC + BC = 3,4 + 1,9 = 5,3$ (см).
3. $AB = AC + BC$. Пусть $AC = x$ м, тогда $BC = x+5$ (м).
Т.к. $AB = 16$ м, то $16 = x+x+5$,
 $11 = 2x$, $x = 5,5$ (м); $AC = 5,5$ м; $BC = 5,5 + 5 = 10,5$ (м).
4. $AB = AC + BC$; $AC = AD + DC$.
Значит, $AB = AD + DC + BC$. Поэтому, $AB > AD$.

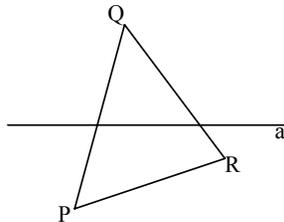
Д-2

Вариант 1.

1.



- AC, AD, BC, BD — пересекают a . AB, CD — не пересекают a .
2. Т.к. A и B лежат в одной полуплоскости, то AB не пересекает a , аналогично CD.
 - 3.



Нет.

4. Т.к. PQ пересекает a , то P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно a . Аналогично получаем, что R и Q лежат в разных по-

луплоскостях. Значит, P и R лежат в одной полуплоскости. Значит, отрезок PR не пересекает a .

Вариант 2.

1. Если бы A и B лежали в разных полуплоскостях, то прямая AB пересекала бы прямую a .
2. Если бы a не пересекала BD (т.е. $a \parallel BD$), то точки B и D лежали бы в одной полуплоскости. Но тогда A и D тоже лежали бы в одной полуплоскости, что невозможно, т.к. AD пересекает a .
3. Из условия ясно, что точки A и B лежат в одной полуплоскости, точка D — в другой. Т.к. a не проходит через точку C, то C лежит в одной из этих полуплоскостей. Пусть точка C лежит вместе с точкой D в одной полуплоскости (случай, когда точка C лежит в одной полуплоскости с точками A и B — аналогично). Т.к. B и C — в разных полуплоскостях, то a пересекает BC, ч.т.д.
4. Т.к. a пересекает AD, то A и D — в разных полуплоскостях. Если точка B лежит с точкой D в одной полуплоскости, то все доказано. Пусть B лежит в одной полуплоскости с A. Если C лежит в одной полуплоскости с D, то все доказано. Пусть точка C лежит в одной полуплоскости с A и B. Но тогда CD пересекает a , и опять все доказано, ч.т.д.

Д-3.

Вариант 1.

1. $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$.
2. $\angle(ab) = 35^\circ + 80^\circ = 115^\circ$.
3. $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$. Пусть $\angle(ac) = x$, тогда $\angle(bc) = 3x$.
Получаем $140^\circ = x + 3x$; $4x = 140^\circ$; $x = 35^\circ$.
 $\angle(ac) = 35^\circ$, $\angle(bc) = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ$.
4. Имеем: лучи c_1 и c — внутри $\angle(ab)$, градусная мера которого меньше или равна 180° . Значит, $\angle(ab) = \angle(cc_1) + \kappa$, где $\kappa > 0$, т.к. точки c и c_1 — внутри угла, а не на сторонах. Однако, равенство не возможно, т.к. его правая часть больше 180° .
Значит, луч c_1 не может проходить между сторонами $\angle(ab)$.

Вариант 2.

1. Если бы OA пересекала BC , то B и C лежали бы в разных полуплоскостях относительно прямой OA , что неверно.
2. Если бы луч k не пересекал AC , то точки A и C — в одной полуплоскости относительно луча k . Т.к. k пересекает AB , то k пересекал бы BC . Однако это невозможно по утверждению 1.
3. Луч k по утверждению 2 пересекает AD . Теперь снова, используя утверждение 2, получаем, что луч k пересекает CD , ч.т.д.
4. Предположим противное, т.е. пусть c проходит между сторонами $\angle AOB$. Возьмем произвольную точку на c и проведем прямую через нее до пересечения со сторонами $\angle AOB$. Получим, что луч c пересекает отрезок с концами на сторонах $\angle AOB$. Значит, по предыдущему утверждению, он пересекает и AB . Получили противоречие. Поэтому c не проходит между сторонами $\angle AOB$, ч.т.д.

Д-4.

1. Нет, т.к. их сумма тогда бы была меньше 180° .
2. $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$; $180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$.
3. $\angle a, \angle b$. Пусть $\angle a > \angle b$;
угол, смежный с $\angle a$, равен $180^\circ - \angle a$;
угол, смежный с $\angle b$, равен $180^\circ - \angle b$;
получаем, $180^\circ - \angle b > 180^\circ - \angle a$. Ответ: большему.
4. $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, значит, эти углы смежные, ч.т.д.

Д-5.

1. Предположим противное, т.е. точка C — между A и B . Тогда $AB = AC + BC$; $3,7 = 4,3 + 8$ — неверно, значит наше предположение неверно. Следовательно, C не лежит между A и B , ч.т.д.
2. Пусть c проходит между сторонами $\angle (ab)$. Тогда $\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (bc) = 85^\circ + 103^\circ = 190^\circ > 180^\circ$. А этого не может быть, т.к. $\angle (ab)$ в данном контексте — острый. Значит, c не проходит между сторонами $\angle (ab)$, ч.т.д.
3. Если бы эти углы были бы смежными, то их сумма равнялась бы 180° . А в условии 160° . Значит, они не смежные, а вертикальные, ч.т.д.
4. Если бы эти точки лежали на одной прямой, то длина одного из отрезков равнялась бы сумме двух других. А это неверно, т.к. $8,3 \neq 6,7 + 2,6$. Значит, точки не лежат на одной прямой, ч.т.д.

Д-6.

1. $\triangle AOC = \triangle DOB$, по первому признаку, т.к. $AO = OB$, $CO = OD$, $\angle AOC = \angle DOB$ как вертикальные. Значит, $\angle ACD = \angle BDC$, ч.т.д.
2. $\triangle BOC = \triangle BOD$, по первому признаку, т.к. $BD = OB$, $OC = OD$, $\angle ACD = \angle BCD$. Значит, $BC = BD$, ч.т.д.
3. $\angle COB = \angle DOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, значит, $AB \perp CD$, ч.т.д.
4. Пусть в $\triangle ABC$ BK — медиана и биссектриса. Т.е. $AK = KC$, $\angle ABK = \angle CBK$. Т.к. BK — общая сторона треугольников ABK и BKC , то $\triangle ABK = \triangle BKC$ по первому признаку. Значит, $AB = BC$, ч.т.д.

Д-7.

Вариант 1.

1. $\triangle AOC = \triangle DOB$, по второму признаку, т.к. $\angle AOC = \angle DOB$ (как вертикальные), $OC = OD$, $\angle ACO = \angle BDO$. Значит, $AC = BD$, $AO = OB$, ч.т.д.
2. $\triangle AOD = \triangle BOC$, по первому признаку, т.к. $\angle AOD = \angle BOC$ (как вертикальные), $AO = OB$, $OC = OD$. Значит, $AD = BC$, ч.т.д.
3. $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB = \angle BDO + \angle ADO = \angle BDA$;
 $\angle CAD = \angle CAO + \angle DAO = \angle CBO + \angle DBO = \angle DBC$.
4. Т.к. $AB = CD$ и $AO = CO$, то $DO = BO$.
 $\triangle ABC = \triangle ACD$ по третьему признаку, т.к. $BC = CD$ (т.к. $\triangle COB = \triangle AOD$), $AC = CA$, $AB = CD$. Поэтому $\angle ABC = \angle ADC$, ч.т.д.

Вариант 2.

Т.к. $\triangle ABC = \triangle BDA$, то их соответствующие стороны равны. $BD = AC$, т.к. BD не может равняться BC (потому, что тогда бы $\angle BAD = \angle BAC$, что неверно).
Т.к. $\triangle ABC = \triangle BDA$, то $\angle D = \angle C$,
 $\angle DBO = 180^\circ - \angle D - \angle DOB = 180^\circ - \angle C - \angle COA = \angle CAO$.
Поэтому, $\triangle BOD = \triangle AOC$ по второму признаку (т.к. $BD = AC$ и два прилежащих угла равны).
II способ. Т.к. $\triangle ABC = \triangle BAD$ и $BD = AC$, то $\angle OAB = \angle OBA$ и $\triangle OBA$ — равнобедренный.
Значит, $OB = OA$. Т.к. $\triangle ABC = \triangle BAD$, то $AD = BC$, значит, $OD = OC$.
Отсюда $\triangle BOD = \triangle AOC$ по третьему признаку, ч.т.д.

Д-8.

- $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$;
- $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 180^\circ - \beta$; $\gamma = 180^\circ - \beta = \alpha = 36^\circ$.
- $\angle AA_1B_1 = 180^\circ - \angle A$; $\angle AA_1B_1 = 180^\circ - \angle CA_1B_1$, значит, $\angle CA_1B_1 = \angle A$. Аналогично, $\angle CB_1A_1 = \angle B$.
Т.к. $\angle A = \angle B$, то $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$, ч.т.д.
- Пусть $a \perp b$, $a \parallel c$, $b \parallel d$.
Рассматривая углы, получающиеся при пересечении a и c секущей b , получаем, что $b \perp c$, но т.к. $b \parallel d$, то $c \perp d$, ч.т.д.

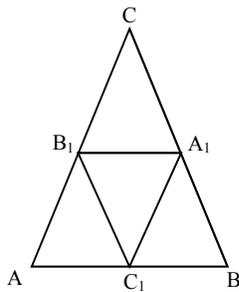
Д-9.

- 75° .
- $\alpha = \beta$, $\gamma + \beta = 180^\circ$, $\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.
- $\angle CAB = \angle KAA_1$ (как вертикальные).
Т.к. $KM \parallel A_1B_1$, то $\angle KAA_1 = \angle CA_1B_1$ (как внутренние накрест лежащие при пересечении секущей CA_1).
Поэтому $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Аналогично, $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$, поэтому, $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$, ч.т.д.
- $\triangle MAO = \triangle EBO$ по второму признаку т.к. $\angle MOA = \angle EOB$ (как вертикальные), $AO = OB$, $\angle MAO = \angle EBO$ (как внутренние накрест лежащие при пересечении секущей AB). Значит, $EO = OM$, ч.т.д.

Д-10.

Вариант 1.

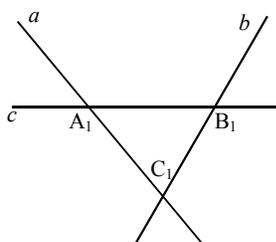
- $\angle DBC = 60^\circ / 2 = 30^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle BDC = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.
- Нет, т.к. тогда бы сумма углов была бы больше 180° .
- Нет, т.к. тогда бы $a + b < 120^\circ$, $b + c < 120^\circ$, $a + c < 120^\circ$.
Складывая неравенства, получим, $2(a + b + c) < 360^\circ$;
 $a + b + c < 180^\circ$ — неверно, т.к. $a + b + c = 180^\circ$.



- $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$.
Поэтому, $\angle CB_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \angle B_1C_1A = \angle A_1C_1B = \angle A = \angle B$.
Значит, $\angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - 2\angle A = \angle C$.
 $\angle AB_1C_1 = \angle BA_1C_1 = 180^\circ - 2\angle A$.
 $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \angle A - (180^\circ - 2\angle A) = \angle A$.
Поэтому $\triangle A_1B_1C_1$ — тоже равнобедренный.

Вариант 2.

1. Если бы $a \parallel b$, то $BC \parallel AC$, что неверно. Поэтому a пересекает b .



2. На рисунке помечены соответствующие равные углы. Они равны, т.к. являются внутренними накрест лежащими при пересечении соответствующих параллельных прямых секущими.

Поэтому $\angle B_1 = \angle A$, $\angle A_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$.

3. Доказательство следует из определения внутренних накрест лежащих углов.

4. См. №3.

Вариант 3.

Пусть $\angle A = \angle B = x$, $\angle C = y$.

Тогда $2x + y = 180^\circ$. $\angle ADB = x$, $\angle CAD = y$.

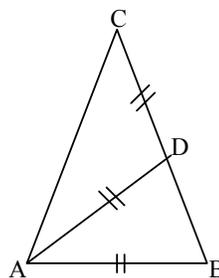
Значит, $\angle ADC = 180^\circ - 2y$ и

$\angle ADC = 180^\circ - x$;

$180^\circ - 2y = 180^\circ - x$, $x = 2y$;

$2 \cdot 2y + y = 180^\circ$, $5y = 180^\circ$, $y = 36^\circ$; $x = 72^\circ$.

Ответ: 72° , 72° , 36° .



Вариант 4.

$MN \parallel AC$, $MK \parallel BC$, $KN \parallel AB$

Т.к. $MN \parallel AC$, то

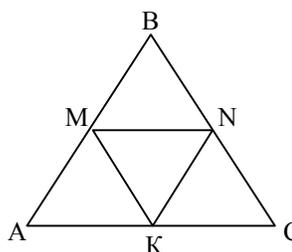
$\angle BMN = \angle MNB = \angle BAC = 60^\circ$.

Т.е. $\triangle MBN$ — равносторонний.

$MN = MB = \frac{1}{2} AB$

Аналогично, $MK = \frac{1}{2} AB$, $KN = \frac{1}{2} AB$.

Значит, $\triangle MNK$ — равносторонний, ч.т.д.



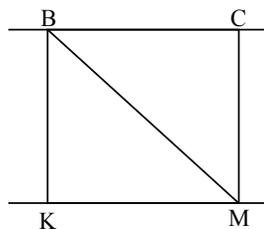
II способ. $\angle MKN = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Аналогично, $\angle KMN = \angle MNK = 60^\circ$. Значит, $\triangle MNK$ — равнобедренный, ч.т.д.

Д-11.

1.

$BK \parallel CM$. Поэтому $\angle KBM = \angle CMB$. Значит, $\triangle KBM = \triangle CMB$. Значит, $\angle BKM = \angle CMB$. Поэтому, $BC \parallel KM$. Значит, b совпадает с BC , ч.т.д.



2. Это следует из задачи №1.

3.

Откладываем сторону a . Далее проводим прямую k , параллельную a и отстоящую от нее на расстояние h . (Таких прямых две, выбираем одну из них). Далее восстанавливаем перпендикуляр из середины стороны a . Далее проводим из левого конца стороны a как из центра окружность радиуса R . Точка пересечения окружности с перпендикуляром даст нам точку O — центр описанной около данного треугольника окружности. Теперь проводим из точки O как из центра окружность радиуса R . Точка ее пересечения с прямой k — это третья вершина треугольника. Треугольник построен.

4. Дважды применяем утверждение №2, сначала к b , потом к c . Получаем четыре прямых, две из которых совпадают. Поэтому искомого геометрического места точек — прямая a , ч.т.д.

Контрольные работы

К-1

Вариант 1.

1. $AB = AC + CB = 10 + 5 = 15$ (см).

2. $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb) = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$.

3. а) Пусть $MB = x$ см, тогда $AM = x + 5$ (см).

Получаем $20 = x + x + 5$; $2x = 15$; $x = 7,5$.

$MB = 7,5$ см; $AM = 7,5 + 5 = 12,5$ (см).

б) Пусть $AM = x$ см, тогда $MB = 20 - x$ (см).

Искомое расстояние равно:

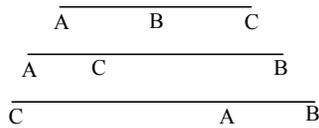
$$\frac{1}{2} AM + \frac{1}{2} MB = \frac{1}{2} (AM + MB) = \frac{1}{2} (x + 20 - x) = 10 \text{ (см)}$$

Вариант 2.

1. $KC = KA + AC$; $AC = KC - KA = 20 - 10 = 10 \text{ (см)}$.
2. $\angle (cb) = \angle (ab) + \angle (ca)$; $\angle (ca) = \angle (cb) - \angle (ab) = 22^\circ - 12^\circ = 10^\circ$.
3. а) Пусть $PB = x \text{ см}$, тогда $BK = x + 6 \text{ (см)}$.
Получаем $16 = x + x + 6$; $2x = 10$; $x = 5$; $PB = 5 \text{ см}$; $BK = 5 + 6 = 11 \text{ (см)}$.
б) Пусть $FD = x \text{ см}$, тогда $CF = 2x \text{ см}$.
Получаем $21 = x + 2x$; $3x = 21$; $x = 7$; $FD = 7 \text{ см}$; $CF = 2 \cdot 7 = 14 \text{ (см)}$.

Вариант 3.

1. $BK = BM + MK$; $MK = BK - BM = 26 - 15 = 11 \text{ (см)}$.
2. $\angle (ab) = \angle (ap) + \angle (pb)$; $\angle (pb) = \angle (ab) - \angle (ap) = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.
- 3.



- а) $AC = AB + BC = 7 + 11 = 18 \text{ (см)}$ или
 $AC = BC - AB = 11 - 7 = 4 \text{ (см)}$
- б) нет, т.к. если бы лежали, то длина одного из отрезков большего равнялась бы сумме длин двух других, А это невозможно, т.к. $4 \neq 2+3$.

Вариант 4.

1. $AB = OA + OB = 12 + 6 = 18 \text{ (см)}$.
2. $\angle (pa) = \angle (pk) + \angle (ka) = 70^\circ + 15^\circ = 85^\circ$.
3. Нет, т.к. если бы лежали, то длина одного из отрезков (большого) равнялась бы сумме длин двух других, а это невозможно, т.к. $4 \neq 2,8 + 2,3$.
4. Нет, т.к. тогда бы $BM = CM + CB$, а у нас $BM < CM + CB$.

К-2.

Вариант 1.

1. а) $\angle AOK$ и $\angle KOB$, $\angle KOB$ и $\angle BOP$, $\angle BOP$ и $\angle POA$, $\angle POA$ и $\angle AOK$. Т.к. эти пары углов образуют развернутый угол.

- б) $\angle AOK$ и $\angle POB$, $\angle KOB$ и $\angle AOP$. Они равны как вертикальные.
 2. Пусть $\angle AOK = x$, тогда $\angle KOB = 5x$.
 Получаем $x + 5x = 180^\circ$, $6x = 180^\circ$, $x = 30^\circ$.
 $\angle AOK = 30^\circ$, $\angle KOB = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$, $\angle BOP = 30^\circ$.
 3. $\angle AOK = \angle BOP = x$. Тогда $x + x > 180^\circ$, $2x > 180^\circ$, $x > 90^\circ$.
 Т.е. оба угла тупые.

Вариант 2.

1. а) $\angle MBK$ и $\angle CBA$, $\angle KBA$ и $\angle MBC$ – вертикальные.
 $\angle MBK = \angle CBA$, $\angle KBA = \angle MBC$.
 б) $\angle MBK$ и $\angle KBA$, $\angle KBA$ и $\angle ABC$, $\angle ABC$ и $\angle CBM$,
 $\angle CBM$ и $\angle MBK$. Т.к. они смежные.
 2. Пусть $\angle MBK = x$. Тогда $\angle MBK = 40^\circ + x$.
 Получаем, $x + 40^\circ + x = 180^\circ$, $2x = 140^\circ$, $x = 70^\circ$.
 $\angle KBA = \angle MBC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$. $\angle ABC = \angle MBK = 70^\circ$.
 3. $\angle KBA = \angle MBC = x$. Тогда $x + x = 180^\circ$, $x = 90^\circ$.
 Т.е. оба угла прямые.

Вариант 3.

1. а) $\angle AKM$ и $\angle MKC$, $\angle MKC$ и $\angle SKO$, $\angle SKO$ и $\angle OKA$, $\angle OKA$
 и $\angle AKM$. Каждая пара углов дает в сумме 180° .
 б) $\angle AKM = \angle OKC$, $\angle MKC = \angle OKA$ как вертикальные.
 2. Пусть $\angle SKO = x$, тогда $\angle MKC = 70^\circ + x$.
 Получаем, $x + 70^\circ + x = 180^\circ$, $2x = 110^\circ$, $x = 55^\circ$.
 $\angle SKO = \angle AKM = 55^\circ$, $\angle AKO = 70^\circ + 55^\circ = 125^\circ$.
 3. $\angle AKM = \angle OKC = x$. Тогда $x + x < 180^\circ$,
 $2x < 180^\circ$, $x < 90^\circ$. Т.е. оба угла острые.

Вариант 4.

1. а) $\angle EMP = \angle AMK$, $\angle PMK = \angle EMA$.
 б) $\angle EMP$ и $\angle PMK$, $\angle PMK$ и $\angle KMA$, $\angle KMA$ и $\angle AME$, $\angle AME$ и
 $\angle EMP$. Т.к. они смежные.
 2. Пусть $\angle AMK = x$, тогда $\angle PMK = 3x$.
 Получаем, $x + 3x = 180^\circ$, $4x = 180^\circ$, $x = 45^\circ$;
 $\angle AMK = \angle EMP = 45^\circ$, $\angle PMK = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.
 3. Искомый угол равен:

$$\frac{1}{2} \angle EMP + \frac{1}{2} \angle PMK = \frac{1}{2} (\angle EMP + \angle PMK) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

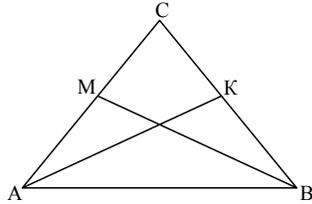
К-3.

Вариант 1.

1. $PM=AB=5$ см, $MK=BC=10$ см, $\angle K = \angle C = 36^\circ$.
2. $\triangle AOK = \triangle POM$, по первому признаку, т.к. $AO=OM$, $KO=OP$, $\angle AOK = \angle POM$ (как вертикальные).

Значит, $PM=AK$, ч.т.д.

3.



Т.к. $CK = \frac{1}{2} BC$, $MC = \frac{1}{2} AC$, то $CK=MC$. $\triangle AKC = \triangle BMC$ (по первому признаку), т.к. $AC=BC$, $CK=MC$, $\angle C$ — общий.
Поэтому, $AK=BM$, ч.т.д.

Вариант 2.

1. $BC=AK=20$ см, $\angle C = \angle K = 54^\circ$, $\angle D = \angle E = 60^\circ$.
2. $\triangle ABD = \triangle CDB$, по первому признаку, т.к. BD — общая, $AB=CD$, $\angle ABD = \angle CDB = 90^\circ$. Поэтому, $AD=CB$, ч.т.д.
3. $\triangle ABE = \triangle CBD$, т.к. $AB=BC$, $AE=CD$, $\angle BAE = \angle BCD$. Поэтому, $BE=BD$, ч.т.д.

Вариант 3.

1. $OB=KA=74$ см, $DB=MA=12$ см, $\angle O = \angle K = 76^\circ$.
2. $\triangle MKB = \triangle PVB$, по первому признаку, т.к. $MK=PB$, BK — общая, $\angle MKB = \angle PVB$. Поэтому, $BM=KP$, ч.т.д.
3. Т.к. $\triangle BEA = \triangle BMC$, то $BE=BM$, как стороны, лежащие против равных углов A и C , ч.т.д.

Вариант 4.

1. $PO=BC=35$ см, $\angle M = \angle A = 65^\circ$, $\angle O = \angle C = 102^\circ$.

2. Т.к. $\angle BDC + \angle CDM = 180^\circ$ и $\angle ABD + \angle KBA = 180^\circ$,

то $\angle BDC = \angle ABD$.

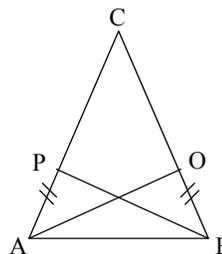
$\triangle CBD = \triangle ADB$, по первому признаку, т.к. BD — общая, $CD = AB$,
 $\angle BDC = \angle ABD$. Значит, $AD = CB$, ч.т.д.

3.

$\triangle APB = \triangle BOA$ (по первому признаку), т.к.

AB — общая, $AP = BO$, $\angle PAB = \angle OBA$.

Поэтому, $AO = BP$, ч.т.д.



К-4.

Вариант 1.

1. $\angle 2 = \angle 1 = 22^\circ$ (как соответственные).

2. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

3. а) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = 2x$, $\angle 3 = 3x$.

Получаем, $x + 2x + 3x = 180^\circ$, $6x = 180^\circ$, $x = 30^\circ$.

$\angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$,

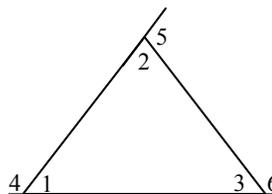
$\angle 3 = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

б) $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 6$;

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle 5 + 180^\circ - \angle 6 =$

$= 360^\circ - (\angle 5 + \angle 6) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$.

$\angle 1 = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.



Вариант 2.

1. $\angle 2 = \angle 1 = 100^\circ$ (как внутренние накрест лежащие).

2. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$,

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$.

3.

См. рис. Вариант 1.

а) нет, т.к. тогда бы $\angle 1 + \angle 2 > 180^\circ$, т.е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 > 180^\circ$, что неверно.

б) $\angle 2 = 180^\circ - \angle 5 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,
 $\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

Вариант 3.

1. $\angle 2 = \angle 1 = 54^\circ$ (как соответственные).

2. Пусть $\angle A = \angle B = x$. Тогда $x + x + 60^\circ = 180^\circ$, $2x = 120^\circ$, $x = 60^\circ$.

$\angle A = \angle B = 60^\circ$.

3.

См. рис. Вариант 1.

а) Нет, т.к. тогда бы $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$,

т.е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 > 180^\circ$, что неверно.

б) Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 6 = 3x$, $\angle 3 = 2x$. Т.к. $\angle 3$ и $\angle 6$ — смежные,

получаем $3x + 2x = 180^\circ$, $5x = 180$, $x = 36$.

$\angle 1 = 36^\circ$, $\angle 3 = 2 \cdot 36 = 72^\circ$, $\angle 2 = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$.

Вариант 4.

1. $\angle 2 = \angle 1 = 43^\circ$ (как внутренние накрест лежащие).

2. $\angle B = \angle A = 35^\circ$,

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$.

3. а) Нет, т.к. тогда бы $\angle 1 + \angle 3 > 180^\circ$, т.е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 > 180^\circ$, что неверно.

б) Т.к. $\angle 3$ и $\angle 6$ — смежные, то $\angle 3 = 180^\circ - \angle 6 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 30^\circ + x$.

Получаем $x + 30^\circ + x + 60^\circ = 180^\circ$; $2x = 90^\circ$, $x = 45^\circ$.

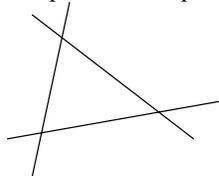
$\angle 2 = 45^\circ$, $\angle 1 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Дополнительные задачи

Задачи к §1.

1. Нет, т.к. если бы лежала, то прямая АВ пересекалась бы с прямой АС в двух точках А и В, значит, две прямые совпадали бы. А это неверно, т.к. прямые не совпадают.

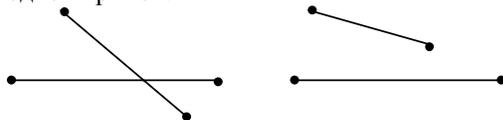
2. Три точки пересечения.



3. Может пересекать, а может и нет. Это следует из рисунка.



4. Одну или ни одной. Две не могут, т.к. тогда бы отрезки лежали на одной прямой.



5. Если все три точки лежат в одной полуплоскости, то ни один из отрезков не пересекает a . Если же нет, то обязательно одна точка лежит в одной полуплоскости, а две других – в другой. В этом случае два отрезка пересекают прямую.

6. Нет, т.к. первое равенство означает, что точка В лежит между А и С, а второе – точка С лежит между А и В. Одновременно это, очевидно, выполняться не может.

7. Т.к. $AB + AC = BC$, то точка А лежит между В и С. Значит, точка В не лежит между А и С.

8. 149 млн. 600 тыс. км; 150 млн. 400 тыс. км.

9. Т.к. три точки лежат на одной прямой, то длина одного из отрезков равна сумме длин других. Т.к. $AB = AC$, то эти отрезки не могут равняться сумме двух других. Значит, больший отрезок есть ВС. Значит, точка А лежит между В и С.

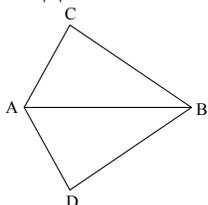
10. $360^\circ / 60^\circ = 6$ углов.

11. $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Т.к. в этом случае мы имеем два смежных угла.

12. Т.к. $\angle BAC = \angle BAD$, то точки С и D лежат по разные стороны от прямой АВ (иначе бы эти углы совпадали). Значит, CD пересекает АВ.

13. Нет, т.к. периметр этого треугольника (т.е. длина проволоки) равен $2+3+4=9$ (м). А $9 > 8$. Т.е. не хватает 1 м проволоки. Мы воспользовались тем, что вершины треугольника не лежат на одной прямой.

14. Да. Объяснение следует из рисунка.



15. Т.к. $\triangle ABC = \triangle PQR$, то $AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$.

Т.к. $AB = QR$ и $BC = QR$, то $AB = BC$.

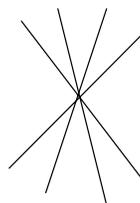
16. Если бы $b \parallel c$, то через точку С проходили бы две прямые, параллельные $b : c$ и AC. Но это невозможно (по основному свойству параллельных прямых), ч.т.д.

17. Проводим прямые, параллельные данным. Они пересекаются, т.к. пересекались данные. Полученные три точки пересечения и дают нам три вершины искомого треугольника.

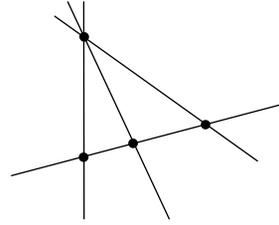
18. В самом деле, из данных четырех точек либо все они лежат на одной прямой (тогда они определяют одну прямую), либо три лежат на одной прямой (тогда они определяют четыре прямые), либо никакие три не лежат на одной прямой. В последнем случае через каждую пару точек проводим по одной прямой. Очевидно, что можно провести только шесть прямых. Т.к. других случаев не может быть, то утверждение доказано.

19.

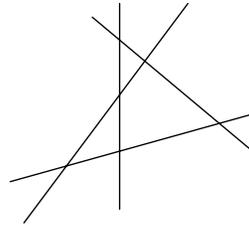
Либо все четыре прямые проходят через одну точку:



либо три из них проходят через одну точку, а четвертая их пересекает (т.е. четыре точки):



либо никакие три из них не пересекаются в одной точке (т.е. шесть точек):

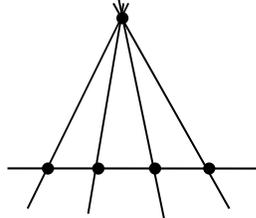


20. Исследуем все возможные случаи:

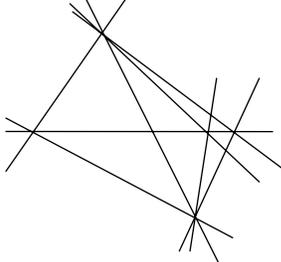
а) все пять точек лежат на одной прямой (одна прямая):



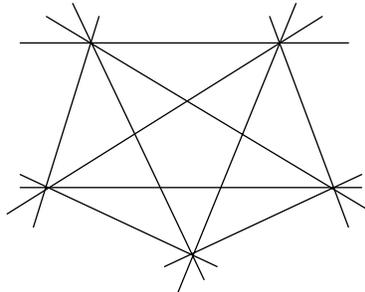
б) четыре точки лежат на одной прямой, а пятая — вне ее (Пять прямых):



в) существуют три точки (но не более), лежащие на одной прямой. Здесь два подслучая — существует одна такая тройка (восемь прямых):



г) не существует ни одной тройки точек, лежащих на одной прямой (десять прямых):



или две (шесть прямых):

Задачи к §2.

21. Т.к. всего 12 различных часов, то весь угол в 360° разбивается на 12 равных углов, каждый из которых равен $360^\circ / 12 = 30^\circ$.

Поэтому при 18 ч получаем 180° , при 13 ч — 30° ,

при 15 ч — $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

22. 18 ч 15 мин. Минутная стрелка стоит на 3, а часовая передвигается с 6 на четверть часа, т.е. на $\frac{1}{4} \cdot 30^\circ = 7,5^\circ$.

Получаем угол, равный $90^\circ + 7,5^\circ = 97,5^\circ$.

9 ч. Минутная стрелка стоит на 12, а часовая на 9, значит, угол между ними равен $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

9ч. 15 мин. Минутная стрелка стоит на 3, а часовая стрелка передвигается от 9 на четверть часа, т.е. на $\frac{1}{4} \cdot 30^\circ = 7,5^\circ$. Получаем угол,

равный $180^\circ - 7,5^\circ = 172,5^\circ$.

равный $180^\circ - 7,5^\circ = 172,5^\circ$.

23. $6^\circ \cdot 8 = 48^\circ$.

24. Пусть $\angle a > \angle b$, тогда $-a^\circ < -b^\circ$.

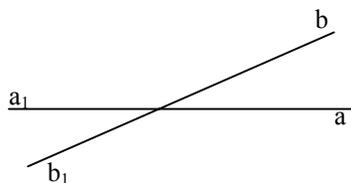
$180^\circ - a^\circ < 180^\circ - b^\circ$; $180^\circ - \angle a < 180^\circ - \angle b$. Значит, большему углу a отвечает меньший смежный угол (т.к. $180 - \angle a$; $180 - \angle b$ — это смежные с $\angle a$ и $\angle b$ углы).

25. Пусть $\angle 1 = x$, $\angle 2 = x$. Т.к. они смежные, то $x + x = 180$,

$2x = 180$, $x = 90$. Значит, $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, ч.т.д.

26. См. решение №25.

27.

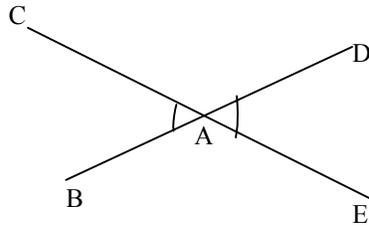


$\angle (ab_1) = \angle (a_1b)$, т.к. они вертикальные.

28. Обозначим через b_1 полупрямую, дополнительную к b .

$\angle (a_1b) = \angle (a_2b_1)$ (как вертикальные). Поэтому $\angle (a_1c) = \angle (a_2b_1)$. А т.к. последние два угла отложены от луча a_2 в одну полуплоскость, то луч c совпадает с b_1 . Т.е. $\angle (a_1b)$ и $\angle (a_2c)$ — вертикальные, ч.т.д.

29.



Пусть $\angle CAB = \angle DAE = x$ (как вертикальные).

$\angle CAD = 180^\circ - x$ (т.к. он смежный с ними).

Получаем, $x + x = 2(180^\circ - x)$; $4x = 360^\circ$; $x = 90^\circ$.

Значит, $\angle CAB = \angle DAE = 90^\circ$; $\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

30. Пусть $\angle ABC$ и $\angle ABD$ — данные прямые углы с общей стороной AB . Прямые BC и BD перпендикулярны AB и проходят через общую точку B . Значит, они совпадают. Т.е. точки B , C и D лежат на одной прямой. Очевидно, что C и D лежат в разных полуплоскостях относительно AB . Значит, лучи BC и BD — дополнительные. Значит, данные прямые углы смежные, ч.т.д.

31. Пусть $\angle(ac) = \alpha$. Если $\alpha < 90^\circ$, то $\angle(bc) = 90^\circ - \alpha < 90^\circ$.

Если $\alpha > 90^\circ$, $\angle(bc) = \alpha - 90^\circ < 90^\circ$ (т.к. $\alpha < 180^\circ$).

Значит $\angle(bc) < 90^\circ$, ч.т.д.

32. Т.к. углы отложены в разные полуплоскости относительно a , то точки C и D лежат в разных полуплоскостях. Значит, отрезок CD пересекает AB .

33. Т.к. $\angle(ab)$ и $\angle(ac)$ отложены в одну полуплоскость и $\angle(ab) > \angle(ac)$, то луч c лежит между сторонами $\angle(ab)$.

Значит $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$. $\angle(bc) = \angle(ab) - \angle(ac)$, ч.т.д.

34. Аналогично №33.

35. Прямая AP разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка B лежит в одной из них. Если точка C лежит в другой, то BC пересекает AP , ч.т.д.

Пусть B и C — лежат в одной полуплоскости. Тогда углы $\angle APB$ и $\angle APC$ отложены на полупрямой PA в одну полуплоскость и $\angle BPC$ равен их разности (см. №33).

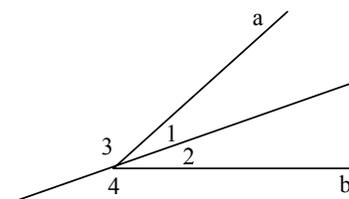
Если меньше $\angle APB$, то луч PB проходит между сторонами $\angle APC$, а, значит, он пересекает отрезок BC с концами на сторонах этого угла. А если меньше $\angle APC$, то луч PC проходит между сторонами $\angle APB$, а, значит, пересекает отрезок AB , ч.т.д.

36. Пусть $\angle 1 = x > 90^\circ$, тогда исходный угол равен $2\angle 1 = 2x > 2 \cdot 90 = 180^\circ$, что невозможно. Значит, $\angle 1$ не может быть тупым, ч.т.д.

37. Проводим произвольную прямую, отмечаем на ней точку А. Пусть это есть вершина данных углов и пусть две биссектрисы есть две различные полупрямые. Т.к. биссектриса угла делит его на два равных угла и данные углы равны, то равны все четыре угла (получающиеся из данных разбиением биссектрисами). Отсюда по аксиоме об откладывании углов получаем, что данные углы вертикальные, ч.т.д.

38.

$\angle 1 = \angle 2$.
Т.к. $\angle 3$ и $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 4$ — смежные, то $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1$,
 $\angle 4 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - \angle 1$,
значит, $\angle 3 = \angle 4$, ч.т.д.

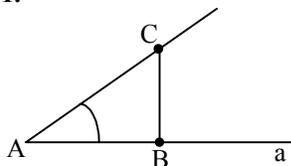


39. Т.к. $\angle(ab)$ и $\angle(ac)$ – тупые, то луч a лежит вне $\angle(bc)$. Т.е. не может быть его биссектрисой, ч.т.д.

40. Пусть углы, которые образует биссектриса угла с его сторонами, равны x . Тогда $x \geq 90^\circ$. Тогда данный угол равен $2x$. Но $2x \leq 180$, т.е. $x \leq 90$. Имеем $x \leq 90$ и $x \geq 90$. Значит, $x=90$. Т.е. данный угол равен $2 \cdot 90=180^\circ$.

Задачи к §3.

41.

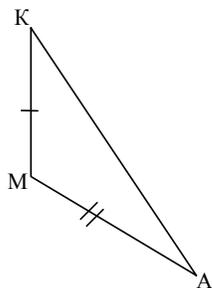
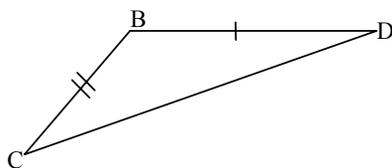
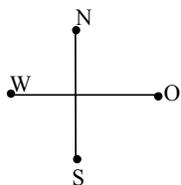


а) можно отложить целую часть от числа $180^\circ/x$ углов.
б, в) сколько угодно отрезков, т.к. полупрямая бесконечна.
г) $BC = 1,7$ см; $\angle B = 95^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.

42. Существует (по аксиоме VIII).

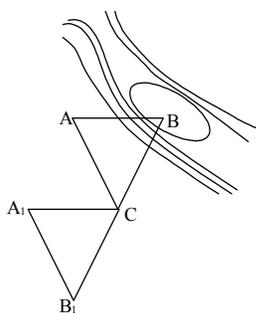
50

43.



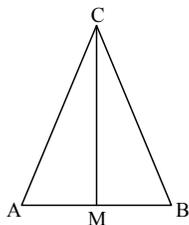
$\triangle BCD = \triangle MAK$ по первому признаку, т.к. $BD = MK$, $BC = MA$ и $\angle B = \angle M = 135^\circ (90^\circ + 45^\circ)$.
Значит, $CD = KA$, ч.т.д.

44. Проведем прямую AC .



Отложим $A_1C = AC$. Через точку A_1 проведем прямую A_1B_1 так, чтобы $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$, а $\angle A_1CB_1 = \angle ACB$. При этом точку B_1 выбираем так, чтобы она лежала на прямой BC . Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C$ (по второму признаку). Искомая длина кабеля равна A_1B_1 .

45.



$\angle M = 90^\circ$ (по свойству равнобедренного треугольника).

$$\angle MCB = \frac{\angle C}{2} = 50^\circ,$$

$$\angle B = \angle A = 40^\circ.$$

46. Строим треугольник по стороне AM и $\angle M$ и $\angle A$ (это можно сделать). Затем измеряем стороны, лежащие против углов равных $\angle M$ и $\angle A$.

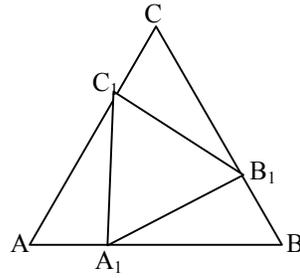
47. Можно. Для этого нужно измерить сторону против отколовшегося угла и два других угла. Эти три размера полностью определяют треугольник, (по второму признаку равенства треугольников).

48.

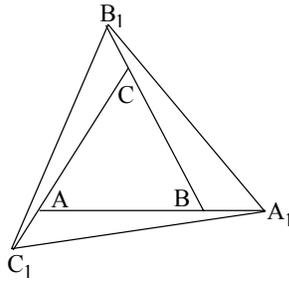
Т.к. $AB = AC = BC$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$,
то $AC_1 = BA_1 = CB_1$.

Тогда $\triangle AA_1C_1 = \triangle BB_1A_1 = \triangle CC_1B_1$
(по первому признаку, т.к.
 $\angle A = \angle B = \angle C$).

Значит, $A_1C_1 = A_1B_1 = B_1C_1$, ч.т.д.



49.

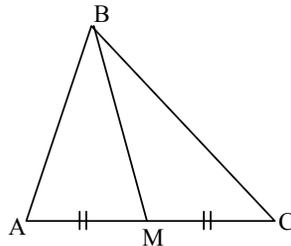


Т.к. $AB = BC = AC$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$,
то $BA_1 = CB_1 = AC_1$.

Теперь $\triangle AC_1A_1 = \triangle BA_1B_1 = \triangle CB_1C_1$
по первому признаку, т.к. $\angle C_1AA_1 =$
 $= \angle A_1BB_1 = \angle B_1CC_1$ (как смежные с
углом в 60°). Значит, $A_1B_1 = B_1C_1 =$
 $= A_1C_1$, ч.т.д.

50. Такой точки D (чтобы $CD = BD$ и $AD \perp BC$) может и не существовать. В этом и есть ошибка.

51.

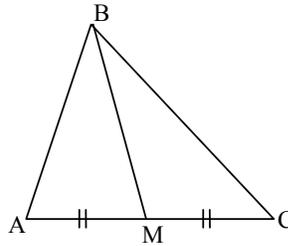


$BM = AM = MC$. Тогда $\triangle ABM$ и $\triangle BMC$ — равнобедренные. Значит, $\angle A = \angle ABM = x$, $\angle C = \angle CBM = y$.

Но $\angle B = \angle ABM + \angle CBM = x + y$. Т.е. $\angle B = \angle A + \angle C$, ч.т.д.

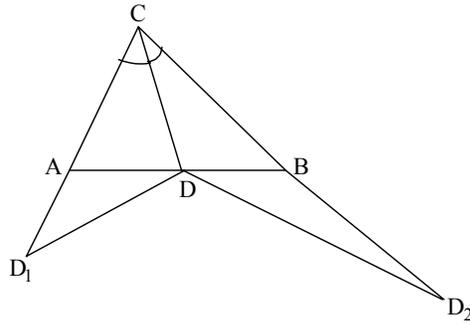
52

52.



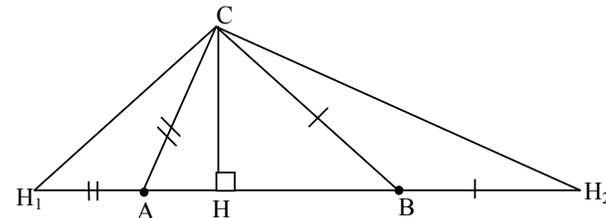
Пусть $BM = x$ см, $AM = MC = y$ см.
 Тогда $11 = x + y + AB$, $AB = 11 - x - y$;
 $14 = x + y + BC$, $BC = 14 - x - y$;
 $15 = AB + BC + AC$;
 $15 = 11 - x - y + 14 - x - y + 2y$;
 $2x = 10$; $x = 5$.
 $BM = 5$ см.

53.



Отложим на продолжении стороны AC за точку A отрезок $AD_1 = AD$. Отложим на продолжении BC за точку B отрезок $BD_2 = BD$. Известно, что $CD + AD + AC = CD + BD + BC$, значит, $AD + AC = BD + BC$; $AD_1 + AC = BD_2 + BC$; $CD_1 = CD_2$.
 $\triangle CD_1D = \triangle CDD_2$ (по первому признаку), т.к. $CD_1 = CD_2$, CD — общая, $\angle D_1CD = \angle D_2CD$ (CD — биссектриса). Значит, $DD_1 = DD_2$, $\angle D_1 = \angle D_2$, $\angle ADD_1 = \angle BDD_2$ (т.к. $\angle ADD_1 = \angle D_1$, $\angle BDD_2 = \angle D_2$), следовательно, $\triangle AD_1D = \triangle BD_2D$ (по второму признаку). Значит, $AD_1 = BD_2$. Поэтому, $AC = BC$, ч.т.д.

54.



Имеем, $AC + AH + CH = BC + BH + CH$, $AC + AH = BC + BH$. Проведем прямую AB . Пусть $AH_1 = AC$, $BH_2 = CB$. Тогда $HH_1 = HH_2$.

53

$\Delta H_1HC = \Delta H_2HC$. Значит, $\angle HCH_1 = \angle HCH_2$, $\angle H_1 = \angle H_2$. Т.к. ΔH_1AC — равнобедренный, то $\angle H_1CA = \angle H_1$. Аналогично, $\angle BCH_2 = \angle H_2$. В итоге получаем, $\angle ACH = \angle BCH$. Значит, $\Delta ACH = \Delta BCH$. Значит, $AC = BC$, ч.т.д.

55. Пусть BM — медиана. Пусть $AM = MC = x$.
Тогда $AM + BM + AB = MC + BM + BC$;
 $x + AB = x + BC$; $AB = BC$, ч.т.д.

56. Балки таких сооружений сами по себе почти не поддаются ни заметному растяжению, ни сокращению длины. Под действием силы возможно было лишь изменение их взаимного наклона. Но с тремя сторонами данной длины может существовать только один треугольник. Поэтому при данной длине балок, скрепленных в форме треугольника даже только шарнирами, углы, составленные ими, должны оставаться неизменными.

57. Например, три стороны. Т.к. этими размерами треугольник определяется полностью.

58. Если точка D лежит на BC , данное решение неверно, т.к. тогда нет ΔDBC (он вырождается в отрезок) При этом точка D , если она не является серединой BC , не равноудалена от B и C .

Задачи к §4.

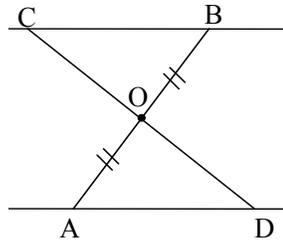
59. Пусть CD — произвольный отрезок.

Т.к. $BC \parallel AD$, то $\angle B = \angle A$

(внутренние накрест лежащие).

$\angle AOD = \angle BOC$ (вертикальные)

$AO = OB$, т.к. O — середина отрезка AB ,
значит, $\Delta AOD = \Delta BOC$ (по второму признаку). Значит, $CO = OD$, ч.т.д.



60. Это следует из свойств параллельных прямых.

61. Сума углов любого треугольника равна 180° .

62. а) Если бы не пересекались, то были бы параллельны, т.е. сума углов равна 180° , что неверно, значит, пересекаются, ч.т.д.

б) Да, т.к. $\angle BAM < \angle CAB$.

в, г) Т.к. вершины треугольника не лежат на одной прямой.

63. 1) пусть a, b, c — углы треугольника.

Тогда $a + b < 120^\circ$; $b + c < 120^\circ$; $a + c < 120^\circ$.

Получаем $2(a + b + c) < 360^\circ$, $a + b + c < 180^\circ$. Что неверно. Значит, такого треугольника не существует, ч.т.д.

2) Пусть у треугольника прямой или тупой угол.

Т.к. его градусная мера не меньше 90° , а сумма всех углов треугольника равна 180° , то сумма двух других углов не больше 90° . А это противоречит условию задачи.

64. В самом деле, два других угла при основании равны

$(180 - 60) / 2 = 60^\circ$. Т.е. все углы треугольника равны.

Значит, он равносторонний, ч.т.д.

65. Угол при вершине равен $180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Значит, треугольник равносторонний, ч.т.д.

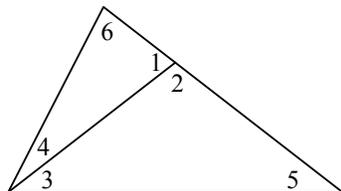
66. Пусть угол при данной вершине равен x . Тогда оба внешних угла равны $180 - x$, т.к. каждый из них смежен с x . Значит, они равны, ч.т.д.

67. Т.к. $AB \parallel CD$, то $\angle B = \angle C$ (как внутренние накрест лежащие).

$\angle CED = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (т.к. они смежные).

Тогда $\angle B = \angle C = 180^\circ - (\angle CED + \angle D) = 180^\circ - (100^\circ + 25^\circ) = 55^\circ$.

68.



Т.к. треугольник равны, то возможны два случая

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (как углы, прилежащие к равным сторонам).

Здесь получаем $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, что невозможно.

Значит, возможен второй случай $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Но здесь $\angle 1 = \angle 2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (т.к. они смежные).

69. См. рис. №68.

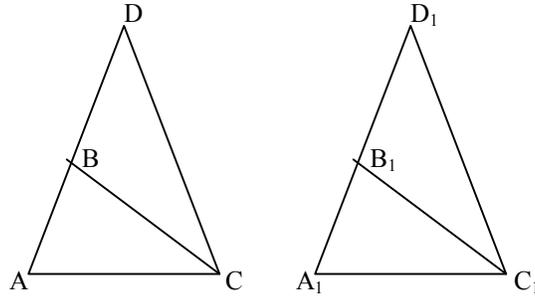
Как было замечено в решении предыдущей задачи $\angle 1 = \angle 2$,

$\angle 3 = \angle 4$. Но тогда $\angle 6 = \angle 5$ (т.к. $\angle 6 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 4$,

$\angle 5 = 180^\circ - \angle 2 - \angle 3$).

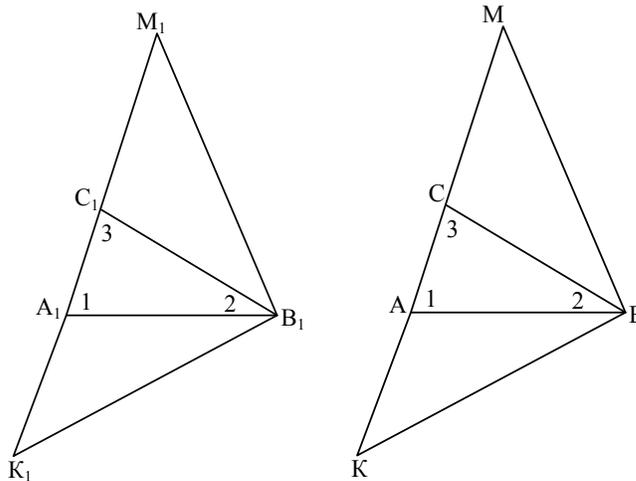
Значит, треугольник — равнобедренный, ч.т.д.

70. Отложим на прямой AB отрезок $BD = BC$, а на прямой A_1B_1 отрезок $B_1D_1 = B_1C_1$, см. рис. Получаем $AD = A_1D_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, значит, $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ (по первому признаку). Поэтому $\angle D = \angle D_1$, $\angle C = \angle C_1$. Т.к. $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$, то $\angle D = \angle BCD$, $\angle D_1 = \angle B_1C_1D_1$. Т.к. $\angle D = \angle D_1$, то $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Т.к. к тому же $\angle C = \angle C_1$, то $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Теперь $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку, ч.т.д.



71. Решение аналогично решению предыдущей задачи. Нужно лишь отложить на луче BA (B_1A_1) отрезок $BD = BC$ ($B_1D_1 = B_1C_1$).

72.



$AK = AB$, $MC = CB$, $A_1K_1 = A_1B_1$, $M_1C_1 = C_1B_1$.

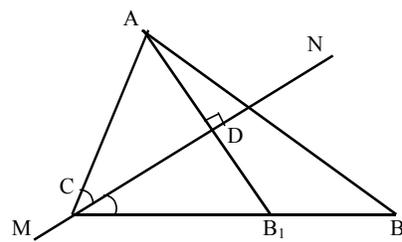
$\angle KAB = 180 - \angle 1$; $\angle AKB = (180^\circ - (180^\circ - \angle 1)) / 2 = \angle 1/2$. Аналогично, $\angle M = \angle 3/2$. Аналогично, $\angle K = \angle K_1$, $\angle M = \angle M_1$.

$MK = M_1K_1$ (т.к. это и есть периметры).

Поэтому, $\triangle KMB = \triangle K_1M_1B_1$ (по второму признаку).
 Значит, $KB = K_1B_1$. Поэтому $\triangle KAB = \triangle K_1A_1B_1$ (по второму признаку). Значит, $AB = A_1B_1$. Поэтому, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по второму признаку), ч.т.д.

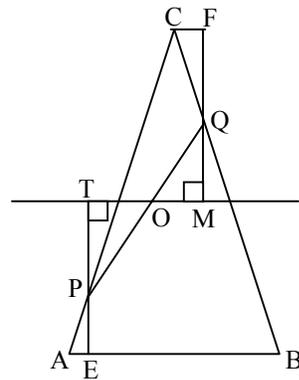
73. Ошибка в том, что это доказательство утверждает, что сумма углов у любого треугольника одна и та же. А это утверждение не доказано нами с помощью аксиом и доказанных ранее теорем.

74. Пусть даны отрезок AB , пересекающий его прямая MN и построен $\triangle ABC$, в котором биссектриса угла C лежит на прямой MN .



Тогда, опустив из точка A перпендикуляр AD на MN и продолжив его до пересечения с BC в точке B_1 , получим, что $AD = DB_1$ (см. рис.). Отсюда и вытекает искомое построение.

75.



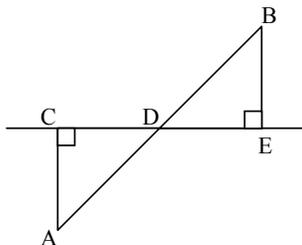
Проведем TE через точку P , MF через точку Q . $TE \parallel MF$, $TE \perp AB$, $MF \perp TM$. Тогда $TE = MF$. Но т.к. $PE = QF$ (из равенства треугольников AEP и CFQ), то $PT = MQ$.

Теперь $\triangle PTO = \triangle QMO$, (по второму признаку) т.к. $\angle T = \angle M = 90^\circ$, $\angle TOP = \angle QOM$ как вертикальные, а $PT = MQ$. Значит, $PO = OQ$, ч.т.д.

76. Опечатка в условии (утверждение неверно).

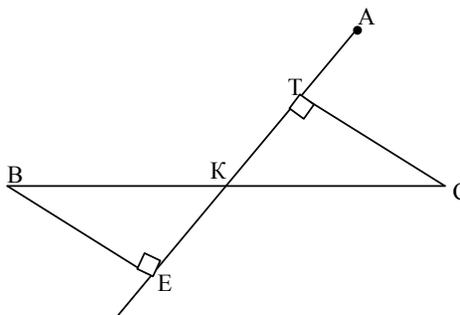
77.

Искомая точка D — есть точка пересечения AB и CE . В самом деле,
 $\triangle CDA = \triangle EDB$ по второму признаку
 ($\angle C = \angle E = 90^\circ$, $\angle CDA = \angle EDB$
 (как вертикальные), $AC = BE$).
 Значит, $AD = BD$.



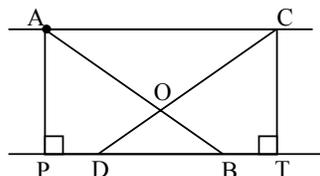
78. Искомая прямая есть AK , где K середина BC .

В самом деле,
 $\triangle BEK = \triangle CTK$ по второму признаку
 (т.к. $\angle E = \angle T = 90^\circ$,
 $\angle BKE = \angle CKT$,
 $BK = CK$). Значит, $BE = TC$,
 что и требовалось.



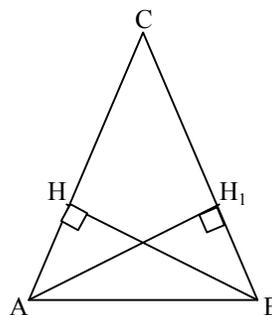
79.

Т.к. $AP = CT$, $AB = CD$ и $AP \perp PT$,
 $CT \perp PT$, то $\triangle ABP = \triangle CDT$ (по первому признаку).
 Значит, $\angle CDB = \angle ABD$.
 Т.е. $\triangle ODB$ и $\triangle AOC$ — равнобедренные. Значит, $AO = OC$, $OD = OB$,
 ч.т.д.



80.

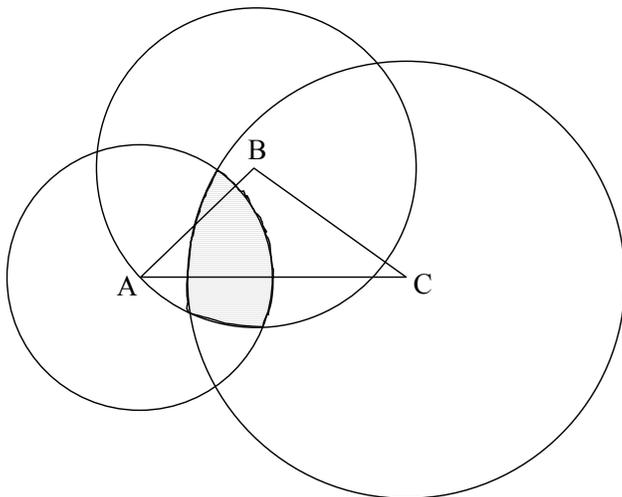
$\triangle AH_1B = \triangle BHA$ по первому признаку
 (т.к. $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$, $AB = AB$,
 $AH_1 = BH$). Значит, $\angle A = \angle B$, т.е.
 $\triangle ABC$ — равнобедренный, ч.т.д.



Задачи к §5.

81. Нужно взять две точки окружности и построить из них как из центра две окружности радиусами 30 мм. Точка их пересечения (внутри данной окружности) и есть искомая.

82.



- 1) Круг с центром в данном пункте и радиусом, равным радиусу приема.
- 2) Пересечение кругов для A и B.
- 3) Пересечение кругов для B и C.
- 4) Пересечение трех кругов (на рисунке заштриховано).
- 5) Объединение всех трех кругов.

83. Теорема 2.3 учебника.

84. Пусть r_1, r_2, r_3 — искомые радиусы. Тогда получим

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 4 \\ r_1 + r_3 = 5 \\ r_2 + r_3 = 6 \end{cases}$$

Найдем отсюда, что $r_1 = 1,5$ см; $r_2 = 2,5$ см; $r_3 = 3,5$ см.

85. Периметр треугольника равен $2(1 + 2 + 3) = 12$ (см).

86. Периметр треугольника равен $4+4+2 \cdot (10-4) = 8 + 2 \cdot 6 = 20$ (см).

87. $\angle OAC = \angle OMC = \angle OMK = \angle ODK = 90^\circ$ (по свойству касательной). Поэтому $\triangle OCA = \triangle OCM$ (т.к. $AC = CM$). $\triangle OKM = \triangle OKD$ (т.к. $MK = KD$). Отсюда получаем, что $OA = OM$, $OD = OM$. Значит, $OA = OD$, ч.т.д.

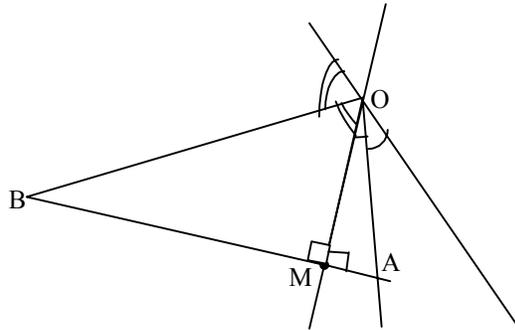
88. Искомая точка есть точка пересечения данной прямой с перпендикулярным перпендикуляром к данному отрезку. Такой точки не существует, если отрезок перпендикулярен прямой (точнее продолжение отрезка в обе стороны).

89. Серединный перпендикуляр к отрезку АВ. Это следует из свойства равнобедренного треугольника.

90. Берем на окружности три точки А, В и С. Получим $\triangle ABC$. Данная окружность описана около него. Но ведь центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров.

91. В самом деле, возьмем любые две такие окружности равных радиусов. Пусть O — точка их пересечения. Тогда $AO = OB$ (как равные радиусы). Значит, $\triangle AOB$ — равнобедренный. Поэтому точка O лежит на серединном перпендикуляре к AB . Значит, искомое геометрическое место точек — весь серединный перпендикуляр, ч.т.д.

92.



Пусть M — заданная точка. Т.к. окружности касаются прямой OM в точке M , то их центры лежат на перпендикулярах MA и MB . Далее, т.к. окружности вписаны в данные углы, то их центры лежат на их биссектрисах. Отсюда искомые точки A и B (центры окружностей) есть точки пересечения биссектрис с перпендикулярами.

93. Решение аналогично №92. А именно, восстанавливаем сначала перпендикуляр из данных точек. А затем проводим биссектрисы соответствующих углов. Их пересечение и даст нам центры окружностей.

94. Это биссектрисы четырех углов, образующиеся при пересечении прямых. Т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть его биссектриса.

95. Искомое геометрическое место точек есть пересечение геометрического места точек из №94 с серединным перпендикуляром к AB . Т.к. геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр.

96. Геометрическое место точек, равноудаленных от дорог, есть биссектриса этого $\angle BAC$. А геометрическое место точек, равноудаленных от M и N , есть серединный перпендикуляр к MN . Значит, искомая точка есть точка пересечения биссектрисы и перпендикуляра.

97. Пусть $\triangle ABC$ — данный. Через точки A, B, C можно провести окружность, если существует такая точка O , которая одинаково удалена от точек A, B и C . Докажем, что такая точка существует и притом только одна.

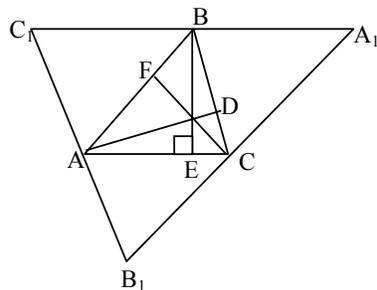
Известно, что всякая точка, равноудаленная от точек A и B , должна лежать на серединном перпендикуляре p к AB . Точно также обстоит дело с BC . Обозначим через q соответствующий серединный перпендикуляр. Значит, искомая точка O — пересечение p и q (p и q всегда пересекаются). Т.е. $OA = OB = OC$. Т.к. p и q могут пересечься только в одной точке, то точка O — единственна. Радиус также единственен. Он равен OA . Значит, искомая окружность единственная, ч.т.д.

98. Если существует окружность, которая касается всех сторон $\triangle ABC$, то ее центр должен быть точкой, одинаково удаленной от этих сторон. Докажем, что такая точка существует.

Множество точек, равноудаленных от AB и BC , есть биссектриса $\angle B$. Множество точек, равноудаленных от AB и AC , есть биссектриса $\angle A$. Точка O , в которой эти биссектрисы пересекаются, и будет равноудаленной от всех сторон. Таким образом, точка O — центр окружности с радиусом, равным длине любого из перпендикуляров OP, OQ, OR , опущенных из O на стороны. Окружность касается сторон в точках P, Q, R , т.к. стороны перпендикулярны радиусам OP, OQ и OR в этих точках.

Другой вписанной окружности не может быть, т.к. две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр, ч.т.д.

99.



Через каждую вершину $\triangle ABC$ проводим прямую, параллельную его противоположной стороне. Получим $\triangle A_1B_1C_1$ к сторонам которого высоты AD, BE, CF данного треугольника перпендикулярны. Т.к. $C_1B = AC = BA_1$ (из равенства соответствующих треугольников), то точка B есть середина стороны A_1C_1 .

Аналогично получаем, что $AC_1 = AB_1$, $B_1C = A_1C$.
 Таким образом, высоты AD , BE и CF являются серединными перпендикулярами сторон $\triangle A_1B_1C_1$. И, значит, пересекаются в одной точке (см. №97), ч.т.д.

100.

1)

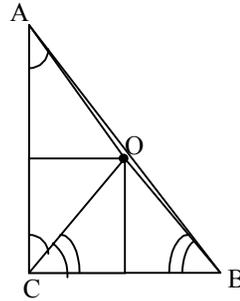
Предположим, что центр окружности O не лежит на гипотенузе AB .

Тогда $\triangle COB$, $\triangle COA$ — равнобедренные.
 Значит, $\angle OBC = \angle OCB$,

$\angle OCA = \angle OAC$. Но $\angle OCB + \angle OCA = 90^\circ$,
 значит, $\angle OAC + \angle OBC = 90^\circ$.

Но и $\angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$.

Т.к. $\angle CAO < \angle CAB$, $\angle OBC < \angle ABC$, то равенство $\angle OAC + \angle OBC = 90^\circ$ может достигаться тогда и только тогда, когда O лежит на AB . Но т.к. O — лежит на серединном перпендикуляре к AB , то O — середина AB , ч.т.д.



2)

Пусть T , K , E — точки касания окружности со сторонами $\triangle ABC$.

Тогда $TC = CE = r$. Но тогда $BE = a - r$,

$AT = b - r$. Т.к. $AT = AK$, $BK = KE$

(как отрезки касательных, проведенных из одной точки), то $AB = b - r + a - r$;

$$c = b + a - 2r; r = \frac{a + b + c}{2}, \text{ ч.т.д.}$$

