САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР ®

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 11

К заданиям учебника
Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова
ГЕОМЕТРИЯ 10-11

+ РЕШЕНИЕ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

В.Ю. Фадеев

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ

авторов

Л.С. Атанасяна,
В.Ф. Бутузова и др.
(М.: Просвещение)

10–11 классы

+ РЕШЕНИЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Москва • «ВАКО» • 2008

УДК 373.167.1: 514
ББК 22.151я72
Ф15

Фадеев В.Ю.
Ф15 Подробный разбор заданий из учебника по геометрии авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др.: 10–11 классы. – М.: ВАКО, 2008. – 384 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-662-7

Пособие содержит подробный разбор всех заданий из учебника по геометрии для 10–11 классов авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. ***(М.: Просвещение).***

Ответы и решения представлены в соответствии со структурой учебника, что значительно облегчит поиск необходимой информации.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-94665-662-7

Учебно-методическое издание

Сам себе репетитор ®

Фадеев Вячеслав Юрьевич

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ ИЗ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. *(М.: Просвещение)*

+ РЕШЕНИЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ
10–11 классы

Налоговая льгота – ОКП 005-93-953 (Литература учебная).
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 29.08.2007.
Формат 70*100/32. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 15,48.
Тираж 12 000 экз. Заказ № 19840.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru

Содержание

Глава V. Метод координат в пространстве

§ 1. Координаты точки и координаты вектора

№ 400.

а) на оси абсцисс лежит точка $C\,(2;\ 0;\ 0)$;

б) на оси ординат — точка $E\,(0;\ -1;\ 0)$;

в) на оси аппликат — точка $B\,(0;\ 0;\ -7)$;

г) на плоскости Oxy — точки $A\,(3;\ -1;0)$, $C\,(2;\ 0;\ 0)$ $E\,(0;\ -1\ ;0)$ и $H\,(-\sqrt{5};\ \sqrt{3};\ 0)$;

д) на плоскости Oyz — точки $B\,(0;\ 0;\ -7)$, $E\,(0;\ -1\ ;0)$ и $G\,(0;\ 5;\ -7)$;

е) на плоскости Oxz — точки $B\,(0;\ 0;\ -7)$, $C\,(2;\ 0;\ 0)$ и $D\,(-4;\ 0;\ 3)$.

№ 401. Координаты проекций точки $A\,(2;\ -3;\ 5)$ на:

а) плоскость Oxz: A_1, $(2;\ 0;\ 5)$, Oxy: $A_2\,(2;\ -3;\ 0)$; Oyz: $A_3\,(0;\ -3;\ 5)$;

б) ось Ox: $A_4\,(2;\ 0;\ 0)$, Oy: $A_5\,(0;\ -3;\ 0)$, Oz: $A_6(0;0;5)$.

Координаты проекций точки $B\,(3;\ -5;\ -\frac{1}{2})$:

а) на Oxz: $B_1\,(3;\ 0;\ \frac{1}{2})$, на Oxy: $B_2\,(3;\ -5;\ 0)$, на Oyz: $B_3\,(0;-5;\ -\frac{1}{2})$;

б) на Ox: $B_4\,(3;\ 0;\ 0)$, на Oy: $B_5\,(0;\ -5;\ 0)$, на Oz: $B_6(0;0;\ \frac{1}{2})$.

Координаты проекций точки $C\,(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$;

а) на Oxz: $C_1\,(-\sqrt{3};0;\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$, на Oxy: $C_2(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};0)$, на Oyz: $C_3\,(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$;

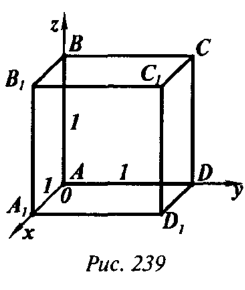


Рис. 239

б) на Ox: C_1, $(-\sqrt{3};0;0)$, на Oy $C_5\,(0;\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0)$, на Oz: $C_6\,(0;\ 0;\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$.

№ 402. Если $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $B\,(0;\ 0;\ 1)$, $D\,(0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\,(1;\ 0;\ 0)$, то стороны куба равны 1, три ребра совпадают с тремя осями координат. Три грани являются плоскостями, перпендикулярными к осям координат, отсекающими на осях единичные отрезки (рис. 239).

Следовательно по рисунку имеем: C (0; 1; 1) B_1 (1; 0; 1) C_1 (1; 1; 1), D_1 (1; 1; 0).

№ 403. Для $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ x = 3, y = 2, z = –5; координаты вектора $\vec{a}$: $\vec{a}$ {3; 2; –5}.

Для $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ $x=-5; y=3; z=-1; \vec{b}\{-5; 3; -1\}$.

Для $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ $x=1, y=-1, z=0; \vec{c}$ {1; –1; 0}

Для $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$ $x=0, y=1, z=1; \vec{d}\{0; 1; 1\}$.

Для $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$ $x=-1, y=0, z=1; \vec{m}\{-1; 0; 1\}$

Для $\vec{n}=0{,}7\vec{k}$ $x=0, y=0, z=0{,}7; \vec{n}$ {0; 0; 0,7).

№ 404. Для a {5; –1; 2} коэффициентами x, y, z в формуле $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$ будут его координаты $x = 5$, $y = -1$, $z = 2$; то есть $\vec{a}=5\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}=5\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}$

Для $\vec{b}$ {–3; –1; 0} $x=-3$, $y=-1$, $z=0$; то есть $\vec{b}=-3\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{z}=-3\vec{i}-\vec{j}$.

Для $\vec{c}$ {0; –1; 0} $x = 0, y = -1, z = 0; c=0\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k}=-\vec{j}$.

Для $\vec{d}$ {0; 0; 0} $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и разложение будет выглядеть так: $\vec{d}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$

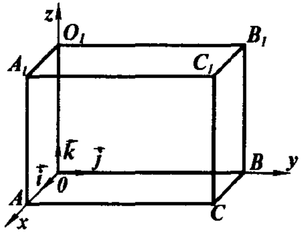


Рис. 240

№ 405. Согласно п. 44 координаты точки равны соответствующим координатам радиус-вектора. Соответственно для радиус-вектора $\overrightarrow{OA_1}$ рассмотрим точку A_1 (рис. 240). Проходящие через нее плоскости отсекают на осях отрезки: $OA = 2$ на оси Ox, $OO = 0$ на оси Oy и $OO_1 = 2$ на оси Oz.

Значит, $\overrightarrow{OA_1}$ {2; 0; 2}.

Для точки B_1 это будут отрезки:

$OO = 0$ на оси Ox, $OB = 3$ на Oy и $OO_1 = 2$ на Oz. Значит, $\overrightarrow{OB_1}\ \{0; 3; 2\}$.

Отрезок $OO_1 = 2$, вектор OO_1 лежит на оси Oz. Поэтому $\overrightarrow{OO_1}\ \{0; 0; 2\}$.

Для точки C имеем: $OA = 2$ на Ox, $OB = 3$ на Oy и 0 на Oz; Значит, $\overrightarrow{OC}\ \{2; 3; 0\}$.

Для точки C_1 имеем: $OA = 2$ на оси Ox, $OB = 3$ на Oy, $OO_1 = 2$ на Oz. Значит, $\overrightarrow{OC_1}\ \{2; 3; 2\}$.

Вектор $\overrightarrow{BC_1}$ есть разность векторов $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC_1}\ \{2; 3; 2\}$, $\overrightarrow{OB}\ \{0; 3; 0\}$. Тогда

$\overrightarrow{BC_1}\ \{2 - 0; 3 - 3; 2 - 0\}$, $\overrightarrow{BC_1}\{2; 0; 2)$.

$\overrightarrow{AC_1} = OC_1 - OA$; $OC_1\ \{2; 3; 2\}$, $OA_1\ \{2; 0; 0\}$.

$\overrightarrow{AC_1}\ \{2 - 2; 3 - 0; 2 - 0)$, $\overrightarrow{AC_1} = \{0; 3; 2\}$.

$\overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO_1}$; $\overrightarrow{OC}\ \{2; 3; 0\}$, $\overrightarrow{OO_1}\ \{0; 0; 2\}$.

$\overrightarrow{O_1C}\ \{2 - 0; 3 - 0; 0 - 2\}$, $\overrightarrow{O_1C}\ \{2; 3; -2)$.

№ 406. Рассмотрим общий случай. Примем $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — два некомпланарных вектора, не имеющие общих точек. Перенесем вектор $\overrightarrow{DC}$ с помощью параллельного переноса так, чтобы точка D, его начала совпала с точкой В конца первого вектора. Получим вектор $\overrightarrow{D_1C_1}$ или, что то же самое, вектор $\overrightarrow{BC_1}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{DC}$ и равный ему по длине. По правилу сложения векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

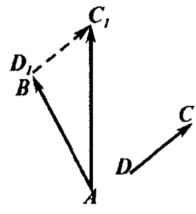


Рис. 241

Примем $\overrightarrow{AB}\ \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overrightarrow{BC_1}\ \{x_2; y_2; z_2\}$. Доказать, что $\overrightarrow{AC_1}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

Для доказательства выразим координаты этих векторов через координаты их начала и конца.

$\overrightarrow{AB}\ \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$, $\overrightarrow{BC_1}\ \{x_{C_1} - x_B; y_{C_1} - y_B; z_{C_1} - z_B\}$,

$\overrightarrow{AC_1}\ \{x_{C_1} - x_A; y_{C_1} - y_A; z_{C_1} - z_A\}$,

т.к. мы обозначили координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ за x_1, y_1 и z_1 а вектора $\overrightarrow{BC_1}$ за x_2, y_2 и z_2, то

$x_1 = x_B - x_A$, $\quad x_2 = x_{C_1} - x_B$,
$y_1 = y_B - y_A$, $\quad y_2 = y_{C_1} - y_B$,
$z_1 = z_B - z_A$, $\quad z_2 = z_{C_1} - z_B$.

Вычислим суммы координат $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2$

$x_1 + x_2 = x_B - x_A + x_{C_1} - x_B = x_{C_1} - x_A$
$y_1 + y_2 = y_B - y_A + y_{C_1} - y_B = y_{C_1} - y_A$
$z_1 + z_2 = z_B - z_A + z_{C_1} - z_B = z_{C_1} - z_A$

Суммы координат соответствуют координатам вектора $\overrightarrow{AC_1}$ равного сумме наших двух векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, ч. т. д.

№ 407. а) Примем $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$, $x_p = x_a + x_b; x_a = 3; x_b = 0$
$y_p = y_a + y_b; y_a = -5; y_b = 7$
$z_p = z_a + z_b; z_a = 2; z_b = -1$
$x_p = 3 + 0 = 3; y_p = -5 + 7 = 2; z_p = 2 - 1 = 1$
$\vec{p}\ \{3; 2; 1\}$

б) Примем $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$ $x_e = x_a + x_c = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$
$y_e = y_a + y_c = -5 + 0 = -5$
$z_e = z_a + z_c = 2 + 0 = 2$
$\vec{e}\{3\frac{2}{3}; -5; 2\}$

в) Примем $\vec{b} + \vec{c} = \vec{f}$, $x_f = x_b + x_c = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$y_f = y_b + y_c = 7 + 0 = 7$
$z_f = z_b + z_c = -1 + 0 = -1$
$\vec{f} = \{\frac{2}{3}; 7; -1\}$

г) Примем $\vec{d} + \vec{b} = \vec{r}$, $x_r = x_d + x_b = -2{,}7 + 0 = -2{,}7$

$y_r = y_d + y_b = 3{,}1 + 7 = 10{,}1$
$z_r = z_d + z_b = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$
$\vec{r}\ \{-2{,}7;\ 10{,}1;\ -0{,}5\}$

д) Примем $\vec{d} + \vec{a} = \vec{s}$, $x_s = x_d + x_a = -2{,}7 + 3 = 0{,}3$
$y_s = y_d + y_a = 3{,}1 - 5 = -1{,}9$
$z_s = z_d + z_a = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$
$\vec{s} = \{0{,}3;\ -1{,}9;\ 2{,}5\}$

е) Примем $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{q}$ $x_q = x_a + x_b + x_c = 3 + 0 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$;
$y_q = y_a + y_b + y_c = -5 + 7 + 0 = 2$
$z_q = z_a + z_b + z_c = 2 - 1 + 0 = 1$
$\vec{q} = \{3\frac{2}{3};\ 2; 1\}$

ж) Примем $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d} = \vec{k}$, $x_k = x_b + x_a + x_d = 0 + 3 - 2{,}7 = 0{,}3$
$y_k = y_b + y_a + y_d = 7 - 5 + 3{,}1 = 5{,}1$
$z_k = z_b + z_a + z_d = -1 + 2 + 0{,}5 = 1{,}5$
$\vec{k} = \{0{,}3;\ 5{,}1;\ 1{,}5\}$

з) Примем $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{m}$
$$x_m = x_a + x_b + x_c + x_d = 3 + \frac{20}{30} - \frac{27 \cdot 3}{30} = 3 + \frac{20 - 81}{30} = 3 - \frac{61}{30} = \frac{29}{30}$$
$y_m = y_a + y_b + y_c + y_d = -5 + 7 + 0 + 3{,}1 = 5{,}1$
$z_m = z_a + z_b + z_c + z_d = 2 - 1 + 0 + 0{,}5 = 1{,}5$
$\vec{m} = \{\frac{29}{30};\ 5{,}1;\ 1{,}5\}$.

№ 408. Из п. имеем: $\overrightarrow{AC}\ \{x_C - x_A, y_C - y_A; z_C - z_A\}$

Согласно рисунку 4 имеем:
$A\ (4; 0; 0)$; $B\ (0; 9; 0)$; $C\ (0; 0; 2)$.
$y_C - y_A = 0 - 0 = 0$
$z_C - z_A = 2 - 0 = 2$
$\overrightarrow{AC}\ \{-4; 0; 2\}$;
$\overrightarrow{CB}\ \{x_B - x_C, y_B - y_C; z_B - z_C\}$
$x_B - x_C = 0 - 0 = 0$
$y_B - y_C = 9 - 0 = 9$;
$z_B - z_C = 0 - 2 = -2$;

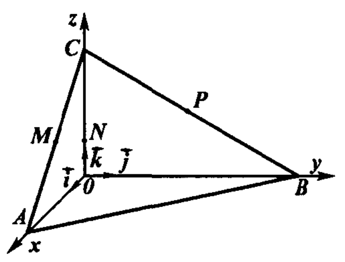


Рис. 242

$\overrightarrow{CB}\{0;\ 9;\ -2\}$.

$\overrightarrow{AB}\{x_B - x_A,\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\}$.

$x_B - x_A = 0 - 4 = -4$;

$y_B - y_A = 9 - 0 = 9$;

$z_B - z_A = 0 - 0 = 0$;

$\overrightarrow{AB}\{-4;\ 9;\ 0)$.

$\overrightarrow{MN}\{x_N - x_M,\ y_N - y_M;\ z_N - z_M)$.

Координаты точек M, N и P совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OP}$ соответственно.

$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}OC$. Тогда $\overrightarrow{ON}\{\frac{1}{2}x_C;\ \frac{1}{2}y_C;\ \frac{1}{2}z_C\}$;

$\overrightarrow{ON}\{\frac{1}{2}\cdot 0;\ \frac{1}{2}\cdot 0;\ \frac{1}{2}\cdot 2\}$;

$\overrightarrow{ON}\{0;\ 0;\ 1\}$; $N\{0;\ 0;\ 1\}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$: точка M — середина отрезка AC. Тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$,

$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(4 + 0) = 2$;

$y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$;

$z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(0 + 2) = 2$;

$M(2;\ 0;\ 2)$; $\overrightarrow{OM}\{2;\ 0;\ 2\}$.

$\overrightarrow{MN}$: $x_N - x_M = 0 - 2 = -2$;

$y_N - y_M = 0 - 0 = 0$;

$z_N - z_M = 1 - 2 = -1$;

$\overrightarrow{MN}\{-2;\ 0;\ -1\}$.

Точка P — середина отрезка BC. Тогда $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$,

$x_P = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0;$

$y_P = \frac{1}{2}(y_B + y_C) = \frac{1}{2}(9 + 0) = 4\frac{1}{2};$

$z_P = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = \frac{1}{2}(0 + 2) = 1;$

$P\ (0;\ 4\frac{1}{2};\ 1); \overrightarrow{OP}\ \{0;\ 4\frac{1}{2};\ 1\}.$

$\overrightarrow{BM}\ \{x_M - x_B,\ y_M - y_B;\ z_M - z_B\}.$
$x_M - x_B = 2 - 0 = 2;$
$y_M - y_B = 0 - 9 = -9;$
$z_M - z_B = 2 - 0 = 2;$
$\overrightarrow{BM}\ \{2;\ -9;\ 2\}.$
$\overrightarrow{NP}\ \{x_P - x_N,\ y_P - y_N;\ z_P - z_N\};$
$x_P - x_N = 0 - 0 = 0;$
$y_P - y_N = 4\frac{1}{2} - 0 = 4\frac{1}{2};$
$z_P - z_N = 1 - 1 = 0;$
$\overrightarrow{NP}\ \{0;\ 4\frac{1}{2};\ 0\}.$

№ 409. Координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$x_a = 5;\ y_a = -1;\ z_a = 1$

$x_b = -2;\ y_b = 1;\ z_b = 0$

$x_c = 0;\ y_c = 0{,}2;\ z_c = 0$

$x_d = -\frac{1}{3};\ y_d = 2\frac{2}{5};\ z_d = -\frac{1}{7}$

а) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{p}$

$\vec{p}\ \{x_a - x_b;\ y_a - y_b;\ z_a - z_b\}$
$\vec{p}\ \{5 - (-2);\ -1 - 1;\ 1 - 0\}$
$\vec{p}\ \{7;\ -2;\ 1\}$

б) $\vec{b} - \vec{a} = \vec{r}$

$\vec{r}\ \{x_b - x_a;\ y_b - y_a;\ z_b - z_a\}$
$\vec{r}\ \{-2 - 5;\ 1 - (-1);\ 0 - 1\}$
$\vec{r}\ \{-7;\ 2;\ -1\}$

в) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{q}$

$\vec{q}\ \{x_a - x_c;\ y_a - y_c;\ z_a - z_c\}$

$\vec{q}\ \{5 - 0;\ -1 - 0{,}2;\ 1 - 0\}$

г) $\vec{d} - \vec{a} = \vec{e}$

$\vec{e}\ \{x_d - x_a;\ y_d - y_a;\ z_d - z_a\}$

$\vec{e}\ \{-\frac{1}{3} - 5;\ 2\frac{2}{5} - (-1); -\frac{1}{7} - 1\}$

$\vec{q}\ \{5; -1,2; 1\}$ $\vec{e}\ \{-5\frac{1}{3}; 3\frac{2}{5}; -1\frac{1}{7}\}$

д) $\vec{c} - \vec{d} = \vec{f}$

$\vec{f}\ \{x_c - x_d; y_c - y_d; z_c - z_d\}$

$\vec{f}\ \{0 -(-\frac{1}{3}); 0,2 - 2\frac{2}{5}; 0 - (-\frac{1}{7})\}$

$\vec{f}\ \{\frac{1}{3}; -2,2; \frac{1}{7}\}$

е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$: обозначим $\vec{a} - \vec{b} = \vec{m}$,

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{c} = \vec{n}$, следовательно

$\vec{m}\ \{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\}$

$\vec{n}\ \{(x_a - x_b) + x_c; (y_a - y_b) + y_c; (z_a - z_b) + z_c\}$

$\vec{n}\ \{5 - (-2) + 0; -1 - 1 + 0,2; 1 - 0 + 0\}$

$\vec{n}\ \{7; -1,8; 1\}$

ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{l}$

$\vec{l}\ \{x_a - x_b - x_c; y_a - y_b - y_c; z_a - z_b - z_c\}$

$\vec{l}\ \{5 + 2 - 0; -1 - 1 - 0,2; 1 - 0 - 0\}$; $\vec{l}\ \{7; -2,2; 1\}$

з) Вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2x_a; 2y_a; 2z_a\}$, или $\{10; -2; 2\}$.

и) Вектор $-3\vec{b}$ имеет координаты: $\{-3x_b; -3y_b; -3z_b\}$, или $\{6; -3; 0\}$.

к) $-6\vec{c}\ \{-6x_b; -6y_b; -6z_b\}$, $-6\vec{c}\ \{-6 \cdot 0; -6 \cdot 0,2; -6 \cdot 0\}$, $-6\vec{c}\ \{0; -1,2; 0\}$

л) $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{-\frac{1}{3}x_d; -\frac{1}{3}y_d; -\frac{1}{3}z_d\}$, $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right); -\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\}$,

$-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{\frac{1}{9}; -\frac{12}{15}; \frac{1}{21}\}$, или $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{\frac{1}{9}; -\frac{4}{5}; \frac{1}{21}\}$

м) Вектор $0,2\vec{b}$ имеет координаты $\{0,2x_a; 0,2y_a; 0,2z_a\}$, или $\{-0,4; 0,2; 0\}$

№ 410. Из условия

$\vec{a}: x_a = -1, y_a = 2, z_a = 0$

$\vec{b}: x_b = 0, y_b = -5, z_b = -2$

$\vec{c}: x_c = 2, y_c = 1, z_c = -3$

Для вектора $\vec{p}$ рассмотрим каждое слагаемое отдельно:

$3\vec{b}\ \{3x_b; 3y_b; 3z_b\}$, $3\vec{b}\ \{3 \cdot 0; 3 \cdot (-5); 3 \cdot (-2)\}$, $3\vec{b}\ \{0; -15; -6;\}$.

Обозначим $3\vec{b} = \vec{m}$.

$-2\vec{a}\,\{-2x_a; -2y_a; -2z_a\}, -2\vec{a}\,\{-2\cdot(-1); -2\cdot 2; -2\cdot 0\}, -2\vec{a}\,\{2; -4; 0\}$.

Обозначим $-2\vec{a} = \vec{n}$. Следовательно $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{c}$ будет иметь координаты:

$\vec{p}\,\{x_m + x_n + x_c; y_m + y_n + y_c; z_m + z_n + z_c\}$,

$\vec{p}\,\{0 + 2 + 2; -15 - 4 + 1; -6 + 0 - 3\}$

$\vec{p}\,\{4; -18; -9\}$.

Для вектора $\vec{q}$ аналогично имеем:

$3\vec{c}\,\{3x_c; 3y_c; 3z_c\}, 3\vec{c}\,\{3\cdot 2; 3\cdot 1; 3\cdot(-3)\}, 3\vec{c}\,\{6; 3; -9\}$.

Обозначим $3\vec{c} = \vec{r}$.

$-2\vec{b}\,\{-2x_b; -2y_b; -2z_b\}, -2\vec{b}\,\{-2\cdot 0; -2\cdot(-5); -2\cdot(-2)\}$,

$-2\vec{b}\,\{0; 10; 4\}$.

Обозначим $-2\vec{b} = \vec{e}$. Следовательно $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a} = \vec{r} + \vec{e} + \vec{a}$

$\vec{q}\,\{x_r + x_e + x_a; y_r + y_e + y_a; z_r + z_e + z_a\}$,

$\vec{q}\,\{6 + 0 + (-1); 3 + 10 + 2; -9 + 4 + 0\}$,

$\vec{q}\,\{5; 15; -5\}$

№ 411. Согласно правилам суммы, разности, произведения векторов имеем:

а) $3\vec{a}\,\{3\cdot(-1); 3\cdot 1; 3\cdot 1;\}, 3\vec{a}\,\{-3; 3; 3\}$.

$2\vec{b}\,\{2\cdot 0; 2\cdot 2; 2\cdot(-2)\}$.

Введем обозначения: $\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) - \vec{c} = \vec{s} - \vec{c}$;

$\vec{s} = 3\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{s}\,\{-3; 7; -1\}; \vec{c}\,\{-3; 2; 0\}; \vec{s} - \vec{c} = \vec{r}$

$\vec{r}\,\{-3-(-3); 7-2; -1-0\}, \vec{r}\,\{0; 5; -1\}$

б) $2\vec{c}\,\{2\cdot(-3); 2\cdot 2; 2\cdot 0;\}, 2\vec{c}\,\{-6; 4; 0\}; \vec{a}\,\{-1; 1; 1\}$

$-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d} = \left(-\vec{a} + 2\vec{c}\right) - \vec{d} = \vec{p} - \vec{d}$

$\vec{p} = 2\vec{c} - \vec{a}; \vec{p}\,\{-6-(-1); 4-1; 0-1\}; \vec{p}\,\{-5; 3; -1\}; \vec{d}\,\{-2; 1; -2\}$

$\vec{p} - \vec{d} = \vec{q}; \vec{q}\,\{-5-(-2); 3-1; -1-(-2)\}; \vec{q}\,\{-3; 2; 1\}$

в) $0{,}1\vec{a}\,\{0{,}1\cdot(-1); 0{,}1\cdot 1; 0{,}1\cdot 1\}, 0{,}1\vec{a}\,\{-0{,}1; 0{,}1; 0{,}1\}$

$3\vec{b}\,\{3\cdot 0; 3\cdot 2; 3\cdot(-2)\}, 3\vec{b}\,\{0; 6; -6)$

$0{,}7\vec{c}\,\{0{,}7\cdot(-3); 0{,}7\cdot 2; 0{,}7\cdot 0;\}, 0{,}7\vec{c}\,\{-2{,}1; 1{,}4; 0\}$

$5\vec{d}\,\{5\cdot(-2); 5\cdot 1; 5\cdot(-2)\}, 5\vec{d}\,\{-10; 5; -10\}$

Выполним сложение. Тогда в выражении $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-\vec{d}$ обозначим: $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}=\vec{n}, \vec{n}+0{,}7\vec{c}=\vec{m}, \vec{m}-5\vec{d}=\vec{l}$

$\vec{n}\{-0{,}1+0;\ 0{,}1+6;\ 0{,}1+(-6)\}, \vec{n}\{-0{,}1;\ 6{;}1;\ -5{,}9\}$,

$\vec{m}\{-0{,}1+(-2{,}1);\ 6{,}1+1{,}4;-5{,}9+0\}, \vec{m}\{-2{,}2;\ 7{,}5;\ -5{,}9\}$.

$\vec{l}\{-2{,}2-(-10);\ 7{,}5-5;\ -5{,}9-(-10)\}, \vec{f}\{7{,}8;\ 2{,}5;\ 4{,}1\}$.

г) $2\vec{a}\,(2\cdot(-1);\ 2\cdot 1;\ 2\cdot 1), 2\vec{a}\ \{-2;\ 2;\ 2\}, 3\vec{b}\ \{0;\ 6;\ -6\}$.

$2\vec{b}\{0;4;-4\}, \vec{a}-2\vec{b}=\vec{f}, \vec{f}\{-1-0;\ 1-4;\ 1-(-4)\}, \vec{f}\{-1;\ -3;\ 5\}$.

$2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{e}, \vec{e}\{-2+0;\ 2+6;\ 2+(-6)\}, \vec{e}\{-2;\ 8;\ -4\}$,

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{g}, \vec{g}\{-1-0;\ 1-2;1-(-2)\}, \vec{g}\{-1;\ -1;\ 3\}, 2\vec{g}\ \{-2;\ -2;\ 6\}$

Следовательно $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$ будет иметь координаты $\{-2-(-1);\ 8-(-3);-4-5)\}$, или $\{-1;\ 11;-9\}$ и следовательно $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$ будет иметь координаты $\{-1+(-2);\ 11+(-2);\ -9+6\}$, или $\{-3;\ 9;\ -3\}$.

№ 412. Для вектора $\vec{i}$ это будет вектор с противоположным знаком $(-\vec{i})$, для $\vec{j}$ это вектор $(-\vec{j})$ и т. д.

$\vec{i}\ \{1;0;0\}, -\vec{i}\ \{-1;0;0\};\ \vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}, -\vec{j}\ \{0;-1;0\};\ \vec{k}\ \{0;\ 0;\ 1\}, -\vec{k}\ \{0;\ 0;\ -1\}$;

$\vec{a}\ \{2;\ 0;\ 0\},\ -\vec{a}\ \{-2;\ 0;\ 0\};\ \vec{b}\ \{-3;\ 5;\ -7),\ -\vec{b}\ \{3;\ -5;\ 7\};\ \vec{c}\ \{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\},\ -\vec{c}\ \{0{,}3;0;-1{,}75\}$.

№ 413. а) Координаты вектора $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\ \{6;\ 12;\ 16\}$:

$\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}$, где $k=\frac{1}{2}$

Поэтому $\vec{a}=k\vec{b}$, и тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\ \{1;\ -1;\ 3\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{d}\ \{2;\ 3;\ 15\}$, например:

$\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$

Поэтому векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$, значит, векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{m}$ {0; 0; 0} и вектора $\vec{n}$ {5; 7; −3} пропорциональны при $k = 0$, значит, векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны.

д) Координаты вектора $\vec{p}\{-\frac{1}{3}; -1;\ 5\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{q}$ (−1; −3; −15}, например:

$$\frac{\frac{1}{3}}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

Поэтому векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

№ 414. Для коллинеарных векторов есть k такое, что
$\vec{a} = k\vec{b}$: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$

а) $\frac{15}{18} = \frac{m}{12} = \frac{1}{n} = \frac{5}{6}$

$m = \frac{5}{6} \cdot 12 = 5 \cdot 2 = 10$

$n = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2$

б) $\frac{m}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{0{,}4}{n} = -\frac{1}{5}$

$m = -\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0{,}1$

$n = 0{,}4 \cdot (-5) = -2$

№ 415. а) Векторы $\vec{a}$ {−3; −3; 0}, $\vec{i}$ {1; 0; 0} и $\vec{j}$ {0; 1; 0} компланарны, т.к. записав равенство $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ в координатах, получим

$-3 = 1 \cdot x + 0 \cdot y$
$-3 = 0 \cdot x + 1 \cdot y$
$0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$

$x = -3$
$y = -3$

Эта система уравнений имеет решения относительно x и y, значит, вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{i}$ и $\vec{i}$ компланарны.

б) Запишем равенство $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$ в координатах:
$2 = 1 \cdot x + 0 \cdot y$
$0 = 0 \cdot x + 1 \cdot y$
$-3 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$

Система не имеет решений. Значит, $\vec{b}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{k}$ в координатах:

$\vec{c}\,\{1; 0; -2\}, \vec{i}\,\{1; 0; 0\}, \vec{k}\{0;0; 1\}$.

$$\begin{array}{ll} 1 = 1\cdot x + 0\cdot y & 1 = x \\ 0 = 0\cdot x + 0\cdot y & 0 = 0 \\ -2 = 0\cdot x + 1\cdot y & -2 = y \end{array}$$

Система имеет решения, значит, векторы $\vec{c}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ компланарны.

г) Векторы $\vec{d}\,\{1; -1; 2\}$ и $\vec{e}\,\{-2; 0; 1\}$ не коллинеарны, т.к. координаты одного не пропорциональны координатам другого. Если вектор $\vec{f}\,\{,5; -1; 0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. Если же вектор нельзя разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны (в противном случае вектор $\vec{f}$ можно было бы разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$). Таким образом, для решения задачи нужно установить, можно ли вектор $\vec{f}$ разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то есть существуют ли числа x и y такие, что $\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$.

Записывая это равенство в координатах, получим:

$$\begin{array}{l} 5 = x - 2y \\ -1 = -x \\ 0 = 2x + y \end{array}$$

Система имеет решение: $x = 1, y = -2$. Поэтому вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, и, значит, векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны.

д) Запишем равенство $\vec{m} = x\vec{n} + y\vec{p}$ в координатах:

$$\begin{array}{l} 1 = x - y,\ y = x - 1 \\ 0 = x + 2y,\ x = -2y \\ 2 = -x + 4y,\ x = 4y - 2 \end{array}$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{m}, \vec{n}$ и $\vec{p}$ не компланарны.

е) Запишем равенство $\vec{q} = x\vec{r} + y\vec{s}$ в координатах:

$0=3x+y, y=-3x$

$5=3x+y, y=5-3x$

$3=3x+4y, y=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{q}, \vec{r}$ и $\vec{s}$ не компланарны.

№ 416. $A(3, 2; 1)$; $B(1; -3; 5)$; $C(-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4})$, т.к. координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора п. 44,

№ 417. $\overrightarrow{OA}\{2;-3;0\}$, $\overrightarrow{OB}\{7; -12; 18\}$, $\overrightarrow{OC}\{-8; 0; 5\}$, т.к. если O — начало координат, то $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — радиус-векторы для точек A, B и C. (См. задачу 416.)

№ 418. а) $\overrightarrow{AB}\{2-3; -1+1; 4-2\}$, $\overrightarrow{AB}\{-1; 0; 2\}$;

б) $\overrightarrow{AB}\{3+2; -1-6; 0+2)$, $\overrightarrow{AB}\{5; -7; 2)$;

в) $\overrightarrow{AB}\{\frac{1}{2}-1; \frac{1}{3}-\frac{5}{6}; \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\}$ $\overrightarrow{AB}\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$.

№ 419. Т.к. $A(1; 6; 2)$ и $B(2; 3; -1)$ являются концами вектора $\overrightarrow{AB}$, то имеем: $\overrightarrow{AB}\{x_в - x_А; y_в - y_А; z_в - z_А\}$ $\overrightarrow{AB}\{2-1; 3-6; -1-2\}$, $\overrightarrow{AB}\{1; -3; -3)$.

Разложив по координатным векторам $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\{0; 1; 0\}$ и $\vec{k}\{0; 0; 1\}$, получим: $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$.

Точки $B(2; 3; -1)$ и $C(-3; 4; 5)$.- концы вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}\{-3-2; 4-3; 5+1\}$, $\overrightarrow{BC}\{-5; 1; 6\}$, $\overrightarrow{BC}=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

Точки $A(1; 6; 2)$ и $C(-3; 4; 5)$ — концы вектора $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CA}\{1+3; 6-4; 2-5\}$, $\overrightarrow{CA}\{4; 2; -3\}$, $\overrightarrow{CA}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

№ 420. Определим координаты:

$\overrightarrow{AB}\{2-3; 3+1; -4-5\}$, $\overrightarrow{AB}\{-1; 4; -9\}$,

$\overrightarrow{DC}\{7-8; 0+4; -1-8\}$, $\overrightarrow{DC}\{-1; 4; -9\}$.

Т.к. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имеют одинаковые координаты, то будучи отложены от начала координат, эти векторы совпадут. Это означает, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и DC равны, что и требовалось доказать.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BC}\{7-2; 0-3; -1+4\}$, $\overrightarrow{BC}\{5; -3; 3\}$.

$\overrightarrow{AD}\{8-3; -4+1; 8-5\}$, $\overrightarrow{AD}\{5; -3; 3\}$.

Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ тоже имеют одинаковые координаты, а значит, проводя аналогичные рассуждения получим, что векторы совпадут.

№ 421. а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A, B и C лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки A, B и C не лежат на одной прямой. Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{-8; 11; -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24; -33; 21\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, тогда, точки A, B и C лежат на одной прямой.

б) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}\{9; -15; -9\}$, $\overrightarrow{AC}\{18; -30; -18\}$. Заметим, что $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, тогда точки A, B, и C лежат на одной прямой.

в) Найдем кординаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}\{1; -9; 9\}$, $\overrightarrow{AC}\{2, -18, -14\}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны, значит, точки A, B и C не лежат на одной прямой.

№ 422. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

а) Определим координаты предполагаемых векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DA}\{-2; -13; 3\} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB}\{1; 4; 1\} = \vec{b}$ $\overrightarrow{DC}\{-1; -1; -4\} = \vec{c}$

Запишем признак компланарности векторов $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах

$x_a = mx_b + nx_c$, $\quad -2 = m - n$, $\quad m = n - 2$,
$y_a = my_b + ny_c$, $\quad -13 = 4m - n$, $\quad 4m = n - 13$,
$z_a = mz_b + nz_c$, $\quad 3 = m - 4n$, $\quad m = 3 + 4n$,

$m = n - 2$, $\quad n = -\frac{5}{3}$

$n - 2 = 3 + 4n$, $\quad m = -\frac{11}{3}$

$4m = n - 13$,

Тогда получаем равенство: $-\frac{44}{3} = -\frac{5}{3} - 13 = \frac{-5-39}{3}$.

Признак компланарности векторов выпрлняется при

$n = -\frac{5}{3}, m = -\frac{11}{3}$. $\overrightarrow{DA} = -\frac{11}{3}\overrightarrow{DB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

По определению векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны. Поскольку эти векторы отложены из одной точки, то точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

б) Определим координаты предполагаемых векторов:

$\overrightarrow{AD}\{2; -1; 3\} = \vec{d}$, $\quad \overrightarrow{AB}\{3; 3; -1\} = \vec{b}$, $\quad \overrightarrow{AC}\{-2; -4; 0\} = \vec{c}$

Признак компланарности векторов в координатах:

$x_d = mx_b + nx_c$, $\quad 2 = 3m - 2n$, $\quad 2 + 2n = 3m$,
$y_d = my_b + ny_c$, $\quad -1 = 3m - 4n$, $\quad 4n = 3m + 1$,
$z_d = mz_b + nz_c$, $\quad 3 = -m + 0 \cdot n$, $\quad m = -3$,

$2 + 2n = 3m$, $\quad 2 + 2n = -9$ $\quad n = -5{,}5$
$4n = 3m + 1$, $\quad 4n = -8$, $\quad n = -2$
$m = -3$, $\quad m = -3$, $\quad m = -3$,

чего быть не может.

Мы не нашли такие n и m, при которых выполняются все три равенства. Условие компланарности векторов не исполняется, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости,

в) Определим координаты предполагаемых векторов:

$\overrightarrow{AD}\{-4; 2; -2\} = \vec{d}$, $\quad \overrightarrow{AB}\{-7; 8; 1\} = \vec{b}$,

$\overrightarrow{AC}\{7; -14; -7\} = \vec{c}$.

Признак компланарности векторов $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах:

$x_d = mx_b + nx_c$,	$-4 = -7m + 7n$,	$7m = 7n + 4$,
$y_d = my_b + ny_c$,	$2 = 8m - 14n$,	$8m = 2 + 14n$,
$z_d = mz_b + nz_c$,	$-2 = m - 7n$,	$m = 7n - 2$,
$7n = m + 2$,	$6m = 6$,	$m = 1$,
$7m = (m + 2) + 4$	$n = \frac{m}{7} + \frac{2}{7}$,	$n = \frac{3}{7}$.
$8m = 2 + 14n$,	$8m = 2 + 14n$.	

Тогда подставляя эти значения в третье уравнение, получаем равенство:

$$8 = 2 + \frac{14 \cdot 3}{7};\ 8 = 8.$$

Признак компланарности векторов выполняется при $m = 1$, $n = \frac{3}{7}$. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$. При этом все три вектора отложены из одной точки, значит, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости (см. главу IV, § 3, п. 39 учебника).

№ 423. AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. M — точка их пересечения. Надо доказать, что точка M имеет координаты $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$.

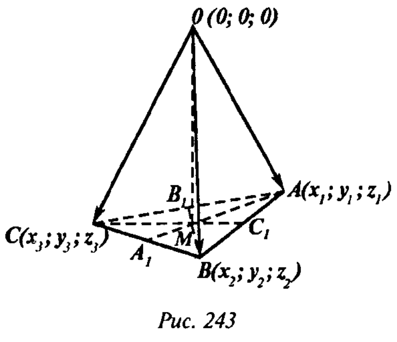


Рис. 243

Координаты точки равны координатам ее радиус-вектора. Поэтому отметим точку O (0; 0; 0) начала координат на рисунке (произвольно) и начертим радиус-векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Их координаты будут соответствовать координатам точек M, C, B, A

соответственно. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $AM = 2MA_1$.

Поскольку $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}$, то, подставив эти разности в наше равенство, получим:

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM})$, или $\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}$, или

$3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2}$, т.к. $OA_1 = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2}$ (см. главу V, §1, п. 45а).

Значит, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ или $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$, что и требовалось доказать.

№ 424. Координаты середины отрезка выразим через координаты его начала и конца:

$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$, $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$. Подставим координаты данных нам точек:

а) $x_M = \frac{1}{2}(0 - 2)$, $\qquad x_M = -1$

$y_M = \frac{1}{2}(3 + 2)$, $\qquad y_M = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$z_M = \frac{1}{2}(-4 + 0)$, $\qquad z_M = -2$

б) $3 = \frac{1}{2}(14 + x_B)$, $\qquad x_B = -8$

$-2 = \frac{1}{2}(-8 + y_B)$, $\qquad y_B = 4$

$-7 = \frac{1}{2}(5 + z_B)$, $\qquad -14 = 5 + z_B$, $z_B = -19$

в) $-12 = \frac{1}{2}(x_A + 0)$, $\qquad x_A = -24$

$4 = \frac{1}{2}(y_A + 0)$, $\quad y_A = 8$

$15 = \frac{1}{2}(z_A + 2)$, $\quad z_A = 28$

№ 425. Примем, что точка M — середина отрезка AB. Тогда $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$, $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$. Запишем уравнения исходя из условий задачи:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B),\ 0 = \frac{1}{2}(y_A + y_B),\ 0 = \frac{1}{2}(z_A + z_B),$$

т.к. M лежит на оси Ox.

а) $x_M = \frac{1}{2}(-3 + 2)$, $\quad \frac{m}{2} = 1$, $\quad m = 2$,

$0 = \frac{1}{2}(m - 2)$, $\quad \frac{n}{2} = -\frac{5}{2}$, $\quad n = -5$,

$0 = \frac{1}{2}(5 + n)$, $\quad x_M = -\frac{3}{2} + 1$, $\quad x_M = -\frac{1}{2}$.

б) $x_M = \frac{1}{2}(1 + 1)$, $\quad \frac{m}{2} = -\frac{1}{4}$ $\quad m = -\frac{1}{2} = -0{,}5$,

$0 = \frac{1}{2}(0{,}5 + m)$, $\quad \frac{2n}{2} = 2$, $\quad n = 2$,

$0 = \frac{1}{2}(-4 + 2\text{n})$, $\quad x_M = 1$ $\quad x_M = 1$

в) $x_M = \frac{1}{2}(0 + 1)$, $\quad x_M = \frac{1}{2}$ $\quad x_M = \frac{1}{2}$

$0 = \frac{1}{2}(m + n)$, $\quad m = -n$, $\quad m = -n$,

$0 = \frac{1}{2}(n + 1 - m + 1)$, $\frac{n}{2} + 1 = \frac{m}{2}$ $\quad m = n + 2$,

$x_M = \frac{1}{2}$, $\quad x_M = \frac{1}{2}$

$m = -n$, $\quad m = 1$,

$2m = 2$, $\quad n = -1$.

г) $x_м = \frac{1}{2}(7 - 5)$, $\quad x_м = 1$, $\quad x_м = 1$

$0 = \frac{1}{2}(2m + n - 3,)$ $\quad 2m + n = 3$, $\quad m = \frac{3-n}{2}$

$0 = \frac{1}{2}(-n + m - 3)$, $\quad n = m - 3$, $\quad n = m - 3$

$m = \frac{3-m+3}{2} = \frac{6-m}{2}$;

$2m = 12 - 2m$;

$m = 3; n = 0$

№ 426. Имеем: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$.

а) A (-1; 0; 2), B (1; –2; 3),

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4+4+1)} = 3$;

б) A (–35; –17; 20), B (–34; –5; 8),

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-34+35)^2 + (-5+17)^2 + (8-20)^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17$.

№ 427. Имеем $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7$;

$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ имеет координаты: $\vec{c}$ {1; 1; 1}; $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

$\vec{d} = -2\vec{k}$; $\vec{d}\{0; 0; -2\}$, $|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$.

$\vec{m}\{1 - 0; 0 - 2; 0\}$, $\vec{m}\{1; -2; 0\}$; $|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$

№ 428. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$, т.к. если $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$, то

$\vec{d}$ $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

а) $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(3-2)^2+(-2+3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$;

б) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$,

$|\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$

в) $|\vec{a}| - |\vec{b}| = \sqrt{14} - \sqrt{14} = 0$

г) $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$,

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(3+2)^2+(-2-3)^2+(1-1)^2} = \sqrt{25+25+0} = \sqrt{2\cdot 25} =$
$= 5\sqrt{2}$;

д) $|3\vec{c}| = \sqrt{(3x)^2+(3y)^2+(3z)^2}$, так как $\vec{c} = \{3z;\ 3y;\ 3z\}$

$|3\vec{c}| = \sqrt{(-3\cdot 3)^2+(2\cdot 3)^2+(1\cdot 3)^2} = \sqrt{9^2+6^2+3^2} = \sqrt{126} = \sqrt{9\cdot 14} =$
$= 3\sqrt{14}$

е) $\sqrt{14}|\vec{c}| = \sqrt{14}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}\cdot\sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}\cdot\sqrt{14} =$
$= 14$;

ж) $2\vec{a}\ \{6;\ -4;\ 2\}$, $3\vec{c}\{-9;\ 6;\ 3\}$, $2\vec{a}-3\vec{c} = \vec{m}$,
$\vec{m}\ \{6+9;\ -4-6;\ 2-3\}$, $\vec{m}\ \{15;\ -10;\ -1)$,
$|\vec{m}| = \sqrt{15^2+(-10)^2+1^2} = \sqrt{225+100+1} = \sqrt{326}$.

№ 429. Координаты середины отрезка MN (примем это будет точка K) вычисляются по формуле:

$$K\left(\frac{x_M+x_N}{2};\ \frac{y_M+y_N}{2};\ \frac{z_M+z_N}{2}\right)$$

$K\left(\frac{-4+0}{2};\frac{7-1}{2};\frac{0+2}{2}\right)$; $K\ (-2;\ 3;\ 1)$, значит, $\overrightarrow{OK}\ \{-2;\ 3;\ 1\}$ и

$|\overrightarrow{OK}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$.

№ 430. а) Чтобы найти периметр $\triangle ABC$, нужно найти длины векторов AB BC и CA. Периметр треугольника равен их сумме.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (см. п. 45) и $\overrightarrow{AB}\ \{x_B\text{-}x_A,\ y_B\text{-}y_A;\ z_B\text{-}z_A\}$,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{2\frac{1}{4}} = \frac{9}{4} = 1\frac{1}{2}$$

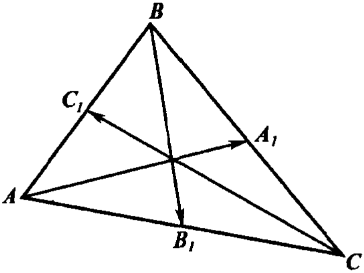


Рис. 244

Аналогично:

$\overrightarrow{BC}\{2-2; 0-2; -1+3\}$,

$\overrightarrow{BC}(0; -2; 2\}$,

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{2\cdot 4} = 2\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{CA}\{\frac{3}{2} - 2; 1-0; -2+1\}$,

$\overrightarrow{CA}\{-\frac{1}{2}; 1; -1)$,

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CA}| = 1\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + 1\frac{1}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ — медианы.

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

$\overrightarrow{AB}\{2-\frac{3}{2}; 2-1; -3+2\}$, $\overrightarrow{AB}\{\frac{1}{2}; 1; -1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{2-\frac{3}{2}; 0-1; -1+2\}$, $\overrightarrow{AC}\{\frac{1}{2}; -1; 1\}$, следовательно

$\overrightarrow{AA_1}\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right); \frac{1}{2}(1-1); \frac{1}{2}(1-1)\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{1; 0; 0\}$;

$|\overrightarrow{AA_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}\{-\frac{1}{2}; -1; 1\}$;

$\overrightarrow{BC}\{2-2; 0-2; -1+3\}$, $\overrightarrow{BC}\{0; -2; 2\}$, следовательно

$$\overrightarrow{BB_1}\ \left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+0\right);\frac{1}{2}(-1-2);\frac{1}{2}(1+2)\right\},\ \overrightarrow{BB_1}\ \left\{-\frac{1}{4};-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\},$$

$$|\overrightarrow{BB_1}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{73}{16}}=\frac{\sqrt{73}}{4}$$

$$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA}\ \left\{-\frac{1}{2};1;-1\right\};\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB}\ \{0;2;-2\},\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CC_1}\ \left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+0\right);\frac{1}{2}(1+2);\frac{1}{2}(-1-2)\right\},\overrightarrow{CC_1}\ \left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right\}\text{ и}$$

$$|\overrightarrow{CC_1}|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{4}=|\overrightarrow{BB_1}|$$

№ 431. Сначала сравним длины сторон треугольника. Для этого по формуле расстояния между двумя точками (п. 45 в) учебника)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

найдем $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{AC}|$. Затем, если все три стороны равны, то треугольник ABC — правильный. Если две стороны из трех равны: $c = b \neq a$, то треугольник равнобедренный, если нет одинаковых сторон: $c \neq b \neq a$, то есть если $a > b > c$, то следует проверить, выполняется ли равенство $a^2 = b^2 + c^2$ (теорема Пифагора). Если да, то да, $\triangle ABC$ -прямоугольный, где a — гипотенуза.

а) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(9-2)^2+(3-10)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49+0}=\sqrt{2\cdot 49}=$
$=7\sqrt{2}.$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-2)^2+(10-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{0+49+49}=\sqrt{2\cdot 49}=$
$=7\sqrt{2}.$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(9-2)^2+(3-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{49+0+49}=\sqrt{2\cdot 49}=$
$=7\sqrt{2}.$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$, треугольник правильный.

б) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-5)^2+(7+3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{4+100+36}=\sqrt{140},$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5-1)^2+(-3-3)^2+(2+10)^2} = \sqrt{16+36+144} = \sqrt{196}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(3-1)^2+(7-3)^2+(-4+10)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$,

$|\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$.

Проверим, выполняется ли равенство

$BC^2 = AC^2+AB^2, \left(\sqrt{196}\right)^2 = \left(\sqrt{56}\right)^2 + \left(\sqrt{140}\right)^2$,

196 = 56 + 140 = 196 — верно. Значит, треугольник ABC — прямоугольный.

в) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-5)^2+(3-5)^2+(1-1)^2} = \sqrt{0+4+0} = 2$,

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(5-4)^2+(-3+3)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(5-4)^2+(-5+3)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{BC}|$.

Проверим: $AC^2 = AB^2+BC^2$. $6 = 4 + 2$. Значит, треугольник ABC — прямоугольный разносторонний.

г) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5+4)^2+(2-3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4+5)^2+(3-2)^2+(0+2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5+5)^2+(2-2)^2+(0+2)^2} = \sqrt{0+0+4} = \sqrt{2}$.

$|\overrightarrow{BC}| > |\overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{AB}|$.

Проверим: $BC^2 = AC^2+AB^2$, $6 = 4+2$. Значит, треугольник ABC — прямоугольный равносторонний.

№ 432. Дано: A (–3; 4; –4), значит, точка A_1 — проекция точки A на Oxy —имеет координаты A_1 (–3; 4; 0); A_2 — проекция точки A на Oyz — имеет координаты: A_2 (0; 4; –4); A_3 — проекция точки A на Oxz — имеет координаты A_3 (–3; 0; –4). По формуле расстояния между двумя точками (п. 45 в) учебника)

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Найдем

$\overrightarrow{AA_1} = \sqrt{0+0+4^2} = 4$, $\overrightarrow{AA_2} = \sqrt{3^2+0+0} = 3$, $\overrightarrow{AA_3} = \sqrt{0+4^2} = 4$,

то есть для A (x; y; z) расстояниями до координатных плоскостей будут $|x|$, $|y|$ и $|z|$.

б) На ось Ox проекция A_1 точки A имеет координаты A_1 (–3; 0; 0), на Оу: A_2 (0; 4; 0), на Oz: A_3 (0; 0;–4).

$$\overrightarrow{AA_1} = \sqrt{0+4^2+4^2} = 4\sqrt{2},\quad \overrightarrow{AA_2} = \sqrt{3^2+0+4^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\overrightarrow{AA_3} = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

№ 433. Для точки A (–1; 2; –3) проекция A_1 на координатную плоскость Oxy имеет координаты A_1 (–1; 2; 0), на Oyz: A_2 (0; 2; –3), на Oxz: A_3 (–1; 0; –3),

№ 434. Наименьшим расстоянием будет длина перпендикуляре, опущенного из этой точки на ось координат, то есть расстояние между точкой и ее проекцией на ось координат. Координатами проекций точки на координатные оси будут абсцисса, ордината и аппликата этой точки. Значит, для B (3; –4; $\sqrt{7}$) проекция B_1 на ось Ox будет иметь координаты B_1 (3; 0; 0), на Oy: B_2 (0; –4; 0), на Oz: B_3 (0; 0; $\sqrt{7}$).

№ 435. Найдем длины сторон $\triangle ABC$ по формуле расстояния между двумя точками (п. 45 учебника).

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2+(k-3)^2} = \sqrt{4+4+(k-3)^2} =$$
$$= \sqrt{8+(k-3)^2},$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0+1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(k-1)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}$$

Треугольник будет равнобедренным, если: 1) $AB = BC$, или 2) $AB = AC$, или 3) $AC = BC$.

1) $\sqrt{8+(k-3)^2} = 3$,

$8+(k-3)^2 = 9$,
$(k-3)^2 = 1$,
$k-3 = 1$, $k = 4$,
$k-3 = -1$, $k = 2$.

3) $\sqrt{1+(k-1)^2} = 3$

$1+(k-1)^2 = 9$
$(k-1)^2 = 8$
$k-1 = 2\sqrt{2}$, $k = 2\sqrt{2}+1$
$k-1 = -2\sqrt{2}$, $k = 1-2\sqrt{2}$.

2) $\sqrt{8+(k-3)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}$,

$8+(k-3)^2 = 1+(k-1)^2$,
$8+k^2+9-6k = 1+k^2-2k+1$,
$17-2=4k$,
$15=4k$, $k=\frac{15}{4}=3{,}75$.

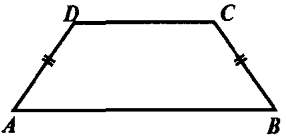


Рис. 245

№ 436. (рис. 245). По формуле расстояния между двумя точками найдем длины сторон трапеции $ABCD$:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2+0} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0+(3-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$,

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(1-0)^2+(4-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(4-1)^2+(4-4)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = 5$.

Т.к. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = 5$, то $ABCD$ — равнобедренная трапеция, если мы сможем доказать, что $DC \parallel AB$, то есть, что $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны.

Если существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$ и $k \neq 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (п. 38 учебника).

$\overrightarrow{AB}\,\{-4;-4;0\}$, $\overrightarrow{CD}\,\{1;1;0\}$.

Ясно, что $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{CD}$, т. е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Тогда, $AB \parallel CD$ и $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

№ 437. Имеем $\mathrm{d} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ из п. 45, тогда:

а) Примем $C\,(x;\,0;\,0)$ — точка на оси Ox, равноудаленная от точек A и B. Значит, $CA = CB$, или в координатах:

$\sqrt{(-2-x)^2+(3-0)^2+(5-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2+(2-0)^2+(-3-0)^2}$,
$\sqrt{4+4x+x^2+9+25} = \sqrt{9-6x+x^2+4+9}$,
$\sqrt{x^2+4x+38} = \sqrt{x^2-6x+22}$
$x^2+4x+38 = x^2-6x+22$,
$10x = -16$,

$x = -1{,}6$; $C(-1{,}6; 0; 0)$.

Равноудаленной от точек A и B будет точка $C(-1{,}6; 0; 0)$.

б) Примем D (0; y; 0) — точка на оси Oy, равноудаленная от A и B, $AP = PB$.

$$\sqrt{(-2-0)^2+(3-y)^2+(5-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2+(2-y)^2+(-3-0)^2}$$
$$\sqrt{4+9-6y+y^2+25} = \sqrt{9+4-4y+y^2+9},$$
$$\sqrt{y^2-6y+38} = \sqrt{y^2-4y+22}$$
$$y^2-6y+38 = y^2-4y+22,$$
$$2y = 16,$$
$$y = 8;\ D(0; 8; 0).$$

в) Примем E (0; 0; z) — точка на оси Oz, равноудаленная от A и B.

$$\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2+(5-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2+(-3-z)^2}$$
$$\sqrt{4+9+25-10z+z^2} = \sqrt{9+4+9+6z+z^2},$$
$$\sqrt{z^2-10z+38} = \sqrt{z^2+6z+22},$$
$$z^2-10z+38 = z^2+6z+22,$$
$$16z = 16,$$
$$z = 1;\ E(0; 0; 1).$$

№ 438. а) Примем на координатной плоскости Oxy точка M (x; y; 0) равноудалена от A, B и C. С помощью формулы (п. 45 учебника)

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

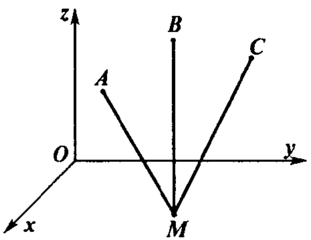


Рис. 246

составим систему уравнений:

$$\begin{cases} AM = BM \\ AM = CM \end{cases}$$

(равенство $BM = CM$ в таком случае выполняется автоматически).

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2+(3-0)^2} =$$
$$= \sqrt{1+2x+x^2+4-4y+y^2+9} =$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14},$$

$$|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(-2-x)^2+(1-y)^2+(2-0)^2} = \sqrt{4+4x+x^2+1-2y+y^2+4} =$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+4x-2y+9},$$

$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(0-x)^2 + (-1-y)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1} =$
$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 2y + 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x + 2y = 5 \\ 6y = 2x + 12\end{cases}$$

$$\begin{cases}y = 2 + \frac{1}{3}x \\ 2x + 2(2 + \frac{1}{3}x) = 5\end{cases} \quad \begin{cases}y = 2 + \frac{1}{3}x \\ 2x + 4 + \frac{2}{3}x = 5\end{cases} \quad \begin{cases}y = 2 + \frac{1}{3}x \\ 2\frac{2}{3}x = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y = 2 + \frac{1}{3}x \\ \frac{8}{3}x = 1\end{cases} \quad \begin{cases}x = \frac{3}{8} \\ y = 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}\end{cases} \quad \begin{cases}x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{17}{8}\end{cases}$$

Точка $M(\frac{3}{8}; \frac{17}{8}; 0)$ лежит на плоскости Oxy и равноудалена от точек A, B и C.

б) Примем на координатной плоскости Oyz точка $N(0; y; z)$ равноудалена от A, B и C, следовательно

$$\begin{cases}AN = BN \\ AN = CN\end{cases}$$ (откуда следует, что и $BN = CN$).

$|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2} = \sqrt{1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2} =$
$= \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14}$,

$|\overrightarrow{BN}| = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2} = \sqrt{4 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2} =$
$= \sqrt{y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9}$,

$|\overrightarrow{CN}| = \sqrt{(0-0)^2 + (-1-y)^2 + (1-z)^2} = \sqrt{0 + 1 + 2y + y\cdot y + 1 - 2z + z\cdot z} =$
$= \sqrt{y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2}$.

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+z^2-4y-6z+14}=\sqrt{y^2+z^2-2y-4z+9}\\ \sqrt{y^2+z^2-4y-6z+14}=\sqrt{y^2+z^2+2y-2z+2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2+z^2-4y-6z+14=y^2+z^2-2y-4z+9\\ y^2+z^2-4y-6z+14=y^2+z^2+2y-2z+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y+2z=5\\ 6y+4z=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\frac{5}{2}-z\\ \frac{6\cdot 5}{2}-6z+4z=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\frac{5}{2}-z\\ 2z=3\end{cases}, \qquad \begin{cases}z=\frac{3}{2}\\ y=1\end{cases} \qquad N(0;1;\frac{3}{2})$$

в) Примем на координатной плоскости Ozx точка $P(x, 0; z)$ равноудалена от точек A, B и C, следовательно

$$\begin{cases}AP=BP\\ AP=CP\end{cases} \text{ (откуда следует, что и } BP=CP).$$

$$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(-1-x)^2+(2-0)^2+(3-z)^2}=\sqrt{1+2x+x^2+4+9-6z+z^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}$$

$$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(-2-x)^2+(1-0)^2+(2-z)^2}=\sqrt{4+4x+x^2+1+4-4z+z^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}$$

$$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{(0-x)^2+(-1-0)^2+(1-z)^2}=\sqrt{x^2+1+1-2z+z^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+z^2-2z+2}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}=\sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}\\ \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}=\sqrt{x^2+z^2-2z+2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+z^2+2x-6z+14=x^2+z^2+4x-4z+9\\ x^2+z^2+2x-6z+14=x^2+z^2-2z+2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2z=5\\ 2x=4z-12\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2z - 6 \\ 4z - 12 + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2z - 6 \\ 6z = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{17}{6}, \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad P\left(-\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{17}{6}\right)$$

№ 439. а) Примем точка P — центр окружности, описанной около $\triangle AOB$, следовательно

$$\begin{cases} AP = BP = r \\ AP = OP = r \end{cases}$$, где r — радиус окружности;

точки A, O, B и P должны лежать в одной плоскости.

Но точка O (0; 0; 0) совпадает с началом координат, A (4; 0; 0) лежит на оси Ox; B (0; 6; 0) лежит на оси Oy, значит $\triangle$AOB лежит в координатной плоскости Oxy, и тогда центр описанной окружности должен лежать в той же плоскости. Значит, координаты центра: P (x; y; 0). По формуле п. 45 учебника

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(4-x)^2 + (0-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16 - 8x + x^2 + y^2},$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(0-x)^2 + (6-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2 + 36 - 12y + y^2},$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{16 + x^2 + y^2 - 8x} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36} \\ \sqrt{16 + x^2 + y^2 - 8x} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 + x^2 + y^2 - 8x = x^2 + y^2 - 12y + 36 \\ 16 + x^2 + y^2 - 8x = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 12y - 20 \\ 8x = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Координаты центра окружности, описанной около $\triangle AOB$: B (2; 3; 0). Радиус описанной окружности равен $AP = BP = OP = r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

б) Если точка P $(x; y; z)$ равноудалена от вершин тетраэдра $OABC$, то

$$\begin{cases} OP = AP \\ AP = BP \\ BP = CP \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2},$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36},$$

$$|\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4}.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16} \\ \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36} \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16 \\ x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16 = x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 \\ x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 16 \\ 12y = 8x + 20 \\ 12y + 4z = 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ 12y = 36 \\ 36 + 4z = 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

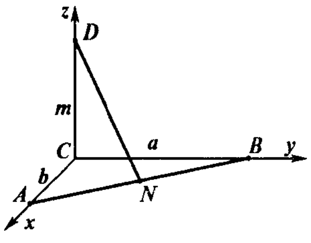


Рис. 247

№ 440. Примем прямоугольную систему координат с началом в точке C и с осями: Ox — совпадающей с отрезком CA, Oy — совпадающей с отрезком CB, следовательно точка D будет лежать на оси Oz. Примем точку N — середина отрезка AB. В нашей системе координат A $(b; 0; 0)$, B $(0; a; 0)$, C $(0; 0; 0)$, D $(0; 0; m)$.

$$N\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

(по формуле п. 45 учебника).

Подставив координаты точек A и B, получим: $N\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $\Rightarrow$

$$|DN| = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + (0 - m)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + m^2}.$$

§ 2. Скалярное произведение векторов

№ 441. Сделаем рисунок (рис. 248).

а) Векторы $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ совпадают с катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1C, значит, $\overrightarrow{BB_1} \wedge \overrightarrow{B_1C} = 45°$.

б) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1D_1}$, т. к. они сонаправлены и имеют одинаковую длину. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1D_1} = -\overrightarrow{DB}$.

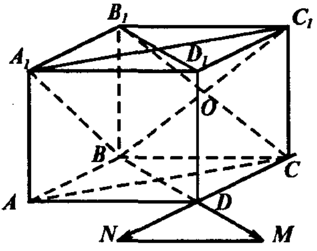


Рис. 248

Угол между $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DA}$ — угол между стороной и диагональю квадрата, т. е. $\alpha = 45°$,

$\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BD} = 135° = \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{B_1D_1}$.

в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ совпадают со сторонами равностороннего треугольника A_1BC_1 (отрезки A_1B, A_1C_1 и C_1B — диагонали граней куба), и эти векторы отложены из одной точки. Значит,

$\overrightarrow{A_1C_1} \wedge \overrightarrow{A_1B} = 60°$.

г) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = 45°$ (как угол между стороной и диагональю квадрата).

д) $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{BB_1} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{AC} = 90°$.

е) $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$. Примем O — точка пересечения диагоналей B_1C и BC_1 квадрата BB_1C_1C. $BC_1 = 2OC_1$; $B_1C = 2OC$, значит $\overrightarrow{BC_1} \wedge \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{OC_1} \wedge \overrightarrow{OC} = 90°$, поэтому угол между векторами $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$ равен 90°.

ж) $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BC}$, поэтому угол $\overrightarrow{A_1D_1} \wedge \overrightarrow{AC} = 0°$

з) $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{C_1C}$, значит, если их отложить из одной точки, они будут принадлежать одной прямой и образуют угол 180°.

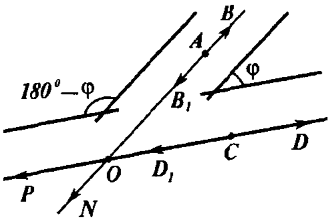


Рис. 249

№ 442. Сделаем рисунок, отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AB_1}$ (рис. 249).

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{ON}$,

$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{OP}$.

Следовательно

$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OP} = \varphi$,

$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{CD} = 180° - \varphi$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OP} = 180° - \varphi$.

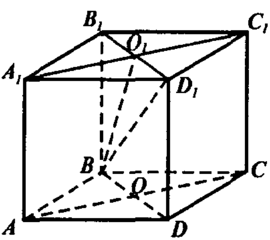


Рис. 250

№ 443. (рис. 250). Для вычислений воспользуемся формулой (п. 47):

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| \times$

$\times \cos(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{B_1C_1})$, т.к. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| \cos 0° = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| = a^2$

б) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{C_1A_1}$, $\cos(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_1A_1}) = \cos 180° = -1$,

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{C_1A_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-1) = -2a^2$

в) $\overrightarrow{D_1B} \perp \overrightarrow{AC}$ (по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp D_1B$),

$\cos(\overrightarrow{D_1B} \wedge \overrightarrow{AC}) = \cos 90° = 0$, $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

г) $\overrightarrow{BA_1}$ совпадает с диагональю грани куба, как и $\overrightarrow{BC_1}$. $|\overrightarrow{BA_1}| = |\overrightarrow{BC_1}| = a\sqrt{2}$

$\triangle BA_1C_1$ — равносторонний, $\angle A_1BC_1 = 60° = \overrightarrow{BA_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = |\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}| \cos(\overrightarrow{BA_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}) = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = a^2$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}$, $\cos(\overrightarrow{A_1O_1} \wedge \overrightarrow{A_1C_1}) = \cos 0° = 1$,

$|\overrightarrow{A_1O_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1C_1}| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2}$, $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 1 = a^2$

е) $\overrightarrow{D_1O_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B_1}$,

$\overrightarrow{B_1O_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B_1} = -\overrightarrow{D_1O_1}$,

$\overrightarrow{D_1O_1} \wedge \overrightarrow{B_1O_1} = 180°$, $\cos 180° = -1$, $|\overrightarrow{D_1O_1}| = |\overrightarrow{B_1O_1}| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-1) = -\frac{a^2}{2}$

ж) $\overrightarrow{BO_1}$ совпадает с гипотенузой прямоугольного $\triangle BB_1O_1$, у которого катеты:

$|\overrightarrow{BB_1}| = a$, $|\overrightarrow{B_1O_1}| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BO_1}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} \cdot 2a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$,

$|\overrightarrow{C_1B}| = a\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BO_1} \wedge \overrightarrow{C_1B} = 180° - (\overrightarrow{BO_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}) = 180° - \angle O_1BC_1$ (рис. 12).

$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$, т.к. $\triangle BA_1C_1$ — равносторонний, как показано в пункте г).

$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = |\overrightarrow{BO_1}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}| \cdot \cos 150° = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}a^2$

№ 444. Примем $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, следовательно

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ (п. 46),

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 5 - 6 + 4 = 3$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 - 1 + 2 = 0$,

$\vec{b} \cdot \vec{c} = -5 + 6 + 2 = 3$,

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 + 1 + 4 = 6$,

$\sqrt{\vec{b}\vec{b}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

№ 445. Если $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, то $\vec{a}\,\{3; -5; 1\}$.

Если $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$, то $\vec{b}\,\{0; 1; -5)$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -10$;

б) $\vec{i}\,\{1; 0; 0\}$, $\vec{a} \cdot \vec{i} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3$;

в) $\vec{j}\,\{0; 1; 0)$, $\vec{b} \cdot \vec{j} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 1$;

г) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{k} = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{b} \cdot \vec{k}$, $\vec{k}\,\{0; 0; 1\}$;

$(\vec{a} + \vec{b})\vec{k} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = 1 - 5 = -4$;

д) $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}) = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{a} \cdot \vec{i} - 2\vec{a} \cdot \vec{j} - 2\vec{b} \cdot \vec{k} - 2\vec{b} \cdot \vec{i} + 4\vec{b} \cdot \vec{j} = (3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + (3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0) - 2(3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0) - 2(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + 4(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 1 + 3 + 10 + 10 + 4 = 28$.

№ 446. Известно, что:

1) По формуле (1) п. 47 для ненулевых векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

2) Если $0 < \alpha < 90°$ (острый угол), то $\cos\alpha > 0$,
если $\cos\alpha = 0$, то $\alpha = 90°$, если $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha < 0$.
Знаменатель $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} > 0$ для любых ненулевых векторов. Поэтому знак выражения $\cos\alpha$ совпадает со знаком числителя; если $(x_1 \cdot x_2 ++ y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2) > 0$, то $\cos\alpha > 0$ и наоборот.

а) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$, т. к. $3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -15-1 = -16 < 0$, угол тупой;

б) $\cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) > 0$, т. к. $-5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 > 0$, угол острый;

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 0$, т. к. $3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -3 + 2 + 1 = 0$, угол $\alpha = 90°$

№ 447. $\vec{i}\{1; 0; 0\}$; $\vec{j}\{0; 1; 0\}$; $\vec{k}\{0; 0; 1\}$. Формула (1) п. 47 для $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Т.к. знаменатель больше нуля для любых ненулевых векторов, то знак $\cos\alpha$ зависит от знака числителя.

а) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$, то $\vec{a} \wedge \vec{i} < 90°$. Докажем это.
$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3$, $3 > 0$, значит, и все выражение положительное.
$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$; $\vec{a} \wedge \vec{i} < 90°$.

б) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$, то и $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90°$. Докажем это.
$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -5$, $-5 < 0$, значит, и все выражение отрицательное.
$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$; $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90°$.

в) $\vec{a} \wedge \vec{k} = 90°$, когда $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$.
По формуле (1) $\cos\alpha = 0$, если числитель равен нулю.
$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, значит,
$\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$, $\vec{a} \wedge \vec{k} = 90°$.

№ 448. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ (п. 47).

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 5 + 2x - 3 \cdot 1 = 2x - 8$.

$2x - 8 = 3$; $2x = 11$; $x = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2x - 8 = -1$; $2x = 7$; $x = 3{,}5$;

в) $\vec{a} \perp \vec{b}$, значит $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $2x - 8 = 0$; $x = 4$

№ 449. $\vec{a}\,\{m; 3; 4\}$; $\vec{b}\,\{4; m; -7\}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4m+3m-28 = 0$; $7m = 28$; $m = 4$.

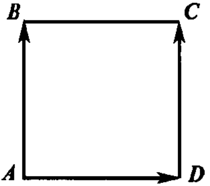


Рис. 251

№ 450. (рис. 251). $\overrightarrow{AB}\{\sqrt{2} - 0; 1 - 1; 2 - 2\}$, $\overrightarrow{AB}\{\sqrt{2}; 0; 0\}$,

$\overrightarrow{DC}\{\sqrt{2} - 0; 2 - 2; 1 - 1\}$, $\overrightarrow{DC}\,\{\sqrt{2}; 0; 0\}$. Векторы имеют одинаковые координаты, значит, они равны, тогда, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$, $ABCD$ — параллелограмм. Параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой, есть прямоугольник. $\overrightarrow{AD}\,\{0; 1; -1\}$.

$$\cos \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$$

$\sqrt{2}\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$, значит, $\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = 0$,

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 90^\circ$.

Значит, $ABCD$ — прямоугольник. Прямоугольник, у которого две смежные стороны равны, — квадрат. Докажем, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, т. о. $ABCD$ — квадрат, ч.т.д.

№ 451. Используем формулу: $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\text{а) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{2\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot(-3)}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}} = \frac{6}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \ \vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ.$$

б) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(-3)+\sqrt{2}\cdot(-3)+0\cdot 2}{\sqrt{2+2+4}\cdot\sqrt{9+9+0}} = \dfrac{-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$, значит, это тупой угол, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 180° - 45° = 135°$.

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \dfrac{0\cdot 0+5\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+0\cdot 1}{\sqrt{0+25+0}\cdot\sqrt{0+3+1}} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{5\cdot 2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$, значит, угол тупой, и $\vec{a} \wedge \vec{b} = 180° - 30° = 150°$;

№ 452. $\vec{a}\,\{2;\ 1;\ 2\}$, $\vec{i}\,\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\{0; 1;\ 0\}$, $\vec{k}\,\{0;\ 0;\ 1\}$.

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \dfrac{2\cdot 1+0+0}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+0+0}} = \dfrac{2}{3\cdot 1} = \dfrac{2}{3};\quad \vec{a} \wedge \vec{i} \approx 50°\ 46'$

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \dfrac{2\cdot 0+1\cdot 1+0}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{1}{3};\quad \vec{a} \wedge \vec{j} \approx 63°\ 26';$

$\cos\vec{a} \wedge \vec{k} = \dfrac{2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{2}{3};\quad \vec{a} \wedge \vec{k} \approx 50°\ 46'.$

№ 453. $\overrightarrow{CA}\,\{1 - 1;\ 3 - 2;\ 0 + 1\}$, $\overrightarrow{CA}\,\{0;\ 1;\ 1\}$;

$\overrightarrow{CB}\,\{2 - 1;\ 3 - 2;\ -1 + 1\}$, $\overrightarrow{CB}\,\{1;\ 1;0)$;

$\cos(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}) = \dfrac{0+1+0}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2},\quad \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = 60°.$

№ 454. (рис. 252). $\cos\alpha = \dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$

$\overrightarrow{AB}\,\{3 - 1;\ -1 + 1;\ 1 - 3\}$,

$\overrightarrow{AB}\,\{2;\ 0;\ -2\}$, $\overrightarrow{BA}\,\{-2;\ 0;\ 2\}$;

$\overrightarrow{AC}\,\{-1 - 1;\ 1 + 1;\ 3 - 3)$,

$\overrightarrow{AC}\,\{-2;\ 2;\ 0\}$, $\overrightarrow{CA}\,\{2;\ -2;\ 0\}$;

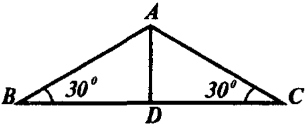


Рис. 252

$\overrightarrow{BC}\,\{-1 - 3;\ 1 + 1;\ 3 - 1\}$, $\overrightarrow{BC}\,\{-4;\ 2;\ 2\}$, $\overrightarrow{CB}\,\{4;\ -2;\ -2\}$.

$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \dfrac{-4+0+0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{4+4}} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2};$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 180° - 60° = 120°;$

$$\cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = \frac{-2\cdot(-4)+0\cdot 2+2\cdot 2}{\sqrt{4+0+4}\cdot\sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{4\cdot 2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = 30°$;

$$\cos(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}) = \frac{2\cdot 4+(-2)\cdot(-2)+0\cdot(-2)}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = 30°$;

Углы при основании равны. Треугольник ABC — равнобедренный. Найдем периметр $\triangle ABC$. Для этого найдем $|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$) по формуле п. 45: $\vec{a} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$P = |\overrightarrow{BC}| + 2|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 2\cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)$

Найдем площадь $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|$, где $AD \perp BC$.

Точка D — середина отрезка BC, т. к. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Согласно формуле (2) п. 45: $D\left(\frac{3-1}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$, $D(1; 0; 2)$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(1-1)^2+(-1-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$ (по формуле п. 45 (5)).

$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

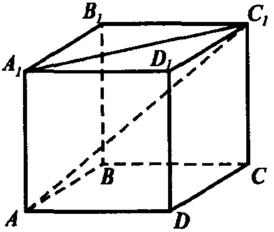


Рис. 253

№ 455. Примем, что сторона куба равна a, следовательно:

а) В прямоугольном треугольнике AA_1C_1 (рис. 253) $AA_1 = a$,

$A_1C_1 = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора).

$AC_1 = \sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+2a^2} = a\sqrt{3}$,

$$\cos(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{AC_1}) = \cos\angle A_1AC_1 = \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Векторы $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ лежат в плоскости BB_1D, сечение куба этой плоскостью есть прямоугольник BB_1D_1D со сторонами a и $a\sqrt{2}$.

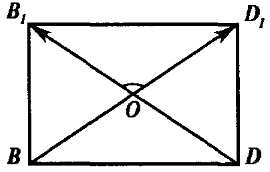


Рис. 254

$\overrightarrow{BD_1} \wedge \overrightarrow{DB_1} = \angle B_1OD_1$.

По теореме косинусов в $\triangle B_1OD_1$ (рис. 254):

$$B_1D_1^2 = OB_1^2 + OD_1^2 - 2OB_1 \cdot OD_1 \cos\angle B_1OD_1.$$

$$OB_1 = OD_1 = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ B_1D_1 = A_1C_1 = a\sqrt{2}, \Rightarrow$$

$$\cos\angle B_1OD_1 = \frac{OB_1^2 + OD_1^2 - B_1D_1^2}{2OB_1 \cdot OD_1} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{a^2\cdot 3}{4} + \frac{a^2\cdot 3}{4} - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

в) $C_1C \perp BD$, $AC \perp BD$ (по свойству диагонали квадрата) (рис. 255). Значит, BD перпендикулярен плоскости AC_1C, тогда $BD \perp AC_1$, $\cos(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC_1}) = \cos 90° = 0$.

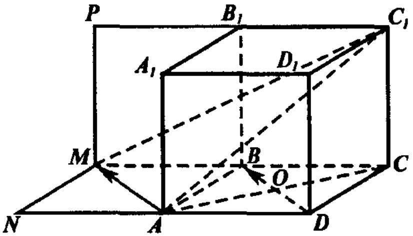


Рис. 255

№ 456. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке D (рис. 256). Следовательно координаты вершин прямоугольного параллелепипеда:

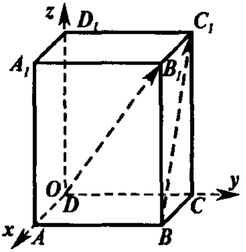


Рис. 256

$A(2; 0; 0)$; $A_1(2; 0; 2)$;
$B(2; 1; 0)$; $B_1(2; 1; 2)$;
$C(0; 1; 0)$; $C_1(0; 1; 2)$;
$D(0; 0; 0)$; $D_1(0; 0; 2)$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha$, $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$;
$\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$; $\vec{a} \neq 0$; $\vec{b} \neq 0$.

$\overrightarrow{DB_1}\,\{2; 1; 2\}$, что соответствует координатам точки B_1.

$\overrightarrow{BC_1}\,\{0 - 2; 1 - 1; 2 - 0\}$, $\overrightarrow{BC_1}\,\{-2; 0; 2\}$

$$\cos(\overrightarrow{DB_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}) = \frac{2\cdot(-2)+1\cdot 0+2\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+0+4}} = \frac{-4+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}} = 0;$$

$\overrightarrow{DB_1} \wedge \overrightarrow{BC_1} = 90°$.

№ 457. $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (см. п. 47);

$$\vec{a}\,\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}|\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 1 \cdot 2\cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$\vec{b}\,\vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|\cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 2 \cdot 2\cos 60° = 2;\ (\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = 1 + 2 = 3.$$

№ 458. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Пользуясь распределительным законом скалярного произведения векторов, получаем:

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,\vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})\,\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d} = (\vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d}) + {}$ $+ \vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}$.

№ 459. а) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(2\vec{b}) = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})(2\vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{b}) + {}$ $+ 2\vec{b}\,\vec{c} = 2\vec{b}\,\vec{a} + 2\vec{b}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}|\cos 120° + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|\cos 0° + 2|\vec{b}| \times$ $\times |\vec{c}|\cos 90° = 2 \cdot 1 \cdot 1\,(-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = -1 + 2 = 1$;

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{c})=\vec{a}\,\vec{a}-\vec{a}\,\vec{b}+$
$+\vec{a}\,\vec{c}-\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}-\vec{c}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{a}-\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}\,\vec{c}-\vec{c}\,\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0°-$
$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120°+|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90°-|\vec{c}|\cdot|\vec{c}|\cos 0°=1+\frac{1}{2}-1+0=\frac{1}{2}$;

б) $|\vec{a}-\vec{b}|=\vec{p}$ (рис. 257).

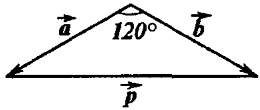


Рис. 257

$\vec{p}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}=$

$=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)}=$

$=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}}=$

$=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)-0+\left(-\frac{1}{2}\right)+1-0-0-0+1}=\sqrt{2}$, т. о. $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{2}$

№ 460. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x; y; z\}$, то
$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

$\vec{a}\ \vec{i}=(x\vec{i}+y\ \vec{j}\ +z\vec{k})\vec{i}=x(\vec{i}\ \vec{i})+y(\vec{j}\ \vec{i})+z(\vec{k}\ \vec{i})$. Т. к. $\vec{i}\ \vec{i}=1$, $\vec{j}\ \vec{i}=0$, $\vec{k}\ \vec{i}=0$, то $\vec{a}\ \vec{i}=x$. С другой стороны, по определению скалярного произведения $\vec{a}\,\vec{i}=|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|\cos\varphi_1=|\vec{a}|\cos\varphi_1$.

Итак, $x=|\vec{a}|\cos\varphi_1$. Аналогично получаем равенства $y=|\vec{a}|\cos\varphi_2$, $z=|\vec{a}|\cos\varphi_3$. То есть $\vec{a}\ \{|\vec{a}|\cos\varphi_1; |\vec{a}|\cos\varphi_2; |\vec{a}|\cos\varphi_3\}$.

№ 461. Обозначим $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$;
$\vec{a}\ ^\wedge\ \vec{b}=\vec{b}\ ^\wedge\ \vec{c}=60°$ (рис. 258).

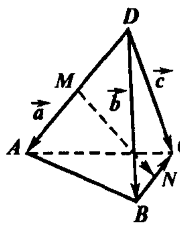


Рис. 258

Выразим $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+$
$+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})(-\vec{a})=-\frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{c}=\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\times$

$\times \cos 60° + \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0° - \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60° = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2 = 0$

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{c}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{b}(\vec{b} - \vec{a} +$

$+ \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b}\,\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b}\,\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a}\,\vec{b} -$

$- \vec{a}\,\vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Т. к. $\vec{c}^2 = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot 1 = \vec{b}^2 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1$, поскольку $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ по условию; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, поскольку $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ и $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = 60°$.

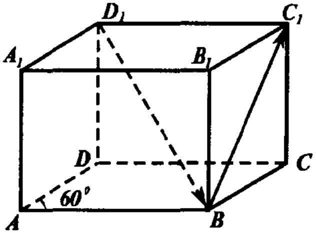


Рис. 259

№ 462. Воспользуемся свойством параллелепипеда.

а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{D_1C_1} = (-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{D_1C_1} =$

$= -\overrightarrow{AB}^2 = -1$ (поскольку $AB = D_1C_1$, $AB \parallel D_1C_1$ по свойству параллелепипеда, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_1C_1}$).

б) $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{D_1B} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} -$

$- \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}^2 - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 -$

$- 1 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{1}{2} - 1 - 1 = 1{,}5$

в) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD} \times$

$\times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \times$

$\times \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1}^2 = 1 + 1 \cdot 1 \cos 60° + 0 + 1 \cdot 1 \cos 60° + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 =$

$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 = 4$

г) В основании параллелепипеда лежит ромб $ABCD$, $\angle A = \angle C = 60°$, $AD = 1$, $AB = 1$ (рис. 260), откуда следует, что

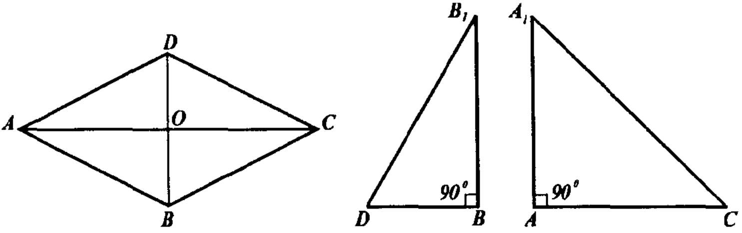


Рис. 260

1) $\angle ADB = \angle DBA = 60°$, 2) $DB = 1$.

Рассмотрим $\triangle DBB_1$: $DB = 1$, $BB_1 = AA_1 = 1$, $\angle DBB_1 = 90°$ (BB_1 перпендикулярен плоскости основания, т.к. AA_1 перпендикулярен плоскости основания и $BB_1 \parallel AA_1$).

$|DB_1| = \sqrt{BB_1^2 + DB^2} = \sqrt{2}$.

д) Рассмотрим основание параллелепипеда. $AC = 2AO$, где O — точка пересечение диагоналей ромба. AO — высота в равностороннем $\triangle ADB$, $AO = AB \cdot \sin 60° = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = \sqrt{3}$

В прямоугольном $\triangle AA_1C$

$|\overrightarrow{A_1C}| = A_1C = \sqrt{A_1A^2 + AC^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

е) $\overrightarrow{DA_1} = (-\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{D_1B} = (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}^2 -$

$- \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} -$

$- \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 - 1 + 0 - 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

$$\cos(\overrightarrow{DA_1} \wedge \overrightarrow{D_1B}) = \frac{\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{D_1B}}{|\overrightarrow{DA_1}||\overrightarrow{D_1B}|},$$

$$|\overrightarrow{DA_1}| = \sqrt{AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{2},\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB_1} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{DA_1} \wedge \overrightarrow{D_1B}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

ж) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{DB_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{DB_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD} \times$
$\times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \times\times$
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 1.$

$|\overrightarrow{AC_1}| = |\overrightarrow{A_1C}| = 2, \quad |\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{2},$

$$\cos(\overrightarrow{AC_1} \wedge \overrightarrow{DB_1}) = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

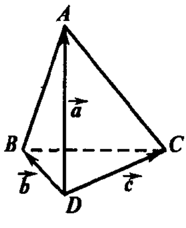


Рис. 261

№ 463. Введем векторы $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ (рис. 261). По условию $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, поэтому $\vec{a} \perp (\vec{c} - \vec{b})$ и $\vec{b} \perp (\vec{c} - \vec{a})$. Тогда $\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$ и $\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$. Отсюда получаем $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}$ и $\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{a}$.

Из этих двух равенств следует, что $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$, или $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = 0$. Но $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, поэтому $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC} = 0$, и, значит, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, что и требовалось доказать.

№ 464. $$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

а) $\overrightarrow{AB}\{1;\ 1;\ -2\}; \overrightarrow{CD}\{1;\ 0;\ -1\}$

$$\cos\varphi = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varphi = 30°.$$

б) $\overrightarrow{AB}\{1;\ 0;\ -1\}; \overrightarrow{CD}\{0;\ -2;\ 2\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{0+4+4}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\quad \varphi = 60°.$$

в) $\overrightarrow{AB}\{1;1;-2\}; \overrightarrow{CD}\{-2;-2;4\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|-2-2-8|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+4+16}} = \frac{12}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot 2} = 1\quad \varphi = 0°.$$

г) $\overrightarrow{AB}\{-1;\ 0;\ 1\}; \overrightarrow{CD}\{0;\ 0;\ -2\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \varphi = 45°.$$

№ 465. (рис. 262).

Примем AB = а, следовательно $AA_1 = a\sqrt{2}$. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. Вершины A, B, A_1, C_1 имеют следующие координаты:

$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$, $C_1(0;\ 0;\ \sqrt{2})$.

$\overrightarrow{AC_1}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right\}$, $\overrightarrow{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2};\ -\frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right\}$

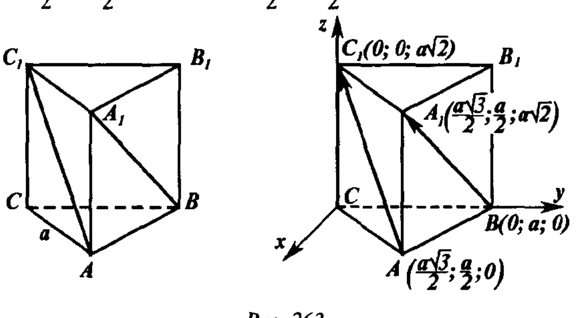


Рис. 262

Векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ являются направляющими векторами прямых AC_1 и A_1B. Пусть φ — угол между прямыми AC_1 и A_1B

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 60°.$$

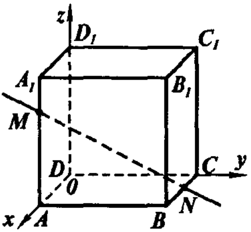


Рис. 263

№ 466. Примем сторону куба $AB = a$, Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$. (рис. 263). Следовательно, вершины куба имеют координаты:

$A\,(a; 0; 0)$, $B\,(a; a; 0)$,
$C\,(0; a; 0)$, $D\,(0; 0; 0)$,
$A_1\,(a; 0; a)$, $B_1\,(a; a; a)$,
$C_1\,(0; a; a)$, $D_1\,(0; 0; a)$;

точки M и N: $M\,(a; 0; \frac{3}{4}a)$, $N\,(\frac{1}{2}a; a; 0)$.

а) $\overrightarrow{MN}\,\{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\}$, $\overrightarrow{DD_1}\,\{0; 0; a\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|0+0-\frac{3}{4}a^2\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{0+0+a^2}} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a} = \frac{3\sqrt{16}}{4\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}};$$

б) $\overrightarrow{BD}\,\{-a; -a; 0\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{1}{2}a^2 - a^2 + 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{29 \cdot 2}} = \frac{2}{\sqrt{58}};$$

в) $\overrightarrow{B_1D}\,\{-a; -a; -a\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}a(-a) - a^2 - a\left(-\frac{3}{4}\right)a\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{\left|\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}\right)a^2\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{a^2\,\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{87}};$$

г) $\overrightarrow{A_1C}\{-a;\ a;\ -a\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}a(-a) + a^2 - \frac{3}{4}a(-a)\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{\left|a^2\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4}\right)\right|}{a^2\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^2 9\sqrt{16}}{a^2 4\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$$

№ 467. Примем $AB = a = BC$, следовательно $AA_1 = 2a$. Введем прямоугольную систему координат (рис. 264). Следовательно вершины параллелепипеда имеют координаты:

$A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (a;\ a;\ 0)$,
$C(0;\ a;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 0)$,
$A_1(a;\ 0;\ 2a)$, $B_1(a;\ a;\ 2a)$,
$C_1(0;\ a;\ 2a)$, $D_1(0;\ 0;\ 2a)$.

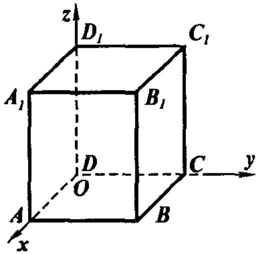


Рис. 264

а) $\overrightarrow{BD}\{-a;\ -a;\ 0\}$, $\overrightarrow{CD_1}\ (0;\ -a;\ 2a)$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|0 + a^2 + 0\right|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$\varphi \approx 71°\ 34'$

б) $\overrightarrow{AC}\ \{-a;\ a;\ 0\}$, $\overrightarrow{AC_1}\ \{-a;\ a;\ 2a\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\left|a^2 + a^2 + 0\right|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi \approx 54°44'$$

№ 468. (рис. 264). В прямоугольной системе координат:
$A\ (2;\ 0;\ 0)$, $B\ (2;\ 1;\ 0)$, $C\ (0;\ 1;\ 0)$, $D\ (0;\ 0;\ 0)$,
$A_1\ (2;\ 0;\ 3)$, $B_1\ (2;\ 1;\ 3)$, $C_1\ (0;\ 1;\ 3)$, $D_1\ (0;\ 0;\ 3)$.

а) $\overrightarrow{AC}\{-2; 1; 0\}$, $\overrightarrow{D_1B}\{2; 1; -3\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|-4+1|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{70}};$$

б) $\overrightarrow{AB_1}\{0; 1; 3\}$, $\overrightarrow{BC_1}\{-2; 0; 3\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|9|}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{4+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}};$$

в) $\overrightarrow{A_1D}\{-2; 0; -3\}$, $\overrightarrow{AC_1}\{-2; 1; 3\}$,

$$\cos\varphi = \frac{|4-9|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}.$$

№ 469. Примем сторона куба $AB = a$ (рис. 265). Введем прямоугольную систему координат.

$\overrightarrow{DA}\{a; 0; 0\}$, $\overrightarrow{DC}\{0; a; 0.\}$, $\overrightarrow{DD_1}\{0; 0; a\}$,

$M(\frac{4}{5}a; 0; a)$, $N(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a; 0)$, $\overrightarrow{MN}\{-\frac{3}{10}a; \frac{1}{2}a; -a\}$.

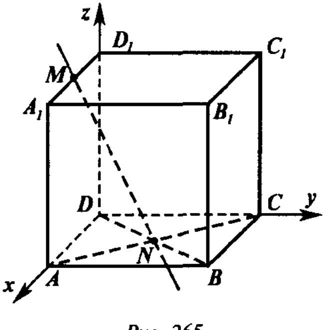


Рис. 265

Согласно формуле п. 48, задача 2:

$\sin\varphi = |\cos\theta|$,

где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости.

а) $\overrightarrow{DD_1}$ перпендикулярен плоскости $ABCD$,

$$\sin\varphi = |\cos(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{DD_1})| =$$

$$= \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + a^2}\cdot\sqrt{a^2}} =$$

$$= \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{9+25+100}{100}}} = \frac{10}{\sqrt{134}};$$

б) $\overrightarrow{DA}$ перпендикулярен плоскости DD_1C_1C,

$$\sin\varphi = |\cos(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{DA})| = \frac{\left|-\frac{3}{10}a^2\right|}{a\sqrt{\frac{134}{100}}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{3\cdot 10a^2}{10\cdot\sqrt{134}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{3}{\sqrt{134}};$$

в) $\overrightarrow{DC}$ перпендикулярен плоскости AA_1D_1D

$$\sin\varphi = |\cos(\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{MN})| = \frac{\left|\frac{1}{2}a\cdot a\right|}{a\sqrt{\frac{134}{100}}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{a^2\cdot 10}{a^2\cdot 2\cdot\sqrt{134}} = \frac{5}{\sqrt{134}}.$$

№ 470. Введем прямоугольную систему координат (рис. 266).

$A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$,$C(0; 1; 0)$,. $D(0; 0; 2)$, $M(1; 0; 1)$, $N(0; \frac{1}{2}; 0)$,

Воспользуемся формулой из задачи 2 п. 48:

$\sin\varphi = |\cos\theta|$, где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным к этой плоскости.

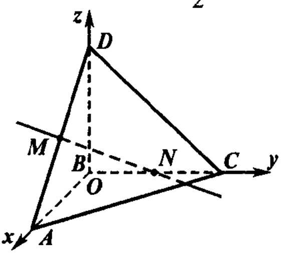


Рис. 266

а) Вектор $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярен к плоскости ABD.

$\overrightarrow{BC}\{0; 1; 0\}$, $\overrightarrow{MN}\{-1; \frac{1}{2}; -1\}$,

$$\sin\varphi = \cos|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN}| = \frac{\left|0+\frac{1}{2}+0\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

б) вектор $\overrightarrow{BA}$ перпендикулярен к плоскости DBC. $\overrightarrow{BA}(2; 0; 0\}$,

$$\sin\varphi = \cos|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{MN}| = \frac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

в) вектор $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярен к плоскости ABC. $\overrightarrow{BD}\{0; 0; 2\}$,

$$\sin\varphi = \cos|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{MN}| = \frac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

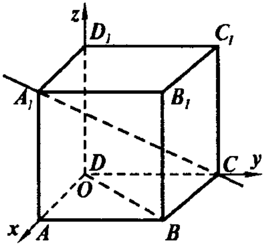


Рис. 267

№ 471. A_1C — диагональ куба; DB — диагональ грани куба (рис. 267).

Введем прямоугольную систему координат. Примем сторону куба $AB = AD = a$. Следовательно

$$A_1(a;0;a), C(0;a;0), \overrightarrow{A_1C}\{-a;a;-a\},$$

$$D(0;0;0),\ B(a;a;0),\ \overrightarrow{DB}\{a;a;0\}.$$

$$\cos(\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{A_1C}) = \frac{|a^2-a^2|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{3a^2}} = 0$$

Значит, $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{A_1C} = 90°$, и, соответственно, угол между прямыми A_1C и DB равен 90°. Доказано.

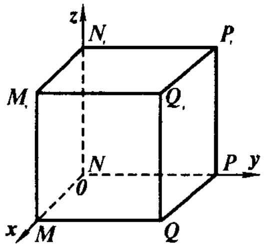


Рис. 268

№ 472. Введем прямоугольную систему координат (рис. 268). Примем сторона куба равной a. Следовательно:

1) $M_1(a;0;a), P(0;a;0), \overrightarrow{PM_1}\{a;-a;a\}$;

$M(a;0;0), Q_1(0;0;a), \overrightarrow{MQ_1}\ (-a;0;a)$.

$\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{MQ_1}$ — направляющие векторы прямых PM_1и MQ_1, угол между ним» равен углу между этими прямыми.

$$\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{MQ_1}) = \frac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0,$$

значит, угол между прямыми PM_1 и MQ_1 равен 90°

Докажем, что прямая MN_1, пересекающая прямую MQ_1 в точке M и лежащая в плоскости MN_1Q_1 (как и прямая MQ_1), тоже перпендикулярна прямой PM_1.

$N_1(a;a;a)$; $\overrightarrow{MN_1}$ и $\overrightarrow{PM_1}$ — направляющие векторы этих прямых.

$\overrightarrow{MN_1}\ \{0;a;a\}$.

$$\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{MN_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \quad \overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{MN_1} = 90°.$$

Мы доказали, что $\overrightarrow{PM_1} \perp \overrightarrow{MQ_1}$; $\overrightarrow{PM_1} \perp \overrightarrow{MN_1}$; $\overrightarrow{MQ_1}$ лежит в плоскости MN_1Q_1, $\overrightarrow{MN_1}$ лежит в плоскости MN_1Q_1. Эти прямые пересекаются в точке M. Значит $\overrightarrow{PM_1}$ перпендикулярен плоскости MN_1Q_1.

2) Прямые QN и QP_1 лежат в плоскости QNP_1 и пересекаются в точке Q.

$Q(0; 0; 0)$, $N(a; a; 0)$, $\overrightarrow{QN}\{a; a; 0\}$, $P_1(0; a; a)$, $\overrightarrow{QP_1}\{0; a; a\}$.

$$\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{QN}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0; \quad \overrightarrow{PM_1} \perp \overrightarrow{QN}$$

$$\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{QP_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \quad \overrightarrow{PM_1} \perp \overrightarrow{QP_1}.$$

Таким образом, прямая PA_1 перпендикулярна плоскости QNP_1.

№ 473. Введем прямоугольную систему координат так, что луч OA будет совпадать с осью Ox, OB с осью Oy, OC с осью Oz. Отложим на лучах отрезки: OA = OB = OC = 1 (рис. 269). Получим тетраэдр $ABOC$. OM и ON — биссектрисы углов $\angle AOC$ и $\angle AOB$.

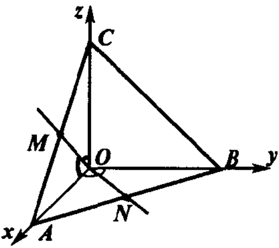


Рис. 269

$AM = MC = \frac{1}{2}AC$; $AN = NB = \frac{1}{2}AB$.

$A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$,

$M(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ (см. п. 45 а);

$\overrightarrow{OM}\{\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\}$, $\overrightarrow{ON}\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\}$.

$$\cos(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}) = \frac{\frac{1}{4} + 0 + 0}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2};$$

$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = 60°$. $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM}$ — направляющие векторы лучей OM и ON. $\angle MON = 60°$.

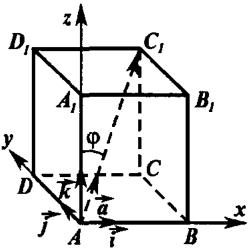


Рис. 270

№ 474. Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. 270, и рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AC_1}$. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{\cos 60°; \cos 60°; \cos \varphi)$, или $\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cos \varphi\}$. Т.к. $|\vec{a}| = 1$, то $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi = 1$. Отсюда получаем

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} \text{ или } \cos \varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Т.к. угол φ острый, то $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = 45°$.

№ 475. Примем, что точка N — середина отрезка CB, M — точка пересечения медиан $\triangle DBC$, $\angle DAN = \varphi$. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 271). Следовательно C (0; 3; 0), B (4; 0; 0).

Точка N — середина отрезка CB;

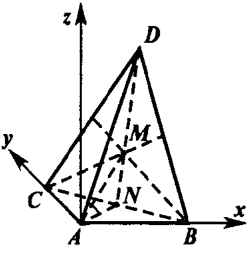


Рис. 271

$$N\left(2; \frac{3}{2}; 0\right).$$

$$D\,(5\cos 60°;\ 5\cos 45°;\ 5\sin\varphi);$$

$$\overrightarrow{AD}\left\{\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \sin\varphi\right\}$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}|^2 = 25,$$

$$25 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (5\sin\varphi)^2$$

$$25 = \frac{25}{4} + \frac{25\cdot 2}{4} + 25\sin^2\varphi$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2};\quad \varphi = 30°.$$

$$\overrightarrow{AD}\left\{\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\right\}, \angle DAN = 30°,$$

$$\overrightarrow{AN}\{2; \frac{3}{2}; 0\}. \quad |\overrightarrow{AN}| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} +$$

$$+ \frac{2}{3}\overrightarrow{AN},$$

$$\overrightarrow{AM} = \{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\cdot 2; \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\},\ \overrightarrow{AM} = \{\frac{5+8}{6}; \frac{5\sqrt{2}}{6}+1; \frac{5}{6}\},$$

$$\overrightarrow{AM} = \{\frac{13}{6}; \frac{5\sqrt{2}+6}{6}; \frac{5}{6}\}. \quad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{169}{36} + \frac{\left(5\sqrt{2}+6\right)^2}{36} + \frac{25}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{169 + 25\cdot 2 + 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 6 + 36 + 25}{36}} = \sqrt{\frac{169+50+60\sqrt{2}+36+25}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{280+60\sqrt{2}}{36}} = \sqrt{\frac{4\left(70+15\sqrt{2}\right)}{36}} = \frac{2\sqrt{70+15\sqrt{2}}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$$

№ 476. Примем $\angle CAC_1 = \varphi$. Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 272), рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AC_1}$.

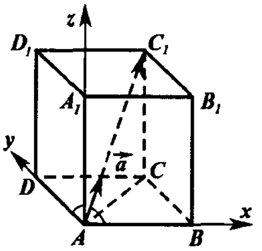


Рис. 272

$$\vec{a}\{\cos 60°; \cos 60°; \sin\varphi\},$$

$$\vec{a}\,\vec{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sin^2\varphi = 1,$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = 45°.$$

№ 477. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 273). Примем сторону квадрата равной a, $KK_1 = b$, где K_1 — точка пересечения диагоналей, или центр квадрата. Следовательно

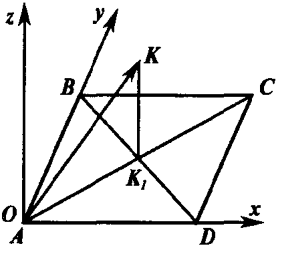


Рис. 273

$$\overrightarrow{AD}\{a; 0; 0\},\ \overrightarrow{AB}\{0; a; 0\},$$

$$\overrightarrow{BD}\{a; -a; 0\}.$$

Т.к. точка K_1 — центр квадрата, то K_1 $(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$, соответственно $K(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b)$; $\overrightarrow{AK}\{\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b\}$.

Для доказательства используем формулу скалярного произведения векторов. Найдем длины векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AK}$. Из прямоугольного треугольника BAD $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника AKK_1, где $AK_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$:

$$AK = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}};$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{BD}),$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{BD})$$

$$0 = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{BD})$$

Тогда, т. к. вектора ненулевые, то $\cos(\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{BD}) = 0$. Значит, $\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{BD} = 90°$, что и требовалось доказать.

§ 3. Движение

№ 478. а) Центральная симметрия относительно начала координат.

Примем O (0; 0; 0) находится в начале координат, то есть является центром симметрии. Согласно п. 49 для двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$ симметричных относительно точки O, имеем: $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$.

Тогда, получаем такое соответствие:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; –1; –2);
B (3; –1; 4),	B_1(–3; 1; –4);
C (1; 0; –2)	C_1 (–1; 0; 2).

б) Осевая симметрия относительно координатных осей. Разъяснение дано в п. 50.

Если ось симметрии — ось Ox, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; –1; –2);
B (3; –1; 4),	B_1(3; 1; –4);
C (1; 0; –2),	C_1 (1; 0; 2).

Если ось симметрии — ось Oy, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; 1; –2);
B (3; –1; 4),	B_1 (–3; –1; –4);
C (1; 0; –2),	C_1 (–1; 0; 2).

Если ось симметрии — ось Oz, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; –1; 2);
B (3; –1; 4),	B_1(–3; 1; 4);
C (1; 0; –2),	C_1 (–1; 0; –2).

в) Зеркальная симметрия относительно координатных плоскостей. Разъяснение дано в п. 51.

Если плоскость симметрии — плоскость Oxy, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; 1; –2);
B (3; –1; 4),	B_1(3; –1; –4);
C (1; 0; –2),	C_1 (1; 0; 2).

Если плоскость симметрии — плоскость Oyz, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; 1; 2);
B (3; –1; 4),	B_1(–3; –1; 4);
C (1; 0; –2),	C_1 (–1; 0; –2).

Если плоскость симметрии — плоскость Oxz, то:

Точка	Ей симметричная
A (0; 1; 2),	A_1 (0; –1; 2);
B (3; –1; 4),	B_1(3; 1; 4);
C (1; 0; –2),	C_1 (1; 0; –2).

№ 479. а) Согласно теореме п. 3 через центр симметрии и данную прямую можно провести единственную плоскость.

Примем O — центр симметрии, a — данная прямая, α — плоскость, проведенная через O и α (рис. 274).

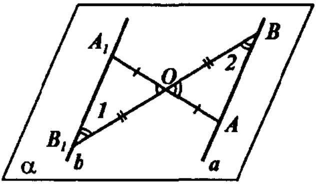


Рис. 274

Выберем точку $A \in a$, проведем отрезок OA. Продолжим OA за точку O на расстояние $OA_1 = AO$. Получим точку A_1, симметричную A.

Выберем точку $B \in a$. проведем отрезок OB. Продолжим OB за точку O на расстояние $OB_1 = BO$. Получим точку B_1, симметричную трчке B. Через A_1 и B_1 проведем прямую b. Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$. $AO = A_1O$, ВО $= OB_1$ $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ как вертикальные, поэтому $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

Тогда $\angle 1 = \angle 2$, а они являются внутренними накрест лежащими углами. По признаку параллельности двух прямых на плоскости $a \parallel b$.

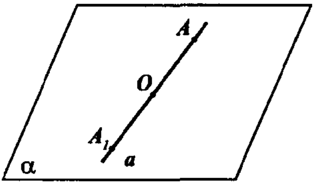


Рис. 275

б) Выберем некоторую точку $A \in a$. Для нее симметричная точка A_1 тоже принадлежит прямой a; $AO = OA_1$.

Точка A выбрана произвольно, поэтому любая точка прямой и ей симметричная точка относительно центра O лежат на прямой a, поэтому прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.

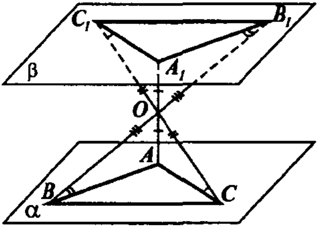


Рис. 276

№ 480. а) Пусть O — центр симметрии, α — данная плоскость (рис. 276).

1. Выберем точку $C \in \alpha$, проведем отрезок CO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OC$.

2. Выберем точку $A \in \alpha$, проведем отрезок AO и продолжим его за точку O на расстояние $OA_1 = OA$.

3. Выберем точку $B \in \alpha$. проведем отрезок BO и продолжим его за точку O на расстояние $OB_1 = OB$.

4. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость β (по аксиоме A_1 (п. 2) такая плоскость — единственная).

5. Соединим точки A, B и C отрезками; соединим точки A_1, B_1 и C_1 отрезками. $\triangle OAC = \triangle O_1A_1C_1$, потому что $OA_1 = OA$, $OC_1 = OC$ и $\angle AOC = \angle A_1OC_1$ как вертикальные. Отсюда $AC = A_1C_1$.

Таким образом $\angle A_1C_1O = \angle ACO$ и по признаку параллельности прямых $A_1C_1 \parallel AC$.

6. Для $\triangle OAB$ и $\triangle OA_1B_1$ повторим рассуждение и получим, что $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$. Таким образом, $\angle A_1B_1O = \angle ABO$, по признаку параллельности прямых $A_1B_1 \parallel AB$.

7. Если две пересекающиеся прямые (AC и AB) одной плоскости (α) соответственно параллельны двум прямым (A_1C_1 и A_1B_1) другой плоскости (β), то эти плоскости параллельны. Итак, $\alpha \parallel \beta$, утверждение доказано.

б) Если точка $O \in \alpha$, то для любой точки $A \in \alpha$ прямая OA тоже принадлежит плоскости α, следовательно и любая точка этой прямой тоже принадлежит плоскости α, значит и точка A_1 симметричная точке A тоже принадлежит плоскости α (рис. 277).

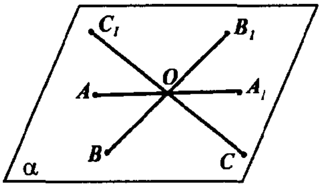


Рис. 277

Итак, для $A \in \alpha$ ей симметричная точка $A_1 \in \alpha$; аналогично для $B \in \alpha$ ей симметричная точка $B_1 \in a$; для $C \in \alpha$ ей симметричная точка $C_1 \in \alpha$.

Через три точки A_1, B_1, C_1, принадлежащие плоскости β, можно провести единственную плоскость, следовательно, она совпадает с плоскостью α.

№ 481. а) Примем a — ось симметрии, $l \parallel a$. Из точки $L \in l$ проведем $L_1A_1 \perp a$; продолжим LA за точку A на расстояние $AM = LA$ (рис. 278).

Из точки $L_1 \in l$ проведем $L_1A_1 \perp a$; продолжим L_1A_1 за точку A_1 на расстояние $A_1M_1 = L_1A_1$.

Параллельные прямые a и l лежат в одной плоскости, тогда, четырехугольник LMM_1L_1 – плоский четырехугольник.

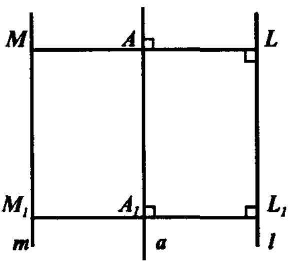


Рис. 278

$ML = M_1L_1$ — по построению. $ML \perp l$ и $M_1L_1 \perp l$, значит, $ML \parallel M_1L_1$ поэтому четырехугольник LMM_1L_1 — прямоугольник. Т.е. $MM_1 \parallel L_1L$. или $l \parallel m$.

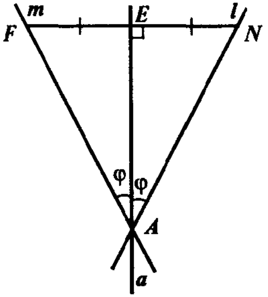


Рис. 279

б) Если a не паралелльна l, то а пересекается с l в некоторой точке A.

Возьмем некоторую точку $N \in l$, проведем $NE \perp a$, продолжим отрезок NE за точку E на расстояние $EF = NE$ (рис. 279). Через точку F проведем прямую FA (или m).

Рассмотрим $\triangle AEF$ и $\triangle AEN$.

$NE = EF$, AE — обший катет, и значит, $\triangle AEF = \triangle AEN$, поэтому

$\angle EAN = \angle EAF = \varphi$.

Итак, прямая m образует угол φ с осью симметрии.

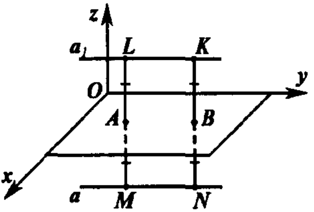


Рис. 280

№ 482. Выберем в качестве плоскости, относительно которой рассматривается зеркальная симметрия, плоскость Oxy (рис. 280). Примем, что прямая a параллельна плоскости Oxy.

Точки M и L симметричны, N и K симметричны; $MA = AL$, $NB = BK$.

Если a параллельна плоскости Oxy, то $NB = MA = BK = AL$, две прямые, перпендикулярные плоскости, между собой параллельны, то есть $ML \parallel NK$. Кроме того, $ML = NK$, тогда, четырехугольник $MNCL$ — прямоугольник, поэтому $LK \parallel MN$, или, что то же самое, $a_1 \parallel a$. А параллельные прямые лежат в одной плоскости (п. 4). Утверждение 1 доказано.

Если a не параллельна плоскости Oxy, то она пересекает ее в точке P. При симметрии точка P переходит в себя, т. к. лежит в плоскости Oxy. Значит, $P \in a_1$. Те есть прямые a и a_1 имеют общую точку, а значит, лежат в одной плоскости.

№ 483. а) В плоскости β выберем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$. Продолжим эти отрезки за точки A_2, B_2, C_2 так, что $A_2A_1 = AA_2$, $B_2B_1 = BB_2$, $C_2C_1 = CC_2$

(рис. 281). AA_1B_1B — прямоугольник, потому что $AA_1 = BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$ (две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны). Значит, $A_1B_1 \parallel AB$. BB_1C_1C — параллелограмм, потому что $BB_1 = CC_1$ и $BB_1 \parallel BC$. Тогда, $B_1C_1 \parallel BC$.

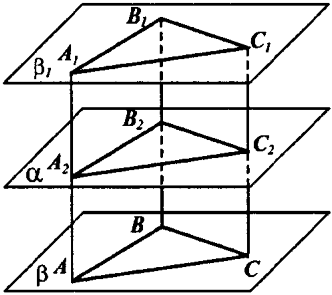


Рис. 281

Плоскость β_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1 (по аксиоме A_1 учебника (п. 2)) она — единственная.

Если две пересекающиеся прямые (BA и BC) одной плоскости (β) параллельны двум прямым (B_1A_1 и B_1C_1) другой плоскости (β_1), то эти плоскости параллельны: $\beta_1 \parallel \beta$.

б) Примем $\alpha \perp \beta$. Возьмем произвольную точку $A \in \alpha$ и проведем AO перпендикулярный плоскости α. Продолжим отрезок за точку O на расстояние $OA_1 = AO$ (рис. 282).

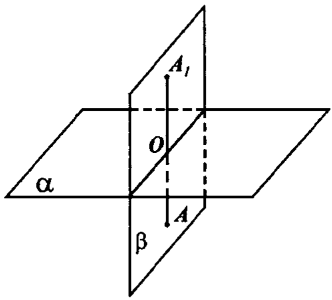


Рис. 282

Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости, — то есть $AO \subset \beta$, значит, и $AA_1 \subset \beta$.

Вывод. Каждая точка плоскости β отображается в точку, ей симметричную, которая тоже принадлежит плоскости β. Тогда, плоскость β отображается сама на себя, или β_1 совпадает с β.

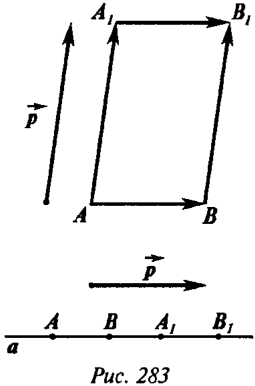


Рис. 283

№ 484. (рис. 283). а) Докажем, что $AB \parallel A_1B_1$. Доказательство приведено в п. 52. Там доказано, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, а это значит, что $A_1B_1 \parallel AB$, б) Примем $a \parallel \vec{p}$. Возьмем точку $A \in a$, следовательно точка A перейдет в точку A_1, такую, что $AA_1 = \vec{p}$. Значит они лежат в одной плоскости, а в плоскости через точку A можно провести только одну прямую AA_1, параллельную вектору $\vec{p}$, поэтому $A_1 \in a$.

Т. о., точка $A \in a$ переходит (или отображается) в точку $A_1 \in a$.

Для любой другой точки $B \in a$ рассуждение повторяется, тогда каждая точка прямой a переходит в точку той же прямой a, то есть прямая отображается на себя.

Если прямая a содержит $\vec{p}$, доказательство остается в силе, просто векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\vec{p}$ лежат на одной прямой a.

№ 485. (рис. 284). Параллельный перенос является движением, поэтому $AB = A_1B_1$ $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Отсюда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Проведем отрезки AM и A_1M_1. $AM = A_1M_1$ (п. 52, нужно только вместо точки B поставить точку M, когда доказывается равенство $A_1B_1 = AB$). В плоском четырехугольнике AMM_1A, $AM \parallel A_1M_1$ и $AM = A_1M_1$ значит, AMM_1A_1 — параллелограмм, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$.

Замечание. Любая точка$\triangle ABC$ переходит в соответствующую ей точку $\triangle A_1B_1C_1$.

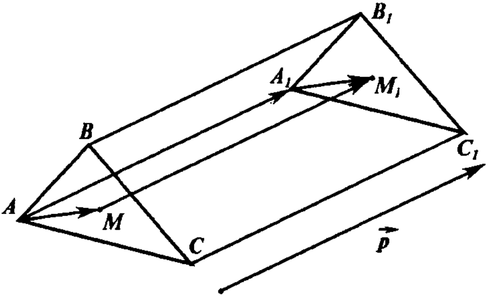


Рис. 284

№ 486. а) a — данная прямая (рис. 285).

Выберем на прямой a точки A, B, C. При движении они перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой.

$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Такое равенство действительно возможно, если только все три точки — на одной прямой; в противном случае, по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B + B_1C_1$. В силу произвольного выбора точек A, B и C доказательство справедливо для любых других трех точек, поэтому при движении прямая переходит в прямую.

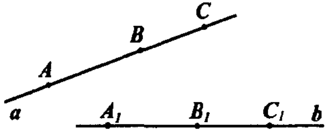


Рис. 285

б) Рассмотрим плоскость α (рис. 286). Докажем, что она перейдет в плоскость α_1. Рассмотрим в плоскости α две пересекающиеся прямые a и b. Пусть они пересекаются в точке O. Тогда при движении прямая a перейдет в прямую a_1 (см п. a)), а прямая b в прямую b_1. Точка O перейдет в точку O_1. Проведем плоскость α_1 через пересекающиеся прямые a и b. Докажем, что α переходит в α_1.

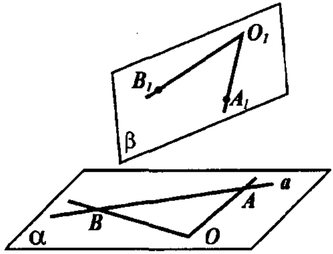


Рис. 286

Рассмотрим произвольную точку $CO \in \alpha$ и ее образ C_1. Докажем, что $C_1O \in \alpha_1$. Проведем через точку C прямую, пересекающую прямые a и b в точках A и B соответственно. Тогда точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1, лежащие на прямых a_1 и b_1, и, следовательно, в плоскости α_1. Значит и вся прямая A_1B_1 лежит в плоскости α_1. Значит и точка C_1 лежит в плоскости α_1, так как она лежит на прямой A_1B_1.Что и требовалось доказать.

№ 487. а) (рис. 287). AC — заданный отрезок, $AC \in \alpha$.

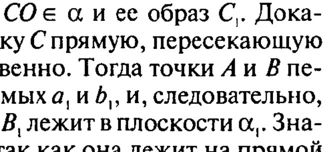


Рис. 287

При движении $A \to A_1$ $C \to C_1$. Докажем, что весь отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1.

Выберем произвольную точку $B \in AC$. При движении $B \to B_1$. $AB + BC = AC$. Поскольку при движении расстояния между точками сохраняются, то $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$.

Отсюда $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Это равенство возможно только когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и точка B_1 лежит между A_1 и C_1, иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B + B_1C_1$ значит, точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1.

б) (рис. 288). $\angle AOB$ — задан, лежит в плоскости α. При движении $O \to O_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$ причем $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$ и $AB = A_1B_1$, следовательно $\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$ по трем сторонам, значит, $\angle AOB = \angle A_1O_1C_1$.

Если $\angle AOB = 180°$, то $\angle A_1O_1C_1 = 180°$. Докажем это.

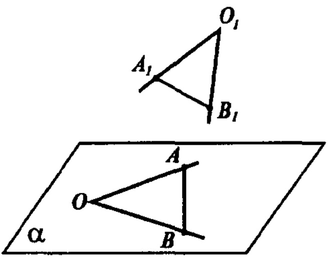


Рис. 288

На сторонах развернутого угла выберем точки A и B. При движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, так что $AB = A_1B_1$; $O \to O_1$ при движении $AO = A_1O_1$ и $O_1B_1 = OB$.

Итак, $AO_1 + O_1B = A_1B_1$ (при движении отрезок переходит в отрезок).

Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от точки O_1 тогда, $A_1O_1B_1$ — развернутый (рис. 289).

Рис. 289

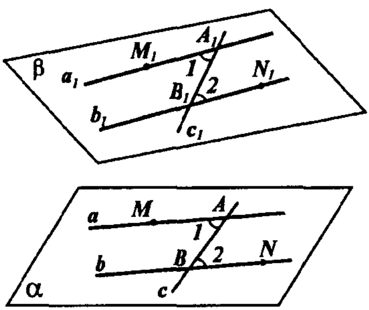


Рис. 290

№ 488. а) $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$. Пересечем a и b прямой c, следовательно $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c. Расставим точки, как показано на рисунке 290.

M и N — произвольные точки, взятые по разные стороны от секущей AB.

При движении $\angle MAB$ перейдет в равный ему $\angle M_1A_1B_1$, а $\angle ABN$ — в равный ему угол $\angle A_1B_1N_1$. Поскольку при движений плоскость α переводится в плоскость β, то прямые A_1M_1 и B_1N_1 лежат в одной плоскости β.

б) Проведем в плоскостях α и β пересекающиеся прямые a и b, c и d, таким образом, чтобы $a \parallel c$, $b \parallel d$ и $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $c \in \beta$, $d \in \beta$. Тогда при движении a перейдет в a_1, $b \to b_1$, $c \to c_1$, $d \to d_1$, $\alpha \to \alpha_1$,$\beta \to \beta_1$,. Причем $a_1 \parallel c_1$, $b_1 \parallel d_1$, $a_1 \in \alpha$, $b_1 \in \alpha$, $c_1 \in \beta$, $d_1 \in \beta$ (рис. 291). Но это означает, что в плоскостях α_1 и $_{\beta 1}$ есть 2 пары пересекающихся соответственно параллельных прямых, таким образом $\alpha_1 \parallel \beta_1$, что и требовалось доказать.

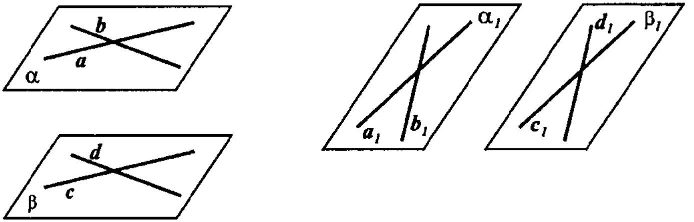


Рис. 291

№ 489. а) Так как окружность лежит плоскости, то и образы всех ее точек при движении тоже попадают в одну плоскость,а тогда окружность определяется:

1. Положением ее центра O,
2. Длиной радиуса R.

Поскольку, при движении отрезок (радиус) отображается на отрезок той же длины, то исходный радиус OA переходит в отрезок O_1A_1 такой, что $OA = O_1A_1 = R$.

Окружность — геометрическое место точек плоскости равноудаленых от центра (на расстояние R). Т.к. движение сохраняет расстояния, то фигура, полученная из окружности движением, также есть геометрическое место точек плоскости, удаленных от O_1 на расстояние R. То есть, это есть окружность радиуса R.

б) При движении ребра параллелепипеда не испытывают никаких сдвигов и поворотов относительно друг друга (рис. 292). Не изменяются длины и углы, потому что, как было показано в предыдущих задачах, отрезок и угол при движении переходит в отрезок и угол, имеющий такое же измерение.

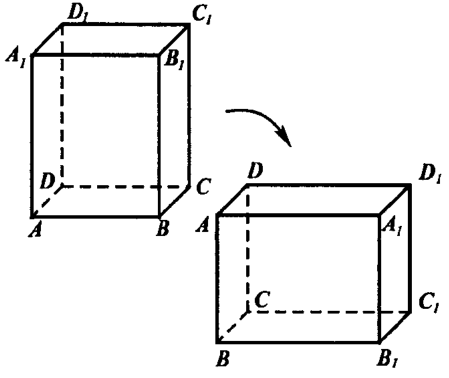


Рис. 292

Вопросы к главе V

1. а) Точка лежит в одной из координатных плоскостей;
б) точка лежит на одной из координатных осей.

2. Через прямую проведем плоскость, перпендикулярную к оси аппликат. Следовательно эта плоскость будет параллельна плоскости Oxy. Любая точка на прямой находится в построенной плоскости, и, в соответствии с п. 42, каждая точка этой прямой имеет одну и ту же аппликату.

3. A (2; 4; 5), B (3; x; y), C (0; 4; z) и D (5; t; u)

а) Если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxy, то их аппликаты равны, то есть $y = 5$, $z = 5$, $u = 5$; x, t — любые числа;

б) если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxz, то их ординаты равны, то есть $x = 4$, $t = 4$; y, z, w — любые числа;

в) если точки лежат, на прямой, параллельной оси Ox, то у них одна и та же ордината и аппликата, то есть $x = 4$, $t = 4$, и $y = z = u = 5$.

4. $\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\overrightarrow{BC}\{x_2; y_2; z_2\}$. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}. \Rightarrow \overrightarrow{CA}\{-x_1 - x_2; -y_1 - y_2; -z_1 - z_2\}$.

5. $\vec{a}\{0; 0; z_0\}$, $z_0 \neq 0$

а) параллелен оси Oz; ,

б) перпендикулярен оси Ox;

в) перпендикулярен оси Oy.

6. $\vec{a}\{0; y_0; z_0\}$.

а) Пересекает плоскость Oxz или составляет с ней некоторый угол, не пересекая плоскость;

б) перпендикулярен к оси Ox.

7. а) $\vec{a}\{-5; 3; -1\}$ и $\vec{b}\{6; -10; -2\}$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны, то $\frac{-5}{6} = \frac{3}{-10} = \frac{-1}{-2} = k$. Ясно, что $\frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10}$, таким образом $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны;

б) $\vec{a}\{-2; 3; 7)$; $\vec{b}\{-1; 1{,}5; 3{,}5\}$. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\frac{-2}{-1} = \frac{3}{1{,}5} = \frac{7}{3{,}5} = k$, или $2 = 2 = 2 = k$; $\vec{a} = 2\vec{b}$, векторы коллинеарны.

8. Примем d — длина радиус-вектора точки M. Следовательно:

а) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d = 1$.

$\sqrt{1 + y^2 + z^2} = 1$. Отсюда $y = z = 0$, точка M лежит на оси абсцисс.

б) $\sqrt{4 + y^2 + z^2} = 1$,

$4 + y^2 + z^2 = 1$,

$y^2 + z^2 = -3$ — невозможно, т. к. $y^2 + z^2 \geqslant 0$

9. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

а) $3 = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$, $9 = 9 + x^2 + y^2$, $0 = x^2 + y^2$, $x = y = 0$.

б) $3 = \sqrt{25 + x^2 + y^2}$, $9 = 25 + x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = -16$, что невозможно.

10. $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

где $M_1\,(3; y_1; z_1)$, $M_2\,(6; y_2; z_2)$.

а) $2 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

$4 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$,

$(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -5$, что невозможно.

Итак, равенство $M_1M_2 = 2$ невозможно.

б) $3 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

$9 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$, отсюда $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$, таким образом, отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox.

11. $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\alpha$.

а) $\vec{a}\,\vec{b} = ab$, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$;

б) $\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos 180° = -ab$;

в) $\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos 90° = 0$;

г) $\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos 60° = \frac{1}{2}ab$;

д) $\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos 120° = ab\cos(180° - 60°) = -ab\cos 60° = -\frac{1}{2}ab$.

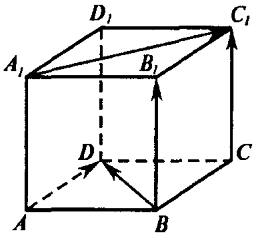


Рис. 293

12. $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$.

а) $\vec{a}\,\vec{b} > 0$, если $\cos\alpha > 0$, то есть $0° \leqslant \alpha < 90°$;

б) $\vec{a}\,\vec{b} < 0$, если $\cos\alpha < 0$, то есть $90° < \alpha \leqslant 180°$;

в) $\vec{a}\,\vec{b} = 0$, если $\cos\alpha = 0$, то есть $\alpha = 90°$.

13. а) $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$, а $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1}$, поэтому $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{D_1C_1}$;

б) $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{BB_1}$, а $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, значлит, $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{CC_1}$

в) $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ не перпендикуярен $\overrightarrow{AC}$, тогда $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AD}$ не перпендикулярны;

г) $\overrightarrow{DB}$ не перпендикулярен $\overrightarrow{D_1C_1}$ ($\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{DC}$, а $\overrightarrow{DB}$ составляет с $\overrightarrow{DC}$ угол 45°);

д) $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{AC}$, т.к. $\overrightarrow{BB_1}$ перпендикулярен плоскости $ABCD$.

По-видимому, в учебнике опечатка, в нем вместо $\overrightarrow{BB_1}$ напечатано $\overrightarrow{BB}$, но $\overrightarrow{BB} = 0$, согласно п. 46 угол между $\vec{0}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен 0, то есть эти векторы не перпендикулярны.

14. $\vec{a}\,\{1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{2; y_2; z_2\}$, $\vec{a}\,\vec{b} = 1 \cdot 2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

а) $\vec{a}\,\vec{b} = 2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
Если $2 + y_1y_2 + z_1z_2 < 2$, значит, $y_1y_2 + z_1z_2 < 0$.
Да, может ($y_1 = 0, y_2 = 0, z_1 = 1, z_2 = -1$);
б) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2$, если $y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.
Да, может ($y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$);
в) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 > 2$, если $y_1y_2 + z_1z_2 > 0$.
Да, может ($y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 1$).

15. $B\,(1;0;2) \to C\,(2;-1;4)$.

$$x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2};\ (x_A = \frac{x_B + x_C}{2})$$
$$y = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2};\ (y_A = \frac{y_B + y_C}{2})$$
$$z = \frac{2+4}{2} = 3;\ (z_A = \frac{z_B + z_C}{2})$$

16. $M\,(2;\ 1;\ 3) \to M_1\,(2;\ -2;\ 3)$. Плоскость проходит через точку $P\,(2; -\frac{1}{2}; 3)$.

Плоскость зеркальной симметрии параллельна плоскости Oxz, значит, она параллельна осям Ox и Oz (эта плоскость перпендикулярна отрезку MM_1, проходит через его середину, то есть она перпендикулярна оси Oy, значит, параллельна плоскости Oxz).

17. *Ответ*: а) в левую; б) в правую; в) в правую.

Дополнительные задачи

№ 490. Для решения воспользуемся правилами 1°, 2° и 3° п. 43.

а) Примем $\vec{p} = 3\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{c}$, где $\vec{p}\{x;\ y;\ z\}$. По правилу 3° $3\vec{b}$ $\{-15;\ 15;\ 0\}$; $-3\vec{a}\ \{15;\ 0;\ -15\}$; $3\vec{c}\ \{3;\ -6;\ -9)$.

Следовательно, вектор $\vec{p}$ имеет координаты (по правилу 1°):
$x = -15 + 15 + 3 = 3$, $y = 15 + 0 - 6 = 9$, $z = -15 - 9 = -24$; $\vec{p}\ \{3;\ 9;\ -24\}$;

б) $\vec{p} = -0{,}1\vec{c} + 0{,}8\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$,

$-0{,}1\vec{c}\ \{-0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3\}$; $0{,}8\vec{a}\ \{-4;\ 0;\ 4\}$; $-0{,}5\vec{b}\ \{2{,}5;\ -2{,}5;\ 0\}$. Примем $\vec{p}\ \{x;\ y;\ z\}$.

$x = -0{,}1 - 4 + 2{,}5 = -1{,}6$;
$y = 0{,}2 - 2{,}5 = -2{,}3$;
$z = 0{,}3 + 4 = 4{,}3$;
$\vec{p}\ \{-1{,}6;\ -2{,}3;\ 4{,}3\}$.

№ 491. а) Координаты вектора $\vec{a}\{-\frac{2}{3};\ 3;\ -1\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\ \{6;\ -10;\ -2\}$, например: $-\frac{5}{6} \neq -\frac{3}{-10}$. Значит, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (см. задачу 413).

б) Координаты вектора $\vec{a}\ \{-2;\ 3;\ 7\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\ \{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$: $\frac{-2}{-1} = \frac{3}{1{,}5} = \frac{7}{3{,}5} = 2$, , значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{a}\ \{-\frac{2}{5};\ \frac{5}{9};\ -1\}$ и вектора $\vec{b}\ \{6;\ -5;\ 9\}$ пропорциональны:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{6} = \frac{\frac{5}{9}}{-5} = \frac{-1}{9};\ -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9};\ \vec{a} = -\frac{1}{9}\vec{b};$$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{a}\ \{0{,}7;\ -1{,}2;\ -5{,}2\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\ \{-2{,}8;\ 4{,}8;\ -20{,}8\}$:

$\frac{0{,}7}{-2{,}8}=-\frac{1}{4}$; $\frac{-1{,}2}{4{,}8}=-\frac{1}{4}$; $\frac{-5{,}2}{20{,}8}=\frac{1}{4}$; векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

№ 492. Примем точка E (x; y; z) — середина отрезка AB. Ее координаты согласно формуле п. 45:

$$x=\frac{1}{2}(-5+3)=-1;\ y=\frac{7-11}{2}=-2;\ z=\frac{3+1}{2}=2;\ E\,(-1;\ -2;\ 2)$$

В соответствии с п. 42 определим координаты точки, ближайшей к точке E на оси Ox: E_1 $(-1;\ 0;\ 0)$; на оси Oy: E_2 $(0;\ -2;\ 0)$; на оси Oz: E_3 $(0;\ 0;\ 2)$.

№ 493. Для решения задачи нужно установить, можно ли вектор $\vec{a}$ разложить по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то есть существуют ли числа тип такие, что $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ (см. задачу 415).

а) $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}\,\{1;\ 1;\ 0\}$.

$\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{c}\,\{1;0;-1\}$, где $\vec{i}\,\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\,\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\,\{0;0;1\}$.

Представим равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ в координатах:
1) $-1=m\cdot 1+n\cdot 1$,
2) $2=m\cdot 1+n\cdot 0$,
3) $3=m\cdot 0+n\cdot(-1)$.

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m=2$, $n=-3$, значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}\,\{1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{c}\,\{1;\ -1;\ 0\}$. Представим равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ в координатах:
1) $1=m\cdot 2+n\cdot 1$,
2) $1=m\cdot 1+n\cdot(-1)$,
3) $1=m\cdot 1{,}5+n\cdot 0$

$$m=\frac{2}{3};\ n=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3};\ 1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}.$$

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{1}{3}$, значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

в) Запишем в координатах равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$.
1) $1=m\cdot 1+n\cdot 2$,

2) $1 = m \cdot (-1) + n \cdot 3$,

3) $1 = m \cdot 2 + n \cdot (-1)$.

Эта система уравнений не имеет решений относительно m и n. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

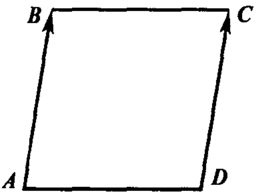


Рис. 294

№ 494. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{AB}$ $\{1; 1; 1\}$, $\overrightarrow{DC}$ $\{1; 1; 1\}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны, т.к. $\overrightarrow{AB} = k \ \overrightarrow{DC}$, $k = 1$. Тогда $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ (рис. 294).

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|,$$

Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны и длины их равны, значит, $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

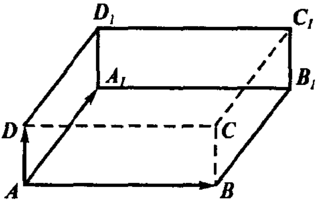


Рис. 295

№ 495. Используем формулу задачи 423.

Примем, что точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Следовательно, ее координаты:

$$O\left(\frac{2+3+2}{3}; \frac{0+2+3}{3}; \frac{1+2+6}{3}\right),$$

$$O\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3\right).$$

№ 496. $\overrightarrow{AD}\{4; 1; 0\}$, $\overrightarrow{AA_1}$ $\{2; 3; -1\}$, $\overrightarrow{AB}$ $\{-1;4;3\}$.

$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD_1}$ $\{2 + 4; 3 + 1; 0 - 1\}$, $\overrightarrow{AD_1}$ $\{6; 4; -1\}$.

Запишем координаты этого вектора через координаты его начала и конца:

$6 = x_{D_1} - x_A$, $\quad 6 = x_{D_1} - 3$, $\quad x_{D_1} = 9$;

$4 = y_{D_1} - y_A$, $\quad 4 = y_{D_1} - 0$, $\quad y_{D_1} = 4$;

$-1 = z_{D_1} - z_A$, $\quad -1 = z_{D_1} - 2$, $\quad z_{D_1} = 1$; $\quad D_1\ (9; 4; 1)$.

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}\{-1+4; 4+1; 3+0\}$; $\overrightarrow{AC}\{3; 5; 3\}$.

Через координаты начала к конца:

$3 = x_C - x_A$, $\quad 3 = x_C - 3$, $\quad x_C = 6$;
$5 = y_C - y_A$, $\quad 5 = y_C - 0$, $\quad y_C = 5$;
$3 = z_C - z_A$, $\quad 3 = z_C - 2$, $\quad z_C = 5$; $\quad C(6; 5; 5)$.

3) $\overrightarrow{AB_1}\{-1+2; 4+3; 3-1\}$, $\overrightarrow{AB_1}\{1; 7; 2\}$.

Через координаты начала и конца:

$1 = x_{B_1} - 3$, $\quad x_{B_1} = 4$;
$7 = y_{B_1} - 0$, $\quad y_{B_1} = 7$;
$2 = z_{B_1} - 2$, $\quad z_B = 4$; $\quad B_1(4; 7; 4)$.

4) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AC_1}\{2+(-1)+4; 3+4+1; -1+3+0\}$, $\overrightarrow{AC_1}\{5; 8; 2\}$.

Через координаты начала конца:

$5 = x_{C_1} - 3$, $\quad x_{C_1} = 8$;
$8 = y_{C_1} - 0$, $\quad y_{C_1} = 8$;
$2 = z_{C_1} - 2$, $\quad z_{C_1} = 4$; $\quad C_1(8; 8; 4)$.

№ 497.

а) $x_p = \frac{1}{2}(2+5)$, $\quad$ б) $x_p = \frac{1}{2}(0+3)$ $\quad$ в) $x_p = \frac{1}{2}(5+3)$,

$y_p = \frac{1}{2}(3+7)$, $\quad y_p = \frac{1}{2}(4-8)$ $\quad y_p = \frac{1}{2}(3-5)$

$0 = \frac{1}{2}(k-1)$ $\quad 0 = \frac{1}{2}(k+2)$ $\quad 0 = \frac{1}{2}(k+3k)$

откуда $k = 1$ $\quad$ откуда $k = -2$ $\quad$ откуда $k = 0$

№ 498. Примем единичный вектор $\vec{e}\{x; y; z\}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$.

Следовательно $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$, откуда $y = \frac{x}{2}$; $z = -x$.

Поскольку $|\vec{e}| = 1$, то $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$.

$\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4} + (-x)^2} = 1$; $\sqrt{\left(2+\frac{1}{4}\right)x^2} = 1$; $\frac{3}{2}|x| = 1$

x > 0, поскольку $\vec{e}$ и $\vec{a}$ сонаправлены;

$x = \frac{2}{3}$, следовательно $\vec{e}\ \{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\}$.

Примем $\vec{e}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$. Следовательно $\vec{e}$ лежит в плоскости Oxy, т.к. вектор $\vec{b}$ лежит в плоскости Oxy. $\vec{e}\ \{x; y; 0\}$.

$\frac{x}{1} = \frac{y}{3}$, $y = 3x$.

Если $|\vec{e}| = 1$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $y = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

$\vec{e}\ \{\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0\}$

№ 499. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $4 + y^2 + 5 = 25$, $y^2 = 16$, $y = \pm 4$.

№ 500. Примем, что точка O — середина отрезка MN, S — середина отрезка PQ.

$O\ (\frac{2-4}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{3-1}{2})$; $O\ (-1; 0; 1)$; $S\ (\frac{1-3}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{2+0}{2})$; $S\ (-1; 1; 1)$.

$OS = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1}$

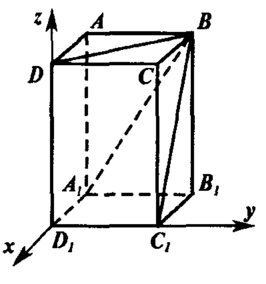


Рис. 296

№ 501. В заданной прямоугольной системе координат построим прямоугольный параллелепипед так, чтобы оси координат совпали с его ребрами и точка B была одной из его вершин. Согласно рисунку 296:

$A_1D_1 = BC = |x_B| = 2$,

$D_1C_1 = AB = |y_B| = 5$,

$D_1D = B_1B = |z_B| = \sqrt{3}$

Расстояниями от точки B до осей координат будут диагонали: BA_1 — до оси Ox; BC_1 — до оси Oy; BD — до оси Oz.

$BA_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{25 + 3} = 2\sqrt{7}$,

$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$,

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

№ 502. Примем, что точка D лежит на оси Oy и равноудалена от точек A и B; $D\,(0;\,y_D;\,0)$. $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}|$. По формуле (5) п. 45:

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 + (z_A - z_D)^2}.$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(13-0)^2 + 2(2-y_D)^2 + (-1-0)^2} =$$

$$= \sqrt{169 + 4 - 2\cdot 2\cdot y_D + y_D^2 + 1} = \sqrt{4y_D^2 - 4y_D + 174},$$

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-15-0)^2 + (7-y_D) + (-18-0)^2} =$$

$$= \sqrt{225 + 49 - 2\cdot 7\cdot y_D + y_D^2 + 324} = \sqrt{y_D^2 - 14y_D + 598}.$$

Составим уравнение:

$$\sqrt{4y_D^2 - 4y_D + 174} = \sqrt{y_D^2 - 14y_D + 598}$$

$$4y_D^2 - 4y_D + 174 = y_D^2 - 14y_D + 598;$$

$$10y = 424;\ y = 42{,}4;$$

$$D(0;42{,}4;0).$$

№ 503. Примем,что точка O — центр описанной окружности; O $(x;\,y,\,z)$. Следовательно $AO = BO = CO$. Определим вид $\triangle ABC$. Направляющие векторы сторон: $\overrightarrow{AB}\{2;\,-1;\,-1\}$, $\overrightarrow{AC}\{2;\,0;\,0\}$, $\overrightarrow{BC}\{0;\,1;\,1\}$.

$$\cos\angle BAC = \frac{|4-0-0|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\cos\angle ABC = \frac{|-1-1|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\angle ACB = \frac{|0|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+1}} = 0$$

$\angle ACB = 90°$, $\triangle ABC$ — прямоугольный. Значит, точка O лежит на отрезке AB; $AO = OB$. По формуле (2) п. 45 координаты точки O:

$$x = \frac{1}{2}(0+2) = 1;$$

$$y = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$

$$z = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

$$O\,(1;\,1{,}5;\,1{,}5).$$

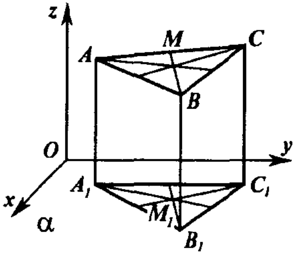


Рис. 297

№ 504. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость α совместилась с плоскостью Oxy. $\triangle A_1B_1C_1$ проекция $\triangle ABC$ на плоскость Oxy; M_1 — проекция точки M. $\Rightarrow A(x_A; y_A; 4), B(x_B; y_B; 9), C(x_C; y_C; 5)$.

M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. $M(x_M; y_M; z_M)$, где z_M — искомое расстояние от точки M до плоскости α (или плоскости Oxy) (рис. 297).

Если известны координаты вершин $\triangle ABC$, то точка пересечения медиан имеет координаты:

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ (см. задачу 423).

$M\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$; $z_M = 6$ дм

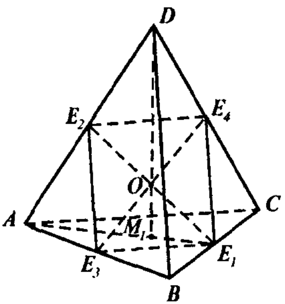


Рис. 298

№ 505. Примем E_1, E_2, E_3, E_4 — середины ребер BC, AD, AB и DC. Точка O — середина отрезка E_1E_2; E_2E_3 — средняя линия грани ABD. Точка M_1 — точка пересечения медиан основания (рис. 298).

$E_2E_3 = \frac{1}{2}DB.$

Аналогично $E_1E_4 = \frac{1}{2}DB, \Rightarrow$

$\overrightarrow{E_4O} = \overrightarrow{E_4E_1} + \overrightarrow{E_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{E_1O}$

$\overrightarrow{OE_3} = \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{E_2E_3} = \overrightarrow{OE_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$

Но по условию $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{E_1O}$, поэтому $\overrightarrow{E_4O} = \overrightarrow{OE_3}$, то есть точка O — середина отрезка E_3E_4.

$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DE_2} + \overrightarrow{E_2O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E_2E_1};$

$\overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE_1};\quad \overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE_1}$

Сложим эти два равенства и заметим, что $\overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{E_2A} = 0$, $\overrightarrow{E_1C} + \overrightarrow{E_1B} = 0$ — по условию задачи. Получим:

$$2\overrightarrow{E_2E_1} = \overrightarrow{E_2D} + \overrightarrow{E_2A} + \overrightarrow{CE_1} + \overrightarrow{BE_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{E_2E_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E_2E_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} +$$

$$+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}); \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}((\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})) = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DA}) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA});$$

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DM_1} \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\overrightarrow{DO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DM_1}, \text{ значит, } \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DM_1}, \quad \frac{DO}{DM_1} = \frac{3}{1}.$$

Значит, точка O лежит на отрезке DM_1 и делит его в отношении 3:1, считая от вершины.

Повторив рассуждение для других пар смежных граней, можно доказать это для всех остальных медиан тетраэдра.

Значит, все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 3:1, считая от вершины.

№ 506. $\vec{a}\,\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

а) $\vec{a}\,\vec{b} = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 3;$

б) $\vec{a}\,\vec{c} = -1 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = -15 + 12 - \frac{1}{2} = -3{,}5;$

в) $\vec{d}\,\vec{d} = 2^2 + 1^2 + 0 = 4 + 1 = 5;$

г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} - \vec{c}\,\vec{d} = -1\cdot 2 + 5\cdot 1 + 3\cdot 0 +$
$+ 2\cdot 3 + 0 + 0 + \frac{2}{2} - 3 + 0 = -2 + 5 + 6 + 1 - 3 = 7$

д) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} - \vec{b}\,\vec{c} - \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} = -\frac{1}{2} - 15 + 12 - \frac{3}{2} +$
$+ 0 - 8 + 2 - 5 + 6 = -10$

№ 507. а) $\angle ADB = 45^\circ = \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB}$,
$\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

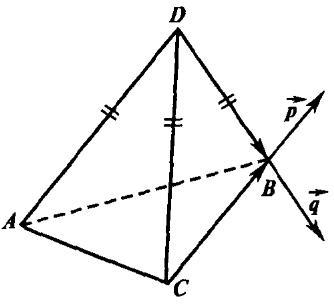


Рис. 299

б) Отложим из точки B векторы $\vec{p} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{DB}$ (рис. 299).

$\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CB} = \vec{p} \wedge \vec{q} = \angle DBC$.

Рассмотрим $\triangle DBC$.

$\angle BDC = 60^\circ$, $DC = DB$, значит, $\angle DCB = \angle CBD$ (треугольник равнобедренный).

$\angle DCB + \angle DBC = 120^\circ$, значит, $\angle DBC = \angle DCB = 60^\circ$.

в) $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} = \angle DBA$. $\triangle DBA$ — равнобедренный, значит,

$$\angle DAB = \angle DBA = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30.$$

№ 508. По определению проекции прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC, значит, она перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости.

а) $D_1D \perp D_1B$. $\overrightarrow{D_1D}$ — направляющий вектор прямой D_1D; $\overrightarrow{D_1B}$ — направляющий вектор прямой D_1B. Значит, $\overrightarrow{D_1B} \perp \overrightarrow{D_1D}$.

б) $\overrightarrow{DD_1}$ также направляющий вектор прямой D_1D, которая перпендикулярна плоскости ABC. $\overrightarrow{DD_1} \perp \overrightarrow{BC}$, поскольку $\overrightarrow{BC}$ лежит в плоскости ABC. $\overrightarrow{BC}$ — направляющий вектор прямой BC. Значит, $\overrightarrow{DD_1} \perp \overrightarrow{BC}$. Поскольку $\overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{DD_1}$, то угол φ_1 между $\overrightarrow{DD_1}$ и плоскостью ABC равен: $\varphi_1 = 180° - \varphi$, где $\varphi = 90°$ — угол между φ_1 и плоскостью ABC (см. а));

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$ — направляющие векторы прямых DA и BC. Если $DA \perp BC$, то $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$.

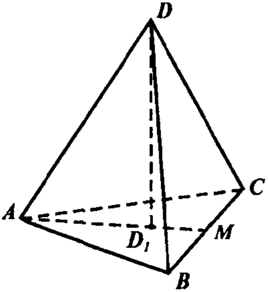


Рис. 300

Поскольку тетраэдр $ABCD$ — правильный, то его вершина D проектируется в центр треугольника ABC (рис. 300). Если мы проведем в $\triangle ABC$ высоту AM, то высота тетраэдра DD_1 пересечется с высотой $\triangle ABC$ в точке D_1.

1) $CB \perp AM$, т. к. AM — высота $\triangle ABC$;

2) $CB \perp DD_1$, т. к. DD_1 перпендикулярна плоскости ABC;

3) AM и DD_1 лежат в плоскости DD_1A_1 — прямые AM и DD_1 пересекаются. Из 1), 2) и 3) следует, что $\overrightarrow{CB}$ перпендикулярен плоскости DD_1C, значит, $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DA}$.

г) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ не перпендикулярны, т.к. прямые DC и D_1B не перпендикулярны. Если бы $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{D_1B}$, то по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $\overrightarrow{CD_1} \perp \overrightarrow{D_1B}$. Но это прямые, содержащие медианы правильного треугольника. Они не перпендикулярны.

№ 509. По формуле (2) п. 48 $\cos\varphi$, где φ — угол между прямыми, равен $|\cos\theta|$, где θ — угол между направляющими векторами этих прямых.

$\cos\varphi = |\cos \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|$.

а) $\overrightarrow{AB}\{1; 1; -2\}$; $\overrightarrow{CD}\{-3; 3; -1\}$ (см. п. 44).

$$\cos\varphi = \frac{|-3+3+2|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{19}} = \frac{2}{\sqrt{114}};$$

б) $\overrightarrow{AB}\{-5; 1; 1\}; \overrightarrow{CD}\{2; 2; -2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|-10+2-2|}{\sqrt{25+1+1}\cdot\sqrt{4+4+4}} = \frac{10}{3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{5}{9}.$$

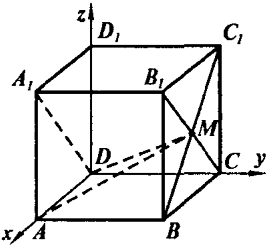


Рис. 301

№ 510. Примем, что ребро куба равно a. Следовательно, вершины куба имеют координаты:

$A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$,
$C(0; a; 0)$, $D(0; 0; 0)$,
$A_1(a; 0; a)$, $B_1(a; a; a)$,
$C_1(0; a; a)$, $D_1(0; 0; a)$.

$$\cos\varphi = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

а) $\overrightarrow{A_1D}\{-a; 0; -a\}$, $M(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{AM}\{\frac{a-2a}{2}; a; \frac{a}{2}\}$

$$\cos(\overrightarrow{A_1D} \wedge \overrightarrow{AM}) = \frac{\frac{-a(a-2a)}{2} - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2+a^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{-a^2+2a^2-a^2}{2}}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}} = 0; \quad \overrightarrow{A_1D} \wedge \overrightarrow{AM} = 90°.$$

б) $\overrightarrow{MD}\{-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}\}$, $\overrightarrow{BB_1}\{0; 0; a\}$,

$$\cos(\overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{BB_1}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{a^2}} = -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{6a^2}{4}}\cdot a} =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{a^2\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \ \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{BB_1} \approx 114°06'.$$

№ 511. Вычислите длины векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = |\overrightarrow{AC_1}|^2 \cos 0°$,

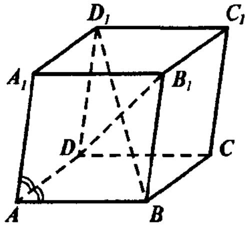


Рис. 302

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} +$
$+ \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} +$
$+ \overrightarrow{AA_1}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} +$
$+ \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \times$
$\times \cos 60° + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60° + 1^2 + 2 \cdot 1^2 \times$
$\times \cos 60° + 1^2 = 3 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6;$

$|\overrightarrow{AC_1}|^2 = 6; |\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BD_1}^2 = |\overrightarrow{BD_1}|^2 \cos 0°$,

$(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{BD_1}|^2$

$\overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \times$
$\times \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}^2 -$
$- 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60° - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60° + 1^2 - 2 \times$
$\times 1^2 \cdot \cos 60° + 1^2 = 3 - \frac{2}{2} = 2 = |\overrightarrow{BD_1}|^2;\ |\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}.$

№ 512. $DB \perp AC$; $AO = OC = 4$; $DO = OB = 3$.
$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $BN = CN = 2{,}5$.
$\cos \angle OBC = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{5}$, $\cos \angle OCB = \frac{OC}{BC} = \frac{4}{5}$.

а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ — направляющие векторы прямых MN и BC. Косинус угла между прямыми MN и BC равен $\cos(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{BC})$ (рис. 303).

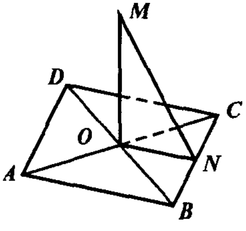


Рис. 303

1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}$,

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} +$

$+ \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BC} = -9 + 12{,}5 = 3{,}5$

$\cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{OB}) = -\cos\angle OBC = -\dfrac{3}{5}$;

$\cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MO}) = 0$, т.к. $\overrightarrow{MO}$ перпендикулярен плоскости ABC).

2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN})$,

$MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{36 + 6{,}25} = 6{,}5$,

где $ON = BN = NC = 2{,}5$, т.к. в прямоугольном треугольнике OBC точка N будет центром описанной окружности.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MN} = 5 \cdot 6{,}5 \cdot \cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN}) = 32{,}5 \cdot \cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN})$,

$32{,}5 \cdot \cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN}) = 3{,}5$; $\cos(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MN}) = \dfrac{3{,}5}{32{,}5} = \dfrac{7}{65}$;

б) $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}$,

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$, т.к. $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \dfrac{4}{5} = 16$, т.к.

$\cos(\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{OC}) = \cos\angle DCO = \cos\angle OCB = \dfrac{4}{5}$;

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CN} = 5 \cdot 2{,}5 \cdot \cos(180^\circ - \angle DCN) = 12{,}5(-\cos\angle DCN) =$
$= -12{,}5(\cos(2 \cdot \angle OCB) = -12{,}5(2\cos^2\angle OCB - 1) = -12{,}5 \cdot 2 \times$
$\times \dfrac{16}{25} + 12{,}5 = 12{,}5 - 16 = -3{,}5$;

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 + 16 - 3{,}5 = 12{,}5$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cos(\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{MN})$,

$\cos(\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{MN}) = \dfrac{12{,}5}{5 \cdot 6{,}5} = \dfrac{125}{325} = \dfrac{5}{13}$;

в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}+$
$+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BN}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$, т.к. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MO}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}=5\cdot3\cdot\cos\angle OBA=15\cos\angle OBC=15\cdot\frac{3}{5}=9$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BN}=5\cdot2{,}5\cdot\cos(180°-\angle ABN)=12{,}5(-\cos\angle ABN)=$
$=-12{,}5(\cos(2\cdot\angle OBC)=-12{,}5(2\cos^2\angle OBC-1)=-25\cdot\frac{9}{25}+12{,}5=$
$=12{,}5-9=3{,}5$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MO}=0$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB}=5\cdot3\cdot(-\frac{3}{5})=-9$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BN}=5\cdot2{,}5=12{,}5$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}=0+9+3{,}5-9-0+12{,}5=16$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cdot\cos(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{MN})$,

$\cos(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{MN})=\frac{16}{8\cdot6{,}5}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$;

г) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OC}+$
$+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MO}=0$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{MO}=0$, $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OC}=5\cdot4\cdot\frac{4}{5}=16$,

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OC}=5\cdot4\cos(180°-\angle OCB)=5\cdot4(-\frac{4}{5})=-16$,

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CN}=5\cdot2{,}5\cos(180°-2\angle OCB)=-3{,}5$ (см. пункт б),

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CN}=5\cdot2{,}5\cdot1=12{,}5$,

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MN}=0+0+16-16-3{,}5+12{,}5=-3{,}5+12{,}5=9$,

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{MN}=|\overrightarrow{DB}|\cdot|\overrightarrow{MN}|\cdot\cos(\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{MN})=6\cdot6{,}5\cdot\cos(\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{MN})$,

$\cos(\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{MN}|=\frac{9}{39}=\frac{3}{13}$.

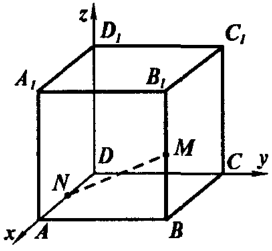


Рис. 304

№ 513. Примем, что сторона куба равна a. Введем прямоугольную систему координат. Синус угла между прямой NM и плоскостью $DD_1C_1C_1$ равен $|\cos(\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{DA})|$.

а) $N(\frac{3}{5}a; 0; 0)$; $A(a; 0; 0)$;
$A_1(a; 0; a)$; $B(a; a; 0)$;
$B_1(a; a; a)$; $M(a; a; \frac{3a}{5})$; $D(0; 0; 0)$;

$\overrightarrow{NM}\{\frac{2a}{5}; a; \frac{3a}{5}\}$; $\overrightarrow{DA}\{a; 0; 0\}$.

По формуле (2) п. 48:

$$|\cos(\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{DA})| = \frac{\left|\frac{2}{5}a^2+0+0\right|}{\sqrt{\frac{4}{25}a^2+a^2+\frac{9}{25}a^2}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{\frac{2}{5}a^2}{a^2\sqrt{\frac{4+25+9}{25}}} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{38}} = \frac{2}{\sqrt{38}}.$$

б) Синус угла между прямой MN и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$, равен $|\cos(\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{AA_1})|$.

$\overrightarrow{AA_1}\{0; 0; a\}$

$$|\cos(\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{AA_1})| = \frac{\left|0+0+\frac{3}{5}a^2\right|}{a\sqrt{\frac{38}{25}}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

№ 514. В задаче 460, которая решена в учебнике, доказано, что координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат равны $\{|\vec{a}|\cos\varphi_1; |\vec{a}|\cos\varphi_2; |\vec{a}|\cos\varphi_3\}$, где φ_1, φ_2 и φ_3 — углы, которые $\vec{a}$ составляете осями координат.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y, z — его координаты. Значит

$|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2 \cos^2\varphi_1 + |\vec{a}|^2 \cos^2\varphi_2 + |\vec{a}|^2 \cos^2\varphi_3 = |\vec{a}|^2 (\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3)$, $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$. Доказано.

№ 515. Проведем из точки C прямую CF, перпендикулярную плоскости AOB, в плоскости AOB проводим $FA \perp OA$, $FB \perp OB$. По теореме о трех перпендикулярах $CA \perp OA$ и $CB \perp OB$. Примем $OC = a$.

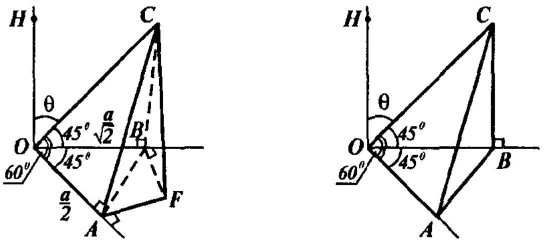


Рис. 305

Из $\triangle COA$ $OA = OC \cos 60° = \dfrac{a}{2}$, а из $\triangle COB$ $OB = OC \cos 45° = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Для $\triangle AOB$ запишем теорему косинусов:

$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot \mathrm{OA} \cos 45°$;

$$AB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}, \quad AB = \frac{a}{2}$$

Итак, $\triangle AOB$ — равнобедренный, $OA = AB$; $\angle ABO = 45°$, $\angle OAB = 90°$. — Тогда, отрезок FA совпадает с отрезком AB и точка C проектируется в точку B.

HO и CB перпендикулярны к плоскости ABO, значит они лежат в одной плоскости, $\angle HOB = 90°$, $\angle COB = 45°$, значит, искомый угол $\theta = 45°$.

№ 516. $CA \perp AB$.

Из точки A проведем $OA \perp AB$, $\angle CAO = \varphi$. Построим точку O в плоскости ABD, такую, что $OA \perp AB$ и $OD \parallel AB$ (рис. 306).

Не умаляя общности можно считать, что $AC = AO$, иначе рассмотрим точку C_1 на прямой AC, такую, что $AC_1 = AO$.

$OD \| AB$, а $OA \perp AB$, значит, $OD \perp OA$. По теореме о трех перпендикулярах $CO \perp OD$.

Примем $AD = a$. В $\triangle AOD$: $AO = a \sin \theta$, $OD = a \cos \theta$. В $\triangle OAC$ по теореме косинусов

$CO^2 = OA^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AO \cdot \cos \varphi$;

$CO^2 = a^2 \sin^2 + a^2 \sin^2 \theta - 2a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi = 2a^2 \sin^2 \theta \cdot (1 - \cos \varphi)$.

В прямоугольном $\triangle COD$

$CD^2 = OC^2 + OD^2$;

$CD^2 = 2\, a^2 \sin^2 \theta\, (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta$.

В $\triangle CAD$ по теореме косинусов искомый $\angle CAD = x$;

$CD^2 = CA^2 + AD^2 - 2 \cdot CA \cdot AD \cdot \cos x$.

$2a^2 \sin^2 \theta\, (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + a^2 - 2\, a^2 \sin \theta \cos x$,

$2 \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \varphi + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta \cos x$,

$\sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \varphi + \cos^2 \theta - 1 = -2 \sin \theta \cos x$,

$1 - 2 \sin^2 \theta \cos \varphi - 1 = -2 \sin \theta \cos x$,

$2 \sin^2 \theta \cos \varphi = 2 \sin \theta \cos x$,

$\sin \theta \neq 0$, поэтому $\sin \theta \cos \varphi = \cos x$.

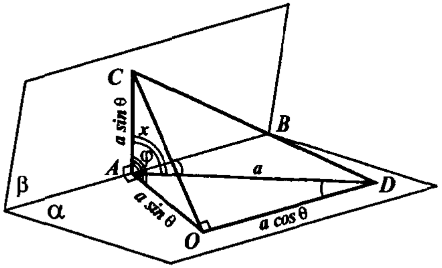


Рис. 306

№ 517. Через точку D проведем луч параллельно ребру AB; через точку A проведем луч, перпендикулярный ребру AB; эти лучи пересекаются в точке F. Таким образом, $AF \perp FD$. Проведем отрезок CF и отрезок CD. По теореме о трех перпендикулярах $CF \perp FD$ и $\triangle CFD$ — прямоугольный (рис. 307).

$AFDB$ — прямоугольник, $AF = BD = p$, $AB = FD = m$.

Для $\triangle CAF$ запишем теорему косинусов:

$CF^2 = AC^2 + AF^2 - 2 \cdot AC \cdot AF \cdot \cos 120° = n^2 + p^2 - 2np \cos (180° - 60°) = n^2 + p^2 + 2np \cdot \frac{1}{2} = n^2 + p^2 + np.$

В $\triangle CFD$: $CD^2 = CF^2 + FD^2$, $CD^2 = n^2 + p^2 + np + m^2$;
$CD = \sqrt{n^2 + p^2 + m^2 + np}$

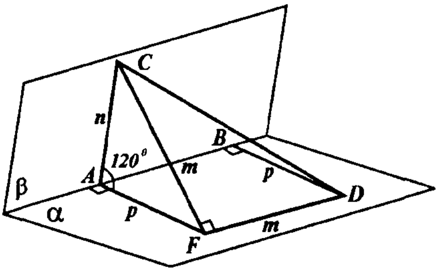


Рис. 307

№ 518. а) По условию $a \parallel \alpha$, значит все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости α. Предположим, что при движении a_1 не параллельна α_1 значит, a_1 пересекает α_1 то есть точки прямой a_1 находятся на различных расстояниях от плоскости α_1, а это противоречит тому, что при движении расстояние между точками сохраняется. Предположение неверно, $a_1 \parallel \alpha_1$.

б) Дано: Результат движения:

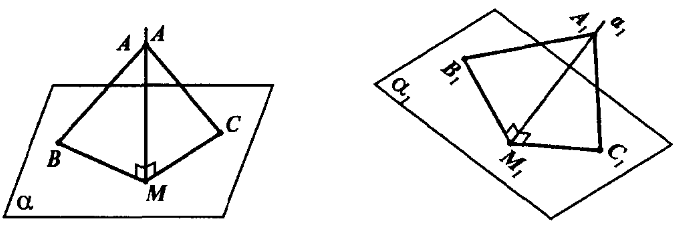


Рис. 308

Примем M — точка плоскости α, в которой а пересечет α. Выберем произвольные точки $A \in a$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, так, чтобы точки B, M, C не лежали бы на одной прямой. (рис. 308).

$\triangle AMB$ и $\triangle AMC$ — прямоугольные;

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$.

При движении $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ $AM = A_1M_1$.

$A_1M_1^2 = A_1B_1^2 - B_1M_1^2$, значит, $A_1M_1 \perp B_1M_1$.

$A_1M_1^2 = A_1C_1^2 - C_1M_1^2$, значит, $A_1M_1 \perp C_1M_1$.

Значит, A_1M_1 перпендикулярна плоскости α_1 по признаку перпендикулярности прямой к плоскости.

№ 519. $PQ \perp AO, AO \subset \alpha$. Выберем на ребре двугранного угла PQ точку O; проведем $OB \perp PQ$, $OB_1 \perp PQ$,.

$\angle BOA = \varphi$ (рис. 309).

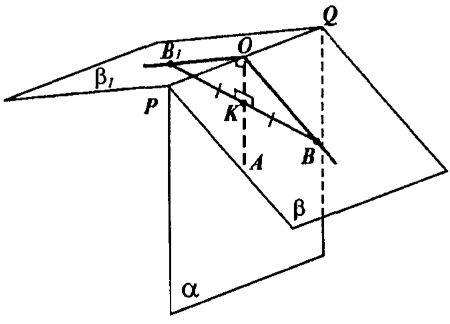


Рис. 309

При зеркальной симметрии точка $B \in \beta$ перейдет в точку $B_1 \in \beta_1$ при этом $\alpha \perp B_1B$ и проходит через середину отрезка B_1B: $BK = B_1K$.

$\triangle B_1OK = \triangle BOK$, они прямоугольные, $OK \perp PQ$, OK — общий катет, $B_1K = KB$ — по определению зеркальной симметрии.

Тогда, $\angle BOK = \angle B_1OK = \varphi$, поскольку линейные меры двугранных углов равны, то и соответствующие двугранные углы между плоскостями α и β, α и β_1 тоже равны.

№ 520. а) Выберем в плоскости α точку K и проведем через нее две пересекающиеся прямые a и b (рис. 310). При движении (параллельном переносе) прямая b переходит в параллельную ей прямую b_1, а прямая a — в параллельную ей прямую a_1. Поскольку a и b пересекаются, то a_1 и b_1 тоже пересекаются. Через a_1 и b_1 проведем плоскость α_1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Таким образом, $\alpha \parallel \alpha_1$. Доказано.

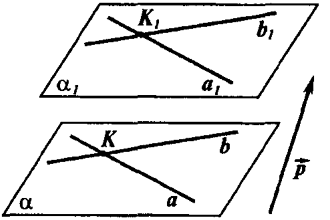


Рис. 310

б) Проведем на плоскости α прямую $a \parallel \vec{p}$ и $b \parallel \vec{p}$. Как известно (см. задачу 484), прямая, параллельная $\vec{p}$ или содержащая $\vec{p}$, отображается на себя.

Прямая b переходит в прямую b, а прямая a переходит в прямую a (рис. 311). Через параллельные прямые a и b проходит единственная плоскость α, которая таким образом отображается сама на себя. Доказано.

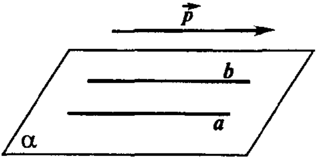


Рис. 311

Глава VI. Цилиндр, конус и шар

§ 1. Цилиндр

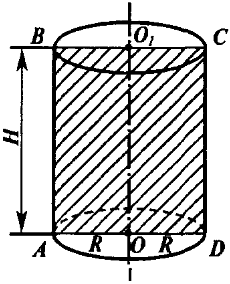


Рис. 312

№ 521. $R = 1{,}5$ м, $H = 4$ м (рис. 312).

$AC = BO = \sqrt{H^2 + (2R)^2} = \sqrt{H^2 + D^2} =$

$= \sqrt{16 + 9} = 5$ (м).

№ 522. AA_1B_1B — прямоугольник. Из $\triangle AB_1B$ (рис.313):

$$AB = 2R = 48\sin 60° = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$R = 12\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$H = B_1B = 48\cos 60° = \frac{48}{2} = 24 \text{(см)};$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi\,(12\sqrt{3})^2 =$$

$$= \pi \cdot 144 \cdot 3 = 432\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

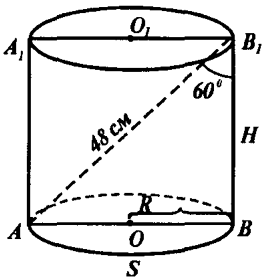


Рис. 313

№ 523. AA_1B_1B — квадрат, $AB_1 = 20$ см. $AB = H$ (рис. 314):

$$H\sqrt{2} = 20 \Rightarrow H = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2},$$

$$H = 10\sqrt{2},\ S_{осн} = \pi R^2,$$

где $R = \frac{1}{2}$, $AB = \frac{1}{2}$, $H = 5\sqrt{2}$,

$$S_{осн} = \pi(5\sqrt{2})^2 = 50\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

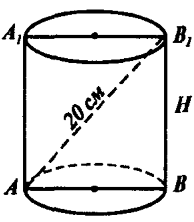


Рис. 314

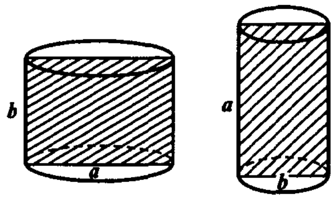


Рис. 315

№ 524. Осевые сечения путем наложения совпадут (то есть будут равны), но высоты цилиндров не обязательно равны: $a \neq b$ (рис. 315).

№ 525*. (Рис. 316)

$$\begin{cases} H \cdot 2R = 10 \\ \pi \cdot R^2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} R = \dfrac{10}{2H} \\ \pi\left(\dfrac{5}{H}\right)^2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} R = \dfrac{5}{H} \\ \dfrac{5\pi}{H^2} = 1 \end{cases};$$

$$H = \sqrt{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{-1}} = \sqrt{5\pi} \text{ (см)}$$

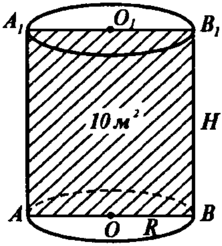


Рис. 316

№ 526. (рис. 317) $S_{осн} = \pi R^2$; $S_{сеч} = 2HR$

$$\frac{S_{осн}}{S_{сеч}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}; \ \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{2HR} \Rightarrow \frac{R}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{2R}{H}; \Rightarrow \frac{1}{2}\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$

$\angle B_1AB = 30^\circ$; $\angle A_1BA = 30^\circ$

$\angle\beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$;

$\angle ATA_1 = 60^\circ$.

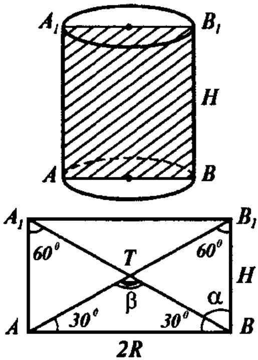


Рис. 317

№ 527. AB и O_1O — скрещиваются (рис. 318).

а) 1. Построим плоскость, содержащую AB так, чтобы эта плоскость была параллельна O_1O. AA_1BB_1 – прямоугольник. $\rho(AB, OO_1) =$
$= \rho$ (пл. AA_1B_1 до OO_1).

Проведем $OP \perp A_1B$, $\rho(AB, OO_1)$ — расстояние от прямой AB до прямой OO_1, $\rho(AB, OO_1) =$
$= OP = d$ (по условию).

2. $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм, $h = ?$

$A_1P = BP = \sqrt{r^2 - d^2}$, $A_1B = 2\sqrt{r^2 - d^2}$,

$A_1B = 2\sqrt{100 - 64} = 2 \cdot 6 = 12$ (дм),

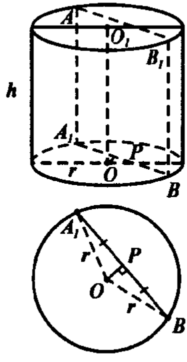


Рис. 318

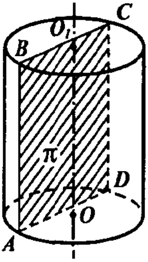


Рис. 319

$h = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{169-144} = 5$ (дм).

б) $h = 6$ см, $r = 5$ см, $AB = 10$ см, $d = ?$

$A_1B = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{100-36} = 8$ (см)

$A_1P = PB = 4$ (см).

Из $\triangle A_1OP$: $d = \sqrt{r^2 - A_1P^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (см).

№ 528. Примем π — секущая плоскость, плоскость $\pi \parallel O_1O$ (рис. 319). O_1O перпендикулярна плоскостям оснований, значит, прямые AB и CD, по которым π пересечет боковую поверхность цилиндра, тоже будут перпендикулярны плоскостям оснований. Отсюда $ABCD$ — прямоугольник. Точка A переходит в точку B и точка D переходит в точку C параллельным переносом согласно п. 53.

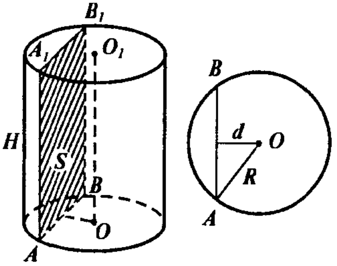


Рис. 320

№ 529. $H = 8$ см, $R = 5$ см. $D = 3$ см. $S = ?$

AA_1B_1B — прямоугольник (рис.320).

$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$;

$S = AB \cdot H = 2\sqrt{R^2 - d^2} \cdot H = 2\sqrt{25-9} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64$ (см^2).

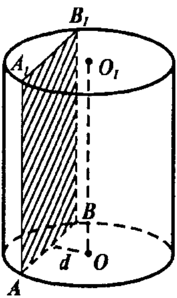


Рис. 321

№ 530. $H = 12$ см, $R = 10$ см, AA_1B_1B — квадрат (рис. 321). $d = ?$

$AB = H = 12$ см, $\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow$

$\frac{12}{2} = \sqrt{100-d^2}$; $6 = \sqrt{100-d^2}$; $36 = 100 - d^2$;

$d^2 = 64$, $d = 8$ (см).

№ 531. $H = 10$ дм, $S_{сеч} = 240$ дм^2, $d = 9$ дм. $R = ?$

$S = H \cdot AB$; $240 = 10 \cdot AB \Rightarrow AB = 24$ (дм).

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

$12 = \sqrt{R^2 - 81}$, $144 = R^2 - 81$, $225 = R^2$,

$R = 15$ (дм).

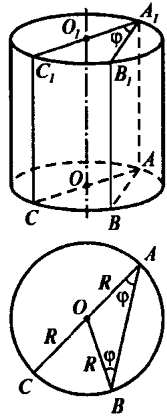


Рис. 322

№ 532. $\angle BAC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла CA_1AB (рис. 322).

Примем R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.

$S_1 = S_{A_1C_1CA} = 2RH.$

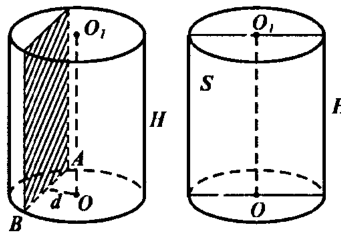
$$\frac{AB}{\sin(180°-2\varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi}, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi};$$

по теореме синусов из $\triangle AOB$ (рис. 322)

$AB = 2R\cos\varphi;$

$S_2 = S_{A_1B_1BA} = AB \cdot H = 2RH\cos\varphi;$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2RH}{2RH\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$



№ 533. (рис. 323)

$$S = 2RH \Rightarrow R = \frac{S}{2H};$$

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2}.$$

$$S_{сеч} = AB \cdot H = 2H\sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2} = \sqrt{S^2 - 4H^2d^2}.$$

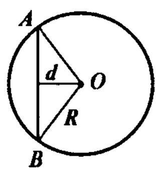


Рис. 323

№ 534. $S_{A_1B_1BA} = ?$

$\triangle AOB$ (рис. 324): $AO = OB = R$.

$BM = \frac{1}{2}AB = d\sqrt{3}$ т.к. $\frac{BM}{d} = \text{tg}60° = \sqrt{3}.$

$2BM = 2d\sqrt{3}$; $AB = 2d\sqrt{3}$; $S = 2dh\sqrt{3}$.

№ 535. $d = 2$см, $\angle AOB = 60°$ (рис. 325).

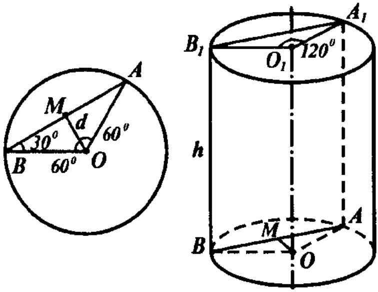


Рис. 324

$$\frac{BK}{OK}=\frac{BK}{2}=\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$BK=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$AB=2\cdot BK=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ (см)}.$$

AA_1B_1B — прямоугольник,

$$S=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 10\sqrt{3}=40\text{ (см}^2\text{)}.$$

№ 536. $\angle ACB$ — вписанный, поскольку $\angle ACB=90°$, то он опирается на диаметр.

Примем, что h — образущая, равная высоте цилиндра, R — радиус цилиндра (рис. 326)

Примем $BC=x$, следовательно

$AC=\sqrt{4R^2-x^2}$

$S_1=S_{BB_1C_1C}=S=xh=S_2=S_{ACC_1A_1}=h\cdot\sqrt{4R^2-x^2}$,

$xh=h\cdot\sqrt{4R^2-x^2} \Rightarrow x=\sqrt{4R^2-x^2}$,

$x^2=4R^2-x^2$, $2x^2=4R^2$,

$x^2=2R^2$, $x=R\sqrt{2}$ (см), $R=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

Площадь осевого сечения

$$S_3=2Rh=\frac{2xh}{\sqrt{2}}\text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_3=\sqrt{2}(xh)=S\sqrt{2}.$$

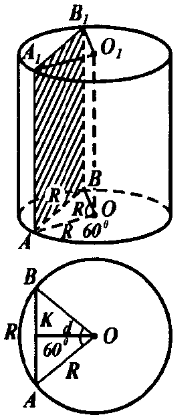


Рис. 325

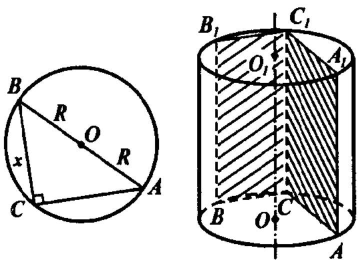


Рис. 326

№ 537.

$D=1$ м; $H=\pi D$.

$S_{бок}=?$

$S_{бок}=2\pi rH$,

$r=\dfrac{1}{2}D=\dfrac{1}{2}$ (м),

$H=\pi\cdot 1=\pi$ (м),

$S_{бок}=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\pi=\pi^2(\text{м}^2)$

№ 538. $S_{бок} = S$, $S_{осевого\ сеч} = ?$ (рис. 327)

$S_{бок} = 2\pi rh = S,\ 2rh = \dfrac{S}{\pi};$

$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot h = 2rh = \dfrac{S}{\pi}.$

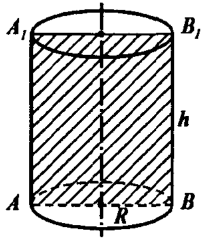


Рис. 327

№ 539. $D = 1{,}5$ м, $H = 3$ м, на 1 м^2 — 200 г краски (рис. 328).

$S_{цил} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 3 + 2\pi\left(\dfrac{1{,}5}{2}\right)^2 =$

$= \pi \cdot 4{,}5 + \pi \cdot \dfrac{2{,}25}{2} = 4{,}5\pi + 1{,}125\pi = 5{,}625\pi.$

Количество краски: $0{,}2 \cdot 5{,}625\pi = 1{,}125\pi$ (кг).

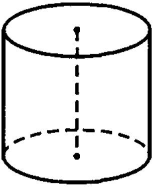


Рис. 328

№ 540. (рис. 329). $H - R = 12$,

$S_{полн} = 2\pi R(R + H) = 288\pi$ (см^2), $R = ?$, $H = ?$

$\begin{cases} H - R = 12 \\ 2\pi R(R + H) = 288\pi \end{cases}; \quad \begin{cases} H - R = 12 \\ R(R + H) = 144 \end{cases}$

$R^2 + R(12 + R) = 144;\ 2R^2 + 12R - 144 = 0;\ R^2 + 6R - 72 = 0;$

$R_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 72} = -3 \pm 9.$

$R > 0$, значит, $R = 6$ (см),

$H = 12 + 6 = 18$ (см).

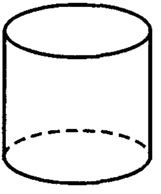


Рис. 329

№541. (рис. 330)

$d = 20 = 0{,}2$м, $S_{бок} = 2\pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot d \cdot l$

$S_{шв} = \dfrac{2{,}5\pi d \cdot l}{100};\ S_{бок} + S_{шв} = \pi \cdot 0{,}2 \cdot 4 +$

$+ \dfrac{2{,}5\pi \cdot 0{,}2 \cdot 4}{100} = 0{,}8\pi + \dfrac{0{,}8\pi \cdot 2{,}5}{100} =$

$= 0{,}8\pi\left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right) = 0{,}8\pi\ (1 + 0{,}025) =$

$= 0{,}8\pi \cdot 1{,}025 = 0{,}82\pi$ (м^2).

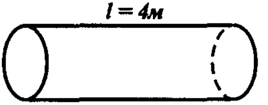


Рис. 330

№ 542. (рис. 331) $S_{осн} = S;\ S = \pi R^2$.

Примем высота цилиндра h. $\triangle AA_1B_1$.

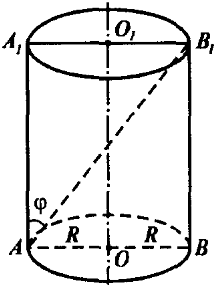


Рис. 331

$$\frac{2R}{h} = \operatorname{tg}\varphi,\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}},\ h = \frac{2R}{\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot 2\pi\varphi\sqrt{\frac{S}{\pi}} =$$

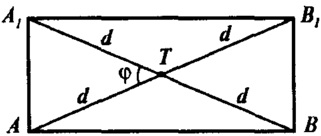
$$= 4\pi \operatorname{ctg}\varphi \frac{S}{\pi} = 4S \operatorname{ctg}\varphi$$

№ 543. (рис. 332) $S_{бок} = ?\ S_{полн} = ?$

$S_{бок} = 2\pi Rh,\ S_{полн} = 2\pi R(h + R),$

$$AB = 2\pi R,\ R = \frac{AB}{2\pi}. \qquad (1)$$

$$h = AA_1. \qquad (2)$$



Диагонали прямоугольника равны и в точке T делятся пополам.

$\triangle ATA_1$. По теореме косинусов:

$$AA_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\cos\varphi =$$

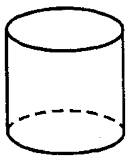


Рис. 332

$$= \frac{d^2}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{d^2}{2}\ 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = d^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$AA_1 = \sqrt{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = d\sin\frac{\varphi}{2},\ AA_1 = h,$$

Рассмотрим $\triangle ATB$. По теореме косинусов:

$$AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\cos(180° - \varphi) = \frac{2d^2}{4} +$$

$$+ \frac{2d^2}{4}\cos\varphi = \frac{d^2}{2}(1 + \cos\varphi) = \frac{d^2}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2} = d^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$AB = \sqrt{d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = d\cos\frac{\varphi}{2};\ R = \frac{AB}{2\pi} = \frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi};$$

$$S_{бок} = 2\pi\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi}\cdot d\sin\frac{\varphi}{2} = d^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}d^2\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}d^2\sin\varphi;\ S_{осн} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2};\ S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

$$S_{полн} = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi + 2 \cdot \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2}\sin\varphi + \frac{d^2}{2\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2} =$$
$$= \frac{d^2}{2}\left(\sin\varphi + \frac{1}{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Если принять за основание AA_1, за высоту AB, то $S_{бок}$ не изменится.

$$S_{бок} = ?\ \ R = \frac{AA_1}{2\pi} = \frac{d\sin\frac{\varphi}{2}}{2\pi};\ \ S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi};$$

$$S_{полн} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + 2 \cdot \frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{d^2}{2\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

№ 544. (рис. 333) $S_{осн} = \pi R^2$.

Сторона квадрата $\frac{d}{\sqrt{2}}$. $\frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R \Rightarrow$

$$R = \frac{d}{2\sqrt{2}\cdot\pi};\ S_{осн} = \pi\frac{d^2}{8\cdot\pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}$$

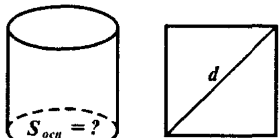


Рис. 333

№ 545. $R = OA = a$, $H = AA_1 = a$ (рис. 334).

а) $S_{осевого\ сеч} = 2RH = 2aa = 2a^2$; б) $S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi aa = 2\pi a^2$

в) $S_{полн} = 2\pi a^2 + 2(\pi a^2) = 4\pi a^2$,

№ 546. а) 1. $S_{бок} = 2\pi ba$; 2. $S_{бок} = 2\pi ab$ (рис. 335); $S_{бок}$ одинакова.

б) $S_{полн} = 2\pi ba + 2\pi b^2 = S_1$, $S_2 = S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)} = \frac{b}{a}$$

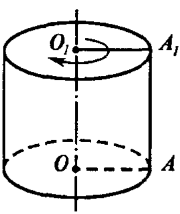


Рис. 334

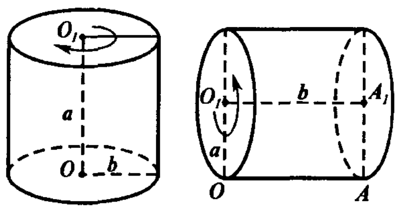


Рис. 335

§ 2. Конус

№ 547. $SO = h = 15$ см, $R = OA = 8$ см, $l = AS = ?$

$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = 17$ см (рис. 336).

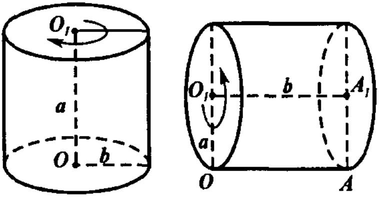


Рис. 336

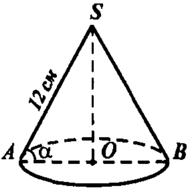


Рис. 337

№ 548. (рис. 337) а) $\alpha = 30°$.

$R = AO = AS\cos\alpha = AS\cos 30° = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см)

$S_{осн} = \pi R^2 = \pi(6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 \cdot \pi = 108\pi$ (см^2);

б) $\alpha = 45°$. $R = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2}$ (см),

$S_{осн} = \pi\,(6\sqrt{2})^2 = 72\pi$ (см^2);

в) $\alpha = 60°$. $R = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (см). $S_{осн} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (см^2)

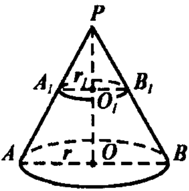


Рис. 338

№ 549. $PO = h = 8$ дм (рис. 338).

а) $S_1 = \frac{1}{2}S_{осн}$, $PO_1 = ?$ б) $S_1 = \frac{1}{4}S_{осн}$, $PO_1 = ?$

Согласно п. 57 плоскость, параллельная основанию (она же перпендикулярная к его оси), пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части.

$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$, $\frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1A_1}{OA}$, $\frac{PO_1}{8} = \frac{r_1}{r}$.

$$S_{кр} = \pi r^2.\ r^2 = \frac{S_{кр}}{\pi},\ \frac{PO_1}{8} = \frac{\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S_{осн}}{\pi}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_{осн}}}$$

б) $PO_1 = 8\sqrt{\dfrac{S_1}{S_{осн}}} = 8\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ (дм);

в) $PO_1 = 8\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{8}{2} = 4$ (дм).

№ 550. $\angle APB = 90°$, $AO = OB = 5$ см, $S_{\triangle APB} = ?$

$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP \cdot PB = \frac{1}{2}AP^2$, (рис. 339)

$2AP^2 = AB^2$ (по теореме Пифагора), $AB = 10$ см.

$AP^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 4 = 50$ (см^2),

$S_{\triangle APB} = \dfrac{50}{2} = 25$ (см^2).

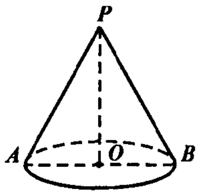


Рис. 339

№ 551. а) $\angle BPC = 30°$, $PC = PB = 2r$ (рис. 340).

$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}PB \cdot PC \cdot \sin 30°$,

$S_{\triangle BPC} = \dfrac{2r \cdot 2r}{2 \cdot 2} = r^2$ (кв. ед.).

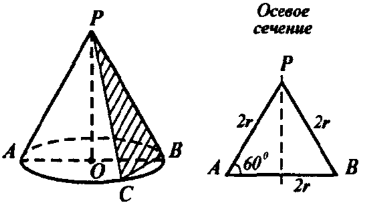


Рис. 340

б) $\angle BPC = 45°$, $S_{\triangle BPC} = \dfrac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = r^2\sqrt{2}$ (кв. ед.)

в) $\angle BPC = 60°$ $S_{\triangle BPC} = \dfrac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = r^2\sqrt{3}$ (кв. ед.)

№ 552. $PO = h$, $\angle APO = 60°$, $AP \perp PB$, PB — образующая. $S_{\triangle APB} = ?$ (рис. 341).

1) $AP = 2h$, т. к. PO — катет, лежащий против угла в 30°;

2) $AP = PB = 2h$ — как образующие конуса;

3) $\triangle APB$ прямоугольный.

$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP \cdot PB$

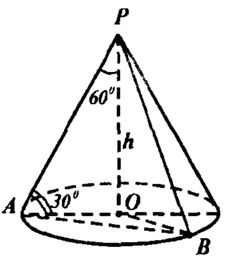


Рис. 341

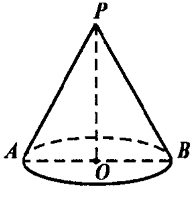


Рис. 342

$$S_{\triangle APB} = \frac{2h \cdot 2h}{2} = 2h^2 \text{ (кв.ед.)}$$

№ 553. $\triangle APB$ — осевое сечение. $S_{\triangle APB} = 6$ дм^2, $S_{осн} = 8$ дм^2, $h = PO = ?$ (рис. 342).

1) $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} PO \cdot AB$, $AB = 2r$.

$$S_{\triangle APB} = \frac{PO \cdot 2r}{2} = rh,\ 6 = rh \quad (1)$$

2) $S_{осн} = \pi r^2, 8 = \pi r^2;$ (2)

3) из (2) $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$; из (1)

$$h = \frac{6}{r} = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ (дм)} = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}.$$

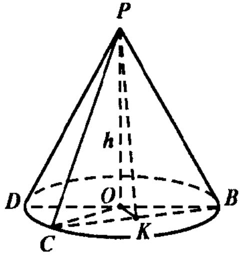


Рис. 343

№ 554. BC — хорда, стягивает угол а) в 60°; б) в 90°. $S_{сеч} = ?$ (рис. 343).

Проведем $OK \perp CB$ и соединим P и K. По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp CB$. PK — высота $\triangle BPC$.

$$S_{сеч} = S_{BPC} = \frac{1}{2} CB \cdot PK.$$

а) $BC = r$, т. к. $\triangle BOC$ — правильный, т. к. $\angle BOC = 60°$.

Из $\triangle POK$: $PK = \sqrt{PO^2 + OK^2}$, или из $\triangle CPK$: $PK = \sqrt{CP^2 - CK^2}$.

$$PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4l^2 - r^2}{4}} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2};$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{4l^2 - r^2}.$$

б) $CB = r\sqrt{2}$, $PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}};$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2l^2 - r^2}.$$

№ 555. $OP = h = 10$ см, BC — хорда, $\angle COB = 60°$, (рис. 344) двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью BPC равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

$S_{\triangle BPC} = ?$

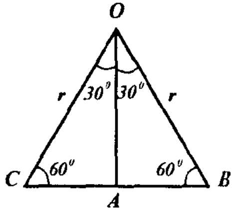


Рис. 344

Построим линейный угол данного двугранного угла. Проводим $OA \perp BC$, строим отрезок PA. По теореме о трех перпендикулярах $PA \perp BC$.

$\left.\begin{matrix} OA \perp BC \\ PA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle PAO$ — линейный угол двугранного угла.

а) $\angle PAO = 30°$. Из $\triangle POA$:

$PA = \dfrac{h}{\sin 30°} = 2h$, из $\triangle COB$: $BC = r = 2CA$.

$\dfrac{CA}{OA} = \text{tg } 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $CA = \dfrac{OA}{\sqrt{3}}$

Из $\triangle POA$: $\dfrac{h}{OA} = \text{tg}30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OA = h\sqrt{3}$

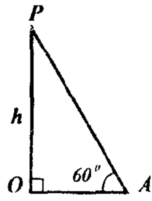


Рис. 345

Итак, $CA = \dfrac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h$, $BC = 2h$. $S_{сеч} = \dfrac{1}{2} BC \cdot PA$,

$S_{сеч} = \dfrac{1}{2} 2h \cdot 2h = 2h^2$(кв. ед.). $S_{сеч} = 2 \cdot 100 = 200$ (см^2).

б) (рис. 345). $\angle PAO = 45°$.

$PA = h\sqrt{2}$ (см) $= 10\sqrt{2}$ (см). $OA = h$, $CA = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$, $BC = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$

$S_{сеч} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h\sqrt{2} = \dfrac{h^2}{3} \cdot \sqrt{6} = \dfrac{100}{3}\sqrt{6}$ (см^2).

в) (рис. 345). $\angle PAO = 60°$.

$\dfrac{h}{OA} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$, $OA = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$, $CA = \dfrac{OA}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{h}{3}$ (см)

$CB = \dfrac{2h}{3}$ (см), $PA = \dfrac{h}{\sin 60°} = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$ (см).

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2h^2}{3\sqrt{3}} = \frac{2h^2}{9} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{сеч} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 100}{9} = \frac{200\sqrt{3}}{9} \text{ (см}^2\text{)}.$$

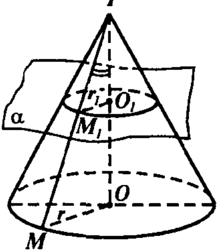


Рис. 346

№ 556. Плоскость α перпендикулярна оси конуса PO (рис. 346). Доказать, что:

1) Сечение конуса плоскостью α будет кругом с центром в точке O_1;

2) $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$

Выберем произвольную точку $M_1 \in \alpha$ и точку $M_1 \in O_1(r_1)$. (на плоскости α строим окружность с центром в точке O_1 и радиуса r и на этой окружности выбираем произвольную точку M_1).

Через точку P и точку M_1 проводим луч PM_1, который пересечет плоскость основания конуса в точке M. $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$ как прямоугольные, имеющие одинаковый острый угол.

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PM_1}{PM};$$

$OM = \frac{PO \cdot O_1M_1}{PO_1} = \frac{PO}{PO_1} \cdot r_1 = \text{r} = const$ при заданной точке P и окружности O_1 (r_1).

<u>Вывод:</u> точка M — произвольная, значит, все точки луча PM_1 пересекающие плоскость основания конуса, лежат на окружности $O(r)$, то есть равноудалены от некоторой точки O на расстояние r, что видно из формулы. По определению PM — образующая конуса.

4) Образующие составляют коническую поверхность, поэтому докажем, что если $\forall M_1 \in \alpha$ и $M_1 \in PM$, то $M_1 \in O$ (r_1).

5) $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$, где PM — образующая.

$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} \cdot r = r_1 = const$ при заданной точке P и r.

<u>Вывод</u>: эта окружность будет сечением боковой поверхности, а круг, границей которого является O_1 (r_1), будет сечением конуса плоскостью α.

№ 557. Из рисунка к задаче 556:

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{PO_1}{PO_2}, \text{ или } \frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO_2}; \quad S_1 = \pi r_1^2;$$

$$S_2 = \pi r_2^2; \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{PO_1^2}{PO_2^2}; \frac{\frac{S_1}{\pi}}{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{PO_1^2}{PO_2^2}$$

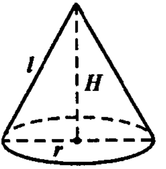


Рис. 347

№ 558. (рис. 347). 1) $S_{бок} = \dfrac{\pi l^2\alpha}{360°} = \pi rl;$

2) $l = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (см);

3) $\dfrac{\pi \cdot 25 \cdot \alpha}{360°} = \pi \cdot 3 \cdot 5, \Rightarrow \alpha = \dfrac{360° \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5}{\pi \cdot 5 \cdot 5} = 72° \cdot 3 = 216°.$

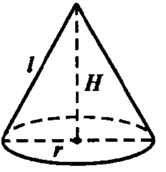


Рис. 348

№ 559. (рис. 348). $r = l\cos 60° = \dfrac{l}{2}, r = \dfrac{l}{2}.$

$S_{бок} = \dfrac{\pi l^2\alpha}{360°} = \pi rl$. Найдем градусную меру дуги α:

$$\alpha = \frac{360° \cdot \pi \cdot l \cdot l}{\pi \cdot l^2 \cdot 2} = 180°.$$

№ 560. (рис. 349). Примем $\angle APO = x$.

$x = ?$

$\dfrac{\pi l^2\alpha}{360°} = \pi rl$, здесь $l = AP, r = OA$

$$r = \frac{\pi l^2\alpha}{360° \cdot \pi \cdot l} = \frac{\alpha l}{360°}$$

а) $r = \dfrac{180° \cdot l}{360°} = \dfrac{l}{2}$, б) $r = \dfrac{90° \cdot l}{360°} = \dfrac{l}{4};$

в) $r = \dfrac{60° \cdot l}{360°} = \dfrac{l}{6}$

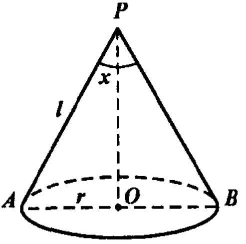


Рис. 349

Из $\triangle APO$: $\sin x = \dfrac{AO}{PA} = \dfrac{r}{l}.$

а) $\sin x = \dfrac{1}{2}, \ x = 30°, \ \angle APB = 2x = 60°;$

б) $\sin x = \frac{1}{4}$, $x = \arcsin\frac{1}{4}$, $\angle APB = 2\arcsin\frac{1}{4}$;

в) $\sin x = \frac{1}{6}$, $x = \arcsin\frac{1}{6}$, $\angle APB = 2\arcsin\frac{1}{6}$.

№ 561. $r = 9$ см, $\alpha = 120°$. $H = ?$ $S_{осн} = ?$

$\frac{\pi l^2\alpha}{360°} = \pi rl$, $\frac{\pi l^2\cdot 120°}{360°} = \pi\cdot 9\cdot l$, $\frac{\pi l^2}{3} = 9\pi l$, отсюда $l = 27$ (см);

$H = \sqrt{l^2 - r^2}$,

$H = \sqrt{27^2 - 9^2} = \sqrt{9\cdot 3\cdot 9\cdot 3 - 9\cdot 9} = \sqrt{9\cdot 9(9-1)} = 9\sqrt{8} = 18\sqrt{2}$ (см);

$S_{осн} = \pi r^2 = \pi\cdot 81 = 81\pi$ (см^2)

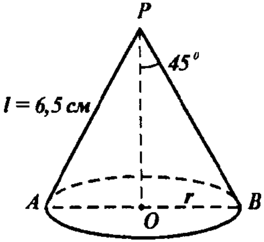


Рис. 350

№ 562. $\triangle AOP$ — равнобедренный (рис. 350);

$r = OA = l\sin 45° = \frac{6,5\cdot\sqrt{2}}{2}$;

$S_{бок} = \pi rl$,

$S_{бок} = \pi\frac{6,5\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot 6,5 = 21,125\pi\sqrt{2}$ (см^2).

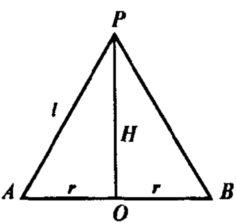


Рис. 351

№ 563. $H = 1,2$ см, $S_{сеч} = 0,6$ см^2. $S_{полн} = ?$ (рис. 351).

$S_{полн} = \pi(l + r)r$;

$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AB\cdot PO = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot H = r\cdot H$,

$0,6 = r\cdot 1,2$, $r = \frac{0,6}{1,2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

$l = \sqrt{H^2 + r^2}$,

$l = \sqrt{1,44 + 0,25} = \sqrt{1,69} = 1,3$ (см);

$S_{полн} = \pi\cdot 0,5(0,5 + 1,3) =$
$= \pi\cdot 0,5\cdot 1,8 = 0,9\pi$ (см^2).

№ 564. По теореме синусов (рис. 352):

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r \Rightarrow r = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $\frac{r}{l} = \cos\varphi \Rightarrow l = \frac{r}{\cos\varphi}$,

$$l = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\varphi};$$

$$S_{полн} = \pi(l + r)r;$$

$$S_{полн} = \pi \cdot \frac{a}{2\sin\alpha}\left(\frac{a}{2\sin\alpha} + \frac{a}{2\sin\alpha\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\pi a}{2\sin\alpha} \cdot \frac{a}{2\sin\alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{\pi a^2(1 + \cos\varphi)}{4\sin^2\alpha\cos\varphi}.$$

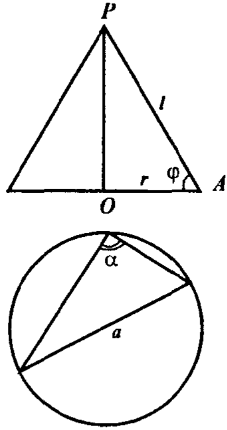


Рис. 352

№ 565. (рис. 353). При вращении получим коническую поверхность.

$S_{бок} = \pi r l$, $S_{полн} = \pi r(l + r)$.

1) $l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ (см);

2) $S_{бок} = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi$ (см^2);

3) $S_{полн} = \pi \cdot 8(10 + 8) = 18 \cdot 8\,\pi = 144\pi$ (см^2).

№ 566. (рис. 354). $S_{пов} = 2S_{бок}$; $S_{бок} = \pi r l$.

1) $r = m\sin\varphi$, $l = m$;

$S_{бок} = \pi m \sin\varphi \cdot m = \pi m^2 \sin\varphi$;

2) $S_{пов} = 2\pi m^2 \sin\varphi$.

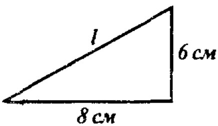


Рис. 353

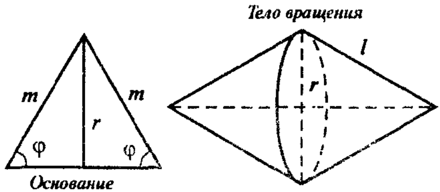


Рис. 354

№ 567. (рис. 355).

$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см, $H = 4$ см. l = ?

Проведем $A_1M \perp OA$.

$A_1M = H = 4$ см, $AM = 3$ см,

$A_1A = \sqrt{H^2 + AM^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ (см).

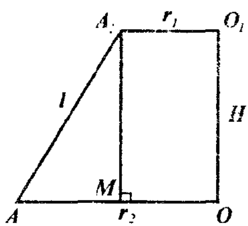


Рис. 355

№ 568. Проведем $A_1M \perp OA$ (рис. 356).

$A_1M = O_1O = H$ см, $AM = 6$ см.

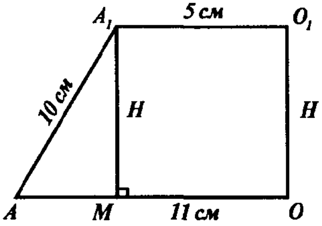


Рис. 356

а) $H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} =$
$= 8$ (см);

б) $S_{сеч} = S_{трапеции}$

$$S_{AA_1O_1O} = \frac{5+11}{2} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ (см}^2\text{)}.$$

№ 569. Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция с основаниями $2r$ и $2R$. (рис. 357). Найдем высоту трапеции $OO_1 = H$. $AK = R - r$, $\triangle ABK$ — прямоугольный равнобедренный,

$$BK = O_1O = H = R - r.$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2$$

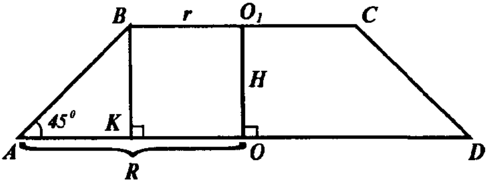


Рис. 357

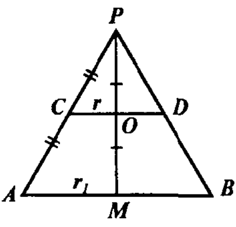


Рис. 358

№ 570. (рис. 358). $S_{бок} = 80$ см^2, $PO = OM$, $CD \perp PM$. $S_{бок.\ усеч.\ кон.} = ?$

$S_{бок.\ усеч.\ кон.} = \pi(r + r_1)l$, где $r = OC$, $r_1 = MA$, $l = CA$. CO – средняя линия в $\triangle APM$, $AC = CP$.

$S_{бок} = \pi r_1 AP$. Примем $AC = CP = l$, следовательно

$\pi r_1 \cdot 2l = 80$, или $\pi r_1 l = 40$ (1)

$\triangle POC \sim \triangle PMA$.

$$\frac{PO}{PM} = \frac{OC}{MA} = \frac{PC}{PA}; \quad \frac{r}{r_1} = \frac{l}{2l} \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{r_1}{2} \qquad (2)$$

Из (1) $l = \dfrac{40}{\pi r}$; $S_{бок} = \pi\left(\dfrac{r_1}{2} + r_1\right)\cdot\dfrac{40}{\pi r_1} = \dfrac{\pi\cdot 3r_1\cdot 40}{2\pi r_1} = 60$ (см^2)

№ 571. (рис. 359). Примем $CB = r$, $AD = r$, $l = DC$, $H = BA$.

Проведем $CM \perp DA$.

Из $\triangle CMD$: $DM = 3\sqrt{2}\cos 45° =$
$= \dfrac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 3$ (см);

$DA = r = 3 + 4 = 7$(см).

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$,

$S_{бок} = \pi(4 + 7)3\sqrt{2} = \pi\cdot 11\cdot 3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\pi$;

$S_{полн} = S_{бок} + \pi(r_1^2 + r^2)$,

$S_{полн} = 33\sqrt{2}\pi + \pi(16 + 49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi$.

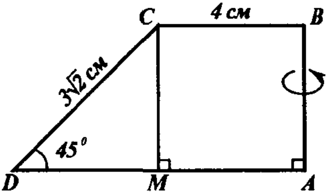


Рис. 359

№ 572. (рис. 360). 1 м^2 — 150 г, $N = 100$ ведер.

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$, $S_{осн} = \pi r_1^2$,

$S_{полн} = 2[\pi(10 + 15)30 + \pi\cdot 10^2] =$
$= 2[\pi\cdot 25\cdot 30 + 100\pi] = 2\pi[750 + 100] =$
$= 850\cdot 2\pi = 1700\pi$ (см^2)

1 м = 100 см, 1 м^2 = 10^4 см^2, xм^2 = 1700π см^2,

$x = \dfrac{1700\pi}{100\cdot 100} = 0{,}17\pi$ (м^2).

$S = 0{,}17\pi$ (м^2), $100S = 17\pi$ (м^2).

Ответ: расход краски составит: $0{,}15\cdot 17\pi = 2{,}55\pi$ (кг) ≈ 8 (кг).

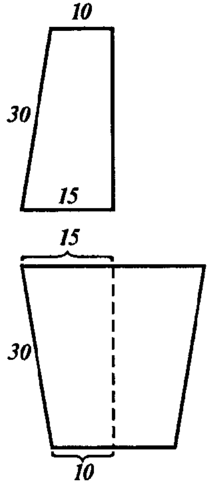


Рис. 360

§ 3. Сфера

№ 573. Через три точки проходит единственная плоскость, в частности, через точки A, B и O. Сечением будем окружность, проходящая через центр сферы.

а) Проведем радиусы OA и OB. $\triangle AOB$ — равнобедренный, OM — медиана (рис. 361). Тогда OM также и высота, то есть $OM \perp AB$.

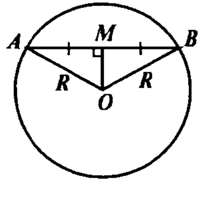


Рис. 361

б) Если $OM \perp AB$, то $\triangle OMA = \triangle OMB$. ($OM$ — общий катет, $OA = OB = R$). Тогда $MA = MB$, точка M — середина AB. Утверждение доказано.

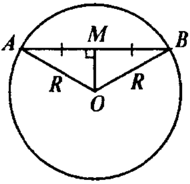


Рис. 362

№ 574. Проведем секущую плоскость через точки A, B и O (рис. 362). Сечение сферы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке O. OM — медиана в равнобедренном $\triangle AOB$, поэтому $OM \perp AB$.

а) $R = 50$ см, $AB = 40$ см, найти OM.

$AM = \frac{1}{2}AB = 20$ (см). Из $\triangle AOM$:

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} = \sqrt{2500 - 400} = \sqrt{2100} = \sqrt{21 \cdot 100} = 10\sqrt{21} \text{ (см)};$$

б) $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм, найти OM.

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ (мм)};$$

в) $R = 10$ дм, $OM = 60$ см, найти AB.

$OM = 60$ см $= 6$ дм.

$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ (дм).

$AB = 2AM = 16$ (дм);

г) $R = a$, $OM = b$, найти AM.

$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

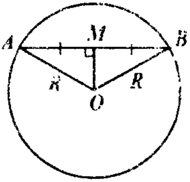


Рис. 363

№ 575. (рис. 363). Через точки A, B и точку O — центр сферы проведем плоскость. В сечении будет окружность радиуса R, проходящая через центр сферы. В равнобедренном $\triangle OAB$ проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, значит, OM — медиана.

$MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.

$$OM = \sqrt{OM^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

№ 576. а) $A(2; -4; 7)$, $R = 3$. Согласно формуле (1) п. 59
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ имеем:
$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$;

б) $A(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{2}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;

в) $A(2; 0; 0)$, $R = 4$, $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

№ 577. а) $A(-2; 2; 0)$, $N(5; 0; -1)$.

Согласно формуле (1) п. 59 уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$ имеем вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = R^2$.

В данном случае оно имеет вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2$. Т.к. точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:

$(5 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (-1)^2 = R^2$, $49 + 4 + 1 = R^2$, $R^2 = 54$, поэтому уравнение сферы имеем вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54$;

б) $A(-2; 2; 0)$, $N(0; 0; 0)$. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.
$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2$.
$(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + 0^2 = R^2$, $4 + 4 = R^2$, $R^2 = 8$.
Уравнение имеет вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8$;

в) $A(0; 0; 0)$, $N(5; 3; 1)$.
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = R^2$,
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $5^2 + 3^2 + 1^2 = R^2$, $25 + 9 + 1 = 35$, $R^2 = 35$.
Уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

№ 578. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где R — радиус сферы, $a(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки С — центра сферы. В данном случае $x - x_0 = x$; $y - y_0 = y$; $z - z_0 = z$, поэтому $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$, а $R = \sqrt{49} = 7$. Итак, координаты центра $(0; 0; 0)$, радиус равен 7.

б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$.
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$,
$x - 3 = x - x_0$, $x_0 = 3$;
$y + 2 = y - y_0$, $y_0 = -2$;
$z - z_0 = z$, $z_0 = 0$;
$2 = R^2$, $R = \sqrt{2}$.
Координаты центра сферы $(3; -2; 0)$, радиус равен $\sqrt{2}$.

№ 579. а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$,

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) + y^2 + z^2 - 4 = 0,$
$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ — уравнение сферы.
Координаты центра (2; 0; 0), $R = 2$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24,$
$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + z^2 = 24,$
$x^2 + (y^2 - 1)^2 + z^2 = 25 = 5^2.$
Координаты центра (0; 1; 0), R = 5;

в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3,$
$(x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 + z^2 = 3,$
$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 4 = 2^2$ – уравнение сферы с центром (1; 0; 0), $R = 2$;

г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2,5,$
$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + (y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + (z^2 - 2z + 1) - 1 =$
$= 2,5$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = 2,5 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 2,5 + \frac{10}{4} + 1 =$
$= 2,5 + 2,5 + 1 = 6 = (\sqrt{6})^2,$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = (\sqrt{6})^2$ — уравнение сферы; в точке с координатами $(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1)$ расположен ее центр, $R = \sqrt{6}$.

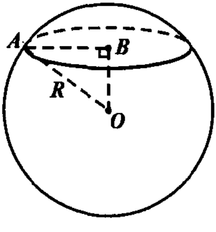


Рис. 364

№ 580. (рис. 364). Сечение шара плоскостью есть круг. OB перпендикулярен плоскости сечения, $OB = 9$ дм, $OA = R$. Из прямоугольного $\triangle OBA$:

$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - OB^2} =$
$= \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40$ (дм).

Площадь круга в сечении:
$S = \pi(AB)^2 = \pi\, 40^2 = 1600\pi$ (дм^2).

№ 581. Плоскость $\triangle ABC$ пересекает сферу с центром O по окружности; эта окружность описана около $\triangle ABC$. Из точки O проведем OK, перпендикулярный плоскости ABC, OK — искомое расстояние, точка K — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Соединим точку K с одной из вершин $\triangle ABC$, например с точкой A, проведем радиус в точку A (рис. 365).

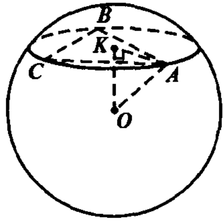


Рис. 365

$\triangle OKA$ — прямоугольный, из него по теореме Пифагора находим OK:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}.$$

Вычислим длину AK.

$$AK = \frac{AB \cdot CB \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}},$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - CA)}$$

$$p = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12,$$

$$S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$AK = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 4} = 5 \text{ (см)},$$

$$OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}.$$

№ 582. Плоскость прямоугольника пересечет сферу по окружности, которая будет описанной окружностью около прямоугольника $ABCD$. Ее центр находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 366). Примем O — центр сферы, следовательно OK перпендикулярен плоскости $ABCD$, OK — искомое расстояние.

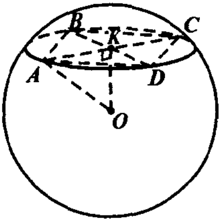


Рис. 366

Из прямоугольного треугольника $\triangle OKA$ найдем OK:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{R^2 - AK^2}.$$ AK равно половине диагонали $ABCD$.

$$AK = \frac{16}{2} = 8 \text{ (см)},$$

$$OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ (см)}.$$

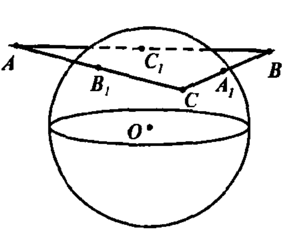


Рис. 367

№ 583. (рис. 367). Равнобедренный $\triangle PQR$ как бы положили на сферу, он касается сферы в точках A, B, C. Опустим из центра сферы O перпендикуляр OO_1 на плоскость PQR.

$O_1A \perp PR$, $O_1B \perp PQ$, $O_1C \perp RQ$ (По теореме о трех перпендикулярах O_1A, O_1B, O_1C перпендикулярны к соответствующим сторонам $\triangle PQR$).

$\triangle OO_1A = \triangle OO_1B = \triangle OO_1C$ (они прямоугольные, O_1O — общий катет, $OA = OB = OC = R$).

Вывод: точка O_1 — центр вписанной окружности.

Найдем радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{S_{\triangle PQR}}{p},\ \ p = \frac{10+10+12}{2} = 16\ (\text{см}).$$

По формуле Герона:

$$S_{\triangle PQR} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48\ (\text{см}^2),\ \ r = \frac{48}{16} = 3\ (\text{см}).$$

Из $\triangle OO_1B$ по теореме Пифагора:

$$OO_1 = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\ (\text{см})$$

№ 584. Задача практически дословно повторяет задачу 583; отличаются . только длины сторон и обозначение треугольника: вместе $\triangle PQR$ будет $\triangle ABC$. Все рассуждения повторяются; точка O_1 — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Примем, что ее радиус равен r.

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p},\ \ p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21\ (\text{см}).$$

По формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} =$$
$$= 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 84 (\text{см}^2).$$
$$r = O_1F = \frac{84}{21} = 4\ (\text{см}).$$

Из прямоугольного $\triangle OO_1F$:

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9} = 3\ (\text{см}).$$

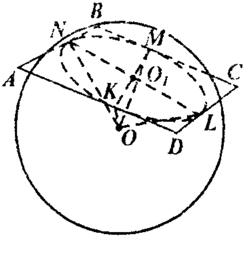


Рис. 368

№ 585. (рис. 368). Из центра сферы, точки O, проведем OO_1, перпендикулярный плоскости $ABCD$. Проведем $O_1L \perp DC$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp AD$. (По теореме о трех перпендикулярах OL, OM, ON, OK перпендикулярны к соответствующим сторонам ромба).

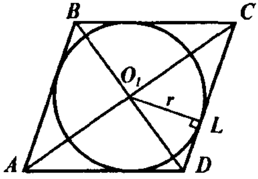


Рис. 369

$\triangle OO_1L = \triangle OO_1K = \triangle OO_1N = \triangle OO_1M$ (они прямоугольные, O_1O — общий катет, $OK = OL = ON = OM = R$). Тогда $O_1K = O_1L = O_1N = O_1M$, точка O_1 равноудалена от сторон ромба, то есть O_1 — центр вписанной в ромб окружности (рис. 369). Примем, что ее радиус равен r. Следовательно из $\triangle OO_1L$:

$$OO_1 = \sqrt{OL^2 - O_1L^2} = \sqrt{R^2 - r^2}. = \sqrt{100 - r^2}.$$

Найдем r. $BD = 15$ см, $AC = 20$ см (рис. 369).

$$CD = \sqrt{O_1C^2 + O_1D^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{225 + 400} = \frac{\sqrt{625}}{2} = \frac{25}{2} \text{ (см)}$$

$S_{\triangle O_1CD} = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot O_1L = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot r.$ С другой стороны

$S_{\triangle O_1CD} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \frac{1}{8}\cdot 20\cdot 15.$ Получили уравнение:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot r = \frac{1}{8}\cdot 20\cdot 15.$ $R = \frac{20\cdot 15}{2\cdot 25} = \frac{5\cdot 4\cdot 5\cdot 3}{2\cdot 25} = 6$ (см)

$O_1O = \sqrt{100 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ (см).

№ 586. В соответствии с п. 60 рассмотрим уравнение:

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$, где R — радиус сферы, d — расстояние от ее центра до плоскости α.

а) $R = 6$ дм, $d = OH = 60$ см $= 6$ дм. OH — высота тетраэдра, значит, OH перпендикулярен плоскости ABC и $OH = d$.

$R = d$. Сфера и плоскость имеют одну общую точку, то есть они касаются.

б) $R = 3$ м, $OH = d = 95$ см $= 0{,}95$ м. $R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

Уравнение $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ является уравнением окружности из плоскости ABC. Таким образом, сфера и плоскость основания тетраэдра пересекаются по окружности.

в) $R = 5$ дм, $d = OH = 45$ см $= 4{,}5$ дм. $R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

Как и в случае б), сфера и плоскость пересекаются.

г) $R = 3{,}5$ дм, $OH = d = 4$ дм, $R < d$, $R^2 - d^2 < 0$.

Уравнение $x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ не имеет решений, то есть плоскость ABC и сфера не имеют общих точек.

№ 587. Если $R > d$, то секущая плоскость и сфера (шар) пересекаются по окружности радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (п. 60). В сечении получится круг, его площадь $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$.

а) $R = 12$ см, $d = 8$ см. $R > d$, секущая плоскость и сфера пересекаются.

$r^2 = R^2 - d^2$, $r^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$; $S = \pi 80 = 80\pi$ (см^2).

б) $S = 12$ см^2, $d = 2$ см. $S = \pi R^2 - \pi d^2$; $\pi R^2 = S + \pi d^2$

$$R = \sqrt{\frac{\pi d^2 + S}{\pi}} = \sqrt{d^2 + \frac{S}{\pi}},\quad R = \sqrt{4 + \frac{12}{\pi}} \text{ (см).}$$

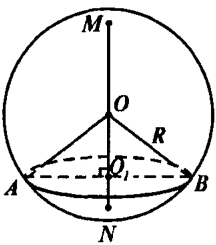


Рис. 370

№ 588. $OO_1 = O_1N = \dfrac{R}{2}$.

Примем $AO_1 = O_1B = r$.

Из прямоугольного $\triangle AOO_1$ (рис. 370):

а) $r = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

б) Площади боковой поверхности прямого кругового конуса найдем по формуле:

$S_{бок} = \pi rl$, $l = OA = R$,

$$S_{бок} = \pi rR = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R = \frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}.$$

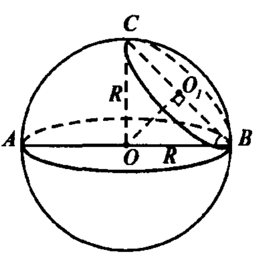


Рис. 371

№ 589. (рис. 371). Проводим OO_1 перпендикулярный плоскости сечения, соединим точку O_1 с точками B и C (точка C получается продолжением, отрезка BO (до пересечения его со сферой).

$\triangle COB$ — равнобедренный, в нем $OO_1 \perp CB$. А тогда OO_1 также является медианой, $CO_1 = O_1B$.

Точка O_1 равноудалена от точек C и B, лежащих на окружности, по которой сечение пересекает сферу. Точка O_1 — центр окружности, а $\angle OBO_1 = \alpha$. Примем $O_1B = r$.

а) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$.

Из $\triangle OO_1B$: $O_1B = r = R\cos 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$;

$L = 2\pi r$, $L = \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}R = 2\sqrt{3}\pi$ (см).

б) $R = 5$ м, $\alpha = 45°$. $r = R\cos 45° = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$;

$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}R = 5\pi\sqrt{2}$ (м).

№ 590. Точка C — точка, в которой плоскость ее касается сферы; плоскость α — касательная к сфере; β образует с α угол φ; плоскость β пересекается с шаром по окружности, диаметр которой CB.

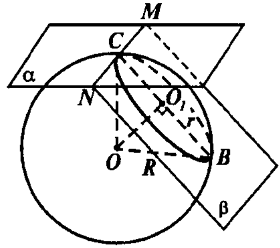
Проведем $OO_1 \perp CB$, соединим точку O с точками C и B. $\triangle OO_1C = \triangle OO_1B$ (они прямоугольные, OO_1 — общий катет, $OC = OB = R$). Тогда $CO_1 = O_1B$, точка O_1 — центр окружности, по которой плоскость β пересекает шар (рис. 372).

Нарисуем сечение шара плоскостью COB. φ — угол между плоскостями α и β. $\angle OCB = 90° - \varphi$, поскольку $\triangle BOC$ — равнобедренный, то $\angle OBO_1 = 90° - \varphi$. Из $\triangle OO_1B$:

$O_1B = r = R\cos(90° - \varphi) = R\sin\varphi$.

Площадь сечения шара

$S = \pi r^2$, $S = \pi(R\sin\varphi)^2 = \pi R^2\sin^2\varphi$.



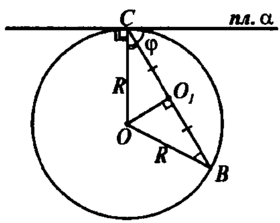


Рис. 372

№ 591. Нарисуем сечение плоскостью, проходящей через центр шара, точку O_1 и перпендикулярной ребру двугранного угла MN.

Согласно следствию из теоремы п. 23 построенная плоскость перпендикулярна α и β. Проведем OB перпендикулярно плоскости α и OA перпендикулярно плоскости β (рис. 373). $OB = OA = R$.

$OA \perp \beta$, AC перпендикулярен ребру MN — по построению.

$OC \perp MN$ — по теореме о трех перпендикулярах.

OC — расстояние от центра сферы до ребра MN, $OC = a$. $\triangle OBC = \triangle OAC$ ($OB = OA = R$, OC — общая), поэтому OC — биссектриса $\angle ACB$, а $\angle ACB = 120°$, тогда $\angle OCA = 60°$. Из $\triangle OCA$: $OA = R = a \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. AB – расстояние между точками касания.

$\triangle AOB$ – равнобедренный, $\angle OCA = 60°$, тогда $\angle OBA = \angle OAB = 60°$, $\triangle AOB$ — равностронний, $AB = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

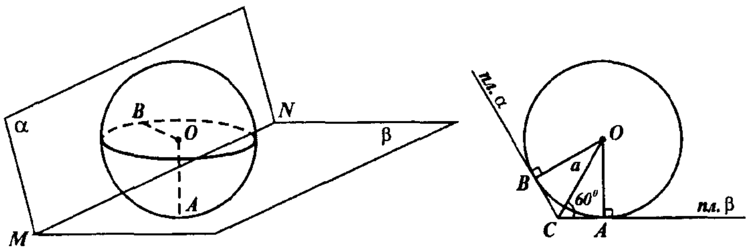


Рис. 373

№ 592. (рис. 374). α — касательная плоскость к сфере, $P \in \alpha$, $KP = 15$ см, $OK = OA = R = 112$ см. Докажем, что точка $A \in OP$ будет ближайшей точкой к точке P.

Возьмем произвольную точку N на сфере. Проведем отрезки NO и NP. По неравенству треугольника:

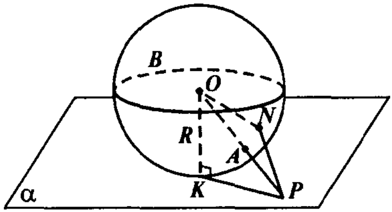


Рис. 374

$ON + NP > OP, OP = OA + AP,$
$R + NP > R + AP, NP > AP.$

Итак, $AP < NP$,а т.к. точка N выбрана произвольно, то утверждение доказано. Из прямоугольного $\triangle OKP$ ($OK \perp \alpha$):

$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{R^2 + 15^2} = \sqrt{112^2 + 15^2} = \sqrt{12769} = 113$ (см).
$AP = OP - R = 113 - 112 = 1$ (см).

№ 593. По формуле п. 62; $S = 4\pi R^2$.

а) $S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$ (см^2); б) $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (дм^2);

в) $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi$ (м^2); г) $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi$ (см^2).

№ 594. $S_{сеч} = 9 = \pi R^2$, $R^2 = \dfrac{9}{\pi}$ (м^2); $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{9}{\pi} = 36$(м^2).

№ 595. $S = 324$ см^2, $S = 4\pi R^2$, $R = \sqrt{\dfrac{324}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{81}{\pi}} = \dfrac{9}{\sqrt{\pi}}$ (см).

№ 596. Первая сфера: $S_1 = 4\pi R_1^2$.
Вторая сфера: $S_2 = 4\pi R_2^2$
Множитель 4π одинаковый, тогда, $S_1 \sim R_1^2$, $S_2 \sim R_2^2$, ($\sim$ означает «пропорционально»). Утверждение доказано.

№ 597. $S_{сф} = 4\pi R^2$, $R = 5$ м, $S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$(м^2); $S_{кр} = \pi L^2$
L — радиус круга (м). $\pi L^2 = \pi \cdot 100$, $L^2 = 100$, $L = 10$ (м).

№ 598. (рис. 375).Проведем диаметр сферы перпендикулярно к данным параллельным сечениям. Через диаметр проведем секущую плоскость, которая пересечет сферу по окружности, радиус которой равен радиусу сферы.

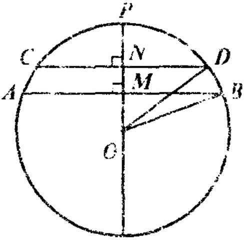
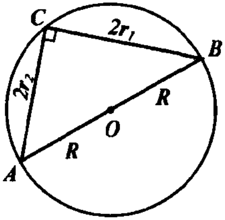


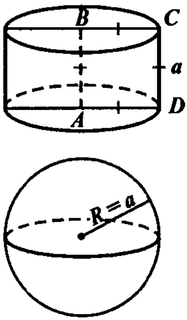
Рис. 375

$ND = r_1 = 9$ см, $MB = r_2 = 12$ см,
$NM = 3$ см, $OD = OB = R$.
Из $\triangle OBM$: $OM = \sqrt{R^2 - 12^2} = \sqrt{R^2 - 144}$.
Из $\triangle ODN$: $ON = \sqrt{R^2 - 9^2} = \sqrt{R^2 - 81}$.
$MN = NO - MO = \sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144}$.
$\sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144} = 3$, $\sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144}$,
$R^2 - 81 = 9 + 6\sqrt{R^2 - 144} + R^2 - 144$;



$6\sqrt{R^2-144} = 54, \quad \sqrt{R^2-144} = 9,$
$R^2 - 144 = 81,$
$R^2 = 225, \quad R = 15$ (см), $(R > 0)$
$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 = 225 \cdot 4 \cdot \pi =$
$= 900\pi$; (см^2).

Рис. 376



№ 599. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через следующие три точки:

1) общую точку двух сечений, из которой под углом 90° выходят радиусы r_1 и r_2;

2) конец радиуса r_1,

3) конец радиуса r_2;

Угол ACB — вписанный, т.к. он равен 90°, то он опирается на диаметр сферы, то есть $AB = 2R$. :

$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2$; $4R^2 = 4r_1^{\ 2} + 4r_2^{\ 2}$;

$R^2 = r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2}$.

Площадь сферы $S = 4\pi R^2 = 4\pi\,(r_1^{\ 2} + r_2^{\ 2})$.

№ 600. (рис. 377). Цилиндр получен вращением квадрата $ABCD$ вокруг стороны AB; $AB = a$.

Рис. 377

$S_{сф} = 4\pi a^2$; $S_{осн} = \pi a^2$; $S_{бок} = 2\pi \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2$;

$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$.

Вывод: $5_{полн\ цил} = S_{сф}$. Утверждение доказано.

Вопросы к главе VI

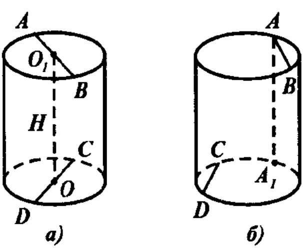


Рис. 378

1. Образующая перпендикулярна к основанию цилиндра, значит, и искомый угол равен 90°.

2. Прямоугольник.

3. а) да (рис. 378 а).

$\rho(AB, CD) = OO_1 = H$

б) да (рис. 378 б).

$\rho(AB, CD) > AA_1 = H$

в) нет, т. к. иначе бы и расстояние между параллельными плоскостями оснований былобы меньше H.

4. Первая деталь | Вторая деталь

$2l$ | l — высота (образующая)

$\frac{r}{2}$ | r — радиус основания

$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2l = 2\pi l \qquad S_{бок} = 2\pi rl$$

$$S_{осн} = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi\frac{r^2}{4} \qquad S_{осн} = \pi r^2$$

$$S_{осн} = \frac{\pi r^2}{2} \qquad 2S_{осн} = 2\pi r^2$$

5. (рис. 379). *Ответ*: а) да; б) да.

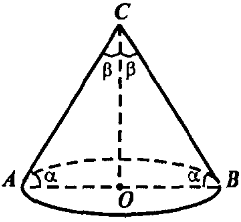


Рис. 379

6. *Ответ*: равнобедренный треугольник.

7. *Ответ*: да.

8. $R = \sqrt{5}$ см, $D = 2R = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ (см).
Вычислим гипотенузу прямоугольного треугольника:

$C = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16+8} = \sqrt{24}$ (см).

$C > D$, т. к. $\sqrt{24} > \sqrt{20}$.

Вывод: гипотенуза не помещается внутри сферы, тогда, хотя бы одна вершина лежит вне сферы.

9. Одна сфера всегда будет внутри другой, поэтому общую касательную плоскость провести невозможно (радиус внутренней сферы «не дотянется» плоскости, касающейся первой сферы).

10. *Ответ*: это сфера, у которой данный отрезок является диаметром.

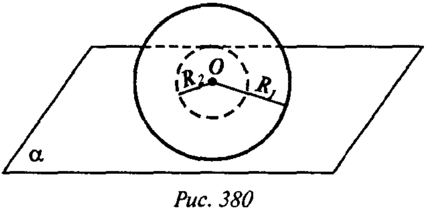


Рис. 380

Дополнительные задачи

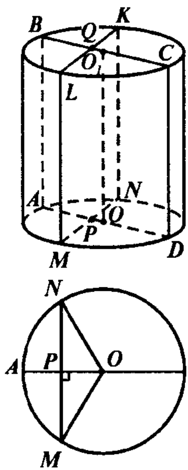


Рис. 381

№ 601. $ABCD$ — осевое сечение; $OA = r$; точка P — середина радиуса OA; плоскость $MNKL \perp OA$ (рис. 381).

Осевое сечение $ABCD$ и сечение $MNKL$ — прямоугольники. Примем образующая цилиндра $LM = 1$, следовательно

$S = S_{ABCD} = AD \cdot LM \cdot 2rl.$

Найдем длину отрезка MN.

$ON = OM = r, OP = \frac{r}{2}.$

Из прямоугольного треугольника ONP:

$$PN = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle OPN = \triangle OPM$, поэтому $NP = PM$,

$$NM = 2PN = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

$S_{MNKL} = MN \cdot LM = rl\sqrt{3}$

Итак, $S = 2rl$, отсюда $rl = \frac{S}{2}$.

Поэтому $S_{MNKL} = \frac{S}{2}\sqrt{3}$.

№ 602. $ABCD$ — прямоугольник.

Через центры оснований проведем диаметры, перпендикулярные к сторонам AB и DC. $O_1M \perp AB$, $ON \perp DC$.

Из планиметрии известно, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам, поэтому точка N — середина DC и точка M — середина AB. Отрезок MN параллелен сторонам AD и BC, $\angle NMO_1 = 60°$ — угол между прямой BC (или ей параллельной MN) и плоскостью основания. Примем, R — радиус основания цилиндра (рис. 382).

$DC = AB = a$; $DN = \frac{a}{2}$. Из $\triangle DNO$: $ON = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Из прямоугольного треугольника LON:

$$\frac{LO}{ON} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}, OL = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

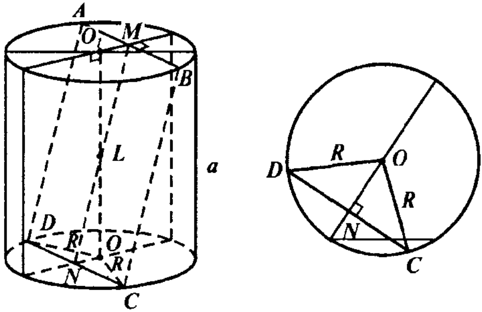


Рис. 382

В плоскости верхнего основания

$O_1M = \sqrt{O_1B^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$; значит, $O_1M = ON$.

В этом случае $\triangle O_1LM = \triangle OLN$, отсюда

$OL = O_1L$. $O_1L + LO = O_1O = a$

(высота цилиндра равна его образующей).

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = a, \quad 4 \cdot 3\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) = a^2, \quad 12R^2 - 3a^2 = a^2,$$

$$12R^2 = 4a^2, \quad R^2 = \frac{a^2}{3}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

№ 603. (рис. 383) Выберем систему координат, как показано на рисунке. Ось ординат перпендикулярна плоскости α, плоскость α параллельна оси аппликат, по которой направлена ось цилиндра. Будем двигать плоскость α в направлении, указанном стрелкой, параллельно плоскости Oxz. Когда точка A будет на расстоянии R от точки O, то точка A совпадет с точкой A_1 и допустим, что через точку A_1 можно провести две прямые, па-

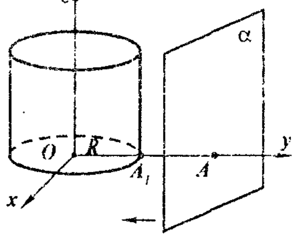


Рис. 383

раллельные оси Oz (или, что то же самое, перпендикулярные плоскости Oxy). Но по теореме п. 4 через точку A_1 проходит единственная прямая, параллельная оси цилиндра. Итак, на поверхности цилиндра найдется только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная оси цилиндра, а эта прямая и есть образующая цилиндра.

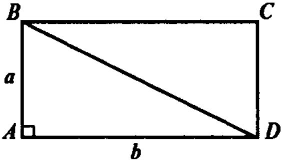


Рис. 384

№ 604. (рис. 384). При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB получим цилиндр, у которого $r = b$, $l = a$.

$S_{бок} = 2\pi rl = 2\pi ba$, $S_{осн} = \pi b^2$,

$S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1$.

При вращении вокруг стороны AD получим цилиндр, у которого $r = a$, $l = b$.

$S_{бок} = 2\pi rl = 2\pi ab$, $S_{осн} = \pi a^2$,

$S_{осн} = 2\pi a^2$, $S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2$

По условию получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1, \\ 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b(a+b) = S_1, \\ 2a(b+a) = S_2. \end{cases} \quad \frac{b}{a} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Подставим в первое уравнение системы:

$$2\pi \cdot a \cdot a \cdot \frac{S_1}{S_2} + 2\pi \cdot a^2 \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = S_1, \quad 2\pi \cdot a^2\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = S_1,$$

$$a^2 = \frac{S_1}{2\pi \cdot \frac{S_1 S_2 + S_1^2}{S_2^2}} = \frac{S_1 S_2^2}{2\pi \cdot S_1(S_2 + S_1)} = \frac{S_2^2}{2\pi(S_2 + S_1)}.$$

$$b^2 = a^2 \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}.$$

Диагональ BD находим из $\triangle ABD$.

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} + \frac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}} = \sqrt{\frac{S_2^2 + S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}};$$

$BD = AC$.

№ 605. а) $ABCD$ — квадрат, сторона равна a. Следовательно радиус основания $r=\frac{a}{2}$, высота цилиндра равна a.

Осевое сечение цилиндра

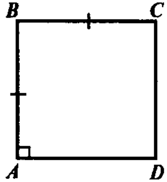


Рис. 385

$$S_{бок}=2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\pi a^2,\quad S_{осн}=\pi r^2=\pi\frac{a^2}{4},$$

$$2S_{осн}=\pi\frac{a^2}{2},\quad S_{полн}=\pi a^2+\pi\frac{a^2}{2}=\frac{3\pi a^2}{2};$$

$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{\frac{3}{2}\pi a^2}{\pi a^2}=\frac{3}{2}$$

Осевое сечение

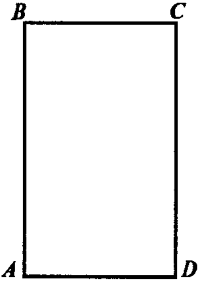


Рис. 386

б) Примем $AB=a$, следовательно $AD=2a$. Возможны два случая.

1) $AD=h$, $AB=2r$, следовательно $r=\frac{a}{2}$.

$$S_{бок}=2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a=2\pi a^2,\ S_{осн}=\pi r^2=\pi\frac{a^2}{4},$$

$$2S_{осн}=\pi\frac{a^2}{2},$$

$$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=2\pi a^2+\pi\frac{a^2}{2}=\frac{5}{2}\cdot\pi a^2$$

$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{\frac{5}{2}\pi a^2}{2\pi a^2}=\frac{5}{4}$$

2) $2AB=AD$. $AB=a$, $AD=2a$, $AB=h$, $AD=2r$, $r=a$.

$$S_{бок}=2\pi rh=2\pi\cdot a\cdot a=2\pi a^2,$$

$$S_{осн}=\pi r^2=\pi\cdot a^2,\quad 2S_{осн}=2\pi\cdot a^2,$$

$$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi a^2.$$

$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{4\pi a^2}{2\pi a^2}=2.$$

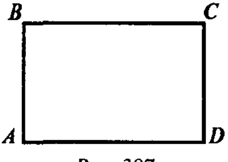


Рис. 387

№ 606. $ABCD$ — прямоугольник, $AB=h$, $AD=2r$ (рис. 387). Примем $AD=a$, следовательно $r=\frac{a}{2}$.

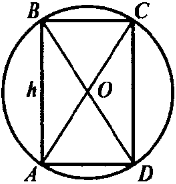


Рис. 388

$$S_{бок} = 2\pi rh = 2\pi \frac{a}{2}h = \pi ah.$$

Площадь описанного около осевого сечения круга равна $\pi \cdot AO^2 = \pi\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot AC^2$

Из $\triangle ACD$: $AC^2 = h^2 + a^2$. Площадь круга $S_{кр} = \frac{\pi}{4}(h^2 + a^2)$ (рис. 388).

По условию $S_{бок} = S_{кр}$, или $\pi ah = \frac{\pi}{4}(h^2 + a^2)$.

Требуется найти отношение $\frac{r}{6} = \frac{a}{2h}$.

$4ah = h^2 + a^2$, $\frac{4ah}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2}$, $\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{h}\right) + 1 = 0$

Примем, $y = \frac{a}{h}$, следовательно $y^2 - 4y + 1 = 0$

$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

$y > 0$ — по смыслу задачи, оба значения удовлетворяют этому условию. Искомое отношение:

$$\frac{a}{2h} = \frac{y_{1,2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

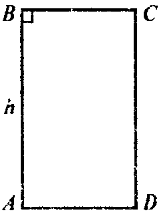


Рис. 389

№ 607. $ABCD$ — осевое сечение; $ABCD$ — прямоугольник (рис. 389). Примем $AB = h$, $AD = 2R$.

$S_{бок} = 2\pi Rh$; периметр равен $2(2R + h)$.

По условию $2p = 2(h + 2R)$, $p = h + 2R$, $h = p - 2R$.

$S_{бок} = 2\pi R(p - 2R) = 2\pi pR - 4\pi R^2$.

Примем $f(F) = -4\pi R^2 + 2\pi R$, $R > 0$.

Найдем ее наибольшее значение. График $f(R)$ — парабола, ветви направлены вниз, ордината вершины будет наибольшим значением $f(R)$.;

Абсцисса вершины $-\frac{2\pi p}{2 \cdot (-4\pi)} = \frac{p}{4}$. Ордината вершины равна

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 2\pi \frac{p}{4}p = \frac{-4\pi p^2}{16} + \frac{8\pi p^2}{16} = \frac{4\pi p^2}{16} = \frac{\pi p^2}{4}$$

Наибольшая площадь боковой поверхности достигается при радиусе основания цилиндра $R = \frac{p}{4}$. $h = p - 2R = p - \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

№ 608. (рис.390). Если внутренний радиус равен 5 см, то внутренний диаметр $D = 10$ см. Соответственно внешний диаметр, с учетом толщины стенок, будет:

$D + 2 = 12$ (см).

$S_{осн} = \pi \frac{12^2}{4} = 36\pi$ (см^2) ($S_{круга} = \pi \frac{d^2}{4}$, где d — диаметр круга).

Высота стакана 16 см, поэтому $S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{12}{2} \cdot 16 = 192\pi$ (см^2).

Итак, площадь внешней поверхности стакана.

$S_{внеш} = S_{бок} + S_{осн} = 192\pi + 36\pi = 228\pi$ (см^2),

Найдем полную площадь внутренней поверхности.

$S_{осн} = \pi \cdot 5^2 = 25$ (см^2). Высота внутренней части $16 - 1 = 15$ (см).

$S_{бок} = 2\pi \cdot 5 \cdot 15 = 150\pi$ (см^2). $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 175\pi$ (см^2).

Найдем площадь кольца: $S_к = \pi(6^2 - 5^2) = \pi(36 - 25) = 11\pi$ (см^2).

Площадь полной поверхности стакана равна:

$228\pi + 175\pi + 11\pi = 414\pi$ (см^2).

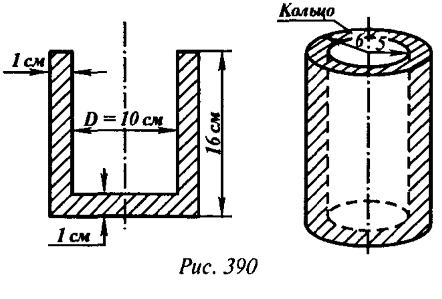


Рис. 390

№ 609. (рис. 391). По формуле $\alpha = \frac{360°\cdot r}{l}$, где α — градусная мера дуги ABC. В данном случае $\alpha = 90°$, поэтому $90° = \frac{360°\cdot r}{l}$, отсюда $1 = 4\frac{r}{l}$, или $\frac{l}{r} = 4$, $l = 4r$. Утверждение доказано.

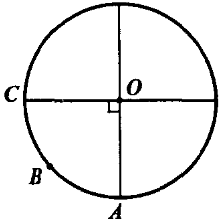


Рис. 391

№ 610. (рис. 392). Образующие конуса равны; примем $DA = DB = DC = a$.

Прямоугольные треугольники DBC, DAB и DAC равны по двум катетам.

$AB = AC = BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Найдем R по формуле $\frac{a\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$ (теорема синусов для $\triangle ABC$):

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad BF = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

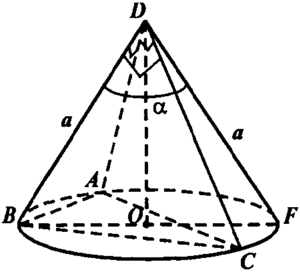


Рис. 392

Примем $\angle BDF = \alpha$, следовательно из теоремы косинусов для $\triangle BDF$ имеем:

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot\cos\alpha,$$

$$\frac{2}{3} = -2\cos\alpha, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}.$$

№ 611. (рис. 393). Примем r — радиус основания конуса, h — высота конуса.

По условию $S_1 = \pi r^2$ и $S_0 = \pi rl$, l-образующая конуса.

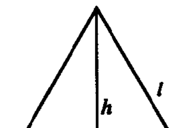


Рис. 393

$$l = \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$S_0 = \pi r\sqrt{h^2 + r^2},$$

$$S_1 = \pi r^2, \quad S_0^2 = \pi^2 r^2(h^2 + r^2) = \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^4$$

$$S_1^2 = \pi r^4, \quad S_0^2 = \pi^2 r^2 h^2 + S_1^2$$

$$r^2h^2 = \frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

$$rh = \sqrt{\frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{S_0^2 - S_1^2}}{\pi} = S_{сеч}.$$

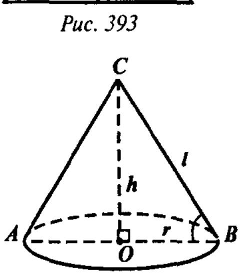


Рис. 394

№ 612. (рис. 394). Примем $CO = h$, $OB = r$, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

$$S_{бок} = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2 + r^2},$$

$S_{полн} = \pi r^2 + S_{бок} = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

По условию $\frac{S_{бок}}{S_{полн}} = \frac{7}{8}$, $\frac{\pi r\sqrt{h^2+r^2}}{\pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{7}{8}$,

$8\sqrt{h^2+r^2} = 7r + 7\sqrt{h^2+r^2}$, $\sqrt{h^2+r^2} = 7r$

$h^2 + r^2 = 49r^2$, $h^2 = 48r^2$

$\frac{h}{r} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{h^2}{r^2} = \operatorname{tg}^2\alpha$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $49 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{1}{7}$, или $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$. Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный, то α — острый угол, $\cos\alpha > 0$. $\alpha = \arccos\frac{1}{7}$.

№ 613. (рис. 395). Проведем $OC \perp DB$, отрезок PC. По теореме о трех перпендикулярах $PC \perp DB$,

PC — высота $\triangle DOB$.

Запишем теорему синусов для равнобедренного $\triangle DPB$.

$\frac{DB}{\sin 120°} = \frac{4}{\sin 30°}$, $\sin 120° = \sin 60°$.

$DB = \frac{4\sin 60°}{\sin 30°} = 4 \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

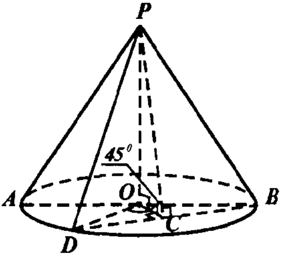


Рис. 395

Из $\triangle OCD$: $OC = \sqrt{OD^2 - DC^2} = \sqrt{OD^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{16 - 4 \cdot 3} = \sqrt{4} = 2$

$\angle PCO = 45°$. Из $\triangle POC$: $PC = \frac{OC}{\cos 45°} = 2\sqrt{2}$ (см).

$S_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} DB \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$ (см^2);

№ 614. (рис. 396). По формуле $\alpha = \frac{360° \cdot r}{l}$, $\frac{r}{l} = \frac{\alpha}{360°} = \frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.

Из прямоугольного треугольника POB:

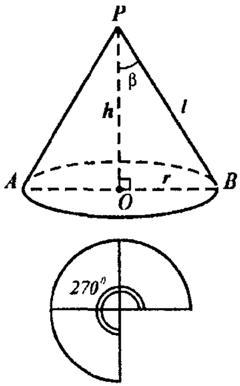


Рис. 396

$$\frac{r}{l} = \sin\beta, \quad \sin\beta = \frac{3}{4}, \quad \beta = \arcsin\frac{3}{4}$$

(поскольку β — острый угол).

№ 615. При вращении $\triangle ABD$ вокруг гипотенузы получим два конуса с общим основанием (рис. 397).

$S_{бок} = \pi rl$,

Из $\triangle ABD$: $DA = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = BO$$

Боковая поверхность первого («правого») конуса: $S_{бок} = \pi \cdot \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot a.$

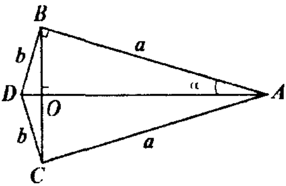


Рис. 397

Боковая поверхность второго («левого») конуса:

$$S_{бок} = \pi \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot b.$$

Поверхность тела имеет площадь:

$$\frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

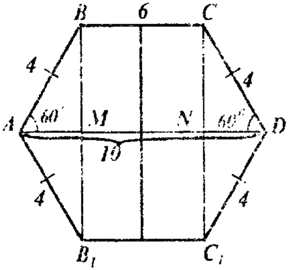


Рис. 398

№ 616. (рис. 398). При вращении трапеции ABD вокруг стороны A получится тело вращения, которое состоит из трех частей: центральной — прямого кругового цилиндра с радиусом BM и высотой BC и двух одинаковых конусов (трапеция равнобедренная по условию).

$$AM = ND = \frac{10-6}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

$$BM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Боковая поверхность цилиндра:

$S_{бок} = 2\pi rl = 2\pi \cdot BM \cdot BC =$

$= 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\pi\sqrt{3}$ (см²).

Боковая поверхность одного конуса:

$S_{бок} = \pi rl = \pi \cdot BM \cdot AB = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\pi\sqrt{3}$ (см^2).
Боковая поверхность всего тела вращения:
$S = 24\pi\sqrt{3} + 2 \cdot 8\pi\sqrt{3} = 24\pi\sqrt{3} + 16\pi\sqrt{3} = 40\pi\sqrt{3}$ (см^2).'

№ 617. а). Проведем $OK \perp BC$, отрезок DK (рис. 399). По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. В правильном $\triangle ABC$ OK — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Примем $OK = r$.

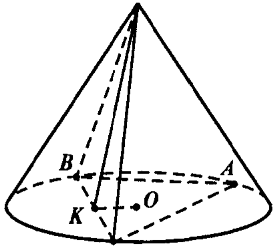


Рис. 399

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{P},$$

где P — полупериметр $\triangle ABC$.

Из равенства $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$ (теорема синусов для $\triangle ABC$) найдем a — сторону $\triangle ABC$.

$$a = 2R\sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{4};\quad P = \frac{3a}{2};\quad r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ (см);}$$

$$r = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \text{ (см).}$$

Из прямоугольного $\triangle DOK$: $DK = \sqrt{DO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DK = \frac{1}{2} a \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{).}$$

$$S_{бок} = 3 \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{9}{4}\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)};\ S_{\triangle ABC} = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{\triangle ABC}$$

$$S_{полн} == \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{219} = \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \left(3 + \sqrt{73}\right) \text{(см}^2\text{)}$$

б) Проведем $OK \perp AD$, отрезок PK (рис. 400). По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AD$.

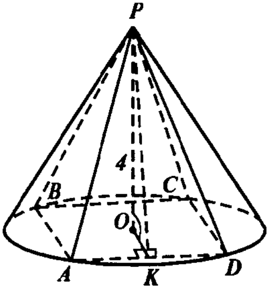


Рис. 400

В квадрате диагональ $BD = 2R$, R — радиус описанной окружности около квадрата, $BD = 2 \cdot 3$. Примем сторона квадрата равна a см, следовательно

$a\sqrt{2} = BD, a\sqrt{2} = 6,$

$a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см);

$OK = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$ Из прямоугольного $\triangle POK$: $PK = \sqrt{PO^2 + OK^2}$

$PK = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{16 + \frac{9}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{32+9}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$; $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PK = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{41}$ (см^2);

$S_{бок} = 4 \cdot S_{\triangle APD} = 4 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{41}$ (см^2); (боковые грани — равные равнобедренные треугольники);

$S_{ABCD} = a^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$(см^2);$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD} = 6(\sqrt{41} + 3)$ (см^2);

в) PO — высота конуса. Проведем $OK \perp A_1A_6$, отрезок PK (рис. 401). По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp A_1A_6$, $A_1A...A_6$ — правильный шестиугольник. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.

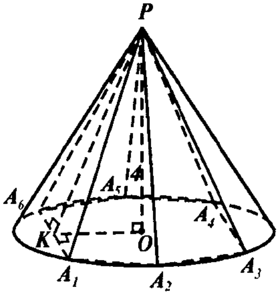


Рис. 401

$a = R, A_1A_6 = a = 3$ (см)

OK — радиус вписанной в правильный шестиугольник окружности. Как известно из планиметрии,

$OK = r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см).

Из прямоугольного $\triangle POK$:

$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{64+27}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$

$S_{\triangle A_1PA_6} = \frac{1}{2} \cdot A_1A_6 \cdot PK = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{3\sqrt{91}}{4}$ (см^2);

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники, поэтому:

$$S_{бок} = 6 \cdot S_{\triangle A_1PA_6} = 6 \cdot \frac{3\sqrt{91}}{4} = \frac{9\sqrt{91}}{2} \text{ (см}^2\text{)};$$

$S_{осн} = 6 \cdot S_{\triangle A_1OA_6}$, A_1OA_6 — равносторонний, поэтому:

$$S_{\triangle A_1OA_6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{осн} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{3}$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{9\sqrt{91}}{2} + \frac{9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\left(\sqrt{91} + 3\sqrt{3}\right)$$

№ 618. $S_{бок} = \pi(r + r_1)l$, где $r = \frac{1}{2}AD = 20$ (см), $l = AB$, $r_1 = \frac{1}{2}BC = BM$ (рис. 402).

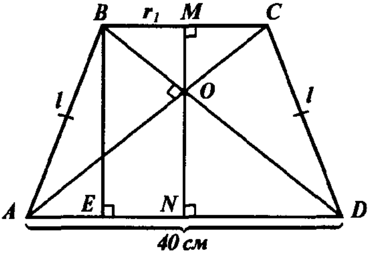


Рис. 402

Из планиметрии известно, что если в, равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна средней линии.

$$S_{ABCD} = 36 = \frac{BC + AD}{2} \cdot MN$$

Но $\frac{BC + AD}{2}$ = средней линии = MN, где MN — высота трапеции. Итак, $36 = MN^2$, MN — высота трапеции. 6 (дм) = 60 (см).

$$60 = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2r_1 + 40}{2}$$

$120 = 2r_1 + 40$, $2r_1 = 80$, $r_1 = 40$ (см), $BC = 2 \cdot 40 = 80$ (см)

Рисунок должен быть изменен (рис. 403). Проведем $AE \perp BC$. $BE = 40 - 20 = 20$ (см), $AE = MN = 60$ (см) Из прямоугольного $\triangle ABE$.

$$AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{20^2 + 60^2} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10} \text{ (см)}$$

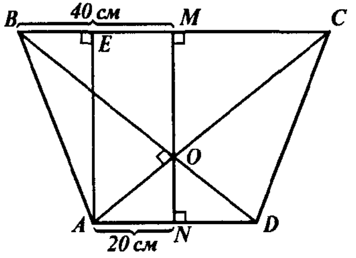


Рис. 403

$S_{бок} = \pi(40 + 20) \cdot 20\sqrt{10} =$
$= 1200\pi\sqrt{10}$ (см^2) $= 12\pi\sqrt{10}$ (дм^2).

Площадь верхнего основания равна:

$\pi r_1^2 = \pi 40^2 = 1600\pi$ (см^2) $=$
$= 16\pi$ (дм^2);

площадь нижнего основания равна:

$\pi 20^2 = 400\pi$ (см^2) $= 4\pi$ (дм^2).

$S_{полн} = 12\pi\sqrt{10} + 16\pi + 4\pi =$
$= 12\pi\sqrt{10} + 20\pi$ (дм^2).

№ 619. Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

а) Проведем через центр сферы произвольную прямую, которая пересекает сферу в точках A и B. Через центр сферы и эти точки проходит отрезок, который называется диаметром, Расстояние от центра сферы до каждой из точек равно , значит центр сферы является центром симметрии двух данных точек. Поскольку прямая проводилась произвольно, то утверждение справедливо для любых двух точек, являющихся концами диаметра сферы.

б) Возьмем произвольную прямую a, в проходящую через центр сферы. Докажем, что она является осью симметрии. Возьмем произвольную точку A на сфере. Построим симметричную ее относительно a. Для этого проведем $AK \perp a$ и продолжим за точку K на расстояние AK. Получим точку A_1. $\triangle OKA = \triangle OKA_1$ (по 2-м катетам) $OA_1 = OA = R$. Но сфера — геометрическое место точек, удаленных от точки O на расстояние R. Значит A_1 лежит на сфере.

Итак, произвольная точки сферы при симметрии переходит в точку этой же сферы, тогда прямая a — любая прямая, проходящая через центр сферы — есть ось симметрии сферы.

в) Возьмем произвольную плоскость α, проходящую через центр сферы. Докажем, что для любой точки A симметричная ей относительно α точка A_1 также лежит на сфере.

В самом деле, при построении симметричной точки мы проведем отрезок $AK \perp \alpha$ ($K \in \alpha$) и продолжаем его за точку K так, чтобы $AK = KA_1$.

$\triangle AKO = \triangle A_1KO$ ($OK = OK$, $AK = A_1K$ — по двум катетам). А $A O = AO = R$, т.е. A_1, удалена от точки O на расстояние R. Последнее означает, что A_1, лежит на сфере. Итак, для любой точки A симметричная ей точка также лежит на сфере, а значит α — плоскость симметрии.

№ 620. а) Найдем длину гипотенузы прямоугольного треугольника: $\sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{3{,}24 + 5{,}76} = \sqrt{9} = 3$ (см). Диаметр сферы равен $2 \cdot 1{,}5 = 3$ (см).

Вывод: диаметр сферы совпадет с гипотенузой, значит, центр сферы находится на середине гипотенузы, то есть лежит в плоскости треугольника.

б) (рис. 404). Плоскость $\triangle ABC$ пересекает сферу по окружности, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Проведем из точки O отрезок OK, перпендикулярный плоскости $\triangle ABC$, отрезки OA, OB, OC. Равные наклонные (радиусы OA, OB, OC) имеют равные проекции на плоскость ABC, тогда, $KA = KB = KC$, точка K равноудалена от вершин $\triangle ABC$, то есть она — центр описанной окружности.

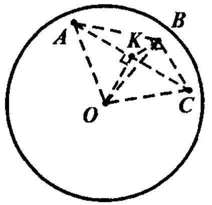


Рис. 404

Таким образом, точка K — середина гипотенузы AC, OK — искомое расстояние. $AC = 3$ см, $AKO = 1{,}5$ см. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{6{,}5^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{42{,}25 - 2{,}25} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

№ 621. Из точки O всегда можно провести прямую (отрезок), перпендикулярную l. На плоскости введем систему координат, как показано на рисунке.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$

Уравнение прямой l: $x = d$. Исследуем систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases}; y^2 = R^2 - d^2 = (R + d)(R - d)$$

$y = \pm\sqrt{(R + d)(R - d)}$, ($R + d > 0$ всегда),

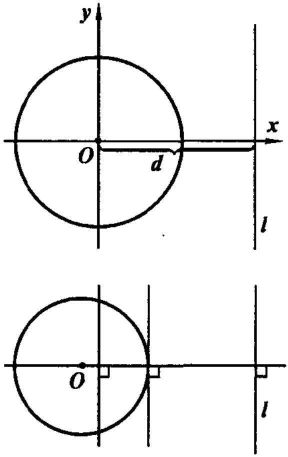


Рис. 405

а) Если $d < 0$, то $R - d > 0$, $\Rightarrow$ $y = \pm\sqrt{(R+d)(R-d)}$ — две точки пересечения прямой и сферы

б) Если $R = d$, то $y = 0$ и прямая касается окружности в точке (d; 0), а, следовательно, касается сферы.

в) Если $R - d < 0$, то решений нет, значит, l не пересекается с окружностью; l не пересекается со сферой.

№ 622. $(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 25$

Если точка пересечения на оси абсцисс, ее координаты (x; 0; 0). Найдем x. $(x-3)^2 + 0^2 + 5^2 = 25$;
$(x-3)^2 = 0$; $x = 3$.

Координаты точки (3; 0; 0).

Если точка пересечения на оси ординат, то ее координаты (0: y; 0).

Найдем y.
$(0-3)^2 + y^2 + (0+5)^2 = 25$; $9 + y^2 + 25 = 25$; $y^2 + 9 = 0$.

Это уравнение не имеет решений, значит сфера не пересекает ось ординат.

Если есть точка пересечения с осью аппликат, то эта точка имеет координаты (0; 0; z). $(0-3)^2 + 0^2 + (z+5)^2 = 25$; $(z+5)^2 = 25 - 9 = 16$; $z + 5 = 4$ или $z + 5 = -4$, $z_1 = -1$, $z_2 = -9$.

Сфера пересекает эту ось в двух точках с координатами (0; 0;–1) и (0; 0;–9).

№ 623. Т.к. плоскость проходит через точку M (2; 4; 5) перпендикулярно оси абсцисс, то все точки этой плоскости с координатами (2; y; z), которые удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, будут лежать на сфере. $2^2 + y^2 + z^2 = 36$, $y^2 + z^2 = 32$.

В плоскости, перпендикулярной оси абсцисс, это уравнение окружности с радиусом $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Итак, плоскость пересекает сферу по окружности, радиус которой $r = 4\sqrt{2}$.

№ 624. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведем прямую l, перпендикулярную плоскости $ABCD$ (рис.406). Все точки на прямой l равноудалены от вершин A, B, C,

D. (Если наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то сами наклонные равны $PA = PB = PC = PD$, $P \in l$.)

Через точку O проведем $OK \perp AB$, через точку O_1 проведем луч KO_1. AB перпендикулярна плоскости POK. Плоскость прямоугольника $ABEF$ проходит через прямую AB, значит плоскости POK и $ABEF$ взаимно перпендикулярны. Проведем чсрез точку O_1 прямую m, перпендикулярную плоскости $ABEF$.

Если две плоскости перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку (O_1) с другой плоскостью то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости.

Таким образом, m принадлежит плоскости POK; m есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABEF$: $QA = QB = QE = QF \in m$. Пересечение прямых l и m — точка S — равноудалена как от вершин прямоугольника $ABCB$, так и от вершин прямоугольника $ABEF$.

Докажем, что точка S находится на одинаковом расстоянии от вершин A, B, C, D и вершин E, F. Проведем отрезки SA, SE, SB.

$\triangle SAO = \triangle SOB$ (они прямоугольные, SO — общий катет, $OA = OB$ по свойству диагоналей прямоугольника).

Отсюда $SA = SB$. Итак, $SA = SB = SE$

Выше уже установлено, что $SA = SB = SE = SC = SD$ и $SA = SB = SE = SF$, тогда, точка S равноудалена от всех вершин, то есть она является центром сферы, проходящей через все данные вершины.

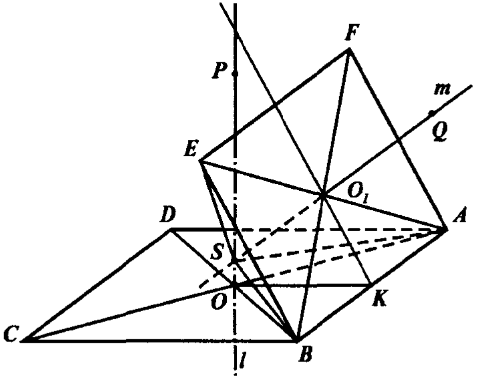


Рис. 406

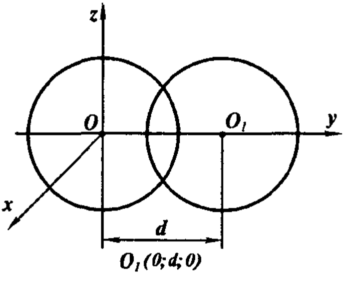


Рис. 407

№ 625. Выберем систему координат, как показано на рисунке 407.

Уравнение сферы с центром в точке O: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение сферы с центром в точке O_1: $x^2 + (y - d)^2 + z^2 = R^2$.

Решение системы:

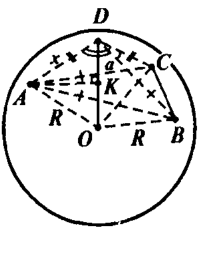
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

дает ответ на вопрос задачи.

$x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - (y^2 - 2dy + d^2) - z^2 = 0$; $2dy - d^2 = 0$, $d > 0$, поэтому $2y = d$

$y = \frac{d}{2}$. По условию задачи $d < 2R$, тогда. $\frac{d}{2} < R$, $y < R$.

Вывод: существует некоторая плоскость, перпендикулярная оси ординат (а значит, параллельная плоскости Oxz), пересекающая сферу, а при пересечении сферы плоскостью в сечении получим окружность, утверждение а) доказано.



Подставим значение $y = \frac{d}{2}$ уравнение сферы:

$$x^2 + \frac{d^2}{4} + z^2 = R^2, \quad x^2 + z^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}.$$

Если $d = 1{,}6R$, то $x^2 + z^2 = R^2 - \frac{2{,}56R^2}{4} =$

$= R^2(1 - 0{,}64) = 0{,}36R^2$

Это уравнение окружности в плоскости, параллельной плоскости Oxz, ее радиус

$r = \sqrt{0{,}36R^2} = 0{,}6R$.

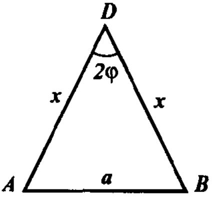


Рис. 408

№ 626. а) Проведем DK перпендикулярно плоскости ABC (рис. 408), проведем отрезки KA, KB, KC. (Чтобы не загромождать рисунок, показан только KA).

$\triangle DKA = \triangle DKB = \triangle DKC$ (по катету и гипотенузе). Отсюда $KA = KB = KC = r$, r — радиус окружности, описанной около

$\triangle ABC$. Теперь из центра сферы, точки O, проведем отрезок OT, перпендикулярный плоскости ABC, проведем отрезки TA, TB, TC.

$\triangle OTA = \triangle OTB = \triangle OTC$ (они прямоугольные, OT — общий катет, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы), тогда, $TA = TB = TC = r$, r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Выше доказано, что $OA = OB = OC = r$. Значит, точки T и O совпадают и отрезки DK и OK перпендикулярны плоскости ABC.

$\triangle ADC = \triangle BDC = \triangle ADB$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AB = CB = AC$, $\triangle ABC$ — равносторонний.

Примем $AD = x$, $AB = a$. $\angle DAB = \angle DBA = \dfrac{180°-2\varphi}{2} = 90° - \varphi$.

По теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin 2\varphi} = \dfrac{x}{\sin(90°-\varphi)}$, $\dfrac{a}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{x}{\cos\varphi}$, $a = 2\sin\varphi$. Примем $KA = KB = KC = r$. Запишем теорему синусов для $\triangle ABC$. $\dfrac{a}{\sin 60°} = 2r$, $a = 2r\dfrac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

Вывод: $2x\sin\varphi = r\sqrt{3}$, $r = \dfrac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}}\cdot x$.

В $\triangle ADK$: $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{x^2 - y^2}$.

В $\triangle AOK$ $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$.

$DK + KO = R$, $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{R^2 - r^2} = R$,

$(\sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2})^2 = R^2$

$x^2 - r^2 + R^2 - r^2 + 2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = R^2$,

$2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = 2r^2 - x^2$,

$4(x^2 - r^2)(R^2 - r^2) = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2$,

$4x^2R^2 - 4x^2r^2 - 4r^2R^2 + 4r^4 = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2$,

$x^4 - 4x^2R^2 + 4r^2R^2 = 0$, $x^4 - 4x^2R^2 + 4R^2\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\sin^2\varphi\cdot x^2 = 0$,

$x^2(x^2 - 4R^2 + 4R^2\dfrac{4}{3}\sin^2\varphi) = 0$, $x \neq 0$, тогда $x^2 = 4R^2 - 4R^2\dfrac{4}{3}\sin^2\varphi$.

$$x = DA = \sqrt{4R^2\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\varphi\right)} = 2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}.$$

$$AB = a = 4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}.$$

б) Сечением сферы плоскостью $\triangle ABC$ будет окружность, ее радиус:

$$r = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3-4\sin^2\varphi}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}R\sin\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$$

Площадь сечения равна: $\pi r^2 = \dfrac{16}{9}\pi R^2\sin^2\varphi(3-4\sin^2\varphi)$.

№ 627. Известно, что ближайшая точка (A), лежащая на сфере, к точке (M), лежащей вне сферы, принадлежит отрезку OM, где O — центр сферы (рис. 409).

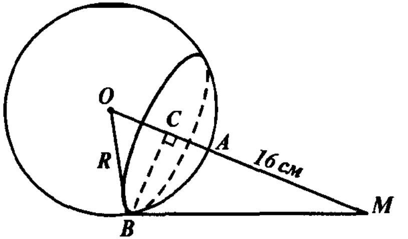


Рис. 409

Примем $CB = r$ — радиус окружности, $AC = x$, $BM = 24$ см. $OA = R = 10$ см.

Из прямоугольного $\triangle CBM$:

$CM^2 + CB^2 = MB^2$, или $(16 + x)^2 + r^2 = 24^2$ см.

Из прямоугольного $\triangle CBO$:

$OB^2 = OC^2 + CB^2$, или $(10 - r)^2 + r^2 = 10^2$ см.

Решим систему: $\begin{cases}(16+x)^2 + r = 576\\(10-x)^2 + r^2 = 100.\end{cases}$

$(16 + x)^2 - (10 - x)^2 = 476$, $256 + 32x + x^2 - 100 - x^2 + 20x = 476$.

$52x = 576 - 256$,

$52x = 320$,

$x = \dfrac{320}{52} = \dfrac{80}{13}$ (см);

$r^2 = 100 - (10 - x)^2 = 100 - 100 + 20x - x^2 = 20x - x^2$.

$$r^2 = \frac{20\cdot 80}{13} - \frac{80\cdot 80}{13\cdot 13} = 100\cdot\frac{16\cdot 13-64}{169} = \frac{10^2\cdot 12^2}{13^2},$$

$$r = \sqrt{\frac{10^2\cdot 12^2}{13^2}} = \frac{10\cdot 12}{13} = \frac{120}{13}$$

Длина окружности $L = 2\pi r$, $L = 2\pi\frac{120}{13} = \frac{240}{13}\pi$ (см).

№ 628. R — радиус внешней сферы; r – радиус внутренней сферы (рис.410). Сечение тела плоскостью, проходящей через центры сфер — кольцо.

Площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2)$. (1)

Сечение, плоскостью касательной к внутренней сфере.

По теореме п. 61 $OC = r$ перпендикулярен к плоскости в сечении. Из прямоугольного $\triangle ACO$:

$x = \sqrt{R^2 - r^2}$, $S_{сеч} = \pi x^2 = \pi(R^2 - r^2)$. (2)

Сравнивая выражение (1) и (2), убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

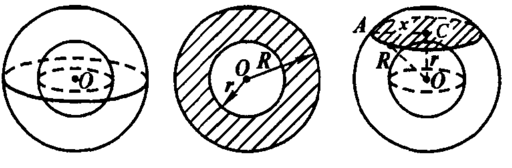


Рис. 410

Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар

№ **629.** В окружности основания AB — диаметр, $\angle ACB$ — вписанный, опирающийся на диаметр, значит, $\angle ACB = 90°$ (рис. 411).

$BC \perp CC_1$, образующая CC_1 перпендикулярна основанию; BC перпендикулярен плоскости ACC_1.

По признаку перпендикулярности двух плоскостей (п.23) плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости BCC_1B_1.

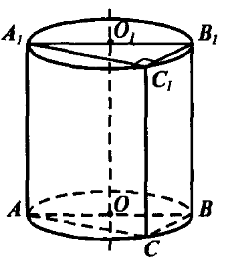


Рис. 411

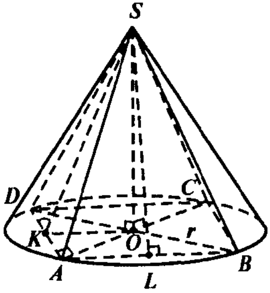


Рис. 412

№ 630. $SO \perp ABCD$, $SO = h = 12$ см, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см (рис. 412).

$OA = OB = r$. Ребра пирамиды равны образующим конуса и лежат на поверхности конуса.

$BD = 2r$. $BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ см

$r = 5$ (см)

Найдем площадь полной поверхности конуса.

$S_{осн} = \pi r^2 = \pi \cdot 25$ (см^2)

Из прямоугольного $\triangle SOA$

$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$ (см)

$S_{бок} = \pi rl$, $l = SA$, $S_{бок} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$(см^2).

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = (25 + 65)\pi = 90\pi$ (см^2)

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2)

Боковые грани попарно равны. Проведем $OK \perp DA$, $OL \perp AB$, отрезки SK и SL. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp DA$ и $SL \perp AB$.

$OK = \frac{1}{2} AB = 4$ (см). $OL = \frac{1}{2} BC = 3$ (см). Из $\triangle SOK$:

$SK = \sqrt{h^2 + OK^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ (см).

$S_{\triangle ASD} = \frac{1}{2} SK \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$ (см^2).

Из $\triangle SOL$:

$SL = \sqrt{h^2 + OL^2} = \sqrt{144 + 9} = \sqrt{153} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 17} = 3\sqrt{17}$ (см).

$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} SL \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{17} = 12\sqrt{17}$ (см^2).

$S_{бок} = 2(S_{\triangle ASD} + S_{\triangle ASB}) = 2 \cdot 12(\sqrt{10} + \sqrt{17}) = 24(\sqrt{10} + \sqrt{17})$ (см^2)

$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 24\sqrt{10} + 24\sqrt{17} + 48 = 24(\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2)$ (см^2)

Искомое отношение равно:

$$\frac{24\left(\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2\right)}{90\pi} = \frac{4\left(\sqrt{10} + \sqrt{17} + 2\right)}{15\pi}$$

№ 631. а) $r = 2$ см, $h = 4$ см, $R = 5$ см (рис. 413).

Примем $AC = BC = AB = a$, следовательно:

$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $a = R\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ (см).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)};$$

$A_1C_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = b$.

Следовательно $r = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$,

$b = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}$$

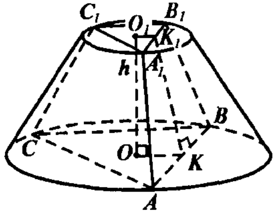


Рис. 413

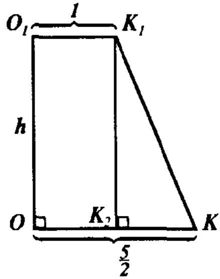


Рис. 414

Боковые грани — равные равнобедренные трапеции (рис. 414). Проведем $OK \perp A_1B_1$, $OK_1 \perp AB$, отрезок K_1K. По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AB$.

OK, O_1K_1 — радиусы вписанных окружностей в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

$$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \text{ (см)},$$

$$O_1K_1 = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \text{ (см)}.$$

Проведем $K_1K_2 \perp OK$. $K_2K_1 = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}$ (см).

Из $\triangle K_1K_2K$: $K_1K = \sqrt{h^2 + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{16 + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{73}{4}} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$ (см).

$$S_{бок} = 3S_{ABB_1B_1} = \frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4} \text{ (см)}.$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + S_{\triangle ABC}$$

$$S_{полн} = \frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4} + \frac{75\sqrt{3}}{4} + \frac{12\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73} + 87\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(7\sqrt{73} + 29).$$

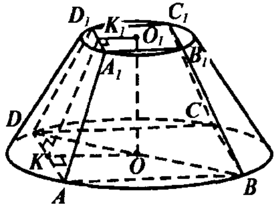


Рис. 415

б) Примем $AB = a$, следовательно

$R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $a = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (см); $r = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ (рис. 415).

Примем $A_1B_1 = b$, следовательно
$b = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (см). $S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2 = 8$ см^2.

Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Проведем $O_1K_1 \perp D_1A_1$, $OK \perp DA$, отрезок K_1K. По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AD$.

$$O_1K_1 = \frac{b}{2} = \sqrt{2} \text{ (см)}; \; OK = \frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$K_2K = OK - O_1K_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}.$$

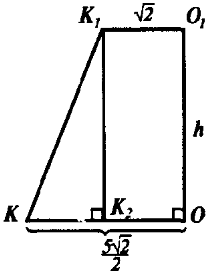


Рис. 416

Из $\triangle K_1K_2K$ (рис. 416):

$$K_1K = \sqrt{h^2 + K_2K_1{}^2}$$

$$K_1K = \sqrt{16 + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{82}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2} \text{ (см)}.$$

$$S_{AA_1D_1D} = \frac{A_1D_1 + AD}{2} \cdot K_1K = \frac{a+b}{2} \cdot K_1K =$$

$$= \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{\sqrt{82}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{бок} = 4S_{AA_1D_1D} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD} + S_{A_1B_1D_1C_1}$$

$$S_{полн} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 50 + 8 = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 58 = 14\sqrt{41} + 58 \text{ (см}^2\text{)}$$

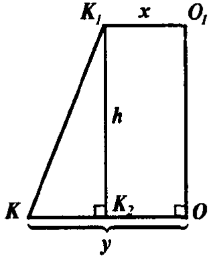


Рис. 417

в) Примем, что сторона верхнего основания равна b, нижнего основания равна a, $a > b$; радиус верхнего основания равен r, нижнего основания — R (рис. 417). Следовательно $b = r$, $a = R$.

Правильный шестиугольник состоит из 6 равносторонних треугольников; высота каждого из них равна радиусу вписанной в шестиугольник окружности. Радиус вписанной в верхний шестиугольник окружности равен x, а в нижний шестиугольник — y. Как известно из планиметрии:

$$x = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \; y = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \; x = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (см)}, \; y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}.$$

Площадь нижнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot y\right) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)};$$

Площадь верхнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot x\right) = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Все 6 боковых граней — равные равнобедренные трапеции. Найдем высоту трапеции. В плоскости верхнего основания проводим отрезок O_1K перпендикулярно к стороне 6-угольника в нижней плоскости проводим OK перпендикулярно одноименной стороне 6-угольника; проведем отрезок K_1K (рис. 417).

$OK = y$, $O_1K_1 = x$

$$KK_2 = y - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(R - r) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5 - 2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}.$$

Из $\triangle K_1K_2K$:

$$K_1K = \sqrt{h^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{64 + 27}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ (см)}.$$

$$S_{бок} = 6 \cdot \frac{a + b}{2} \cdot KK_1 = 3 \cdot (R + r) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = 3 \cdot (2 + 5) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} =$$

$$= \frac{21\sqrt{91}}{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

Площадь полной поверхности: $S = S_{бок} + S_{верхн} + S_{нижн}$

$$S = \frac{21\sqrt{91}}{2} + 6\sqrt{3} + \frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{91}}{2} =$$

$$= \frac{87\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(7\sqrt{91} + 29\sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{)}.$$

№ 632. Сфера касается всех граней призмы. Центр ее должен быть равноудален от оснований, то есть лежать на середине высоты призмы. Отрезок, соединяющий центры оснований, является высотой приз-

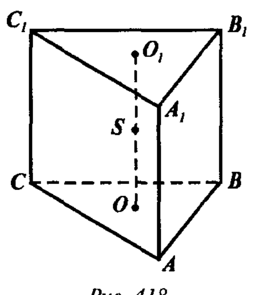


Рис. 418

мы, и все точки, лежащие на отрезке O_1O, равноудалены от боковых граней призмы. (Точки O и O_1 – центры вписанных в основания окружностей.) Таким образом, середина O_1O, точка S, является центром сферы (рис. 418).

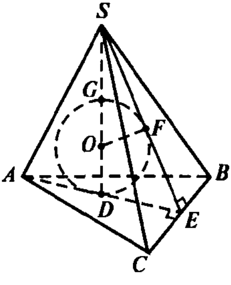


Рис. 419

№ 633. Возьмем для простоты треугольную правильную пирамиду. SD — высота пирамиды. Проведем $AE \perp BC$, отрезок SE (рис. 419). По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp CB$.

Впишем в $\triangle SDE$ полуокружность DFG, центр O которой лежит на катете SD, а дуга касается сторон DE и SE. $\triangle SED$ вместе с полуокружностью DFG будем поворачивать вокруг SD. Тогда катет DE опишет окружность, вписанную в $\triangle ABC$, поэтому гипотенуза SE при вращении остается внутри пирамиды, за исключением трех положений, когда SE будет совпадать с высотой боковых граней.

Вывод: сфера, образованная вращением полуокружности DFG, будет иметь единственную общую точку с каждой из боковых граней. Эта сфера касается и основания пирамиды в точке D.

Тогда центр вписанной в пирамиду $SABC$ сферы лежит на высоте SD.

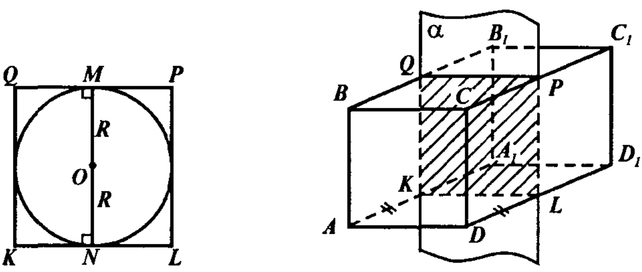


Рис. 420

№ 634. а) Рассмотрим сечение $KLPQ$, где точки K, L, P, Q — середины AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 соответственно. В сечении получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы (рис. 420). Пусть ребро куба равно a, $a = 2R$. Площадь одной грани равна a^2, или $4R^2$.

$$S_{полн} = 6 \cdot 4R^2 = 24R^2$$

б) Высота призмы O_1O равна диаметру сферы; точки касания сферы с боковыми гранями принадлежат сечению призмы плоскостью, проходящей через середину высоты призмы (центр сферы) перпендикулярно к боковым ребрам (рис. 421). Пусть сторона правильного шестиугольника равна a, тогда $a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Боковая грань — прямоугольник, его площадь равна $H \cdot a$ или $2R \cdot \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cdot R^2$.

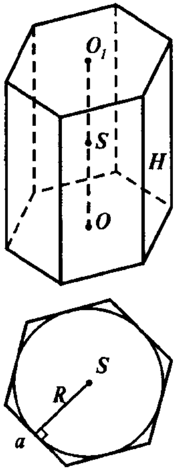


Рис. 421

Площадь боковой поверхности равна:

$$S_{бок} = 6 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24\sqrt{3}}{3} R^2 = 8\sqrt{3}R^2$$

Площадь основания складывается из площадей шести равносторонних треугольников, площадь каждого из них равна

$$\frac{1}{2} aR = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot R = \frac{R^2}{\sqrt{3}}.$$

Площадь основания равна: $\dfrac{6R^2}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} R^2 = 2\sqrt{3}\,R^2$.

$$S_{полн} = 8\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}\,R^2 + 2\sqrt{3}\,R^2 = 12\sqrt{3}\,R^2.$$

в) В правильном тетраэдре все ребра равны; примем они равны a. Проведем $AK \perp BC$, отрезок DK (рис. 422). В правильном $\triangle ABC$ AK проходит через центр $\triangle ABC$, По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. $\angle AKD$ — линейный угол двугранного угла при основании тетраэдра (все двугранные углы равны). $\triangle OKL = \triangle OKH$, OK — биссектриса $\angle AKD$. Из $\triangle DBC$:

$$DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = AK$$

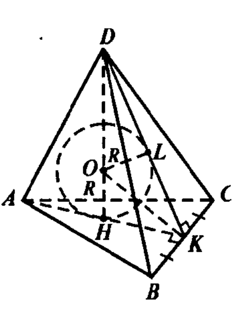


Рис. 422

HK — радиус вписанной окружности, $HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.
Примем $\angle DKH = \alpha$.

В $\triangle DKH$: $\cos\alpha = \frac{HK}{DK} = \frac{a}{2\sqrt{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a}{2\sqrt{3}\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}$.

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{3\cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из $\triangle OHK$: $\frac{R}{HK} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, отсюда $HK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R\sqrt{2}$.

$$a = 2\sqrt{3}\sqrt{2}R = 2\sqrt{6}R.\ S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 6\cdot\sqrt{3}}{4}R^2 = 6\sqrt{3}R^2$$

Все грани правильного тетраэдра — равные равносторонние треугольники, поэтому площадь полной поверхности $S = 4S_{\triangle ABC} = 24\sqrt{3}R^2$.

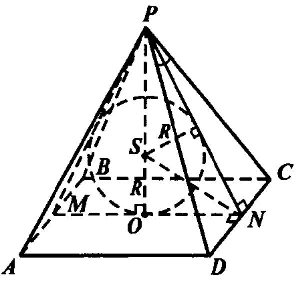


Рис. 423

№ 635. PO — высота пирамиды. Проведем через точку O $MN \parallel AD$, отрезки PM и PN (рис. 423). По теореме о трех перпендикулярах $PN \perp DC$, $PM \perp AB$. Центр сферы находится в точке пересечения биссектрис двугранных углов при основании: известно также, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте пирамиды. Следовательно, задаче отвечает рисунок, на котором SN — биссектриса $\angle PNO$ — линейного угла двугранного угла при основании пирамиды.

$AD = a, PN = x.\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2x};\ x = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Примем $\angle PKO = \varphi$, $0 < \varphi < 90°$.

В $\triangle PON$: $\cos\varphi = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{a}{2x} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

В $\triangle SON$: $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{SO}{ON} = \dfrac{2R}{a}$;

$$\frac{2R}{a} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \text{ отсюда } a = \frac{2R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$x = \frac{2R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}};\ S_{\triangle DCP}=\frac{1}{2}ax$$

$$S_{\triangle DCP} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{R\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$S_{бок} = 4S_{\triangle DCP} = \frac{4R^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, отсюда

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$S_{бок} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4R^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

При $R = 5$ см и $\alpha = 60°$ получим:

$$S_{бок} = \frac{4 \cdot 25}{\operatorname{tg} 30°} \cdot \frac{\cos 60°}{1 - \sin 60°} = \frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{100\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{4 - 3} = 100\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{).}$$

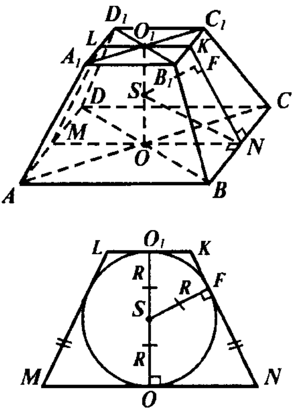


Рис. 424

№ 636. Боковые грани — равнобедренные трапеции; высоты этих трапеций называются апофемами (рис. 424).

Известно, что в правильной усеченной пирамиде центр вписанной в нее сферы находится в середине отрезка OO_1 где O и O_1 — центры оснований. Это утверждение вытекает из теоремы о центре сферы, вписанной в правильную пирамиду, (см. задачу № 633).

Из планиметрии известно, что в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

$ML + KN = LK + MN$;

$2KN = LK + MN$

$$KN = \frac{LK - MN}{2} = \frac{B_1C_1 + BC}{2}$$

(в основаниях — квадраты, $LK = A_1B_1 = B_1C_1$ и $MN = AB = BC$), ч. т. д.

№ 637. а) В основаниях призмы лежат равные равносторонние треугольники. Примем A и B центры оснований (рис. 425).

Все точки, лежащие на перпендикуляре к верхнему основанию призмы, проведенном через точку B, равноудалены от вершин треугольника PQR. Все точки, лежащие на перпендикуляре к нижнему основанию призмы, прведенному через точку A, равноудалены от вершим $\triangle P_1Q_1R_1$. Т.к. призма правильная, то треугольники $P_1Q_1R_1$ и PQR проектируются один на другой, поэтому точка B проектируется в точку A и обратно. Значит, AB перпендикулярен плоскости PQR. Тогда, отрезок AB есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин каждого из треугольников. Середина его — точка O — равноудалена от вершин $\triangle P_1Q_1R_1$ и от вершин $\triangle PQR$ на одинаковое расстояние R, равное радиусу описанной около призмы сферы

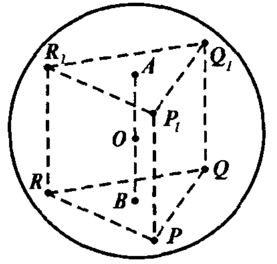


Рис. 425

б) Проведем из вершины D пирамиды высоту DH; DH перпендикулярен плоскости ABC, Проведем отрезки HA, HB, HC (рис. 426).

$\triangle DHA = \triangle DHB = \triangle DHC$ (они прямоугольные, DH — общий катет, $AD = BD = CD$ по условию).

$HA = HB = HC = r$, r-радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

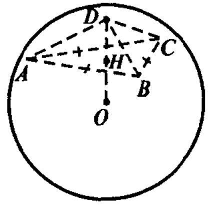


Рис. 426

Из точки O (центр сферы) проведем, отрезок OG, перпендикулярный плоскости ABC (точка G на рисунке не показана). Проведем отрезки GA, GB, GC, OA, OB, OC. $\triangle OGA = \triangle OGB = \triangle OGC$ (катет OG общий, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы). Значит, $GA = GB = GC = r$, r — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Вокруг $\triangle ABC$ можно описать единственную окружность, то есть окружность имеет единственный центр и радиус.

Вывод: точки H и G совпадают, точки D, H, O лежат на одной прямой. Значит, центр сферы O лежит на высоте пирамиды DH или на продолжении за точку H, что и изображено на рисунке.

№ 638. Тетраэдр — это пространственный четырехугольник.

а) Докажем, что через любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну. (см. ниже).

Известно, что геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину. Поэтому центр сферы, описанной около тетраэдра, должен

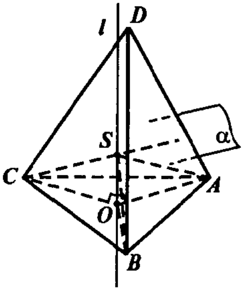


Рис. 427

принадлежать каждой из плоскостей, проведенных через середины ребрер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам.

Примем O — центр окружности, описанной около грани ABC тетраэдра, l — прямая, проходящая через точку O, l перпендикулярна плоскости ABC. Каждая точка прямой l равноудалена от точек A, B и C. ($OA = OB = OC = r$ — радиус описанной окружности). Если точка $S \in l$, то прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны по двум катетам. Значит, $SA = SB = SC$.

Примем, что плоскость α проходит через середину ребра DA и плоскость α перпендикулярна DA. Докажем, что l и α пересекаются. Для этого предположим, что $\alpha \parallel l$.

Если $\alpha \perp AD$ и $l \parallel \alpha$, то $AD \perp l$. Кроме того, $l \perp AB$ (поскольку l параллельна плоскости ABC), и, тогда $l \perp ABD$ — по признаку перпендикулярности прямой плоскости.

Вывод: через точку A проведены две различные плоскости ABC и ABD, перпендикулярные к одной прямой, что невозможно. Поэтому предположение, что $l \parallel \alpha$ неверно, значит l и α пересекаются.

Следовательно примем, что точка S есть точка пересечения l и α. В этом случае $SD = SA$, т.к. S принадлежит каждой плоскости, проходящей через середину ребра тетраэдра и перпендикуляра к этому ребру.

А так как $S \in l$, то $SA = SB = SC$, и, следовательно, S равноудалена от всех вершин тетраэдра.

Расстояние от точки O до одной из вершин тетраэдра обозначим R. Сфера с центром S и радиусом R проходит через все данные точки. Из приведенного доказательства следует, что такая сфера может быть только одна.

Тогда около любого тетраэдра можно описать сферу.

б) Рассмотрим две грани с общим ребром. Геометрическим местом точек, равноудаленных от обеих граней двугранного угла, является плоскость, делящая двугранный угол пополам, или, по аналогии с планиметрией, биссекторная плоскость этого двугранного угла. Поэтому центр сферы, вписанном в тетраэдр, равноудален от всех граней пирамиды, он принадлежит каждой из биссекторных плоскостей, то есть является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов тетраэдра. Т.к. все точки биссекторной плоскости расположены между гранями двугранного угла, то центр сферы, вписанной в тетраэдр, всегда находится внутри тетраэдра.

Итак, центр у вписанной сферы может быть только один. Сфера с центром в этой точке и радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра. Значит, в любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.

Замечание. В рассуждении было использовано, но не доказано следующее утверждение:

Биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

Докажем это утверждение.

1. $M \in \gamma$. $\angle ACB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β (рис. 428).

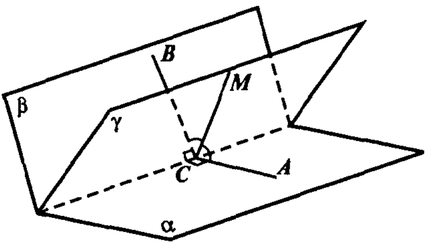


Рис. 428

Примем, что γ делит этот двугранный угол так, что $\angle BCM = \angle ACM$. Следовательно γ биссекторная плоскость данного двугранного угла.

Докажем, что биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одному лучу.

β_1 и β_2 — биссекторные плоскости, их пересечение — луч, исходящий из точки S — вершины тетраэдра. Луч обозначим l. Примем, что точка $A \in l$, A — произвольная точка луча (рис. 429). Проведем перпендикуляры AA_1, AA_2, AA_3 на грани трехгранного угла. $A \in \beta_1$, поэтому $AA_2 = AA_1$; $A \in \beta_2$. поэтому $AA_3 = AA_1$.

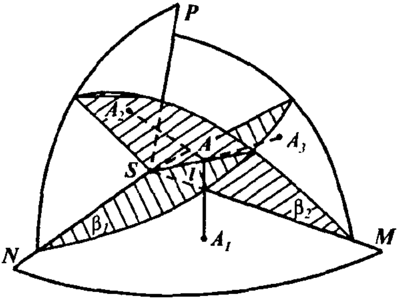


Рис. 429

Следовательно, $AA_1 = AA_2 = AA_3$, то есть точка A равноудалена от плоскостей граней NSP и MSP. Следовательно, точка A находится на биссекторной плоскости двугранного угла с ребром SP. А т.к. точка A выбрана на луче l произвольно, то и весь луч находится в биссекторной плоскости.

Вывод: все три биссекторные плоскости пересекаются по одному лучу, любая точка которых равноудалена.

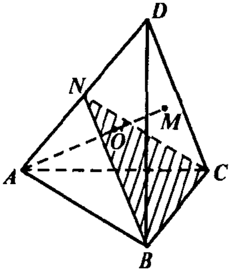


Рис. 430

2. Примем, что l — луч, по которому пересекаются биссекторные плоскости трехгранного угла при вершине A, M — точка, в которой луч l пересечет грань BDC (рис. 430). Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссекторная плоскость этого двугранного угла пересечет отрезок AM в точке O. $O \in l$, поэтому она равноудалена от плоскостей ABC, ABD и ACD. Кроме этого, расстояние от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, т.к. точка O принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC. Значит, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, то есть принадлежит всем биссекторным плоскостям двугранных углов тетраэдра. Итак, биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

№ 639. а) Центр сферы совпадает с центром куба — точкой пересечения диагоналей куба. Примем, что сторона основания куба (и его ребро) равно a. Следовательно, диагональ куба $d = a\sqrt{3}$. С другой стороны, $d = 2R$.

$$2R = a\sqrt{3}, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

Площади поверхностей одной грани равна a^2, а полная поверхность куба равна $6a^2$.

$$S = 6a^2 = 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2 = \frac{6 \cdot 4}{3}R^2 = 8R^2.$$

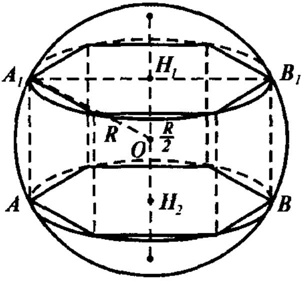


Рис. 431

б) H_1 и H_2 — центры оснований призмы; H_1H_2 — высота призмы.

Рассмотрим сечение призмы плоскостью, проходящей через диаметр оснований призмы перпендикулярно основаниям призмы. В сечении получится прямоугольник AA_1B_1B (рис. 431).

Из прямоугольного $\triangle OAH_1$:

$$AH_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

AH_1 является радиусом описанной окружности около основания призмы, а в правильном шестиугольнике его сторона равна радиусу описанной около него окружности.

Примем, что сторона основания равна a, следовательно

$$R \cdot a = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{бок} = 6aR = 3\sqrt{3}R^2. \quad S_{полн} = 3\sqrt{3}R^2 + 2S_{осн} = 3\sqrt{3}R^2 + 3\sqrt{3}a^2 =$$

$$= 3\sqrt{3}\left(R^2 + \frac{3R^2}{4}\right) = 3\sqrt{3}R^2\frac{7}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{4}R^2.$$

в) Примем, что ребро тетраэдра равно a. Центр описанной сферы лежит на высоте DH (рис. 432), точка Н — центр $\triangle ABC$, поэтому $HA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного $\triangle ADH$:

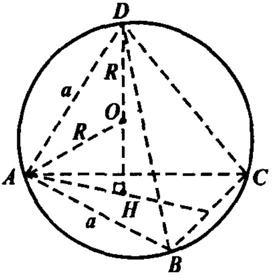


Рис. 432

$$DH = \sqrt{a^2 - HA^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{DH}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ где } \alpha = \angle ADH$$

Из $\triangle AOD$ по теореме косинусов (рис. 433):

$a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180° - 2\alpha) = 2R^2 +$
$+ 2R^2\cos 2\alpha = 2R^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) =$
$= 4R^2\cos^2\alpha = \dfrac{8}{3}R^2.$

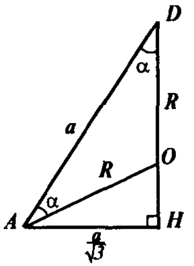


Рис. 433

Площадь одной грани тетраэдра равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; все грани — равносторонние треугольники, поэтому

$$S_{полн} = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = \frac{8}{3}R^2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2.$$

№ 640. SO — высота пирамиды; $SO = h$. Примем, что O — центр основания пирамиды, M — середина BC, AM — высота в $\triangle ABC$ (рис. 434).

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3};\quad OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ где } a = AB.$$

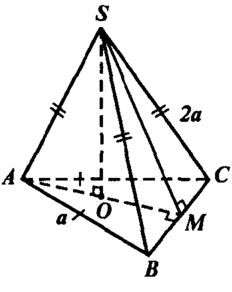


Рис. 434

Центры обеих сфер лежат на прямой SO, SO перпендикулярна плоскости AB.

R — радиус описанной сферы Продолжим SO до пересечения с описанной сферой в точке D (рис. 435).

SD — диаметр шара, $\angle SAD = 90°$. Из подобия треугольников OAS и ODA:

$$OD = \frac{AO^2}{OS} = \frac{a^2}{3h}, \text{ т. к. } AO = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$2R = SD = SO + OD = h + \frac{a^2}{3h} = \frac{3h^2 + a^2}{3h}$$

$R = \dfrac{3h^2 + a^2}{2\cdot 3h} = \dfrac{3h^2 + a^2}{6h}$. Проведем отрезок SM.

Из $\triangle SMC$: $SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$OM = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, поэтому из $\triangle SOM$:

$$h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{44a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

$$R = \frac{3a^2 \cdot \frac{11}{3} + a^2}{6a\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{12a}{6\sqrt{\frac{11}{3}}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{2a\sqrt{33}}{11} = \frac{2\sqrt{33}}{11}a.$$

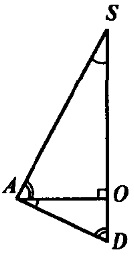


Рис. 435

Найдем радиус r вписанной сферы.

Примем, что Q — центр вписанного шара, следовательно в $\triangle$ SOM QM — биссектриса $\angle SOM$, $QO = r$ (рис. 436). $SM = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$ (рис. 436).

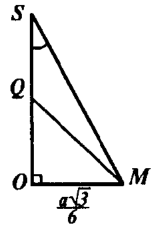


Рис. 436

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника:

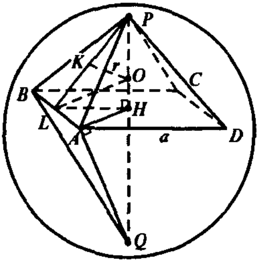
$$\frac{OQ}{SQ} = \frac{OM}{SM}, \frac{r}{h - r} = \frac{a\sqrt{3}}{6\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}.$$

$$R = \frac{a^2\sqrt{\frac{11}{3}}}{a + \sqrt{\frac{12 \cdot 11}{3}a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{\frac{11}{3}}}{1 + \sqrt{45}} = a \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{45} - 1}{45 - 1} =$$

$$= a \cdot \frac{\sqrt{11}\left(3\sqrt{5} - 1\right)}{\sqrt{3} \cdot 44} = a \cdot \frac{\sqrt{11}\left(3\sqrt{5} - 1\right)}{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = a\frac{\left(3\sqrt{5} - 1\right)}{4\sqrt{33}}.$$

№ 641. Продолжим высоту пирамиды PH до пересечения со сферой в точке Q. PQ — диаметр, центр описанной сферы лежит на высоте PH или на ее продолжении за точку H. Соединим отрезком точку A с точкой H. Рассмотрим сечение плоскостью APQ (рис. 437).

$\angle QAP = 90°$, как опирающийся на диаметр,



$\triangle HPA \sim \triangle HAQ$, $\dfrac{AH}{PH} = \dfrac{HQ}{AH}$,

$AH^2 = HQ \cdot PH$, $PQ = 10$, $PH = h$.

Примем a — сторона основания, следовательно $AH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно

$$\frac{a^2}{2} = h(10 - h). \qquad (1)$$

Проведем $HL \perp AB$, отрезок PL. $LH = \dfrac{a}{2}$, плоскость PLH перпендикулярна плоскости ABP. Примем, что O — центр вписанной сферы, $OK \perp$ PL. $OH = OK = r$, OL — биссектриса $\angle HLP$ (рис. 438).

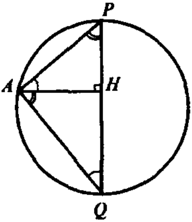


Рис. 437

$$PL = \sqrt{h^2 + LH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Примем $\angle HLP = \alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{PH}{LP} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{LH}{PL} = \frac{\dfrac{a}{2}}{\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{4h^2 + a^2}}.$$

Из $\triangle OLH$: $\dfrac{OH}{LH} = \dfrac{r}{\dfrac{a}{2}} = \dfrac{2r}{a} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $r = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \dfrac{a}{\sqrt{4h^2 + a^2}}}{\dfrac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}}} = \frac{\sqrt{4h^2 - a^2} - a}{2h},$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{4h^2 + a^2} - a}{2h} = 2 \qquad (2)$$

$a\sqrt{4h^2 + a^2} = a^2 + 8h$

$$\begin{cases} a\sqrt{4h^2 + a^2} = a^2 + 8h \\ a^2 = 2h(10-h) \end{cases}$$

$a^2(4h^2 + a^2) = a^4 + 64h^2 + 16a^2h.$

$4h^2a^2 + a^4 = a^4 + 64h^2 + 16a^2h$

$a^2(4 - h) + 16h = 0,$

$2h(10 - h)(4 - h) + 16h = 0$

Разделим обе части на $2h \neq 0$

$(10 - h)(4 - h) + 8 = 0$

$h^2 - 14h + 48 = 0$

$h_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49-48} = 7 \pm 1$, $h_1 = 8$ или $h_2 = 6$;

$a_1^2 = 20 \cdot 8 - 2 \cdot 64 = 160 - 128 = 32$, $a_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$,

$a_2^2 = 20 \cdot 6 - 2 \cdot 36 = 120 - 72 = 48$, $a_2 = 4\sqrt{3}$.

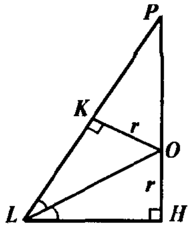


Рис. 438

№ 642. Рассмотрим осевое сечение. R — радиус сферы, $ABCD$ — квадрат.

$BH_1 = OH_1. = R$, BH_1 — радиус основания цилиндра, $HH = 2R$ — высота цилиндра (рис. 439).

Найдем площадь полной поверхности цилиндра.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

$S_{бок} = 2 \cdot BH_1 \cdot HH_1 = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$,

$S_{осн} = \pi \cdot BH_1^2 = \pi R^2$;

$S_{полн} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Площадь поверхности сферы $4\pi R^2$.

$$\frac{S_{сф}}{S_{полн}} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2} = \frac{2}{3}$$

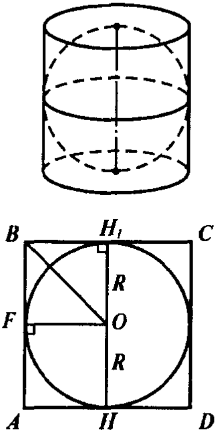


Рис. 439

№ 643. Рассмотрим осевое сечение.

а) Высота SH делит осевое сечение на два равных треугольника: SH — биссектриса угла φ (рис. 440).

В $\triangle HBS$: $\angle HBC = 90° - \frac{\varphi}{2}$; OB — биссектриса $\angle HBS$;

$$\angle HBO = \frac{\angle HBS}{2}$$

Из прямоугольного $\triangle OHB$:

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tg} \angle HBO = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right),$$

$$r = \frac{R}{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)} = \frac{R}{\operatorname{ctg}\left(90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)\right)} = \frac{R}{\operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{4}\right)} = R \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{4}\right).$$

б) $\frac{R}{r} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$, $R = r \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$ $\left(\frac{\varphi}{4} < 45^\circ\right)$,

в) $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) = 30^\circ$, $\frac{\varphi}{4} = 15^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

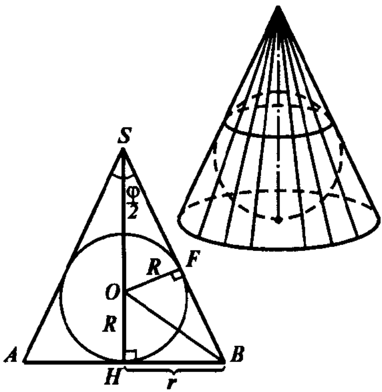


Рис. 440

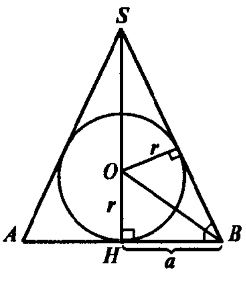


Рис. 441

№ 644. Нарисуем осевое сечение. SH — высота конуса; OB — биссектриса $\angle HBS$, $\angle OBH = \frac{\alpha}{2}$. В $\triangle OBH$ (рис. 441):

$$\frac{r}{BH} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Найдем площадь основания конуса:

$$S_{осн} = \pi a^2 = \frac{\pi r^2}{tg^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Примем $SB = l$. Из $\triangle SHB$:

$$\frac{a}{l} = \cos\alpha,\ l = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$$

Найдем площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi a l = \frac{\pi r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha} = \frac{\pi r^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$$

$$S_{полн} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\pi r^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\cos\alpha} = \frac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}.$$

№ 645. Рассмотрим осевое сечение.

Высота цилиндра равна его образующей, а т.к. образующая равна ди метру основания, то $ABCD$ — квадрат (рис. 442).

Примем $AD = a$, радиус сферы равен R.

Из $\triangle ADB$: $BD^2 = (2R)^2 = a^2 + a^2$; $2R = a\sqrt{2}$, $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Площадь сферы $4\pi R^2 = 4\pi\dfrac{a^2}{2} = 2\pi a^2$.

Радиус основания цилиндра $\dfrac{a}{2}$.

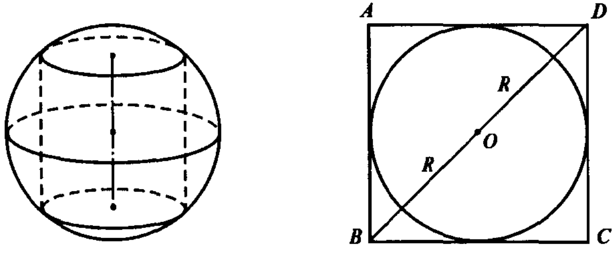


Рис. 442

$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2;$$

$$S_{осн} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}; \; S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = \pi a^2 + 2\frac{\pi a^2}{4} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

$$\frac{S_{полн}}{S_{сф}} = \frac{\frac{3\pi a^2}{2}}{2\pi a^2} = \frac{3}{4}.$$

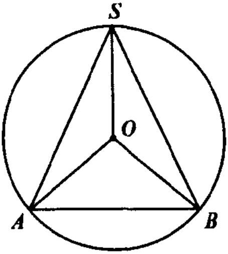


Рис. 443

№ 646. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис.443). Тогда $AB = 2r$, $SA = SB$, $\angle ASB = \varphi$. Поэтому $\angle AOB = 2\varphi$, как центральный угол, опирающийся на дугу AB.

Из ΔAOB:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$. $(2r)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\varphi$.

Следовательно

а) $r = \dfrac{\sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\varphi}}{2}$.

б) $(2r)^2 = 2R^2(1 - \cos\varphi)$,

таким образом $R = \dfrac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}$.

в) $1 - \cos\varphi = \dfrac{4r^2}{2(2r)^2}$, т. е. $\cos\varphi = 1 - \dfrac{4r^2}{2(2r)^2} = \dfrac{1}{2}, \Rightarrow \varphi = 60°$.

Глава VII. Объемы тел

§1. Объем прямоугольного параллелепипеда

№ 647.

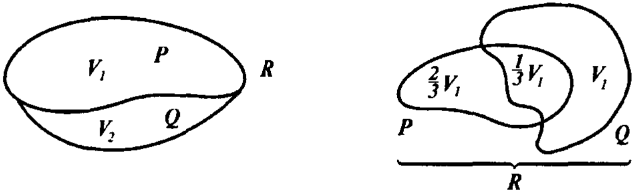


Рис. 444

а) $V = V_1 + V_2$ б) $V = V_1 - \frac{1}{3}V_1 + V_2 = \frac{2}{3}V_1 + V_2$

№ 648. (рис. 445).

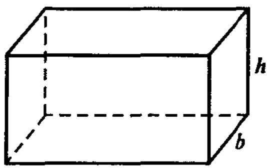


Рис. 445

По теореме п. 64 $V = abh$.

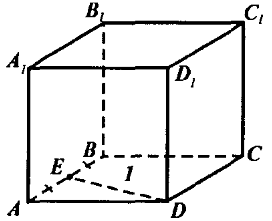
а) $V = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 11 \cdot 180 = 1980$;

б) $V = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} = 30\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 300$;

в) $V = 18 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 13 = 90 \cdot 13\sqrt{3} = 1170\sqrt{3}$;

г) $V = 3\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} \cdot 0{,}96 = \frac{10 \cdot 0{,}96}{3} \cdot \sqrt{5} = 3{,}2\sqrt{5}$.

№ 649. (рис. 446).



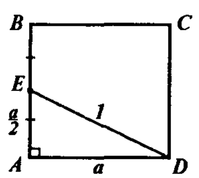


Рис. 446

а) $AC = 12$ см. Примем ребро куба равное a, $\Rightarrow$ из $\triangle ACD$ $a\sqrt{2} = 12$,

$a = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

$V = a^3 = (6\sqrt{2})^3 = 432\sqrt{2}$ (см^3);

б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$.

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$,

$AC_1 = a\sqrt{3}$, $3\sqrt{2} = a\sqrt{3}$, $a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$V = a^3 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 6\sqrt{6};$$

в) $DE = 1$ см.

Из $\triangle EAD$: $1 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$, $a^2 = \frac{4}{5}$, $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (м^3);

$$V = a^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{25} = 0{,}32\sqrt{5}\text{ см}^3.$$

№ 650 $V_{пар} = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 96 \cdot 18 = 1728$ (см^3). Примем ребро куба равное a, следовательно $V_{куб} = a^3$. Имеем уравнение:

$a^3 = 1728$, отсюда $a = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{12\cdot144} = \sqrt[3]{12\cdot12\cdot12} = 12$ (см).

№ 651. $m = \rho V$. $V = 25 \cdot 12 \cdot 6.5 = 1950$ (см^3).

$m = 1{,}8 \cdot 1950 = 3510$ (г) $= 3{,}51$ (кг).

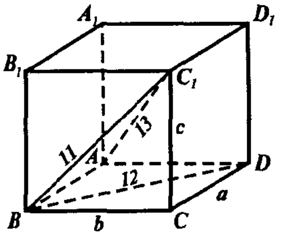


Рис. 447

№ 652. Примем $AB = a$, $BC = b$ и $CC_1 = c$. Применяя теорему Пифагора, запишем уравнения:

$a^2 + b^2 = 12^2 = 144;$ (1)

$b^2 + c^2 = 11^2 = 121;$ (2)

$a^2 + b^2 + c^2 = 13^2 = 169$ (3)

$(a^2 + b^2 = AC^2,\ AC^2 + C_1C^2 = AC_1^2)$.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 144 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 169 \\ b^2 + c^2 = 121 \end{cases}$$

$c^2 = 169 - (a^2 + b^2) = 169 - 144 = 25$, $c = 5$ (см);

$b^2 = 121 - c^2 = 121 - 25 = 96$, $b = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ (см);

$a^2 = 144 - b^2 = 144 - 96 = 48$, $a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

$V = S_{ABCD} \cdot CC_1$; $V = abc = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5 = 80\sqrt{3}\sqrt{6} = 240\sqrt{2}$ (см^3).

№ 653. BC_1 — проекция D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C (рис. 448), поэтому $\angle D_1BC_1 = 30°$, $\angle DBB_1 = 45°$.

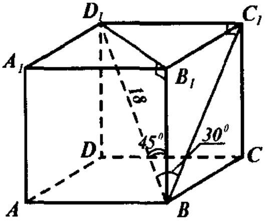
Из прямоугольного $\triangle D_1C_1B$: $D_1C_1 = 9$ см, как катет, лежащий против угла в 30°.

Из прямоугольного $\triangle D_1B_1B$:

$B_1B = 18\cos 45° = 18\frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ (см).

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Значит,
$18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^{\,2}$ (учтено, что в $\triangle D_1B_1B$: $B_1B = D_1B_1$).

$B_1C_1^{\,2} = 9^2 \cdot 4 - 9^2 \cdot 2 - 9^2 = 9^2(4 - 2 - 1) = 9^2$, отсюда $B_1C_1 = 9$ (см).
$V = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2}$ (см^3).



Зис. 448

№ 654. DB — проекция диагонали на плоскости основания, $\angle D_1BD = \beta$; BC_1 — проекция диагонали на плоскость боковой грани, $\angle D_1BC_1 = \alpha$, $DD_1 = AA_1 = h$ (рис. 449).

Из $\triangle D_1DB$: $\frac{DD_1}{DB} = \operatorname{tg}\beta$,

$\frac{h}{DB} = \operatorname{tg}\beta$, $DB = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$;

$D_1B = \frac{DD_1}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\beta}$.

Примем $AB = a$, $AD = b$.

Из $\triangle ADB$: $a^2 + b^2 = DB^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta}$.

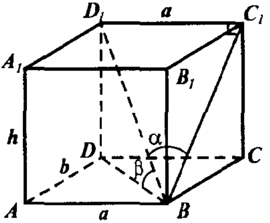


Рис. 449

Из $\triangle D_1BC_1$: $D_1C_1 = D_1B\sin\alpha$, $a = \frac{h}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha = \frac{h\sin\alpha}{\sin\beta}$,

$$b^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta} - a^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta} - \frac{h^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},\quad b = \sqrt{h^2\left(\frac{1}{tg^2\beta} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)} =$$

$$= h\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}} = \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

$V = abh$;

$$V = \frac{h\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} \cdot h = \frac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}.$$

№ 655. C_1B — проекция диагонали D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C, Обозначим $AB = a$ $BC = b$, $D_1B = d$ и $C_1C = c$ (рис. 450).

Из $\triangle D_1BC_1$: $a = \frac{d}{2}$, $d = 2a$, $BC_1 = d\cos 30° = 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

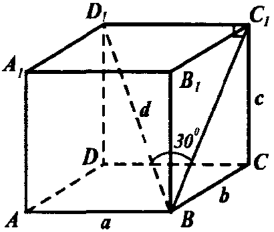


Рис. 450

Из $\triangle BC_1C$: $b^2 + c^2 = BC_1^{\,2} = 3a^2$

$c^2 = 3a^2 - b^2$, $c = \sqrt{3a^2 - b^2}$.

$V = S_{ABCD} \cdot CC_1$; $V = ab\sqrt{3a^2 - b^2}$.

№ 656. Диагонали в прямоугольнике равны $AC = BD = 12$ см. $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \perp B_1B$ и $BD \perp B_1B$, $\angle ABD = 60°$ — линейный угол двугранного угла A_1B_1BD (рис. 451).

Из $\triangle B_1BD$: $B_1B = BD = 12$ см.

Из $\triangle ABD$: $AB = 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$ см,

$AD = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

$V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 432\sqrt{3}$ (см^3).

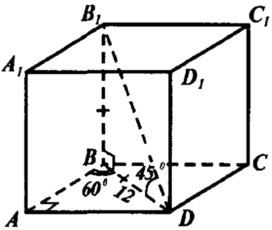


Рис. 451

№ 657. а) $\triangle C_1CA$ — равнобедренный прямоугольный (рис. 452),

$CA = CC_1 = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (м),

$C_1B \perp AB$, $\triangle ABC_1$ — прямоугольный, $AB = \dfrac{1}{2}$ (м).

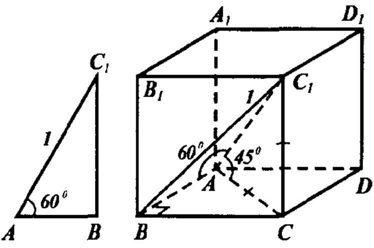


Рис. 452

Из $\triangle ABC$:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ (м).

$V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{8}\sqrt{2}$ м^3.

б) Из $\triangle AA_1C_1$: $AA_1 = A_1C_1 = 24 \sin 45° = 24\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ (см) (рис. 453).

Из $\triangle AC_1D$: $AD = \dfrac{1}{2}AC_1 = 12$ (см).

$C_1D = 24 \cos 30° = 24\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ (см).

Из $\triangle C_1CD$ ($\angle C_1CD = 90°$) имем:

$(12\sqrt{3})^2 = (12\sqrt{2})^2 + CD^2$,
$CD^2 = 3 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^2 = 12^2$;
$CD = 12$ (см).
$V = B_1B \cdot AD \cdot CD$;
$V = 12\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 12 = 1728\sqrt{2}$ (см^3).

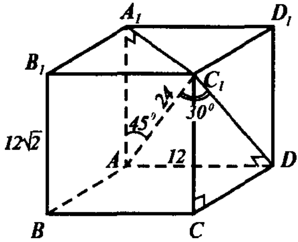


Рис. 453

№ 658. (рис. 454).

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} =$
$= 12$ (см).

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = 35 \cdot 6 = 210$ (см^2)

$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 210 \cdot 11 = 2310$ (см^3).

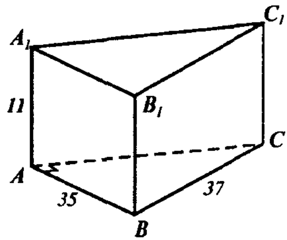


Рис. 454

§2. Объем прямой призмы и цилиндра

№ 659. а) Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов (рис. 455):

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 120° =$
$= 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49$; $BC = 7$ (см).

Т. к. $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то наибольшую площадь имеет та боковая грань, у которой вторая сторона наибольшая, то есть $BC = 7$ см.

$S_{BB_1C_1C} = 35, 35 = BB_1 \cdot 7, BB_1 = 5$ (см).

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin 120°$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

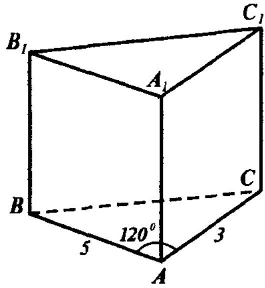


Рис. 455

б) Т.к. призма прямая, B_1B перпендикулярен плоскости ABC, $B_1B \perp BC$, $B_1B \perp AB$. $\angle ABC = 90°$ линейный угол двугранногр угла с ребром B_1B. Из $\triangle AB_1C$ по теореме косинусов:

$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos 60° = 13 - 6 = 7$, $AC = \sqrt{7}$.

Примем $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$. В $\triangle ABC$:

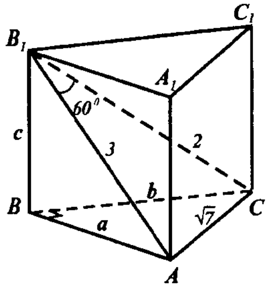


Рис. 456

$a^2 + b^2 = 7.$ (1)

В $\triangle AB_1B$: $a^2 + c^2 = 9$ (2)

В $\triangle CB_1B$: $b^2 + c^2 = 4.$ (3)

Получим систему:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 + c^2 = 9; \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases}$$

$2a^2 = 12$, $a^2 = 6$, $a = \sqrt{6}$ (см);

$b^2 = 7 - a^2 = 7 - 6 = 1$, $b = 1$ (см);

$c^2 = 4 - b^2 = 4 - 1 = 3$, $c = \sqrt{3}$ (см).

$V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1$;

$$V = \frac{1}{2}abc = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}.$$

№ 660. $\triangle ABC$ — равнобедренный (рис.457).

Из $\triangle ABD$: $BD = m\cos\frac{\varphi}{2}$, $BB_1 = m\cos\frac{\varphi}{2}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}m^2\sin\varphi$. $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{2}m^2\sin\varphi \cdot m\cos\frac{\varphi}{2}$

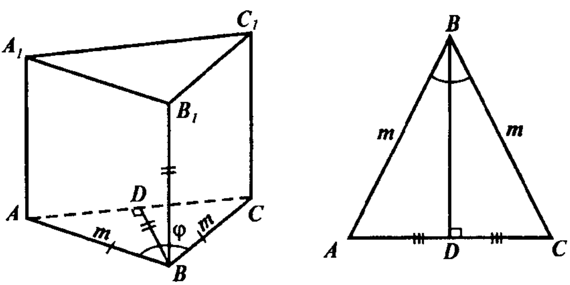


Рис. 457

№ 661. Примем $a = BA = BC$. Из прямоугольного $\triangle A_1B_1C$: $A_1C_1 = l\cos\beta$, $CC_1 = l\sin\beta$. $AC = A_1C_1 = l\cos\beta$ (рис. 458).

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$AC^2 = l^2\cos^2\beta = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha =$
$= 2a^2(1 - \cos\alpha),$

$$a^2 = \frac{l^2\cos^2\beta}{(1-\cos\alpha)\cdot 2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2\cos^2\beta}{2(1-\cos\alpha)}\sin\alpha;$$

$$V = S_{\Delta ABC}\cdot CC_1 = \frac{l^2\cos^2\beta\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}\cdot l\sin\beta =$$

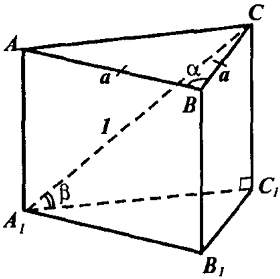


Рис. 458

$$= \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)} = \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

№ 662. В сечении — параллелограмм A_1B_1CD. В плоскости сечения A_1B_1CD проведем $A_1E \perp DC$; проведем отрезок EA (рис. 459).

По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $AE \perp DC$.

$S_{A_1B_1CD} = Q = DC \cdot A_1E = a\cdot A_1E,$

$$A_1E = \frac{Q}{a}$$

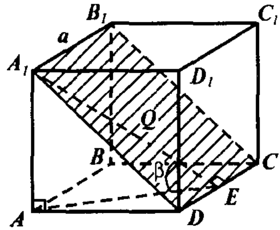


Рис. 459

Из прямоугольного ΔA_1AE:

$$AE = A_1E\cos\beta = \frac{Q}{a}\cos\beta,\ A_1A = \frac{Q}{a}\sin\beta,$$

$$S_{ABCD} = AE\cdot DC = \frac{Q}{a}\cos\beta\cdot a = Q\cos\beta.$$

$$V = S_{ABCD}\cdot AA_1 = Q\cos\beta\cdot\frac{Q}{a}\sin\beta = \frac{Q^2}{a}\sin\beta\cos\beta = \frac{Q^2}{2a}\sin 2\beta.$$

№ 663. $r = OK = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}, OK \perp AB$

Правильный n-угольник состоит из n треугольников одинаковой площади.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OK \cdot AB = \frac{a^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

$$S_{осн} = nS_{\Delta AOB} = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

$$V = S_{осн} \cdot AA_1 = \frac{na^3}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

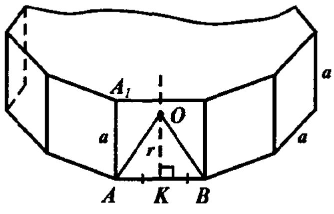


Рис. 460

а) $n = 3$. $V = \frac{3a^3}{4\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; в) $n = 6$. $V = \frac{6a^3}{4\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$;

б) $n = 4$. $V = \frac{4a^3}{4\operatorname{tg}45^\circ} = a^3$; г) $n = 8$. $V = \frac{8a^3}{4\operatorname{tg}\frac{45^\circ}{2}} = \frac{2a^3}{\operatorname{tg}22^\circ 30'}$.

№ 664. Проведем $CK \perp AB$, отрезок C_1K в плоскости сечения AC_1B. По теореме о трех перпендикулярах $C_1K \perp AB$; $\angle C_1KC = 60^\circ$ (рис. 461).

Из $\triangle C_1KC$: $\frac{CC_1}{CK} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, отсюда

$C_1C = CK\sqrt{3}$

Из $\triangle CKB$: $CK = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$C_1C = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

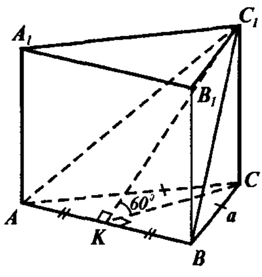


Рис. 461

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $V = S_{\Delta ABC} \cdot C_1C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

№ 665. Наибольшая из диагоналей — диагональ A_1B_4 (очевидно). Пусть A_1A_4 ее проекция на нижнее основание (рис. 462).

В правильном шестиугольнике $R = a$, R — радиус описанной окружности. $D = 2R = 2a = A_1A_4$.

Из $\triangle A_1A_4B_4$: $\frac{A_1A_4}{B_4A_4} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B_4A_4 = 2a\sqrt{3}$.

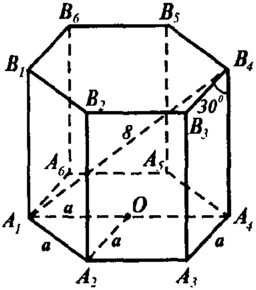


Рис. 462

$S_{A_1A_2...A_6} = 6S_{\triangle A_1OA_2}$; $S_{\triangle A_1OA_2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\Rightarrow$

$S_{A_1A_2...A_6} = \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

$V = S_{A_1A_2...A_6} \cdot B_4A_4 = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 2a\sqrt{3} = 9a^3$.

Из $\triangle A_1B_4A_4$: $A_1A_4 = 2a = 8 \sin 30° = 4$, $a = 2$ (см).

Итак, $V = 9 \cdot 2^3 = 8 \cdot 9 = 72$ (см^3).

№ 666. а) $V = \pi r^2 h$,

$V = \pi(2\sqrt{2})^2 \cdot 3 = \pi \cdot 8 \cdot 3 = 24\pi$ (см^3);

б) $r^2 = \dfrac{V}{\pi h}$;

$r^2 = \dfrac{120}{\pi \cdot 3{,}6} = \dfrac{120 \cdot 10}{\pi \cdot 36} = \dfrac{100}{3\pi}$; $r = \sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$.

в) $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$; $h = \dfrac{8\pi}{\pi h^2} = \dfrac{8}{h^2}$; $h^3 = 8$, $h = 2$ (см).

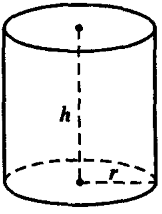


Рис. 463

№ 667. Провод в распрямленном положении имеет форму цилиндра (рис. 464).

$V = \pi r^2 l$, r — радиус сечения; l — длина провода.

С другой стороны, $\rho = \dfrac{m}{V}$, где ρ — плотность алюминия; m — масса алюминия; V — объем куска провода.

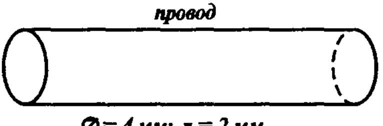


Рис. 464

Получаем уравнение: $\pi r^2 l = \dfrac{m}{\rho}$, отсюда $l = \dfrac{m}{\rho \pi r^2}$.

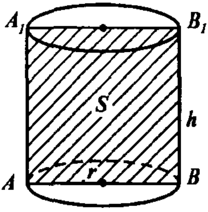
$r = 2$ мм $= 0{,}2$ (см), $r^2 = 0{,}04$ (см^2), $\pi \approx 3{,}14$, $\rho \approx 2{,}6$ г/см^3,

$$l \approx \frac{6800}{2{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04} = \frac{68 \cdot 100 \cdot 100}{2{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 4} \approx 2{,}08 \cdot 10^4 \text{ (см)} = 20800 \text{ (см)} = 208 \text{ (м)}.$$

№ 668. Объем цистерны $V = \pi r^2 h$, $r = \frac{18}{2} = 9$ (м),

$V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi$ (м^3).

$\rho = \frac{m}{V}$, $m = \rho V$, $m = 0{,}85 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3{,}14 = 0{,}85 \cdot 10^3 \cdot 567 \cdot 3{,}14 =$
$= 1513 \cdot 10^3$ (кг) $= 1513$ (т).



$S_{сеч} = Q$

Рис. 465

№ 669. Примем радиус основания равен r, а высота цилиндра равна h (рис. 465). Следовательно $S = 2rh$. (1)

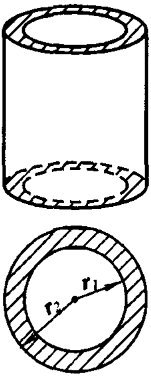
$Q = \pi r^2$. (2)

Тогда $V = \pi r^2 h = Qh$.

Из (1) $r = \frac{S}{2h}$. Подставим в (2):

$$Q = \frac{\pi S^2}{4h^2}, \ h^2 = \frac{\pi S^2}{4Q},$$

$$h = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}; \quad V = Q \cdot \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \frac{1}{2} S \sqrt{\pi Q}$$



Вид сверху

Рис. 466

№ 670. (рис. 466)

$\rho = 11{,}4$ г/см$^3 = 11{,}4 \cdot 1 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}}$ кг/м$^3 = 11{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

$r_1 = \frac{13}{2} = 6{,}5$ (мм) $= 6{,}5 \cdot 10^{-3}$(м).

$r_2 = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$ (мм) $= 10{,}5 \cdot 10^{-3}$ (м).

$V_{трубы} = \pi r_2^2 l - \pi r_1^2 l = \pi l(r_2^2 - r_1^2) = 3{,}14 \cdot 25(10{,}5^2 \times$
$\times 10^{-6} - 6{,}5^2 \cdot 10^{-6}) = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6}(10{,}5^2 - 6{,}5^2) =$
$= 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot (110.25 - 42{,}25) = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \times$
$\times 68 = 5338 \cdot 10^{-6}$(м^3)

$m = \rho V$, $m = 11{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5338 \cdot 10^{-6} = 60853{,}2 \cdot 10^{-3} \approx$
$\approx 60{,}85$ (кг) ≈ 61 (кг).

№ 671. Ясно, что высота призмы равна высоте цилиндра. Поэтому отношение объемов равно отношению площадей оснований призмы и цилиндра.

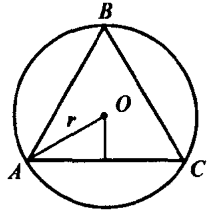


Рис. 467

а) $n = 3$, $\triangle ABC$ — правильный (рис. 467). Примем сторону $\triangle ABC$ равной a, следовательно:

$$r = AO = \frac{a}{\sqrt{3}};\ \left(\frac{a}{\sin 60°} = 2r,\ r = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_{кр} = \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{3};\ \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{кр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{\pi a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

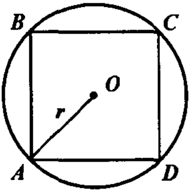


Рис. 468

б) $n = 4$, $ABCD$ — квадрат. Примем сторону квадрата равной a (рис. 468).

$$S_{ABCD} = a^2,\ AC = a\sqrt{2},\ r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{кр} = \pi r^2 = \pi\cdot\frac{a^2\cdot 2}{4} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$\frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{кр}} = a^2 : \frac{\pi a^2}{2} = \frac{2}{\pi}$$

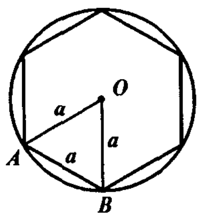


Рис. 469

в) $n = 6$. Примем сторона шестиугольника равна a, следовательно $r = a$ (рис. 469).

$$S_{шест} = 6S_{\triangle AOB} = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{кр} = \pi AO^2 = \pi a^2.$$

$$\frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{шест}}{S_{кр}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} : \pi a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

г) Примем, что сторона правильного вписанного n- угольника равна a. Следовательно радиус описанной окружности равен $\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$. $S_{n\text{-}уг} = nS_{\triangle} = n\left(\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{360}{n}\cdot\frac{1}{2}.$

(Правильный n-угольник разбивается радиусами, проведенными из центра, на n одинаковых треугольников; все треугольники равновелики.)

$$S_{кр}=\pi\cdot\left(\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2.$$

$$\frac{V_{пр}}{V_{цил}}=\frac{S_{n-уг}}{S_{кр}}=\frac{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{\pi\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=n\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

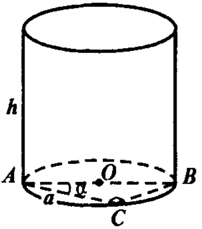


Рис. 470

№ 672. $\angle C=90^\circ$. $\angle ACB$ — вписанный и равен 90°, тогда он опирается на диаметр AB. $AB=2r=\frac{a}{\cos\alpha}$, $r=\frac{a}{2\cos\alpha}$, r — радиус основания цилиндра (рис. 470).

Высота призмы равна высоте цилиндра, поэтому

$$V_{цил}=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{a^2}{4\cos^2\alpha}\cdot h=\frac{\pi a^2h}{4\cos^2\alpha}.$$

§3. Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса

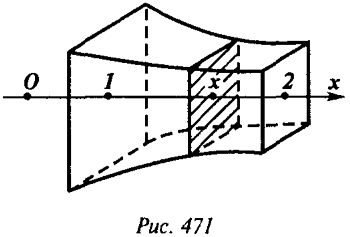


Рис. 471

№ 673. (рис. 471).

По формуле п. 67

$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, где $a=1$; $b=2$.

$$S(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^{-2}$$

$$V=\int\limits_1^2 x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{x}\Bigg|_1^2=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

№ 674. По формуле (2) п. 67

$V=\int_a^b S(x)\,dx$, где $a=0$; $b=1$ (рис. 472).

$S(x)=\pi(\sqrt{x})^2=\pi x$.

$V=\int_0^1 \pi x\,dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

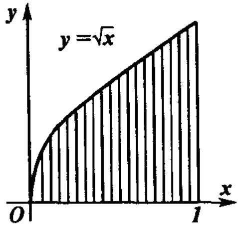


Рис. 472

№ 675. Объем данной фигуры равен объему фигуры, полученной вращением заштрихованной фигуры на рис. 473 вокруг оси Ox.

$V=\int_0^1 S(x)\,dx$, где $S(x)=\pi(x^2)^2$

$V=\int_0^1 \pi x^4\,dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1}{5}$.

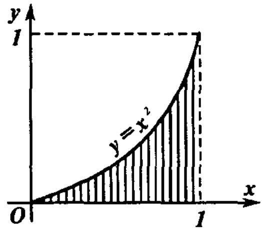


Рис. 473

№ 676. Проведем из точки A_1 перпендикуляр A_1M к плоскости $\triangle ABC$. $\Rightarrow$ $\angle A_1AM=60°$ (рис. 474).

Из $\triangle A_1AM$: $A_1M=h=8\sin 60°=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ (см).

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)}$,

$p=\frac{10+10+12}{2}=\frac{32}{2}=16$(см),

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{16\cdot6\cdot6\cdot4}=4\cdot6\cdot2=$
$=48$ (см^2).

$V=S_{\triangle ABC}\cdot h$

$V=48\cdot4\sqrt{3}=192\sqrt{3}$ (см^3).

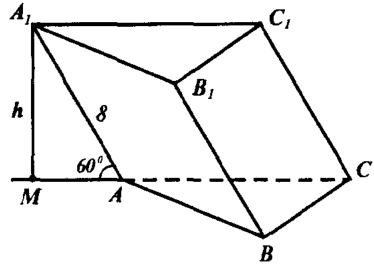


Рис. 474

№ 677. $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. По условию задачи плоскость ABB_1A_1 перпендикулярна плоскости ABC. Проведем $B_1K\perp AB$. $B_1K=h$ — высота призмы (рис. 475).

Из $\triangle AB_1K$: $AK=\sqrt{b^2-h^2}$

Из $\triangle B_1KB$: $KB=\sqrt{a^2-h^2}$.

Получим уравнение: $AK + KB = AB = a$.

$\sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2} = a$,

$b^2 - h^2 + a^2 - h^2 + 2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = a^2$,

$2\sqrt{(b^2 - h^2)(a^2 - h^2)} = 2h^2 - b^2$.

$2h^2 - b^2 \geqslant 0, h^2 \geqslant \dfrac{b^2}{2}, h \geqslant \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

$4(b^2a^2 - b^2h^2 - a^2h^2 + h^4) = 4h^4 + b^4 - 4h^2b^2$,

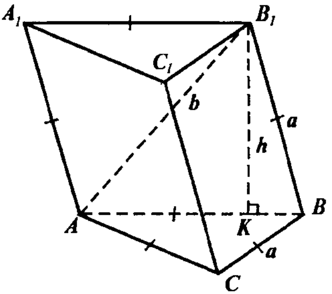


Рис. 475

$4b^2a^2 - b^4 = 4a^2h^2$;

$h^2 = \dfrac{b^2(4a^2 - b^2)}{4a^2}$,

$h = \dfrac{b}{2a}\sqrt{4a^2 - b^2}$.

$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \times$

$\times \dfrac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a} = \dfrac{ab}{8}\sqrt{12a^2 - 3b^2}$.

№ 678. Проведем A_1O перпендикулярный плоскости ABC, точка O — центр правильного $\triangle ABC$. Отрезок OA — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности (рис. 476).

По теореме синусов:

$\dfrac{BC}{\sin \angle A} = 2R = 2AO$, отсюда

$AO = R = \dfrac{m}{2\sin 60°} = \dfrac{m}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$

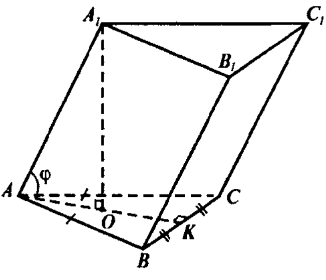


Рис. 476

Из прямоугольного $\triangle A_1OA$: высота призмы

$A_1O = R \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{m}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{4}$; $V = S_{\triangle ABC} \cdot A_1O = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{m \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} = \dfrac{m^3 \operatorname{tg}\varphi}{4}$.

№ 679. Наклонные A_1B, A_1A, A_1C равны по условию. Следовательно их проекции на плоскость ABC тоже равны, то есть проекция точки A_1 на плоскость ABC — точка O будет центром описанной около $\triangle ABC$ окружности, тогда, точка O — середина гипотенузы BC (рис. 477), $A_1O \perp BC$. A_1O — высота призмы. $\triangle A_1OA$ — равнобедренный прямоугольный, $A_1O = AO$.

$BC = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} =$
$= \sqrt{625} = 25$ (см).

$OC = OB = OA = \dfrac{25}{2}$ (см).

Высота призмы $OA_1 = \dfrac{25}{2}$ (см).

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{7 \cdot 24}{2} = 84$ (см^2).

$V = S_{\triangle ABC} \cdot OA_1 = 84 \cdot \dfrac{25}{2} = 42 \cdot 25 = 1050$ (см^3).

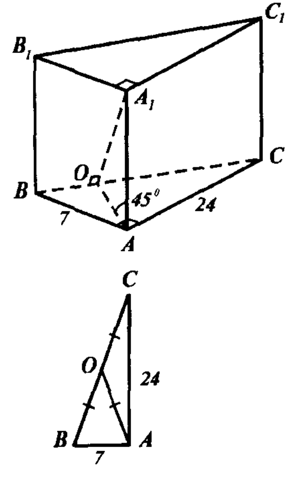


Рис. 477

№ 680. Проведем $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$. $\triangle B_1BM = \triangle B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу). Значит, $B_1M = B_1N$. Проведем B_1O перпендикулярно плоскости ABC, отрезки ON и OM (рис. 478). Следовательно, из равенства наклонных B_1M и B_1N следует равенство их проекций, $OM = ON$, то есть точка O, лежит на биссектрисе угла ABC.

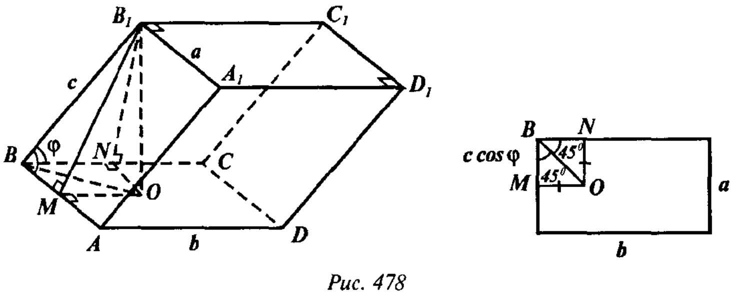


Рис. 478

Из $\triangle B_1BM$: $BM = c\cos\varphi$, $BO = BM\sqrt{2} = c\sqrt{2}\cos\varphi$.
Из прямоугольного $\triangle B_1BO$:
$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos\varphi} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = c\sqrt{-\cos 2\varphi}$
($2\varphi > 90°$, $\cos 2\varphi < 0$, $-\cos 2\varphi > 0$)
B_1O — высота параллелепипеда. $S_{ABCD} = ab$;
$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

№ 681. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2).

Найдем высоту параллелепипеда. Боковое ребро BB_1 составляет со смежными сторонами основания равные углы; примем $\angle B_1BA = \angle B_1BC = \varphi$.

Проведем $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$. $\triangle B_1BM = \triangle B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $B_1M = B_1N$. Проведем B_1O перпендикулярно плоскости $ABCD$, отрезки ON и OM. Из равенства наклонных B_1M и B_1N следует равенство их проекций, $ON = OM$. Точка O равноудалена от сторон ромба BC и BA, то есть она лежит на биссектрисе угла ABC, а в ромбе биссектрисой угла служит диагональ ромба, значит, точка O лежит на диагонали ромба DB. B_1O —высота параллелепипеда (рис. 479).

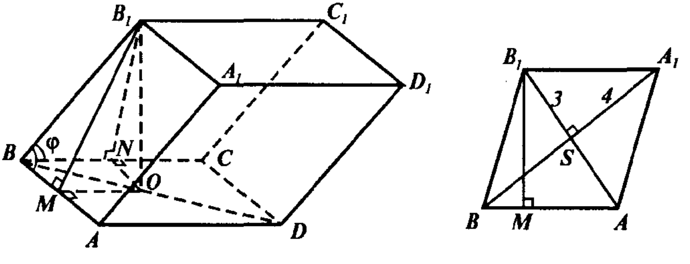


Рис. 479

По свойству диагоналей ромба $\angle A_1SB_1 = 90°$ и $B_1S = 3$, $A_1S = 4$. Следовательно сторона ромба $B_1A_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

$S_{BB_1A_1A} = BA \cdot B_1M = 24, \quad 5 \cdot B_1M = 24, \quad B_1M = \frac{24}{5}$(см).

Из прямоугольного $\triangle B_1MB$:

$$BM = \sqrt{BB_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{625-576}{25}} = \frac{7}{5}\text{ (см)}$$

Из $\triangle ABD$: $\cos\beta = \frac{4}{5}$; где $\beta = \angle DBM$

Из $\triangle MOB$: $BO = BM \cdot \frac{1}{\cos\beta} = \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

Из прямоугольного $\triangle B_1OB$:

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{25\cdot 16 - 49}{16}} = \frac{\sqrt{351}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{39}\text{ (см)}.$$

$$V = S_{ABCD}\cdot B_1O = 24\cdot\frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39}\text{ (см}^3\text{)}.$$

№ 682. Проведем плоскость γ, перпендикулярно боковым ребрам призмы. Далее, осуществим параллельный перенос фигуры, ограниченной плоскостями β, γ и боковыми ребрами призмы так, чтобы плоскость α совместилась с плоскостью β. Тогда мы получим прямую призму, боковая сторона которой равна боковой стороне исходной призмы, а основание является сечением исходной призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам (рис. 480).

В силу свойства аддитивности объема $V_1 = V_2$, где V_1 и V_2 соответственно объемы исходной и полученной призмы. $V_2 = S\cdot l$, где S — площадь основания, ч. т. д.

n — угольная наклонная призма

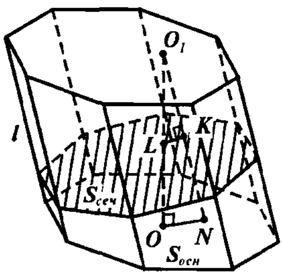


Рис. 480

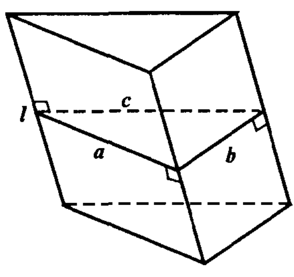


Рис. 481

№ 683. Примем l — длина бокового ребра призмы, а расстояние между боковыми ребрами равны a, b, c. В Согласно замечанию в п. 68, объем призмы можно вычислить по формуле

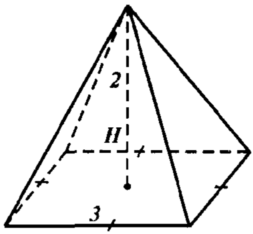
$V = S_\perp \cdot l$, где $S_\perp$— площадь перпендикулярного (к боковым ребрам) сечения призмы. Треугольник, составленный из отрезков a, b, и c является перпендикулярным сечением (рис. 481).

$S_\perp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{37+13+30}{2} = \frac{80}{2} = 40$ (см).

$S_\perp = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = \sqrt{40 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 10} = 20 \cdot 9 = 180$ (см^2).

$S_{бок.\ пов} = l \cdot (a+b+c) = l \cdot 80$, значит $l \cdot 80 = 480$, т. е. $l = 6$

$V = S_\perp \cdot l = 180 \cdot 6 = 1080$ (см^3).



№ 684. (рис. 482). а) $S_{осн} = 3^2 = 9$ (м^2),

$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 = 6$ (м^3);

б) $h = 2{,}2$ м $= 220$ см.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin 30° =$

$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 67{,}5$ (см^2),

$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} \cdot 67{,}5 \cdot 220 =$

$= 22{,}5 \cdot 220 = 4950$ (см^3).

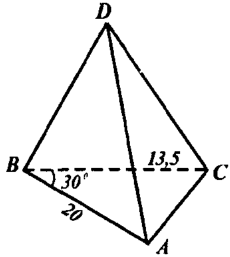


Рис. 482

№ 685. $h = 12$ см, $a = 13$ см.

$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{13^2\sqrt{3}}{4} = \frac{169\sqrt{3}}{4}$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{169\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 169\sqrt{3}$ (см^3).

№ 686. а) DO — высота пирамиды. Из прямоугольного $\triangle ADO$: $BO = H = l \sin \varphi$. Точка O — центр $\triangle ABC$, OA — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности (рис. 483). По теореме синусов:

$\frac{BC}{\sin 60°} = 2OA$, $OA = l \cos \varphi$.

$BC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot \cos \varphi = l\sqrt{3} \cos\varphi$.

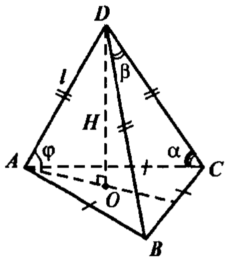


Рис. 483

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 l^2\cos^2\varphi\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\varphi.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\varphi}{4}\cdot l\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\sin\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\varphi\cos\varphi$$

б) В правильной пирамиде боковые ребра равны; $\triangle ADC$ — равнобедренный. $\angle D = 180° - 2\alpha$ (рис. 484).

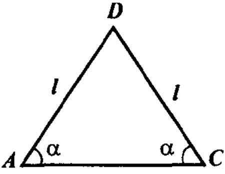


Рис. 484

По теореме косинусов:

$$AC^2 = l^2 + l^2 - 2\cdot l\cdot l\cdot\cos(180° - 2\alpha) =$$

$$= 2l^2(1 + \cos 2\alpha) = 2l^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 4l^2\cos^2\alpha$$

$$AC = \sqrt{4l^2\cos^2\alpha} = 2l\,|\cos\alpha| = 2l\cos\alpha;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2l\cos\alpha)^2\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}\cos^2\alpha.$$

Найдем длину отрезка OA, $OA = R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 2AO,\ OA = \frac{AC}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$ Из $\triangle ADO$:

$$DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\cos^2\alpha}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}\cdot l^2\sqrt{3}\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}.$$

в) $\triangle BDC$ — равнобедренный. По теореме косинусов:

$$BC^2 = l^2 + l^2 - 2\,l\cdot l\cdot\cos\beta = 2l^2(1 - \cos\beta) = 2l^2\,2\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

$$BC = \sqrt{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}} = 2l\sin\frac{\beta}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

В $\triangle ABC$ OA — радиус описанной окружности:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2AO,\ OA = \frac{BC}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$:

$$H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{3}} = \sqrt{\frac{3l^2 - 4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{3}} =$$

$$= \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

№ 687. Из $\triangle BCD$ найдем боковое ребро. Примем $DB = DC = DA = l$ (рис. 485). По теореме косинусов:

$$a^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos\varphi = 2l^2(1-\cos\varphi) = 2l^2 2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$a = 2l\sin\frac{\varphi}{2},\ l = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Проведем DO перпендикулярно плоскости ABC.

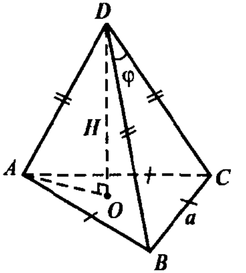


Рис. 485

$DO = H = \sqrt{l^2 - OA^2}$, OA — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2OA,\ OA = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$H = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{3}}.$$

$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot H.$ $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, поэтому

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\frac{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

№ 688. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Проведем $OE\perp DC$ (рис. 486). По теореме о трех перпендикулярах $SE\perp DC$. Таким образом, $\angle OES=\beta$ — линейный угол двугранного угла при основании.

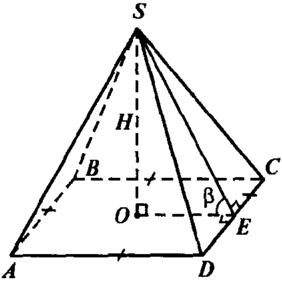


Рис. 486

а) $OE=\dfrac{H}{\mathrm{tg}\beta}=H\,\mathrm{ctg}\,\beta$,

$AD=2OE=2H\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

$S_{ABCD}=AB^2=4H^2\mathrm{ctg}^2\,\beta$.

$V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot H=\dfrac{1}{3}\cdot 4H^2\,\mathrm{ctg}^2\,\beta\cdot H=\dfrac{4}{3}H^3\,\mathrm{ctg}^2\,\beta$.

б) $SO=H$ — высота пирамиды Проведем $OE\perp DC$, отрезок SE (рис. 487). По теореме о трех перпендикулярах $SE\perp DC$.

В неправильной пирамиде боковые ребра равны, $\triangle DSC$ — равнобедренный, высота SE является биссектрисой и медианой.

Из $\triangle DSE$: $\dfrac{m}{2}\cdot\dfrac{1}{SE}=\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\quad SE=\dfrac{m}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

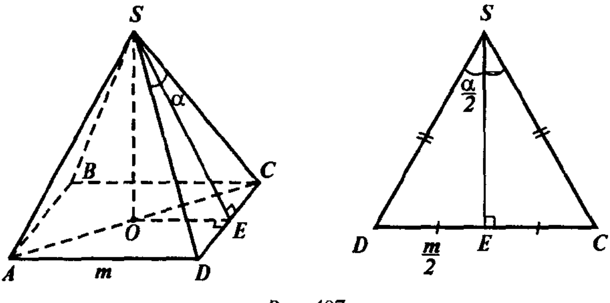


Рис. 487

$$\text{Из } \triangle SOE\text{: } SO = H = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)} = \frac{m}{2}\sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$S_{ABCD} = m^2. \quad V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{m^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

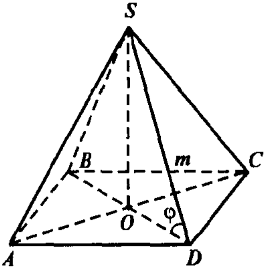


Рис. 488

№ 689. SO перпендикулярен плоскости $ABCD$, SO — высота пирамиды. В правильной пирамиде все боковые ребра равны. OD — проекция SD на плоскость основания, $\angle SDO = \varphi$ (рис. 488).

Из $\triangle SOD$:

$SO = m \sin\varphi$, $OD = m\cos\varphi$;

$BO = OD$, $BD = 2m\cos\varphi$.

Примем сторону основания равной a. Следовательно $a\sqrt{2} = 2m\cos\varphi$, $a = \sqrt{2}m\cos\varphi$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}SO = \frac{1}{3} \cdot 2m^2\cos^2\varphi \cdot m\sin\varphi = \frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

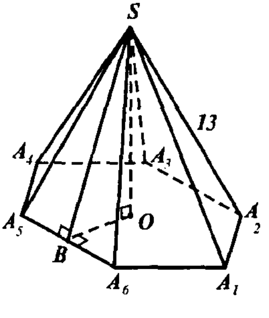


Рис. 489

№ 690. Проведем $OB \perp A_5A_6$. По теореме о трех перпендикулярах $SB \perp A_5A_6$. $OB = r$, r — радиус вписанной в основание окружности; $r = 6 : 2 = 3$ (см). Примем, что a — сторона основания (рис. 489).

Как известно, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, отсюда

$$a = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

$$S_{\triangle A_5OA_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5A_6 \cdot OB = \frac{1}{2}ar$$

$S_{\triangle A_5OA_6} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{осн} = 6S_{\triangle A_5OA_6} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см^2).

Найдем высоту пирамиды из $\triangle SOB$.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{SB^2 - r^2} = \sqrt{SB^2 - 9}$.

Из равнобедренного $\triangle SA_5A_6$ найдем SB. (Т.к. SB — высота в равнобедренном треугольнике, то она является медианой, $A_5B = BA_6 = \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$ (см).

$SB = \sqrt{SA_6^2 - BA_6^2} = \sqrt{13^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{169-3} = \sqrt{166}$ (см).

Из $\triangle SBO$: $SO = \sqrt{166-9} = \sqrt{157}$ (см).

$V = \frac{1}{3}S_{осн}SO = \frac{1}{3}18 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{157} = 6\sqrt{471}$ (см^3).

Найдем площадь боковой поверхности. $S_{бок} = 6 \cdot S_{\triangle A_5SA_6}$

$S_{\triangle A_5SA_6} = \frac{1}{2} \cdot A_5A_6 \cdot SB = \frac{1}{2}a \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{166} = \sqrt{3 \cdot 166} = \sqrt{498}$

$S_{бок} = 6\sqrt{498}$ (см^2).

№ 691. Проведем SO перпендикулярно плоскости ABC; SO — высота пирамиды. $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC$, они прямоугольные, SO — общий катет, они имеют равный острый угол, тогда, $OB = OC = OA = R$, где R — радиус описанной окружности (рис. 490).

$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$,

$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{10}{2\sin\angle B} = \frac{5}{\sin\angle B}$.

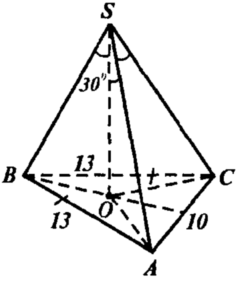


Рис. 490

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$10^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos\angle B$,

$100 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos\angle B$,

$2 \cdot 169 \cdot \cos\angle B = 338 - 100$,

$\cos\angle B = \frac{238}{2 \cdot 169} = \frac{119}{169}$.

$\sin\angle B = \sqrt{1 - \cos^2\angle B}$

$\sin\angle B = \sqrt{1 - \frac{119^2}{169^2}} = \sqrt{\frac{169^2 - 119^2}{169^2}} = \frac{\sqrt{14400}}{169} = \frac{120}{169}$.

Значит $R = OB = \dfrac{5 \cdot 169}{120} = \dfrac{169}{24}$.

Из $\triangle SOB$ найдем высоту SO: $SO = \dfrac{R}{\operatorname{tg} 30^\circ} = R\sqrt{3} = \dfrac{169}{24}\sqrt{3}$ (см).

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-13)(p-13)}$, где $p = \dfrac{10+13+13}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ (см).

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ (см^2),

$V = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} SO = \dfrac{1}{3} \cdot 60 \cdot \dfrac{169\sqrt{3}}{24} = \dfrac{169\sqrt{3} \cdot 5}{3 \cdot 2} = \dfrac{845\sqrt{3}}{6}$ (см^3).

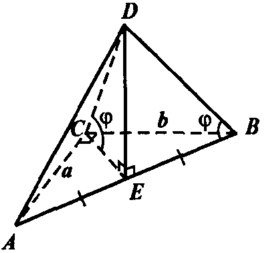


Рис. 491

№ 692. Проведем высоту пирамиды DE. Поскольку все ребра одинаково наклонены к плоскости основания,; то $\triangle DEA = \triangle DEB = \triangle DEC$ (по катету и острому углу). Поэтому $EA = EB = EC = R$, R — радиус описанной окружности. Таким образом, точка E — середина гипотенузы AB, плоскость ADB перпендикулярна плоскости ABC (рис. 491).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab;$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2};\ BE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{DE}{BE} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$DE = BE \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{tg}\varphi}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \times$$

$$\times \operatorname{tg}\varphi = \frac{ab}{12} \cdot \operatorname{tg}\varphi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

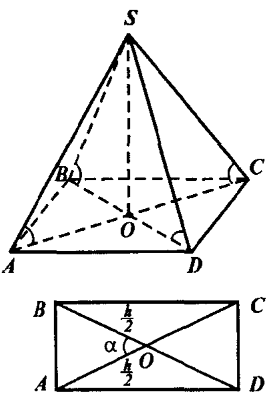


Рис. 492

№ 693. SO — высота пирамиды DE. $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD$ (по катету и острому углу). Отсюда $OA = OB = OC = OD$, высота проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ (рис. 492).

$BO = OA = \frac{b}{2}$ — по свойству диагоналей прямоугольника.

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha.,$

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot \sin\alpha$

$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin \alpha. + \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot BO \cdot \sin\alpha(OA + OC) = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot sin\,\alpha \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin\alpha \cdot b =$

$= \frac{b^2}{4}\sin\alpha;\quad S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 \sin\alpha}{2}.$

$\angle OAS = \varphi$, следовательно $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SO}{AO} = SO : \frac{b}{2} = \frac{2}{b}SO.$

$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABCD}SO,\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin\alpha}{2} \cdot SO,\ SO = \frac{6V}{b^2 \sin\alpha},$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{b} \cdot \frac{6V}{b^2 \sin\alpha} = \frac{12V}{b^3 \sin\alpha};$

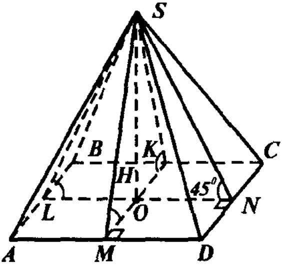
$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{12V}{b^3 \sin\alpha}$

№ 694. Построим линейные углы двугранных углов при основании. Проведем высоту пирамиды SO; $ON \perp DC$, $OK \perp BC$, $OL \perp AB$ и $OM \perp AD$.

По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, $SK \perp BC$, $SL \perp AB$, $SM \perp AD$. $\triangle SOM = \triangle SON = \triangle SOK = \triangle SOL$ (по катету и острому углу). Значит, $OM = ON = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в основание окружности (рис. 493).

$\triangle SON$ — равнобедренный,

$SO = ON = 1,5$ см.



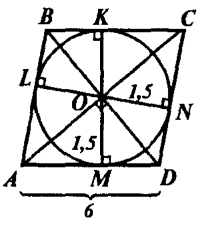


Рис. 493

$S_{ABCD} = AD \cdot MK = 6(1,5 \cdot 2) = 6 \cdot 3 = 18$ (см^2).

$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1,5 = 6 \cdot 1,5 = 9$ (см^3).

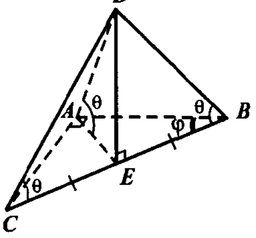


Рис. 494

№ 695. а) Проведем высоту DE, отрезки EA, EB, EC. $\triangle DEA = \triangle DEB = \triangle DEC$ (по катету и острому углу). Отсюда $EA = EB = EC = R$, R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Значит, точка E является серединой BC, плоскость CDB перпендикулярна плоскости ABC; $CE = EB = \frac{c}{2}$ (рис. 494).

Из $\triangle DEB$: $\frac{DE}{EB} = \operatorname{tg}\theta$, $DE = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg}\theta$.

В $\triangle ABC$: $AC = c \sin\varphi$, $AB = c \cos\varphi$;

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin\varphi \cos\varphi$.

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg}\theta = \frac{c^3 \operatorname{tg}\theta \sin 2\varphi}{24}$$

б) Проведем $OL \perp AB$, $OK \perp CA$, $OM \perp CB$.

По теореме о трех перпендикулярах $DL \perp AB$, $DM \perp CB$, $DK \perp CA$. $\triangle DOL = \triangle DOK = \triangle DOM$. Тогда $OM = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис. 495).

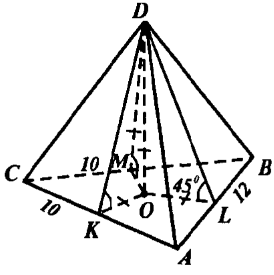


Рис. 495

$r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{10+10+12}{2} = 16$ (см).

$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48$ (см^2).

$r = \frac{48}{16} = 3$ (см).

Из $\triangle DOL$: $DO = OL = 3$ (см).

$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} DO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48$ (см^3).

в) $AS \perp SC$, $AS \perp SB$. AS перпендикулярен плоскости BSC, AS — высота пирамиды (рис. 496).

$$S_{\triangle CSB} = \frac{1}{2}ab.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle CSB}AS = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc = \frac{abc}{6}.$$

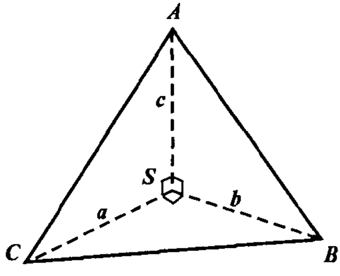


Рис. 496

№ 696. DA — высота пирамиды (линия пересечения двух плоскостей перпендикулярных к третьей плоскости есть перпендикуляр к этой плоскости).

Проведем $AK \perp BC$, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$, $\angle AKD = 60°$ — линейный угол двугранного угла $DBCA$ (рис. 497).

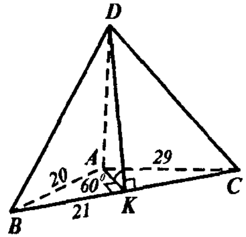


Рис. 497

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$$

$$p = \frac{20+29+21}{2} = 35 \text{ (см)}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{35\cdot15\cdot6\cdot14} =$$

$=\sqrt{7\cdot5\cdot3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2} = 7\cdot5\cdot3\cdot2 = 210(\text{см}^2)$. С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot BC = 210,\ AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2\cdot210}{21} = 20 \text{ (см)}.$$

Из $\triangle DAK$: $\dfrac{DA}{AK} = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$, $DA = 20\sqrt{3}$ (см).

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}DA = \frac{1}{3}\cdot210\cdot20\cdot\sqrt{3} = 70\cdot20\sqrt{3} = 1400\sqrt{3}\ (\text{см}^3).$$

№ 697. $V = \dfrac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\right)$,

где $h = O_1O$, $S = S_{\triangle ABC}$, $S_1 = S_{\triangle A_1B_1C_1}$.

Проведем $MT \perp AN$ (рис. 498).

$TN = ON - O_1M$,

$$ON = \frac{BC}{2\sqrt{3}},\ O_1M = \frac{B_1C_1}{2\sqrt{3}}.\ ON = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$O_1M = \frac{1\cdot a}{2\cdot2\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}},$$

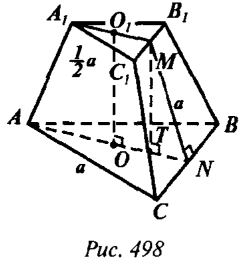


Рис. 498

$$TN = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$

Из $\triangle MTN$: $MT = O_1O = \sqrt{MN^2 - TN^2} = \sqrt{\frac{48a^2 - a^2}{48}} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{47}{3}}$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{47}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}\right) =$$

$$= \frac{a\sqrt{47}}{3\cdot 4\cdot\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cdot 4}\right) = \frac{a^3\sqrt{47}\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 4\cdot 4} = \frac{7\sqrt{47}a^3}{192}.$$

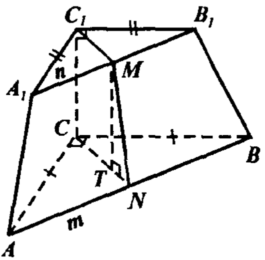


Рис. 499 а

№ 698. Проведем $C_1M \perp A_1B_1$, и $CN \perp AB$, отрезок MN. Поскольку $AB \perp CN$ и $AB \perp C_1C$. то плоскость CC_1NM перпендикулярна AB, $MN \perp AB$, MN — апофема. Проведем $MT \perp CN$, MT — высота пирамиды. $\angle MNT = \varphi$ линейный угол двугранного угла $MABC$ (рис. 499 а, б).

$$C_1M = MB_1 = \frac{n}{2};\ CN = NB = \frac{m}{2}$$

$$TN = CN - C_1M = \frac{m}{2} - \frac{n}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

В $\triangle MTN$: $\frac{MT}{TN} = \operatorname{tg}\varphi$, $MT = TN\operatorname{tg} = \frac{m-n}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

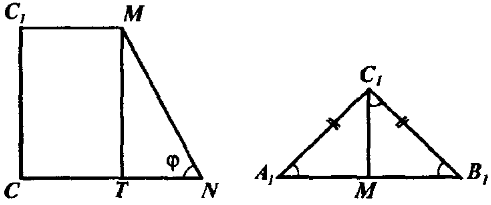


Рис. 499 б

$$AB = AC\sqrt{2},\ m = AC\sqrt{2},\ AC = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{2} = \frac{m^2}{4},\ S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{n^2}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3}MT\left(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}\right);$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{m-n}{2}\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2n^2}{4\cdot 4}}\right) = \frac{m-n}{6}\times$$

$$\times\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{m^2+n^2}{4} + \frac{mn}{4}\right) = \frac{1}{24}\cdot\operatorname{tg}\varphi(m-n)\left(m^2+mn+n^2\right) = \frac{m^3-n^3}{24}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

№ 699. Проведем высоту пирамиды DO. $\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$ (по гипотенузе и катету) (рис. 500). Тогда $OA = OB = OC$ точка O равноудалена от вершин $\triangle ABC$, то есть является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.

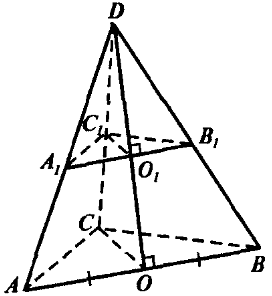


Рис. 500

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (т.к. плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны по условию, значит, $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$), поэтому $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

$\triangle DO_1B_1 \sim \triangle DOB$ — они имеют общий острый угол при вершине D, $\frac{DO_1}{DO} = \frac{O_1B_1}{OB} = \frac{DB_1}{DB}$.

$$\triangle DA_1B_1 \sim \triangle DAB,\ \frac{DA_1}{DA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{DB_1}{DB} = \frac{\frac{1}{2}DB}{DB} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\frac{DO_1}{DO} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, поэтому

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{4},\quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 18 = 216\ (\text{дм}^2).$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{216}{4} = 54(\text{дм}^2)$$

Найдем высоту усеченной пирамиды O_1O.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 124} = \sqrt{900} = 30$ (дм).

$\triangle ADB$ — равнобедренный, $DA = DB = 25$ (дм).

Из $\triangle DOB$: $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ (дм);

$O_1O = \frac{1}{2} DO = 10$(дм).

$$V = \frac{1}{3} O_1O\left(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}\right);$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10(216 + 54 + \sqrt{216 \cdot 54}) = \frac{10}{3}(270 + \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 2}) =$$
$$= (270 + 27 \cdot 4) = \frac{10}{3}(270 + 108) = 10 \cdot 126 = 1260 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

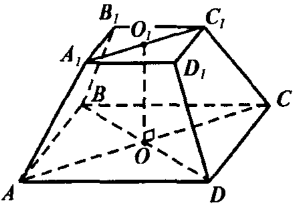


Рис. 501

№ 700. $A_1D_1 = 4$ см, $AD = 6$ см, $S_{AA_1C_1C} = 15$ см^2.

$S_{ABCD} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см^2).

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1D_1^{\,2} = 4^2 = 16$ (см^2).

O_1O — высота пирамиды (рис.501).

$A_1C_1 \parallel AC$ поэтому сечение AA_1C_1C — равнобедренная трапеция.

$S_{AA_1C_1C} = 15 = \frac{A_1C_1 + AC}{2} O_1O$, где O_1O — высота пирамиды и высота сечения.

$A_1C_1 = 4\sqrt{2}$; $AC = 6\sqrt{2}$.

$$15 = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} O_1O = 5\sqrt{2} O_1O,\ O_1O = \frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} O_1O\left(S_{\triangle ABCD} + S_{\triangle A_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{\triangle ABCD} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1D_1}}\right);$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}(36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(52 + 24) = \frac{76}{\sqrt{2}} = \frac{76\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 38\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

№ 701. а) $h = 3$ см, $r = 1,5$ см.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2,25 \cdot 3 = 2,25\pi$ (см^3);

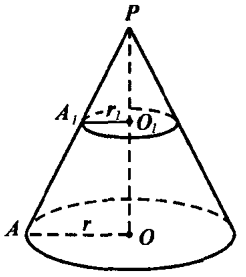


Рис. 502

б) $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$,

$h = \frac{3V}{\pi r^2}. = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ (см).

в) $h = m,\ V = p.\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ p = \frac{1}{3}\pi r^2 m,$

$r^2 = \frac{3p}{\pi m}, r = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}.$

№ 702. $PO = 5$ см, $PO_1 = 2$ см;

PO — высота конуса.

$\triangle PO_1A_1 \sim \triangle POA$, $O_1A_1 = r_1$,

$\frac{PO_1}{A_1O_1} = \frac{PO}{OA}, \frac{2}{r_1} = \frac{5}{OA} = \frac{5}{r}.$

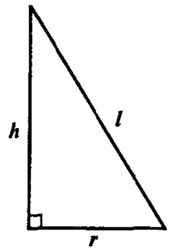


Рис. 503

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 PO_1 = 24, \frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot 2 = 24, r_1^2 = \frac{36}{\pi},$

$r_1 = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ (см). $\frac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} = \frac{5}{r}, \Rightarrow r = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$ (см).

$V = \frac{1}{-3}\pi r^2 PO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{225}{\pi} \cdot 5 = 75 \cdot 5 = 375$ (см^3).

№ 703. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота конуса.

$\pi r^2 = Q$, отсюда $r^2 = \frac{Q}{\pi}$. $S_{бок} = P = \pi r l$, где l — образующая.

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$. $P = \pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot l \Rightarrow l = \frac{P}{\sqrt{\pi Q}}.$

$$h = \sqrt{\left(\frac{P}{\sqrt{\pi Q}}\right)^2 - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}}.$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}Q\cdot\frac{\sqrt{P^2-Q^2}}{\sqrt{\pi Q}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q}{\pi}\left(P^2-Q^2\right)}=\frac{\sqrt{\pi Q\left(P^2-Q^2\right)}}{3\pi}.$$

Осевое сечение конуса

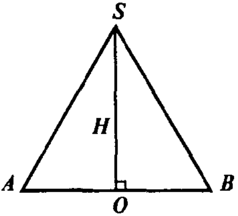


Рис. 504

№ 704. (рис.504).

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi\frac{H^2}{4}H=\frac{\pi H^3}{12}$$

№ 705. Примем, что образующая $SB = l$, радиус основания $OB = r$ (рис. 505).

Из $\triangle SOB$: $SO=H=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{13^2-r^2}=\sqrt{169-r^2}$ (рис. 505).

$$S_{\triangle ASB}=60=\frac{1}{2}H\cdot AB=\frac{Hr\cdot 2}{2}=H\cdot r$$

$$\begin{cases}H=\sqrt{169-r^2}\\ Hr=60\end{cases},$$

Осевое сечение конуса

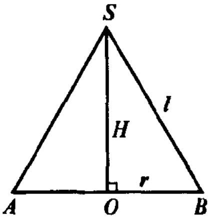


Рис. 505

$$H=60\cdot\frac{1}{r},\ \frac{60}{r}=\sqrt{169-r^2},$$

$$3600=r^2(169-r^2),\ r^4-169r^2+3600=0$$

$$(r^2)_{1,2}=\frac{169\pm\sqrt{28561-14400}}{2}=\frac{169\pm119}{2},$$

$$r_1^2=\frac{288}{2}=144,\ r_1=\sqrt{144}=12;$$

при $r_1 = 12$ (см) $H_1=\frac{60}{12}=5$ (см)

$r_2^2=\frac{50}{2}=25,\ r_2=\sqrt{25}=5$; при $r_2=5$ (см) $H_2=\frac{60}{5}=12$ (см)

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot12^2\cdot5=240\pi\ (\text{см}^3);$$

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot5^2\cdot12=100\pi\ (\text{см}^3)$$

№ 706. $h = 12$ см, $V = 324\pi$ см^3 (рис. 506).

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$, $r^2=\frac{3V}{\pi h}=\frac{3\cdot324\pi}{\pi\cdot12}=81$, $r=9$ (см). $\alpha=\frac{360°\cdot r}{l}$.

$l=\sqrt{H^2+r^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{144+81}=15$. $\alpha=\frac{360°\cdot9}{15}=216°$.

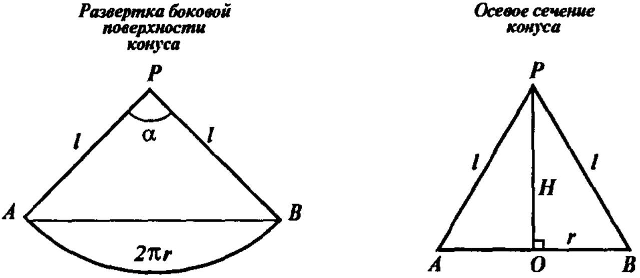


Рис. 506

№ 707. $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$, $S_{осн} = \pi r^2$, $S_{бок} = \pi rl$.

$45\pi = \pi r^2 + \pi rl$, отсюда $45 = r^2 + rl$, где r — радиус основания; l — образующая конуса (рис. 507).

$$\alpha = \frac{360°\cdot r}{l},\ 60° = \frac{360°\cdot r}{l},\ 60°\cdot l = 360°\cdot r,\ l = 6r$$

$$\begin{cases} r^2 + rl = 45 \\ l = 6r \end{cases},\ r^2 + 6r^2 = 45,\ r = \frac{45}{7}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(6r)^2 - r^2} = r\sqrt{35}$$

$$h = \frac{\sqrt{45\cdot 35}}{\sqrt{7}} = \frac{15\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 15 \text{ (дм)}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{45}{7}\cdot 15 = \pi\cdot\frac{45\cdot 5}{7} = \frac{225\pi}{7}.$$

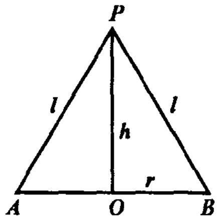


Рис. 507

№ 708. $V = \frac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r_1^2 + rr_1\right)$, где h — высота; r и r — радиусы оснований конуса (рис. 508). $O_1C = r_1$, $OB = r$. Проведем $CL \perp AB$, $CL = = OO_1 = h$.

$LB = r - r_1 = 6 - 3 = 3$ (м).

Из $\triangle CBL$:

$CL = \sqrt{CB^2 - BL^2} = \sqrt{l^2 - 3^2} =$
$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ (м),

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4\left(3^2 + 6^2 + 3\cdot 6\right) = 84\pi \text{ (м}^3\text{)}$$

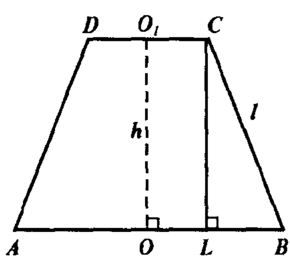


Рис. 508

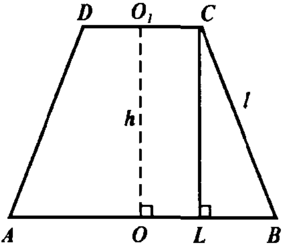


Рис. 509

№ 709. $V=\frac{1}{3}\pi h\left(r^2+r_1^2+rr_1\right)$.

$S_{бок}=S=\pi(r+r_1)l$, где h — высота; l — образующая; r и r_1 — радиусы оснований конуса. $O_1C=r_1$, $OB=r$, $LB=r-r_1$. Из $\triangle CBL$: $h^2+(r-r_1)^2=l^2$ (рис. 509).

$$\begin{cases} S=\pi\cdot l\left(r+r_1\right), \\ \left(r-r_1\right)^2=l^2-h^2, \end{cases} \quad \begin{cases} S=\pi\cdot l\left(r+r_1\right), \\ r-r_1=\sqrt{l^2-h^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{S}{\pi l}=r+r_1, \\ \sqrt{l^2-h^2}=r-r_1, \end{cases} \Rightarrow 2r=\frac{S}{\pi l}+\sqrt{l^2-h^2},$$

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l}+\sqrt{l^2-h^2}\right),$$

$$r_1=\frac{S}{\pi l}-\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{\pi l}-\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l}-\sqrt{l^2-h^2}\right).$$

$$r^2+r_1^2+rr_1^2=(r+r_1)^2-2rr_1+rr_1=(r+r_1)^2-rr_1=$$

$$=\left(\frac{S}{2\pi l}+\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{2}+\frac{S}{2\pi l}-\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l}+\sqrt{l^2-h^2}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l}-\sqrt{l^2-h^2}\right)=\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2-\left(\sqrt{l^2-h^2}\right)^2\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{4}\left(l^2-h^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}+l^2-h^2\right),$$

$$V=\frac{1}{3}\pi h\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}+l^2-h^2\right)=\frac{\pi h}{12}\left(l^2-h^2+\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}\right).$$

$$S_{сеч}=S_{ABCD}=\frac{DC+AB}{2}h=\frac{2r+2r_1}{2}h=(r+r_1)h$$

$$S_{сеч}=h\left(\frac{S}{2\pi l}+\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{2}+\frac{S}{2\pi l}-\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{2}\right)=h\frac{S}{\pi l}.$$

§ 4. Объем шара и площадь сферы

№ 710. а). $R = 4$ см. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$.

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256\pi}{3}$ (см^3). $S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi$ (см^2);

б) $V = 113{,}04$ см^3, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,

$R^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3 \cdot 113{,}04}{4\pi} = \frac{339{,}12}{4\pi} \approx 27$, $R \approx \sqrt[3]{27} = 3$ (см),

$S = 4\pi R^2 \approx 36\pi$ (см^2);

в) $S = 64\pi$ см^2. $S = 4\pi R^2$, $64\pi = 4\pi R^2$, $R^2 = 16$, $R = 4$ (см),

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} = \frac{256\pi}{3}$ (см^3).

№ 711. $V_з = \frac{4}{3}\pi R_з^3$, $D_з = 2R_з$, $V_з = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{D_з^3}{8} = \frac{\pi D_з^3}{6}$;

$V_л = \frac{4}{3}\pi R_л^3$. $D_л = 2R_л$;

$V_л = \frac{\pi D_л^3}{6}$. $\frac{V_з}{V_л} = \frac{D_з^3}{D_л^3}$, если $D_з = 4D_л$, то $\frac{V_з}{V_л} = \frac{(4D_л)^3}{D_л^3} = 64$.

№ 712. $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_ц = \pi r^2 h$, $D_ш = D_ц$, то есть $2R = 2r$, отсюда $R = r$. По условию $V_ш = V_ц$, $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$, $\frac{4}{3}R = h$.

№ 713. $h = 12$ см, $r = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см. $V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 12 =$ $= 25\pi$ (см^3). $V_Ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, $R = \frac{D}{2}$; $V_Ш = \frac{\pi D^3}{6}$. $D = 5$ (см), $V_Ш = \frac{125\pi}{6}$ (см^3)

Сравним объемы конуса и шара: 25π и $\frac{125\pi}{6}$, т. е. 150π и 125π.

Т.к. $150 > 125$, то $25\pi > \frac{125\pi}{6}$, $V_к > V_ш$, значит растаявшее мороженое уместится в стаканчике.

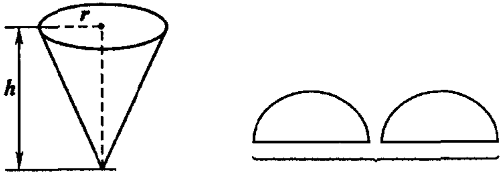


Рис. 510

№ 714. $V_{цил} = 2\pi r^2 h$, $V_{воды} = \pi r^2 h_0 = \pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 h_0 = \dfrac{\pi D^2}{4} h_0$. 4 опущенных шарика занимают объем:

$$4\left(\frac{4}{3}\pi r_ш^3\right) = \frac{16}{3}\pi\left(\frac{D_ш}{2}\right)^3 = \frac{2\pi D_ш^3}{3} = \frac{2\pi}{3}\ (\text{см}^3).$$

Система «шарики+вода» будет занимать новый объем: $\pi\dfrac{D^2}{4}h_1$.

С другой стороны, тот же объем есть сумма объемов воды и шариков. Получили уравнение:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi D^2}{4}h_0 = \pi\frac{D^2}{4}h_1;\ (h_1 - h_0)\frac{D^2}{4} = \frac{2}{3};\ \Delta h \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta h = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{D^2} = \frac{8}{3\cdot 2{,}5^2} = \frac{8}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{32}{75}\ (\text{см}).$$

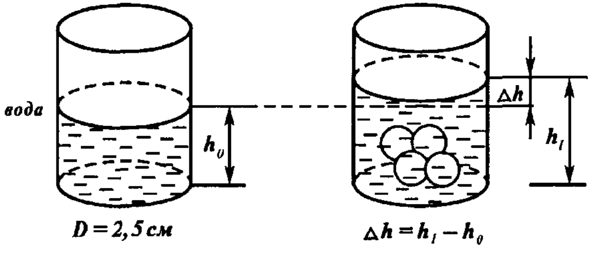


Рис. 511

№ 715. $AC = h$, $AB = r$, r — радиус клумбы; примем радиус шара равным R. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD = 2R$, $\angle CBD = 90°$, т.к. он опирается на диаметр CD (рис. 512).

Из $\triangle CDB$: $CB = 2R\cos\alpha$;

Из $\triangle ACB$: $\cos\alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$.

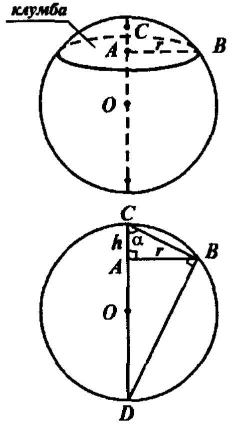


Рис. 512

Получили уравнение:

$$2R\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} = \sqrt{h^2+r^2}$$

$$2Rh = h^2 + r^2,\ R = \frac{h^2+r^2}{2h}\quad (h = 0{,}6\text{ м}),$$

$$R = \frac{0{,}36+25}{2\cdot 0{,}6} = \frac{25{,}36}{1{,}2} = \frac{317}{15}\text{ (м)}$$

$$V_{сегм} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi 0{,}6^2\left(\frac{317}{15} - \frac{0{,}6}{3}\right) =$$

$$= \pi\frac{9}{25}\left(\frac{317}{15} - \frac{1}{5}\right) = \pi\frac{9\cdot 314}{25\cdot 15} = \frac{942\pi}{125}\text{ (м}^3\text{)}.$$

№ 716. Сечение шаров проходит через их центры O и O_1. Хорда $AB \perp OO_1$, $OO_1 = r$, r — радиусы шаров. Общая часть заштрихована и состоит из двух и одинаковых шаровых сегментов. Их объемы:

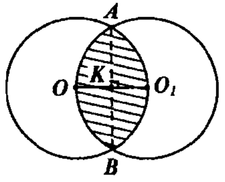


Рис. 513

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),\text{ где } h = KO_1 = \frac{1}{2}r,\ R = r.$$

$$V = \pi\frac{r^2}{4}\left(r - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}r\right) = \frac{\pi r^2}{4}\left(r - \frac{r}{6}\right) = \frac{5\pi r^3}{24}.$$

$$V_{общ} = 2V = \frac{5\pi r^3}{12}.\text{ Объем шара } V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\frac{V_{общ}}{V_ш} = \frac{5\pi r^3}{12} : \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 12} = \frac{5}{16}.$$

№ 717. (рис. 514). $MB = 60$ см.

$CA = 2R = 2\cdot 75 = 150$ (см)

Примем $CM = h$. Примем $\angle ACB = \alpha$, следовательно из $\triangle ACB$:

$CB = CA\cos\alpha = 2R\cos\alpha$.

С другой стороны, из $\triangle CMB$:

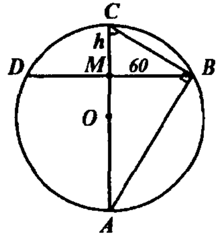


Рис. 514

$$CB = \sqrt{h^2 + 60^2},\ \cos\alpha = \frac{CM}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2+60^2}}.$$

$$2R\frac{h}{\sqrt{h^2+60^2}} = \sqrt{h^2+60^2},\ 2Rh = h^2 + 60^2$$

$$h^2 - 2Rh + 3600 = 0$$

$$h_{1,2} = R \pm \sqrt{R^2 - 3600} = 75 \mp \sqrt{5625 - 3600} = 75 \pm 45$$

$h_1 = 120$ (см), $h_2 = 30$ (см).

$$V_1 = \pi h_1^2\left(R - \frac{1}{3}h_1\right) = \pi\cdot 120^2\left(75 - \frac{1}{3}\cdot 120\right) = \pi\cdot 14400\cdot 35 =$$

$= 504000\pi$ (см^3).

$$V_2 = \pi h_2^2\left(R - \frac{1}{3}h_2\right) = \pi\cdot 30^2\left(75 - \frac{1}{3}\cdot 30\right) = \pi\cdot 900\cdot 65 = 58500\pi \text{ (см}^3).$$

№ 718. $AB = 2R,\ AM = MN = NB = \frac{1}{3}AB = \frac{2R}{3}.$

Объем шарового слоя вычислим как разность объемов шаровых сегментов, высоты которых NA и MA (рис. 515).

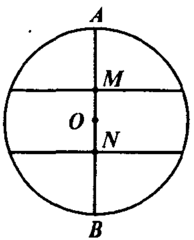


Рис. 515

$$V_1 = \pi\cdot NA^2\left(R - \frac{1}{3}NA\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{4R}{3}\right)^2\cdot\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{4R}{3}\right) = \frac{5\cdot 16}{81}\pi R^3;$$

$$V_2 = \pi\cdot MA^2\left(R - \frac{1}{3}MA\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{2R}{3}\right)^2\cdot\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{2R}{3}\right) = \frac{7\cdot 4}{81}\pi R^3;$$

$$V_{\text{шар слоя}} = V_1 - V_2 = \left(\frac{80}{81} - \frac{28}{81}\right)\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3.$$

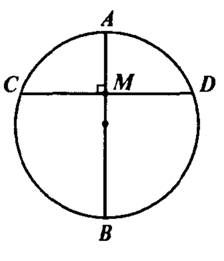


Рис. 516

№ 719. $CD \perp AB$, $AM = 6$ см, $MB = 12$ см. Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга. AB — диаметр шара, $AB = 6 + 12 = 18$ см, $R = 9$ см. Получившиеся части — шаровые сегменты (рис. 516).

$$V_1 = \pi\cdot AM^2\left(R - \frac{1}{3}AM\right);\ V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1.$$

$$V_1 = \pi \cdot 6^2\left(9 - \frac{1}{3}\cdot 6\right) = 36\pi(9 - 2) = 252\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 - 252\pi = \frac{4\pi \cdot 81 \cdot 9}{3} - 252\pi = 972\pi - 252\pi = 720\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

№ 720. Примем R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Найдем высоту сегмента $H = PO_1$, $OP = R$.

Из прямоугольного $\triangle OO_1M$ (рис. 517):

$OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} =$
$= \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ (см).

$H = PO_1 = OP - OO_1 = 75 - 45 = 30$ (см).

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 =$
$= 112500\pi$ (см^3).

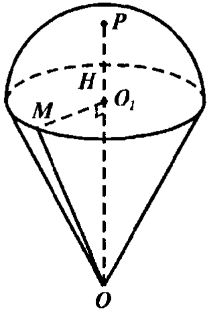


Рис. 517

№ 721. $\angle BOA = 30°$. Тогда $\angle BOC = 60°$, $OB = OC = R$, $\triangle BOC$ — правильный, сторона BC отсекает от радиуса OA отрезок DA, равный высоте H соответствующего шаровому сектору сегмента (рис. 518).

$H = AD = AO - OD = R - R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^3\left(2 - \sqrt{3}\right).$

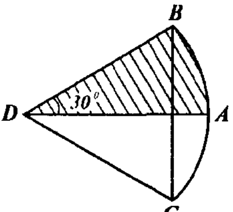


Рис. 518

№ 722. $S_{шара} = 4\pi R^2$. На сушу приходится $\frac{1}{4}$ часть поверхности шара, т. е.

$S_{суши} = \pi \cdot 6375^2 \approx 1{,}28 \cdot 10^8$ (км^2) $= 128 \cdot 10^6$ (км^2).

№ 723. $S = 4\pi R^2$; $S = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (см^2).

1% составит 4π (см^2), 8% — 32π (см^2).

$S = 400\pi + 32\pi = 432\pi \approx 1357$ (см^2).

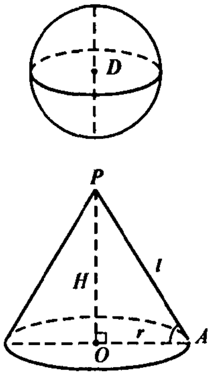


Рис. 519

№ 724. $S_{сф} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 = 4\pi\dfrac{D}{4} = \pi D^2.$

$S_{полн\ кон.} = S_{осн} + S_{бок}.$

Из $\triangle AOP$: $\cos\angle A = \dfrac{OA}{PA} = \dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{2}$, $\angle A = 60°$.

$OA = r = H\cdot\dfrac{1}{\text{tg}60°} = \dfrac{H}{\sqrt{3}}$. $S_{осн} = \pi r^2 = \pi\cdot\dfrac{H^2}{3}$.

$l = 2\cdot\dfrac{H}{\sqrt{3}}$. $S_{бок} = \pi r l = \pi\cdot\dfrac{H}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2H}{\sqrt{3}} = \pi\cdot\dfrac{2H^2}{3}$,

$S_{полн\ кон.} = \dfrac{\pi H^2}{3} + \dfrac{2\pi H^2}{3} = \dfrac{3\pi H^2}{3} = \pi H^2.$

Из условия $H = D$, т. е. $S_{сф} = S_{полн.\ кон.}$, что и требовалось доказать.

Вопросы к главе VII

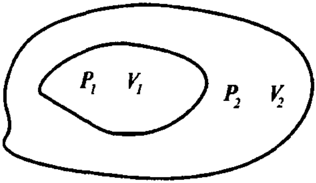


Рис. 520

1. (рис. 520)

а) $V_2 > V_1$;

б) $V_1 = V_2 = n$ (см^3).

2. $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}BC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

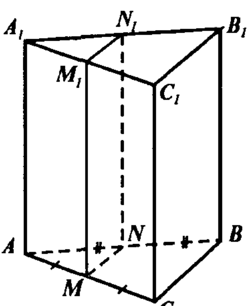


Рис. 521

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC}\cdot AA_1,$

$V_{AMNA_1M_1N_1} = S_{\triangle AMN}\cdot AA_1,$

$$\frac{V_{AMNA_1M_1N_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{S_{\triangle AMN}\cdot AA_1}{S_{\triangle ABC}\cdot AA_1} = \frac{1}{4}.$$

3. (рис. 521).

$V = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^2 h = \dfrac{\pi}{4}D^2 h$

$D_1 = 2D$, $h_1 = \dfrac{h}{4}$;

$V_1 = \dfrac{\pi}{4}(2D)^2 h_1 = \dfrac{\pi}{4}\cdot 4D^2\cdot\dfrac{h}{4} = \dfrac{\pi}{4}D^2 h.$

$V_1 = V.$

4. $V=\frac{1}{3}S_{осн}h$; $h_1 = nh$. В основании будет многоугольник, у которого: а) число сторон осталось без изменений; б) углы остались без изменений, т.е. полученный многоугольник подобен исходному, а площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Примем, что a — сторона исходного многоугольника, $\frac{a}{n}$ — сторона полученного.

$\frac{S_1}{S_{осн}}=\left(\frac{a}{an}\right)^2=\frac{1}{n^2}$, где S_1 — площадь основания полученного многоугольника.

$$V_1=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{осн}}{n^2}\cdot n\cdot h=\frac{1}{3}S_{осн}h\frac{1}{n}=\frac{V}{n}.$$

5. Примем, что в одной пирамиде основанием служит параллелограмм со сторонами a и b, а в другой — прямоугольник со сторонами a и b.

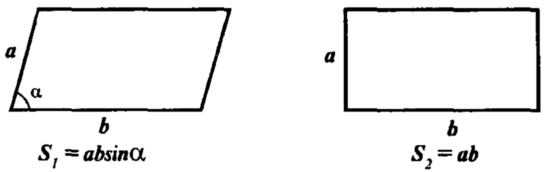


Рис. 522

$ab\sin\alpha < ab$, т. е. $V_1=\frac{1}{3}S_1h$ и $V_2=\frac{1}{3}S_2h$ связаны нравенством $V_1 < V_2$, т. е. нет.

6. $V_1=\pi r_1^2h$; $V_2=\pi r_2^2h$.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi hr_1^2}{\pi hr_2^2}=4.$$

7. Тело вращения состоит из трех тел: прямого кругового цилиндра BCC_1B_1 и двух равных конусов (рис. 523).

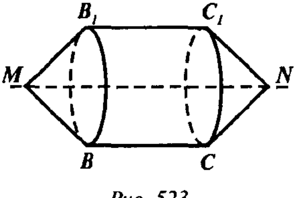


Рис. 523

8. Конус 1: радиус основания a; высота b;

$V_1 = \pi a^2 b$ (рис. 524).
Конус 2: радиус основания b; высота a;
$V_2 = b^2 a$. Если $a \neq b$, то $V_1 \neq V_2$.

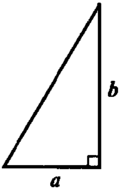


Рис. 524

9. Шар 1: $D = 2R_1$; шар 2: R_2. $D = R_2$, $2R_1 = R_2$.

а) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1}{2R_1} = \frac{1}{2}$.

б) $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi\, 8R_1^3$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

10. $R = 6$ см, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$; $r = 2$ см, $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$, $n \cdot V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \cdot n$.

Получили уравнение :

$\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \cdot n = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$, $2^3 \cdot n = 6^3$, $n = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3^3 = 27$.

11. Примем ребро куба равным a. Вписанный шар касается всех граней куба в их центрах. Вершины куба, вписанного в шар, лежат на поверхности шара. Радиус описанного шара равен половине диагонали куба (рис. 525).

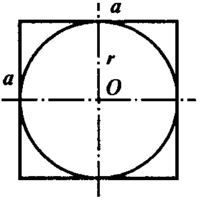


Рис. 525

$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{1}{2}a$.

$V_{вп} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$;

$V_{оп} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$; $\frac{V_{оп}}{V_{вп}} = \frac{\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi a^3}{6}} = 3\sqrt{3}$.

12. $S = 4\pi R^2$,

а) $R_1 = \frac{R}{2}$; $S = 4\pi R^2$; $S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi \cdot \frac{R^2}{4} = \pi R^2$.

$$\frac{S}{S_1}=\frac{4\pi R^2}{\pi R^2}=4;\ S_1=\frac{1}{4}S$$ — уменьшится в 4 раза;

б) $R_1 = 3R$. $S = 4\pi R^2$; $S_1 = 4\pi R_1{}^2 = 4\pi\cdot(3R)^2 = 4\pi\cdot 9R^2$.

$$\frac{S_1}{S}=\frac{4\pi\cdot 9R^2}{4\pi R^2}=9.\ S_1=9S$$ — увеличится в 9 раз.

13. Шар 1: $V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$. Шар 2: $V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3$.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=8,\ \frac{R_1}{R_2}=2,\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=4.$$

14. Пусть $S_1 : S_2 = m^2 : n^2$.

Шар 1: $S_1 = 4\pi R_1{}^2$. Шар 2: $S_2 = 4\pi R_2{}^2$

$V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$ $\quad V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\frac{m^2}{n^2};\ \frac{R_1}{R_2}=\frac{m}{n};\ \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=\left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

Дополнительные задачи

№ 725. Примем, что $S_{ABCD} = S_1$, $S_{DD_1C_1C} = S_2$, $S_{AA_1D_1D} = S_3$; $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$.

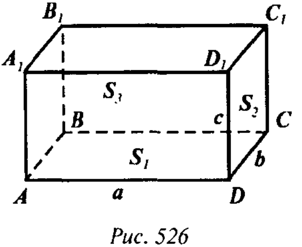


Рис. 526

$$\begin{cases} S_1 = ab \\ S_2 = cb; \\ S_3 = ac \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = ab \\ \frac{S_2}{S_3} = \frac{b}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{S_1}{a} \\ \frac{S_2}{S_3} = \frac{S_1}{a^2} \end{cases};$$

$$a^2=\frac{S_1S_3}{S_2};\ a=\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}};\ b=\frac{S_1\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}};\ c=\frac{S_3\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\sqrt{\frac{S_3S_2}{S_1}}$$

$$V=abc;\ V=\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3S_2}{S_1}}=\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3};$$

$V=\sqrt{6\cdot 12\cdot 18}=36$ (дм^3).

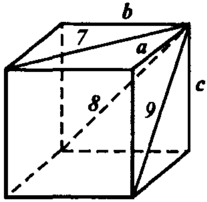


Рис. 527

№ 726. Примем стороны параллелепипеда за a, b, c (рис. 527). Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 64; \\ a^2 + b^2 = 49 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 17 \\ a^2 + b^2 = 49 \end{cases};$$

$2a^2 = 66, \quad a^2 = 33, \quad a = \sqrt{33};$

$b^2 = 49 - 33 = 16, b = 4;$

$c^2 = 64 - 16 = 48, c = 4\sqrt{3}.$

$V = abc; \quad V = \sqrt{33} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16 \cdot \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 11} = 48\sqrt{11}$ (см^3).

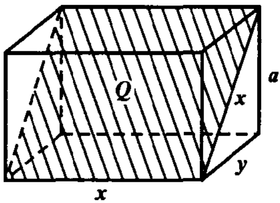


Рис. 528

№ 727. Сечение заштриховано, его сторона равна x. Размеры ребер указаны на рисунке 528.

$x^2 = Q, x = \sqrt{Q}.$

$y^2 + a^2 = x^2, y^2 + a^2 = Q, y = \sqrt{Q - a^2}.$

$V = xya;$

$V = a\sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q - a^2} = a\sqrt{Q^2 - a^2 Q}$

№ 728. В основании параллелепипеда— параллелограмм, а боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания (рис. 529).

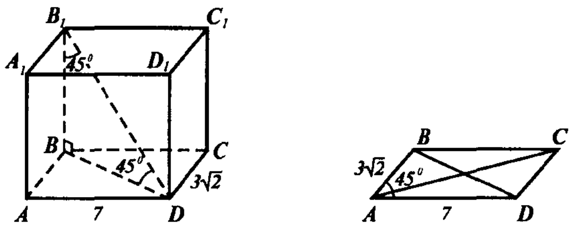


Рис. 529

BD — меньшая диагональ, т.к. $\angle A = 45°$, а $\angle B = 135°$, поэтому $BD < AC$. $\triangle BB_1D$ — прямоугольный, $BB_1 = BD$. По теореме косинусов из $\triangle ABD$:

$$BD^2 = 49 + 18 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 49 + 18 - 42 = 7 + 18 = 25;$$

$BD = 5$ (см).

$S_{осн} = S_{ABCD} = 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 45° = 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 21$ (см^2).

$V = S_{осн} \cdot BB_1 = 21 \cdot 5 = 105$ см^3.

№ 729. A_1BCD_1 — параллелограмм, в котором диагонали перпендикулярны. Значит, A_1BCD_1 — ромб. По свойству диагоналей ромба $A_1O = OC$ и $BO = OD_1$. По теореме Пифагора из $\triangle A_1OB$: $A_1B = 5$ (см). Из прямоугольного $\triangle A_1AB$:
$AA_1 = \sqrt{25-9} = 4$ (см). Найдем площадь основания. Из $\triangle A_1AC$:

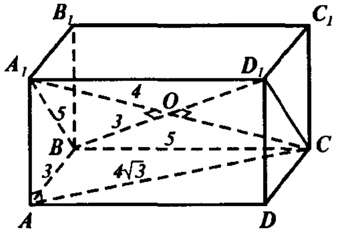


Рис. 530

$AC = \sqrt{A_1C^2 - A_1A^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$(4\sqrt{3})^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5\cos \angle B$; $\cos \angle B = -\frac{7}{15}$,

$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - \frac{49}{225}} = \frac{\sqrt{176}}{15}$. $S_{осн} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{176}}{15} =$
$= \sqrt{176}$ (см^2).

$V = S_{осн} \cdot AA_1 = 4\sqrt{176} = 4\sqrt{16 \cdot 11} = 16\sqrt{11}$ (см^3).

№ 730. Примем
$BC = B_1C_1 = AC = A_1C_1 = x$.
Из прямоугольного $\triangle ABC$:

$x^2 + x^2 = a^2, x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

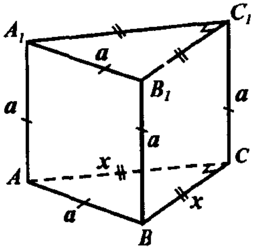


Рис. 531

$$S_{осн} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

$$V = S_{осн} \cdot AA_1 = \frac{a^2}{4}a = \frac{a^3}{4}.$$

№ 731. Примем $AC = b$, $BC = $ а, следовательно $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Примем $A_1A = c$. Площади боковых граней, которые являются прямоугольниками, равны ac; bc; $c\sqrt{a^2 + b^2}$. Т. к. $\sqrt{a^2 + b^2} > b$ и $\sqrt{a^2 + b^2} > a$, то наибольшую площадь имеет грань со сторонами $\sqrt{a^2 + b^2}$ и c. $S_{осн} = S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ab$.

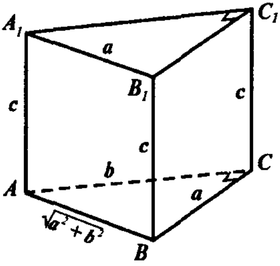


Рис. 532

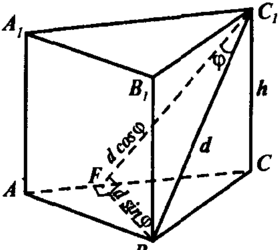
Примем $a < b$,

$$\begin{cases} ac = 3 & (1) \\ \dfrac{1}{2}abc = 3 & (2) \\ \sqrt{a^2 + b^2} \cdot c = 3\sqrt{5} & (3) \end{cases}$$

Из (1) и (2)получаем: $ac \cdot \dfrac{1}{2}b = 3$, $3 \cdot \dfrac{1}{2}b = 3$, $b = 2$. Из уравнений (1) и (3):

$$\begin{cases} ac = 3 \\ c\sqrt{a^2 + 4} = 3\sqrt{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2c^2 = 9 \\ c^2a^2 + 4c^2 = 45. \end{cases}$$

$9 + 4c^2 = 45$, $4c^2 = 36$, $c^2 = 9$ $(c > 0)$, поэтому $c = 3$. $a = \dfrac{3}{3} = 1$. Итак, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. $AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ (м).



№ 732. Примем $BC_1 = d$, $CC_1 = h$. Проведем $BF \perp AC$, отрезок C_1F, он является проекцией BC_1 на плоскость боковой грани AA_1C_1C, $\angle BC_1F = \varphi$.

Из прямоугольного $\triangle FC_1B$:

$FB = d\sin\phi$.

$$AB = \frac{FB}{\sin 60^\circ} = \frac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{осн} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{4d^2\sin^2\varphi\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi$$

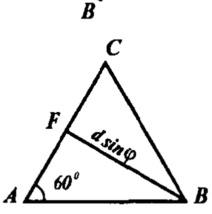


Рис. 533

Найдем высоту призмы $C_1C = h$. $FC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = \frac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного $\triangle C_1FC$: $h = \sqrt{(d\cos\varphi)^2 - \left(\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{d^2\cos^2\varphi - \frac{d^2\sin^2\varphi}{3}} = d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{3}}.$$

$$V = S_{осн} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi \cdot d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{3}} =$$

$$= \frac{d^2\sin^2\varphi}{3}\sqrt{3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}.$$

№ 733. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, B_1B параллелен плоскости AA_1C_1C. Проведем B_1F перпендикулярно плоскости AA_1C_1C. Отрезок B_1F есть расстояние от грани AA_1C_1C до параллельного ей ребра B_1B. Теперь достроим данную призму до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ (рис. 534). Будем считать основанием параллелепипеда грань AA_1C_1C, следовательно его высотой будет отрезок B_1F.

$V_{пар} = S_{AA_1C_1C} \cdot B_1F$.

Плоскость C_1CBB_1 делит параллелепипед на две равновеликие призмы, тогда объем каждой из них составляет $\frac{1}{2}V_{пар}$, или $V_{призмы} = \frac{1}{2}S_{AA_1C_1C} \cdot B_1F$, ч. т. д.

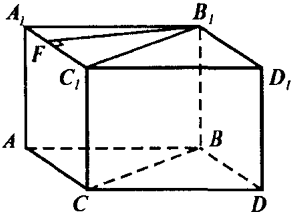


Рис. 534

№ 734. $a \parallel b \parallel c$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Известно (см. задачу 733), что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

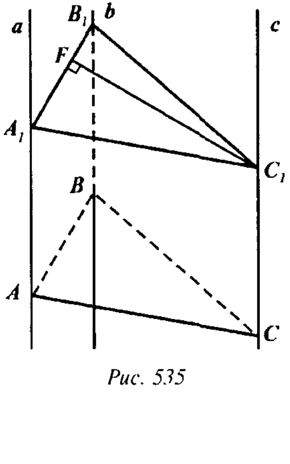


Рис. 535

Примем за основание грань AA_1B_1B, из точки C_1 проведем отрезок C_1F перпендикулярно плоскости AA_1B_1B. Отрезок C_1F —высота призмы.

$V = S_{AA_1B_1B} \cdot C_1F$

Величина отрезка C_1F — величина постоянная при заданном положении a, b, c. Расстояние между параллельными прямыми a и b, а значит, и между отрезками AA_1 и BB_1 не меняется, тогда высота параллелограмма AA_1B_1B есть величина постоянная. Поэтому площадь $S_{AA_1B_1B}$ = const, значит V = const.

№ 735. Примем k — коэффициент пропорциональности, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней наклонной призмы. Следовательно

$S_1 = k \cdot 20$, $S_2 = k \cdot 37$, $S_3 = k \cdot 51$. $S_{бок} = S_1 + S_2 + S_3 = 10{,}8$ (дм^2).

$10{,}8 = k \cdot 20 + k \cdot 37 + k \cdot 51 = 108k$, $k = \dfrac{10{,}8}{108} = \dfrac{1}{10}$.

Значит $S_1 = \dfrac{1}{10} \cdot 20 = 2$ (дм^2); $S_2 = \dfrac{1}{10} \cdot 37 = 3{,}7$ (дм^2);

$S_3 = \dfrac{1}{10} \cdot 51 = 5{,}1$ (дм^2).

В замечании к п. 68 сказано, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения.

Примем, что боковые грани пересечены плоскостью, перпендикулярной к ним. Линии пересечения секущей плоскости с боковыми гранями будут высотами боковых граней, то есть высотами параллелограммов. Примем, что у боковых граней с площадями S_1, S_2, S_3 высоты равны h_1, h_2, h_3. Следовательно:

$2 = h_1 \cdot 0{,}5$, $h_1 = \dfrac{2}{0{,}5} = 4$ (дм); $3{,}7 = h_2 \cdot 0{,}5$, $h_2 = \dfrac{3{,}7}{0{,}5}$ (дм);

$5{,}1 = h_3 \cdot 0{,}5$, $h_3 = \dfrac{5{,}1}{0{,}5}$ (дм).

Полупериметр перпендикулярного сечения равен:

$$p = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{37}{5} + \frac{51}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{88}{5}\right) = \frac{108}{2 \cdot 5}. = \frac{54}{5} \text{ (дм)}.$$

Площадь перпендикулярного сечения:

$$S = \sqrt{p(p-h_1)(p-h_2)(p-h_3)} = \sqrt{\frac{54}{5}\left(\frac{54}{5} - 4\right)\left(\frac{54}{5} - \frac{37}{5}\right)\left(\frac{54}{5} - \frac{51}{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{54}{5} \cdot \frac{34}{5} \cdot \frac{17}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1}{25}\sqrt{54 \cdot 17^2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{17}{25} \cdot 6 \cdot 3 = \frac{17 \cdot 18}{25} \text{ (дм}^2\text{)}.$$

$$V = S \cdot 0{,}5 = \frac{17 \cdot 18}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{153}{25} = 6{,}12 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

№ 736. SO — высота пирамиды, O — центр правильного $\triangle ABC$. Проведем $AK \perp BC$, отрезок SK (рис. 536). По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp BC$, поэтому $\angle ASK = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при основании.

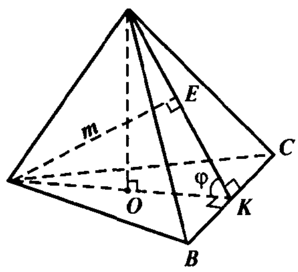


Рис. 536

Проведем AE перпендикулярно плоскости BSC. Поскольку плоскость ASK перпендикулярна плоскости BSC, то AE принадлежит плоскости ASK.

Из прямоугольного $\triangle AEK$: $AK = \dfrac{m}{\sin\varphi}$.

Примем сторону основания равной a, следовательно из $\triangle ABK$:

$AK = a \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{m}{\sin\varphi}$, $a = \dfrac{2m}{\sqrt{3}\sin\varphi}$.

$$S_{\triangle ABC} = S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4m^2}{3\sin^2\varphi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi}.$$

В $\triangle ABC$ OK — радиус вписанной окружности,

$$OK = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{2m}{\sqrt{3}\sin\varphi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{m}{3\sin\varphi}.$$

В $\triangle SOK$: $\dfrac{SO}{OK} = \operatorname{tg}\varphi$, $SO = OK \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{m}{3\sin\varphi} \cdot \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{m}{3\cos\varphi}$.

$$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SO;\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi} \cdot \frac{m}{3\cos\varphi} = \frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^2\varphi\cos\varphi}.$$

№ 737. SO — высота пирамиды, O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Примем сторону основания равной a. K — середина ребра SC, KL перпендикулярен плоскости $ABCD$, $KL = m$,

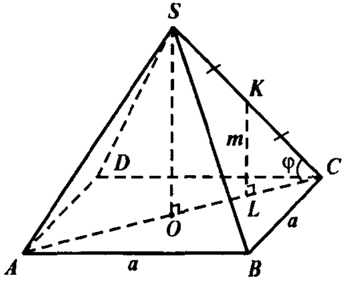


Рис. 537

т.к. плоскость SOC перпендикулярна плоскости $ABCD$ и K принадлежит плоскости SOC. KL — средняя линия в $\triangle SOC$, поэтому $SO = 2m$ (рис. 537).

$$LC = \frac{m}{\operatorname{tg}\varphi}, OC = 2CL = \frac{2m}{\operatorname{tg}\varphi},$$

$$AC = 2OC = \frac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Из прямоугольного $\triangle ABC$:

$$a\sqrt{2} = \frac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}, a = \frac{4m}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi}.$$

$$S_{осн} = a^2 = \frac{16m^2}{2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}. V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi} \cdot 2m = \frac{16m^3}{3\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

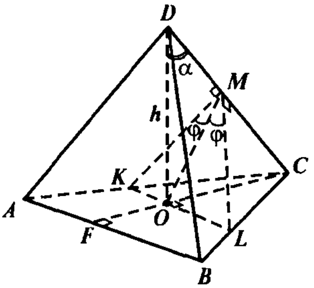


Рис. 538

№ 738. DO — высота пирамиды, плоскость DOC перпендикулярна плоскости ABC. Проведем $OM \perp DC$, через точку O проведем $KL \parallel AB$, отрезки ML и MK. KL перпендикулярен плоскости DOC, значит, $KL \perp DC$.

$OM \perp DC$ по построению. Значит, плоскость KLM перпендикулярна DC и поэтому $LM \perp DC$ и $KM \perp DC$. Значит, $\angle KML = 2\varphi$, $\triangle KOM = \triangle LOM$, значит $\angle KMO = \angle LMO = \varphi$.

Примем $\angle ODM = \alpha$, следовательно из прямоугольного $\triangle ODM$: $OM = h\sin\alpha$.

Примем $KO = OL = y$, следовательно из прямоугольного $\triangle LOM$: $\dfrac{y}{h\sin\alpha} = \operatorname{tg}\varphi$ (1)

Рассмотрим $\triangle ABC$. В нем OC — радиус описанной окружности, $OC = R$, а OF — радиус вписанной окружности. $OF = r$. Примем, что сторона основания равна a, следовательно $AF = FB = \dfrac{a}{2}$.

Из подобия треугольников FCB и OCL имеем:

$$\frac{y}{R}=\frac{a}{2(R+r)}\text{, т.е. } y=\frac{aR}{2(R+r)}=\frac{a\cdot a}{\sqrt{3}\cdot 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{a}{3}\text{, т. к. } R=\frac{a}{\sqrt{3}}\text{, а}$$

$$R+r=FC=a\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Возвращаясь к (1), имеем: $\frac{1}{h\sin\alpha}\cdot\frac{a}{3}=\operatorname{tg}\varphi$ (2)

Из $\triangle DOC$: $\frac{R}{h}=\operatorname{tg}\alpha$, или $\frac{a}{\sqrt{3}h}=\operatorname{tg}\alpha$, поэтому $a=h\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Подставим в (2):

$\frac{h\sqrt{3}\cdot tg\alpha}{3h\cdot\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$; $h\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varphi\cdot 3\text{h}\cdot\sin\alpha$, т. е. $3\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$,

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\varphi}$. Боковое ребро DC равно $\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{h\cdot 3\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}h\operatorname{tg}\varphi$.

Найдем сторону основания a: $\frac{a}{\sqrt{3}}=R$, с другой стороны, из $\triangle DOC$: $R=\sqrt{DC^2-h^2}$, $R=\sqrt{3h^2\operatorname{tg}^2\varphi-h^2}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$, т. е.

$$\frac{a}{\sqrt{3}}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1},\quad a=h\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$$

$$S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_{осн}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^2\cdot 3\left(3\operatorname{tg}^2\varphi-1\right).$$

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}h^2}{4}\cdot\left(3\operatorname{tg}^2\varphi-1\right)\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^3\left(3\operatorname{tg}^2\varphi-1\right).$$

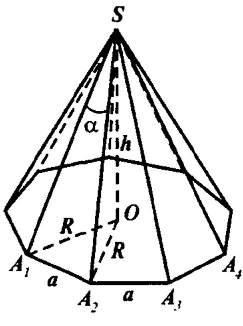


Рис. 539

№ 739. SO — высота пирамиды. В основании лежит правильный n-угольник, O — его центр.

$OA_1=OA_2=\ldots=OA_n=R$, где R — радиус описанной окружности.

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

Примем боковое ребро пирамиды равным x. Следовательно из $\triangle A_1SA_2$ по теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\alpha};\ x=\frac{a\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

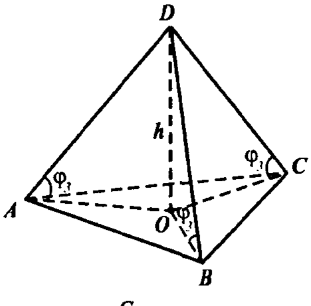
Из прямоугольного $\triangle A_1OS$:

$$h=SO=\sqrt{x^2-R^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}$$

Найдем площадь основания. Из планиметрии известно, что площадь правильного n-угольника выражается:

$$S_{осн}=\frac{na^2}{4tg\frac{180^\circ}{n}}.\ V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{na^2}{4tg\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$



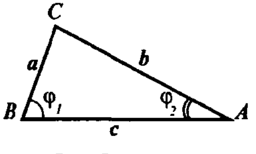


Рис. 540

№ 740.

$\triangle DOA=\triangle DOB=\triangle DOC$ (по катету и острому углу). Тогда, $DA=DB=DC$ и $OA=OB=OC=$ $=R$, R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$ (рис. 540).

Из $\triangle AOD$: $\frac{h}{OA}=\operatorname{tg}\varphi_3$,

$$OA=R=\frac{h}{\operatorname{tg}\varphi_3}.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$. По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\varphi_2}=\frac{b}{\sin\varphi_1}=\frac{c}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)}=$$

$$=2R=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}.$$

$$a=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\sin\varphi_2,\ b=\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\sin\varphi_1.$$

$$S_{\triangle ABC}=S_{осн}=\frac{1}{2}ab\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\operatorname{tg}\varphi_3}\right)^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4h^2}{\operatorname{tg}^2\varphi_3}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\varphi_3}\times$$
$$\times\ \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

№ 741. $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H.$

Из прямоугольного $\triangle POD$:
$\frac{PO}{OD}=\operatorname{tg}\gamma, \frac{H}{OD}=\operatorname{tg}\gamma, OD=\frac{H}{\operatorname{tg}\gamma}$

Из прямоугольного $\triangle POC$:
$\frac{PO}{OC}=\operatorname{tg}\beta, \frac{H}{OC}=\operatorname{tg}\beta, OC=\frac{H}{\operatorname{tg}\beta}.$

$OD=OB$ и $OA=OC$ — по свойству диагоналей параллелограмма (рис. 541).

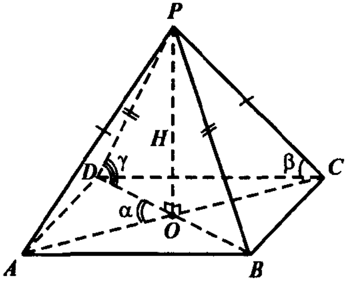


Рис. 541

$$DB=2OD=\frac{2H}{\operatorname{tg}\gamma};$$

$$AC=2OC=\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta}.$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\times$$
$$\times\frac{2H}{\operatorname{tg}\gamma}\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\sin\alpha=2H^2\operatorname{ctg}\gamma\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha.$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2H^2\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha\cdot H=$$
$$=\frac{2}{3}H^3\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha.$$

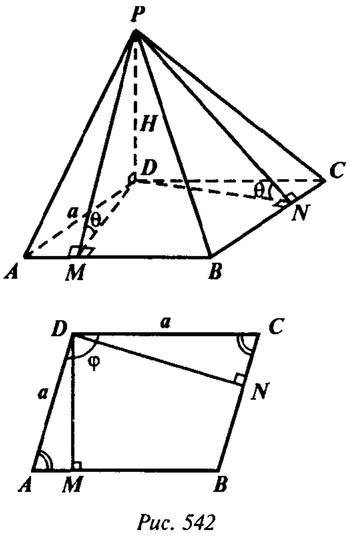


Рис. 542

№ 742. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости — перпендикуляр к этой плоскости; значит PD перпендикулярен плоскости $ABCD$. PD — высота пирамиды, $PD = H$. $\angle ADC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре PD. В основании $ABCD$ $\angle A = \angle C = 180° - \varphi$.

$S_{ABCD} = AD \cdot AB \sin\angle A = a^2 \sin(180° - \varphi) = a^2 \sin\varphi$.

Проведем $DM \perp AB$, $DN \perp CB$. По теореме о трех перпендикулярах отрезки $PM \perp AB$, $PN \perp BC$ (рис. 542).

$\angle PMD = \angle PND = \theta$ — линейные углы двугранных углов, образованных боковыми гранями PAB и PBC с плоскостью основания.

$\triangle ADM = \triangle CDN$, $DM = DN = a\sin(180° - \varphi) = a\sin\varphi$.

Из $\triangle PDN$: $\dfrac{H}{DN} = \operatorname{tg}\theta$, $DN \cdot \operatorname{tg}\theta = H$, $H = a\sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta$.

$V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot H$; $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \sin\varphi \cdot a\sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{3} a^3 \sin^2\varphi \operatorname{tg}\theta$.

№ 743. а) Примем $AC = AB = b$, а $DA = DB = DC = BC = a$. Проведем высоту пирамиды DO, отрезки OA, OB, OC (рис. 543).

$\triangle DOA = \triangle DOB = \triangle DOC$

Значит, $OA = OB = OC = R$, где R — радиус окружности, опи-

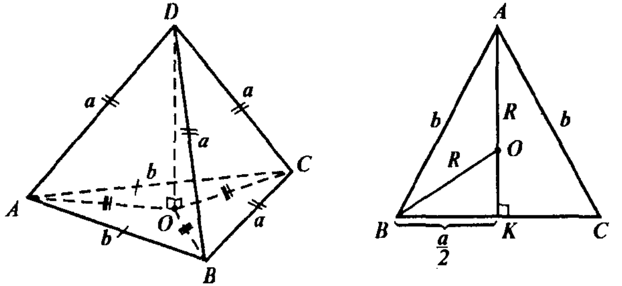


Рис. 543

санной вокруг $\triangle ABC$. В равнобедренном $\triangle ABC$ проведем из угла A высоту AK.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot AK = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

(в $\triangle ABK$: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$).

$OA = R$, по формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, вычислим R.

$$R = \frac{abb}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$ Из $\triangle ADO$:

$$H = DO = \sqrt{a^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^4}{4b^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4}{4b^2 - a^2}} =$$
$$= \frac{a\sqrt{4a^2b^2 - a^4 - b^4}}{12}.$$

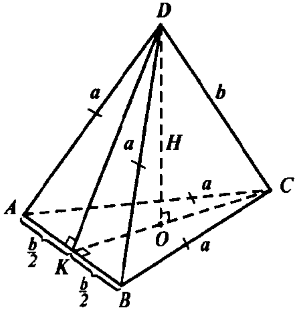
б) в равнобедренном $\triangle ABC$ ($CA = CB = a$) проведем высоту $CK \perp AB$; проведем отрезок DK (рис. 544).

В $\triangle ADB$: DK — высота ($\triangle ADB$ — равнобедренный, $AK = KB$, значит, медиана DK является высотой).

$AB \perp DK$, $AB \perp KC$, AB перпендикулярен плоскости DKC.

Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Итак, плоскости ABC и DKC перпендикулярны. В плоскости DKC проведем высоту пирамиды DO; $DO \perp CK$. Примем $DO = H$.

В $\triangle ABC$: $CK = \sqrt{a^2 - \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$.



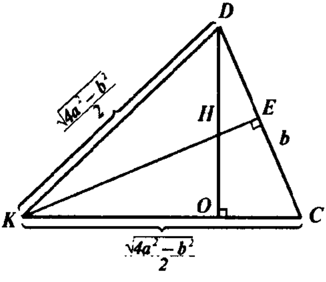


Рис. 544

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$$

Найдем высоту пирамиды: $DK = KC = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$.

Проведем $KE \perp DC$. $DE = EC = \frac{b}{2}$.

Из $\triangle KDE$: $KE = \sqrt{KD^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4} - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 2b^2}{4}}$.

$$S_{\triangle KDC} = \frac{1}{2} \cdot KE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot H \cdot KC;$$

$$\sqrt{\frac{4a^2 - 2b^2}{4}} \cdot b = H \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}; \quad H = \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - 2b^2}}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2 - 2b^2}$$

№ 744. Пусть $O_1K = KO = h$, $A_1B_1 = b$, $AB = a$.

По условию $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$, $b = \frac{2}{5}a$.

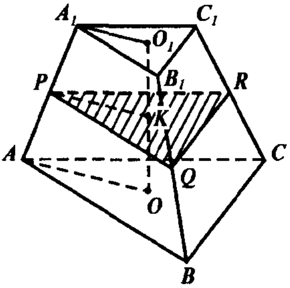


Рис. 545

Рассмотрим трапецию AA_1O_1O. $PK \parallel AO$, точка K — середина высоты OO_1, значит, $A_1P = PA$.

Рассмотрим грань AA_1B_1B. Это трапеция, через точку P проведен отрезок $PQ \parallel AB$, поэтому PQ — средняя линия трапеции.

$$PQ = \frac{a + b}{2} = \frac{a + \frac{2}{5}a}{2} = \frac{7a}{10}.$$

$PQ \parallel AB \parallel A_1B_1$, $A_1C_1 \parallel PR \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel QR \parallel$ BC, тогда (рис. 545) $\triangle ABC \sim \triangle PQR \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Площади подобных фигур относятся как квадраты их сходственных сторон.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}; \quad S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC}.$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{a}{\frac{7a}{10}}\right)^2=\frac{100}{49};\quad S_{\triangle PQR}=\frac{49}{100}S_{\triangle ABC}.$$

Обозначим для краткости объем верхней усеченной пирамиды V_1, а объем нижней усеченной пирамиды V_2. Следовательно:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}h\left(S_{\triangle PQR}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle PQR}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}\right)}{\frac{1}{3}h\left(S_{\triangle PQR}+S_{\triangle ABC}+\sqrt{S_{\triangle PQR}\cdot S_{\triangle ABC}}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\sqrt{\frac{49}{100}\cdot\frac{4}{25}}\right)S_{\triangle ABC}}{\left(\frac{49}{100}+1+\sqrt{\frac{49}{100}\cdot 1}\right)S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\frac{7\cdot 2}{10\cdot 5}}{\frac{49}{100}+1+\frac{7}{10}}=\frac{49+16+28}{170+49}=$$

$$=\frac{93}{219}=\frac{31}{73}$$

№ 745. а) Примем r — радиус основания цилиндра, h — высота.

$$\begin{cases}S=2\pi h\\ \pi r^2=Q\end{cases};\quad \begin{cases}h=\frac{S}{2\pi r}\\ r=\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\end{cases};\quad h=\frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}=\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}}.$$

$$V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}}=\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

б) примем r — радиус основания, поскольку осевое сечение — квадрат, то высота $h = 2r$, откуда $r=\frac{h}{2}$. $V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{h^2}{4}\cdot h=\frac{\pi h^3}{4}$.

в) примем r — радиус основания, следовательно высота равна диаметру основания, то есть $h = 2r$.

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r2r=2\pi r^2+4\pi r^2=6\pi r^2;\quad r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

$$V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{S}{6\pi}\cdot 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\cdot\sqrt{\frac{4S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

№ 746. Примем r_1, r_2 — радиусы оснований двух цилиндров, а h_1 и h_2 — их высоты. $S_1 = 2\pi r_1 h_1$; $S_2 = 2\pi r_2 h_2$. По условию

$S_1 = S_2$; $2\pi r_1 h_1 = 2\pi r_2 h_2$, $r_1 h_1 = r_2 h_2$. $V_1 = \pi r_1^2 h_1$; $V_2 = \pi r_2^2 h_2$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \frac{(r_1 h_1)\cdot r_1}{(r_2 h_2)\cdot r_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

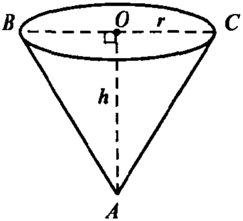


Рис. 546

№ 747. $OA = h$, $OC = OB = r$ (рис. 546).

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 2{,}25 \cdot \pi \approx$

$\approx 2{,}25 \cdot 3{,}14 = 7{,}065$ (м^3).

1 л = 1 дм^3, а 1 м^3 = 1000 дм^3, поэтому

$V = 7{,}065 \cdot 1000 = 7065$ (л).

Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

№ 748. PO — высота конуса, PO = H, $AB < AD$ (рис. 547). Проведем $OK \perp AB$, отрезок PK (По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AB$).

$\frac{PO}{OK} = \text{tg}\,\varphi_2$, $\frac{H}{OK} = \text{tg}\,\varphi_2$ $H = OK \cdot \text{tg}\,\varphi_2$,. Рассмотрим основание пирамиды. AB = a, $BO = OD = AO = OC$ — по свойству диагоналей прямоугольника. $BO = r$.

В $\triangle ABO$: $\angle ABO = \angle BAO = \frac{180° - \varphi_1}{2} = 90° - \frac{\varphi_1}{2}$

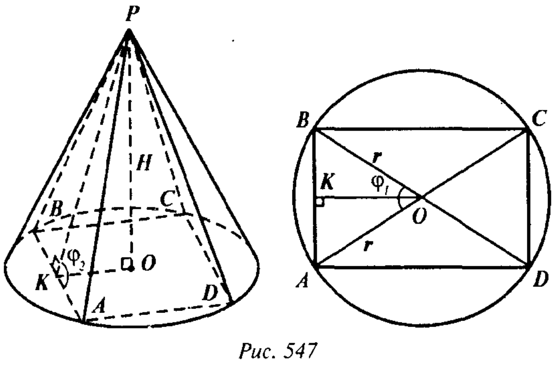


Рис. 547

Запишем теорему, синусов:

$$\frac{a}{\sin\varphi_1}=\frac{r}{\sin\left(90^\circ-\frac{\varphi_1}{2}\right)};$$

$$r=\frac{a\cdot\sin\left(90^\circ-\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\varphi_1}=\frac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}.$$

Из $\triangle BKO$: $OK=\mathrm{r}\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}=\dfrac{a\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}$.

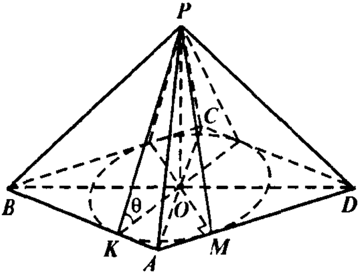
$$H=OK\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{a\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}\cdot\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{a\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}.$$

$$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}\cdot\frac{a\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$

№ 749. PO — высота пирамиды, примем $PO=H$. PK — одна из образующих конуса, PK принадлежит плоскости APB, $OK\perp AB$.

Рассмотрим основание пирамиды (рис. 548).

$ABCD$ — ромб. $AB=a$. $S_{ABCD}=4S_{AOD}$



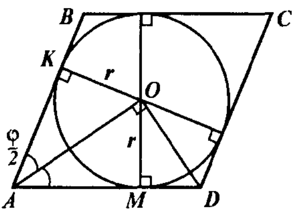


Рис. 548

$S_{ABCD} = 2\left(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin\varphi\right) = a^2\sin\varphi$. $S_{AOD} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot OM = \frac{1}{2}ar$.

Получили уравнение: $a^2\sin\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}ar$, отсюда $r = \frac{1}{2}a\sin\varphi$.

Из прямоугольного $\triangle POK$:

$\frac{PO}{OK} = \operatorname{tg}\theta$ ($\angle PKO$ — угол, который образующая конуса PK составляет с ее проекцией OK).

$\frac{H}{OK} = \operatorname{tg}\theta$, $H = r\cdot\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}a\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta$.

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2\sin^2\varphi}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta = \frac{\pi a^3}{24}\sin^3\varphi\operatorname{tg}\theta.$$

№ 750. Рассмотрим осевое сечение. $ABCD$ — квадрат, сечение цилиндра. Примем сторона куба равна a (рис. 549), следовательно радиус шара $r = \frac{a}{2}$.

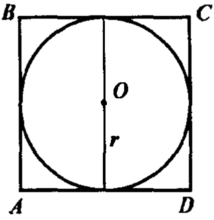


Рис. 549

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4\pi a^3}{3\cdot4\cdot2} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

Радиус основания цилиндра равен $\frac{a}{2}$, высота цилиндра равна a, поэтому

$$V_{цил} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a = \frac{\pi a^3}{4}. \quad \frac{V_{цил}}{V_ш} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

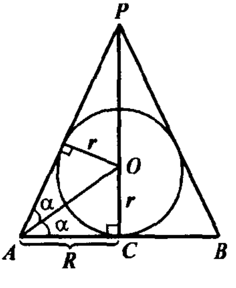


Рис. 550

№ 751. Рассмотрим осевое сечение конуса: $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Примем $PC = H$.

Из $\triangle AOC$:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{R} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, где $\alpha = \angle OAC$

OA — биссектриса $\triangle PAB$, поэтому $\angle PAB = 2\alpha$. Из прямоугольного $\triangle PAC$:

$\frac{PC}{AC} = \operatorname{tg}2\alpha$, или $\frac{H}{R} = \operatorname{tg}2\alpha$,

$$H = R\,\text{tg}\,2\alpha = 6\text{tg}\,2\alpha.\ \text{tg}\,2\alpha = \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$H = \frac{6\cdot 4}{3} = 8\ (\text{дм}).\ V_{кон} = \frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 8 = 96\pi\ (\text{дм}^3).$$

№ 752. Рассмотрим сечение конуса. $\triangle APB$ — осевое сечение конуса, $AH = r$, $AP = l$, PH — высота конуса .

Примем радиус сферы равен a. $OK = OH = OL = a$. Точки K и L — точки касания сферы поверхности конуса. Плоскость, в которой лежит окружность, в сечении изображена отрезком KL (рис. 551); KL равен диаметру этой окружности. Примем $\angle OAB = \alpha$. Из $\triangle AOH$:

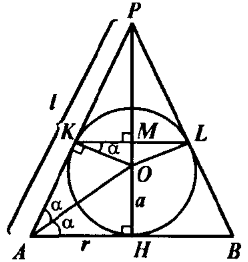


Рис. 551

$$\frac{OH}{HA} = \text{tg}\,\alpha;\quad \frac{a}{r} = \text{tg}\,\alpha;\quad a = r\,\text{tg}\,\alpha.$$

Из $\triangle APH$: $\cos 2\alpha = \dfrac{AH}{AP} = \dfrac{r}{l}$,

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{r}{l},\ \cos^2\alpha = \frac{l+r}{2l},\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{l+r}{2l}}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{l+r}{2l} = \frac{l-r}{2l},\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{l-r}{2l}};$$

$$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{l-r}{2l}:\frac{l+r}{2l}} = \sqrt{\frac{l-r}{l+r}}.\ a = r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}.$$

$\angle APH = \angle MKO = 90°-2\alpha$.. В $\triangle MOK$:

$KM = OA\cdot\cos\angle MKO = a\cdot\cos(90° - 2\alpha) = a\sin 2\alpha =$
$= a\cdot 2\sin\alpha = a\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha.$

$$KM = r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{l-r}{2l}}\cdot\sqrt{\frac{l+r}{2l}} = 2r\cdot\sqrt{\frac{(l-r)^2(l+r)}{(l+r)(2l)^2}} = 2r\frac{l-r}{2l} =$$
$$= r\frac{l-r}{l}.$$

KM равен радиусу окружности, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Ее длина равна $2\pi\cdot KM = 2\pi\dfrac{r(l-r)}{l}$.

№ 753. Рассмотрим осевое сечение конуса.

H_1, H_2 — центры оснований усеченного конуса. $ABCD$ — сечение усеченного конуса, $ABCD$ — равнобедренная трапеция (рис. 552).

$BH_1 = r_1, AH_2 = r$. Примем, что радиус вписанного шара равен a.

Высота конуса равна диаметру шара, $H_1H_2 = 2a$.

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi \cdot H_1H_2(r^2 + r_1^2 + rr_1) == \frac{1}{3}\pi \cdot 2a(r^2 + r_1^2 + rr_1).$$

$$\frac{V_{кон}}{V_ш} = \frac{\frac{2}{3}\pi a(r^2 + r_1^2 + rr_1)}{\frac{4}{3}\pi a^2} = \frac{(r^2 + r_1^2 + rr_1)}{2a}. \qquad (1)$$

Как известно из планиметрии, в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. $BC + AD = AB + CD = 2AB$. Примем $AB = l$, следовательно $2r_1 + 2r = 2l$, $l = r_1 + r$.

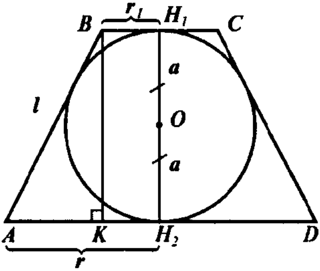


Рис. 552

Проведем $BK \perp AD$. $AK = r - r_1$, $BK = H_1H_2 = 2a$. Из прямоугольного $\triangle ABK$:

$$2a = \sqrt{l^2 - AK^2} = $$
$$= \sqrt{(r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r^2 + 2r_1r - r_1^2 - r^2 + 2r_1r} =$$
$$= 2\sqrt{r_1r};\ a = \sqrt{r_1r}.$$

Подставляя выражение для a в формулу (1), получаем:

$$\frac{V_{кон}}{V_ш} = \frac{(r^2 + r_1^2 + rr_1)}{2rr_1}.$$

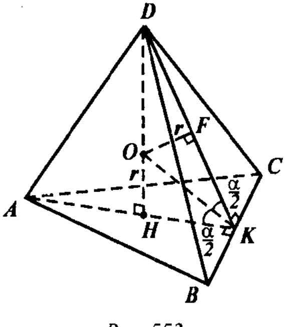


Рис. 553

№ 754. Через основание высоты DH проведем $AK \perp BC$, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$ (рис. 553).

Центр вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке O; OH и OF — его радиусы, равные r. По условию задачи $\frac{4}{3}\pi r^3 = V, \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Т.к. $AK \perp BC$ и $DK \perp BC$, то $\angle AKD$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды, $\angle AKD = \alpha$. OK — биссектриса угла AKD ($\triangle OHK = \triangle OFK$), $\angle HKO = \angle OKF = \frac{\alpha}{2}$.

Примем, что сторона основания пирамиды равна a. В правильном $\triangle ABC$ HK есть радиус вписанной окружности и $HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного $\triangle OHK$:

$$\frac{r}{HK} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ HK = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};\ \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};\ a = \frac{2\sqrt{3}r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

В $\triangle DHK$: $\frac{DH}{HK} = \operatorname{tg}\alpha$, $DH = HK \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\alpha$.

$$V_{пир} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot DH = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{r\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{12}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot r^3\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{3V}{4\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot V.$$

№ 755. SH перпендикулярен плоскости $ABCD$. Проведем $HK \perp AD$, $HL \perp DC$, отрезки SL и SK. По теореме о трех перпендикулярах $SL \perp DC$ и $SK \perp AD$. Тогда $\angle SKH$ и $\angle SLH$ — линейные углы двугранных углов при основании пирамиды. По условию задачи $\angle SKH = \angle SLH = \beta$ (рис. 554). $\triangle SHK = \triangle SHL$ (по катету и острому углу).

Точка H равноудалена от сторон ромба $ABCD$, то есть является центром вписанной в ромб окружности.

$$S_{ABCD} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin\alpha\right) = a^2\sin\alpha;\ S_{\triangle AHD} = \frac{1}{2}a\cdot HK;\ S_{ABCD} = 4S_{\triangle AHD},$$

$$a^2\cdot\sin\alpha = 2a\cdot HK,\quad HK = \frac{a\sin\alpha}{2}$$

Проведем отрезок LO, точка O — центр вписанного шара, $O \in SH$. OL — биссектриса $\angle SLH$, $\angle OLH = \frac{\beta}{2}$

Из $\triangle OHL$: $\dfrac{OH}{HL} = \text{tg}\angle HLO$, OH — радиус шара. $OH = HL\ \text{tg}\,\dfrac{\beta}{2}$.

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi(OH)^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3\sin^3\alpha\ \text{tg}^3\dfrac{\beta}{2}}{8} = \frac{\pi}{6}\cdot\sin^3\alpha\ \text{tg}^3\frac{\beta}{2}\cdot a^3$$

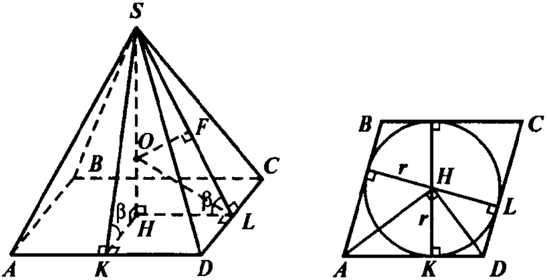


Рис. 554

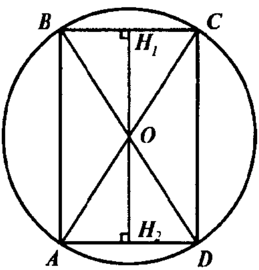


Рис. 555

№ 756. Рассмотрим сечение цилиндра. Сечение цилиндра — прямоугольник $ABCD$; он вписан в окружность радиуса R (рис. 555). O — центр сферы (и окружности). BD — диагональ осевого сечения, $\angle BDA = \alpha$. $BD = 2R$.

Из прямоугольного $\triangle BAD$: $AD = 2R\cos\alpha$. Радиус основания цилиндра равен $\dfrac{1}{2}AD$, то есть $R\cos\alpha$.

Высота цилиндра $AB = 2R\sin\alpha$.

$V_{цил} = \pi\cdot(R\cos\alpha)^2\cdot AB = \pi R^2\cos^2\alpha\cdot 2R\sin\alpha =$
$= \pi R^3\cos\alpha\,(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = \pi R^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

№ 757. Рассмотрим сечение цилиндра с шаром. Сечение цилиндра — прямоугольник $ABCD$ (рис. 556); он вписан в окружность радиуса R, точка O — центр окружности и сферы. Образующая цилиндра $AB = l$.

$BO = OD = OA = OC = R$.

Из $\triangle AOB$ по теореме синусов:

$$\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\left(\frac{180^\circ-\alpha}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$R=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{l^3}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi l^3}{6\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$$

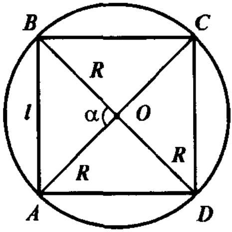


Рис. 556

Примечание: ответ не совпадает с ответом в учебнике. Там $\dfrac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$

№ 758. Рассмотрим сечение шара и конуса. Сечение конуса — равнобедренный $\triangle APB$, PM — высота конуса, O — центр описанной окружности (и шара), $O\in PM$.

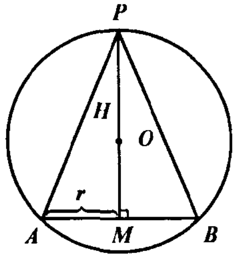


Рис. 557

$PM = H$, $AM = r$. Примем R — радиус шара; $OP = OA = OB = R$. Из $\triangle APM$:

$AP=\sqrt{H^2+r^2}$, $PB = AP$.

Найдем R по формуле: $R=\dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны $\triangle APB$, а S — его площадь.

$$R=\frac{\sqrt{H^2+r^2}\cdot\sqrt{H^2+r^2}\cdot 2r}{4rH}=\frac{H^2+r^2}{2H}.$$

Площадь поверхности шара:

$$S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{H^2+r^2}{2H}\right)^2=\frac{4\pi\left(H^2+r^2\right)^2}{4H^2}=\frac{\pi\left(H^2+r^2\right)^2}{H^2}.$$

Объем шара: $V=\dfrac{4\pi}{3}R^3=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{\left(H^2+r^2\right)^3}{8H^3}=\dfrac{\pi\left(H^2+r^2\right)^3}{6H^3}.$

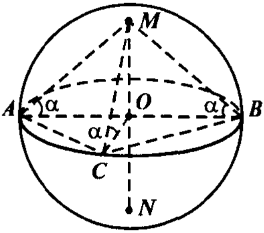


Рис. 558

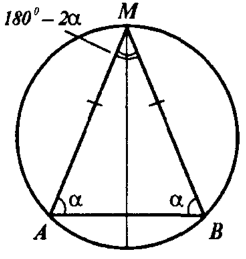


Рис. 559

№ 759. Плоскость $\triangle ABC$, лежащего в основании пирамиды, пересечет, шар по окружности, и $\triangle ABC$ будет вписан в эту окружность. Примем, что AB — гипотенуза, следовательно $\angle ACB = 90°$, тогда, он опирается на диаметр, которым является гипотенуза AB (рис. 558, 559).

Проведем высоту пирамиды MO. Определим положение высоты, иначе говоря, точки O. Проведем отрезки OA, OB, OC; эти три отрезка являются проекциями соответствующих наклонных боковых ребер пирамиды.

В треугольниках MOA, MOB, MOC MO — общий катет, $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \alpha$ — по условию, тогда $\triangle MOA = \triangle MOB = \triangle MOC$, отсюда $OA = OB = OC$, то есть точка O — равноудалена от вершин основания и поэтому является центром описанной около основания окружности, т. е. O — середина AB.

Итак, MO — высота пирамиды, MO принадлежит плоскости AMB, тогда, плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC. По теореме синусов:

$\dfrac{AB}{\sin(180°-2\alpha)} = 2R$, где R — радиус шара. $\dfrac{2}{\sin 2\alpha} = 2R$, $R = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

Площадь поверхности шара: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ (см²).

Объем шара: $V = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = \dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{\sin^3 2\alpha}$ (см³).

№ 760. Проведем высоту пирамиды MF; проведем отрезки FA, FB, FC, FD.

$\triangle MFA = \triangle MFB = \triangle MFC = \triangle MFD$, т.к. они прямоугольные, MF — общий катет, $\angle MBF = \angle MAF = \angle MCF = \angle MDF = \beta$ — по условию (рис. 560). Таким образом, $FA = FB = FC = FD$,точка F равноудалена от вершин основания, то есть является центром описанной около основания окружности.

Рассмотрим сечение пирамиды и шара плоскостью AMC (рис. 561). Точка O — центр шара, $O \in MF$.

По теореме синусов в $\triangle AMC$:

$\dfrac{AC}{\sin(180°-2\beta)} = 2R$, где R — радиус шара.

$$R = \frac{10}{2\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\beta}.$$

Площадь поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi\cdot 25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}\ (\text{см}^2)$$

Объем шара:

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}\ (\text{см}^3)$$

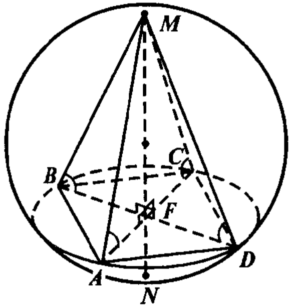


Рис. 560

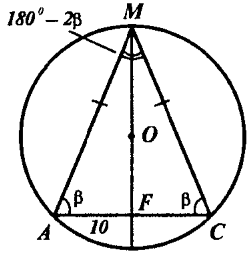


Рис. 561

№ 761. $OA = 1{,}5$ м, $MO = 0{,}5$ м, $AD = l$ (рис. 562).

$V_{цист} = 50$ м^3; $V_{цил} = \pi r^2 l = \pi\cdot 1{,}5^2 l$ (м^3).

AMB, CND — шаровые сегменты

$V_{сегм} = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$, где $h = MO = 0{,}5$ м, $R = OA = 1{,}5$м.

$$V_{сегм} = \pi\cdot 0{,}5^2\left(1{,}5 - \frac{0{,}5}{3}\right) = 0{,}25\pi\cdot\frac{4{,}5-0{,}5}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$V_{цист} = V_{цил} + 2V_{сегм};\ V_{цист} = 50 = 2{,}25\pi l + \frac{2\pi}{3}\ (\text{м}^3).$$

$$l = \frac{50-\frac{2\pi}{3}}{2{,}25\pi} \approx \frac{50-\frac{2\cdot 3{,}14}{3}}{2{,}25\cdot 3{,}14} = \frac{50-2{,}09}{7{,}065} = \frac{47{,}91}{7{,}065} \approx 6{,}78\ (\text{м}).$$

Замечание. В учебнике ответ — 6,56 м.

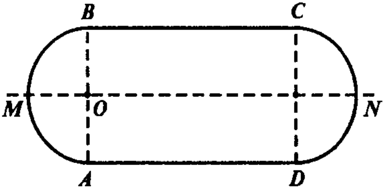


Рис. 562

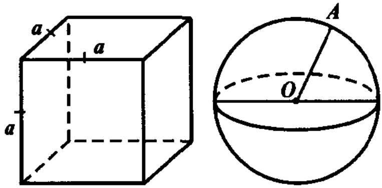


Рис. 563

№ 762. Примем, что ребро куба равно a. Площадь поверхности куба равна $6a^2$ (рис. 563, 564). Примем радиус шара $OA = b$. Площадь поверхности шара $4\pi b^2$. Примем, что радиус основания цилиндра равен c, следовательно $AB = H = 2c$.

$S_{осн} = \pi c^2$; $S_{бок} = 2\pi c \cdot H = 2\pi c \cdot 2c = 4\pi c^2$;
$S_{полн} = 4\pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2$.

Примем, что радиус основания конуса равен d, следовательно $PO = H = 2d$.

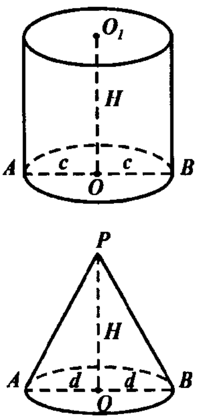


Рис. 564

$S_{осн} = \pi d^2$; $S_{бок} = \pi d \cdot AP$,

$AP = \sqrt{d^2 + H^2} = \sqrt{d^2 + 4d^2} = d\sqrt{5}$.

$S_{бок} = \pi \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{5} = \pi d^2\sqrt{5}$.

$S_{полн} = \pi d^2 + \pi d^2\sqrt{5} = \pi d^2\left(\sqrt{5}+1\right)$.

По условию

$6a^2 = 4\pi b^2 = 6\pi c^2 = \pi d^2\left(\sqrt{5}+1\right)$. Выразим a, c, d через b.

$$6a^2 = 4\pi b^2;\quad a^2 = \frac{4\pi b^2}{6} = \frac{2\pi b^2}{3};\quad a = b\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \qquad (1)$$

$$6\pi c^2 = 4\pi b^2;\quad c^2 = \frac{4\pi b^2}{6\pi} = \frac{2}{3}b^2;\quad c = \sqrt{\frac{2}{3}}b \qquad (2)$$

$$\pi d^2\left(\sqrt{5}+1\right) = 4\pi b^2;$$

$$d^2 = \frac{4\pi b^2}{\pi\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{4b^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= \frac{4b^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1} = b^2\left(\sqrt{5}-1\right);\ d = \sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot b \qquad (3)$$

Объем куба равен a^3; $a^3 = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}b\right)^3 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}b^3$

Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi b^3$.

Объем цилиндра равен $\pi c^2 \cdot H$;

$$\pi c^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}b\right)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}b = \pi \cdot \frac{2}{3}b^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}b = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}b^3$$

Объем конуса равен $\frac{1}{3}\pi d^2 H$;

$$\frac{1}{3}\pi d^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot b^2\left(\sqrt{5}-1\right) \cdot 2b\sqrt{\sqrt{5}-1} = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}-1} \cdot b^3.$$

Сравним объемы тел. Поскольку все они выражены через радиус шара b, то остается сравнивать коэффициенты при b^3.

$$\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}};\ \frac{4\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Общий множитель $\frac{2\pi}{3}$ можно не учитывать при сравнении. Следовательно, остаются числа:

$\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$	2	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}$
(1)	(2)	(3)	(4)

Сравним (1) и (2).

$\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ и 2; $\frac{2\pi}{3}$ и 4; π и $\frac{4\cdot 3}{2}$; π и 6.

Так как $\pi < 6$, то $\sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2$. Поскольку $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, то $2\sqrt{\frac{2}{3}} < 2$.

Сравним теперь (1) и (3).

$\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ и $2\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{8}{3}$; π и $\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}$; π и 4. Так как $\pi < 4$, $\sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Итак, установлено, что $\sqrt{\frac{2\pi}{3}} < 2\sqrt{\frac{2}{3}} < 2$. Сравним теперь (4) и (1)

$\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; $\left(\sqrt{5}-1\right)^3$ и $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)^3$ и π.

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^3 = \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \left(\sqrt{5}-1\right)\left(5-2\sqrt{5}+1\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5}-1\right)\left(6-2\sqrt{5}\right) = 6\sqrt{5} - 6 - 10 + 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5} - 16 = 8(\sqrt{5}-2).$$

$$\frac{3}{2}\cdot 8(\sqrt{5}-2) = 12(\sqrt{5}-2).$$

$12(\sqrt{5}-2)$ и π.

$\sqrt{5}\approx 2{,}23$; $\sqrt{5}-2\approx 0{,}23$. $12\cdot 0{,}23 = 2{,}76$

$2{,}76$ и π. Так как $2{,}76<\pi$, то $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}<\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$

Итак, числа расположены в порядке: $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{2}}<\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\dfrac{2}{3}}<2.$

Это соответствует объемам тел: $V_{кон}<V_{куба}<V_{цил}<V_{ш}.$

№ 763.

а) $d = 2$ мм $= 0{,}2$ см; $R = 5$ см. $r = R-d = 5-0{,}2 = 4{,}8$ (см).

$V_ш=\dfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$. $m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V_ш=\rho_{меди}\cdot\dfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

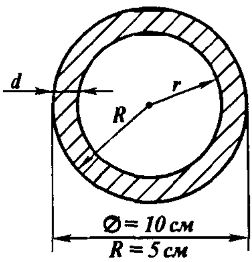


Рис. 565

$$m_ш\approx 8{,}9\cdot 3{,}14(5^3-4{,}8^3)\frac{4}{3}=$$
$$=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14(125-110{,}592)=$$
$$=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14\cdot 14{,}41\approx 11{,}837\cdot 3{,}14\times$$
$$\times 14{,}41\approx 37{,}17\cdot 14{,}41=535{,}59\approx 535{,}6\text{ (г)}.$$
$$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\cdot 535{,}6}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1606{,}8}{500\cdot 3{,}14}=$$
$$=\frac{1606{,}8}{1570}\approx\ 1{,}023\text{ (г/см}^3).$$

Сравним $\rho_ш$ и плотность воды, которую примем равной 1 г/см^3. $\rho_ш>\rho_в$ значит, шар не сможет плавать в воде;

б) $d = 1{,}5$ мм $= 0{,}15$ см. $r = 5-0{,}15 = 4{,}85$ (см).

$V_ш=\dfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$. $m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V_ш=\rho_{меди}\cdot\dfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

$$m_ш\approx 8{,}9\cdot 3{,}14(5^3\cdot 4{,}85^3)\frac{4}{3}=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14(125-114{,}09)=$$
$$=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14\cdot 10{,}91=11{,}837\cdot 34{,}26\approx 405{,}50\text{ (г)}.$$
$$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\cdot 405{,}50}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1216{,}5}{1570}\approx 0{,}77\text{ (г/см}^3)$$

Если принять $\rho_{воды}=1$ г/см^3, то $\rho_ш<\rho_в$, такой шар будет плавать на поверхности воды.

Задачи повышенной трудности

№ 764. Пусть a, b – данные прямые, AB – данный отрезок, M – его середина (рис. 566), $\alpha \supset a$, $\beta \supset b$, $\alpha \parallel b$, $\beta \parallel a$ (учебник, стр. 16). $AB = d$, h – расстояние между α и β, μ – плоскость, равноудаленная от α и β, a_0, b_0, A_0, B_0 – проекции a, b, A, B на μ, $O = a_0 \cap b_0$.

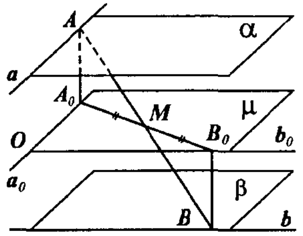


Рис. 566

Тогда $M \in \mu$, $AA_0 = \frac{h}{2}$, $AM = \frac{d}{2}$,

$$B_0M = A_0M = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}.$$

В $\triangle A_0B_0O$ $OM = A_0M = B_0M$ как радиусы окружностей с диаметром A_0B_0. Следовательно, M лежит на окружности в плоскости μ с центром O и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$.

Проводя рассуждения в обратном порядке, убедимся, что любая точка этой окружности – середина отрезка длины d с концами на a и b.

№ 765. Данное сечение $MNKL$ данного тетраэдра $ABCD$ – параллелограмм (учебник, стр. 29). Так как $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle MBN$, $\triangle NDK$ – равносторонние, то $MN = NB$ и $NK = ND$; следовательно, если $AB = a$, $MN = x$, $NK = y$, то $y = ND = BD - NB = a - x$. Поэтому периметр сечения равен $2x + 2y = 2x + 2(a - x) = 2a$ и является постоянным.

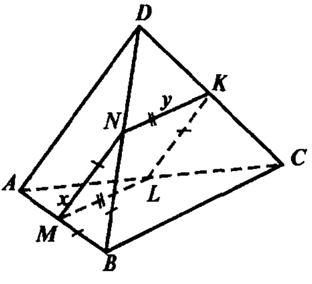


Рис. 567

№ 766. В обозначениях рисунка к задаче 765 по свойству средней линии $MN \parallel AD \parallel LK$, аналогично $ML \parallel NK$ и $MNKL$ – параллелограмм.

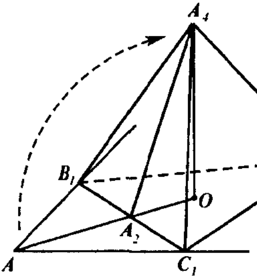
Тогда $\overrightarrow{MK}^2 + \overrightarrow{NL}^2 = (\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LK})^2 + (\overrightarrow{ML} - \overrightarrow{MN})^2$; т. к. $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$, то $MK^2 + NL^2 = 2(ML^2 + MN^2)$ – сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Если $AD = a$, и $BC = b$, $MN = \frac{a}{2}$, $ML = \frac{b}{2}$ и, $\Rightarrow MK^2 + NL^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

№ 767. Пусть $\triangle ABC$ со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ и радиусом описанного круга R перегнут по средним линиям A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1. Вершины A, B, C опишут окружности соответственно с центрами A_2, B_2, C_2 и радиусами AA_2, BB_2, CC_2 в плоскостях, перпендикулярных средним линиям. Прямая, по которой пересекаются эти плоскости, пересечет плоскость треугольника в некоторой точке O, служащей точкой пересечения его высот AA_3, BB_3, CC_3. Для того, чтобы получился тетраэдр, необходимо и достаточно, чтобы точки пересечения A_4, B_4, C_4 этих окружностей с этой прямой (по одну сторону от плоскости треугольника) совпали, то есть чтобы $OA_4 = OB_4 = OC_4$.

$$AA_2 = \frac{1}{2}AA_3 = \frac{c}{2}\sin\beta; \quad AO = \frac{AB_3}{\sin\gamma} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma};$$

$$OA_4^2 = A_2A_4^2 - A_2O^2 = AA_2^2 - (AO - AA_2)^2 = -AO^2 + 2AO\cdot AA_2 =$$
$$= \frac{c^2\cos\alpha}{\sin^2\gamma}(-\cos\alpha + \sin\beta\cdot\sin\gamma).$$

$$\cos\alpha = \cos(180° - (\beta+\gamma)) = \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma, \ \frac{c}{\sin\gamma} = 2R;$$



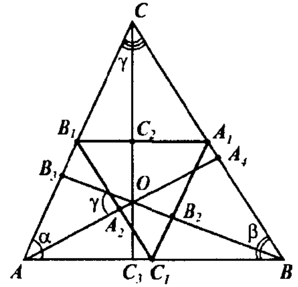


Рис. 568

следовательно, $OA_4^2 = 4R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Выражение симметрично относительно α, β, γ и, значит, $OA_4 = OB_4 = OC_4$. Оно положительно лишь для остроугольного треугольника.

№ 768. Пусть плоскость α, проходящая через A перпендикулярно BC, пересекает BC в точке D (рис. 569); произвольная плоскость μ, проходящая через BC, пересекает α по прямой m, ω – окружность без точки A с диаметром AD, лежащая в плоскости α, $M \in m \cap \omega$.

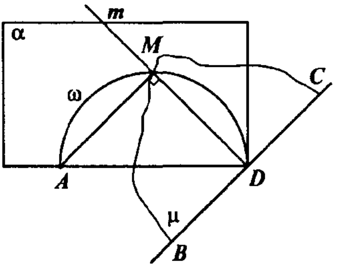


Рис. 569

Так как $AM \subset \alpha$, то $AM \perp BC$, а так как $M \in \omega$, то $AM \perp \mu$, так как $\angle AMD = 90°$, как опирающийся на диаметр. Если M не лежит на ω, то она не принадлежит искомому множеству (иначе нарушаются теоремы о единственности перпендикуляря, опущенного из данной точки на данную прямую или плоскость. Таким образом, ω – искомое множество точек.

№ 769. Если DD_0 – данная высота данного тетраэдра $ABCD$ и $AA_1 \parallel BC$, то по условию $AD_0 \perp BC$ и, следовательно, $AD_0 \perp AA_1$ (рис. 570). По теореме о трех перпендикулярах $AD \perp AA_1$ и, значит, $AD \perp BC$. Аналогично (D_0 – пересечение всех трех высот) $AB \perp DC$ и $AC \perp BD$.

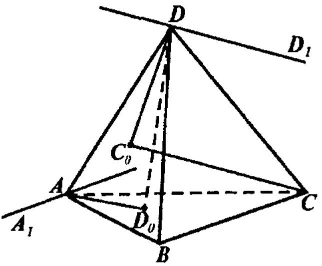


Рис. 570

Пусть теперь CC_0 – любая другая высота тетраэдра и $DD_1 \parallel AB$. Так как $AB \perp DC$, то $DD_1 \perp DC$ и по обратной теореме о трех перпендикулярах (№153) $DD_1 \perp C_0D$, так что $AB \perp C_0D$, то есть C_0 лежит на высоте треугольника ABD; аналогично C_0 лежит и на остальных его высотах.

№ 770. Так как $OO_1 \perp ABC$ и $AO \perp OBC$, то $AOO_1 \perp ABC$ и $AOO_1 \perp OBC$; тогда согласно задаче № 183 $BC \perp AOO_1$ и, $\Rightarrow BC \perp AO_1$.

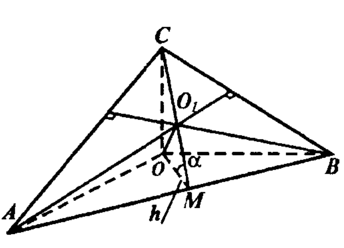


Рис. 571

Аналогично $AC \perp BO_1$, но тогда по теореме о пересечении высот и $CO_1 \perp AB$. Пусть $M = CO_1 \cap AB$, $\angle OMC = \alpha$ и $OM = h$. Поскольку $OM \perp AB$ и $OO_1 \perp CM$, то

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot h, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{h}{\cos\alpha},$$

$$S_{AO_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot O_1M = \frac{1}{2} AB \cdot h\cos\alpha, \text{ откуда } S^2_{AOB} = S_{ABC} \cdot S_{AO_1B}$$

№ 771. Согласно №770

$S^2_{AOB} = S_{ABC} \cdot S_{AO_1B}$;

$S^2_{AOC} = S_{ABC} \cdot S_{AO_1C}$ и

$S^2_{BOC} = S_{ABC} \cdot S_{BO_1C}$. Сложив полученные равенства, получим:

$S^2_{AOB} + S^2_{AOC} + S^2_{BOC} = S_{ABC} (S_{AO_1B} + S_{AO_1C} + S_{BO_1C}) = S^2_{ABC}$

№ 772. Данные точки являются вершинами тетраэдра. Они не могут лежать все по одну сторону от искомой плоскости, тогда как они лежали бы в одной плоскости, параллельной этой плоскости. Аналогично ни одна из них не лежит в искомой плоскости. Поэтому возможны лишь два случая:

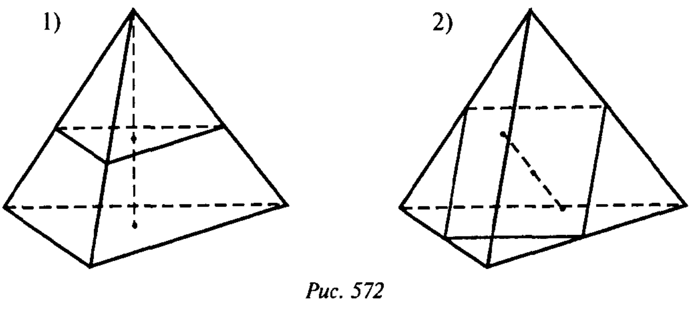


Рис. 572

1) По одну сторону от искомой плоскости лежат три данные точки, по другую – одна. Плоскость походит через середины ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины. Расстояния равны половине высоты тетраэдра, исходящей из этой точки.

2) По одну сторону от плоскости две точки, по другую – также две. Плоскость проходит через середины ребер, исходящих из двух

вершин. Расстояния равны половине расстояния между скрещивающимися ребрами, то есть расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти ребра.

Первому условию удовлетворяют четыре плоскости, второму – три; всего имеем семь плоскостей.

№ 773. Пусть α и β – грани двугранного угла, c – его ребро, AB – данная прямая. $AA_0 \perp \alpha$, $BB_0 \perp \beta$, $AA_1 \perp c$, $BB_1 \perp c$; тогда $A_0A_1 \perp c$, $B_1B_0 \perp c$, $\angle AA_1A_0 = \angle BB_1B_0$ как линейные углы двугранного угла, $\angle ABA_0 = \psi$ и $\angle BAB_0 = \varphi$ – углы прямой AB с гранями. Отсюда $AA_1 = BB_1 \Leftrightarrow \triangle AA_0A_1 = \triangle BB_0B \Leftrightarrow AA_0 = BB_0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \triangle AA_0B = \triangle BB_0A \Leftrightarrow \varphi = \psi$.

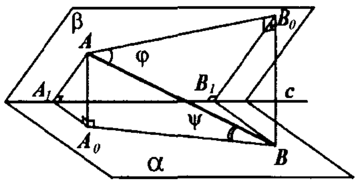


Рис. 573

№ 774. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром a, то его сечение ACD_1 – правильный треугольник, а любое сечение – параллельное грани – квадрат (рис. 574).

Проведем через середину E ребра AB плоскость $\alpha \parallel ACD_1$. Она пересечет BC в некоторой точке F.

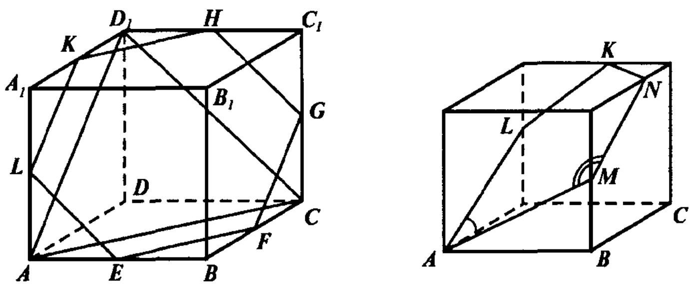


Рис. 574

Так как $EF \parallel AC$, то по теореме Фалеса F – середина BC и $EF = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Рассуждая аналогично, получим последовательно, что α

пройдет также через середины G, H, K, L ребер куба, и все стороны шестиугольника $EFGHKL$ равны $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Его углы равны между собой как соответственные углы треугольников KLE, LEF, EFG, FGH, GHK, HKL, равных друг другу по трем сторонам.

Таким образом – сечение – правильный шестиугольник.

Пятиугольное сечение правильным быть не может. Так как в сечении $AMNKL$ $AL \parallel MN$, то $\angle LAM + \angle AMN = 180°$. Если эти углы равны, то они – прямые и не равны $108°$.

Сечений с семью и более сторонами быть не может, так как граней у куба только шесть.

№ 775. Пусть $A_1A_2...A_8$ – данный куб с ребром a, p – прямая, проходящая через его центр O, $A_iA_i' \perp p$, $\varphi_i = \angle(OA_i, p)$, $s = \sum_1^8 A_iA_i'^2$.

Так как $OA_i = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A_iA_i' = OA_i \sin\varphi_i$, $\varphi_7 = \varphi_1$, $\varphi_8 = \varphi_2$, $\varphi_5 = \varphi_3$, $\varphi_6 = \varphi_4$, то

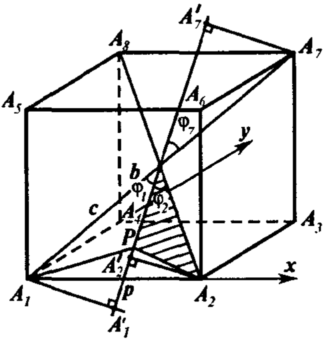


Рис. 575

$$s = \frac{3}{2}a^2 \sum_1^4 \sin^2\varphi_i \qquad (1)$$

Если $P = p \cap A_1A_2A_3A_4$, а x, y – координаты в системе с осями A_1A_2 и A_1A_4, то

$PA_1^2 = x^2 + y^2$,

$PA_2^2 = (a-x)^2 + y^2$,

$PA_3^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$,

$PA_4^4 = x^2 + (a-y)^2$.

По теореме косинусов из $\triangle OPA_i$ имеем

$$PA_i^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi_i,$$

где $b = OP$, $c = OA_i = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), причем $OP^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$.

Приравняв выражения для PA_i^2, получим из найденных равенств:

$$2bc\cos\varphi_1 = \frac{3a^2}{2} - a(x+y),\ 2bc\cos\varphi_2 = \frac{a^2}{2} + a(x-y),$$

$$2bc\cos\varphi_3 = -\frac{a^2}{2} + a(x+y),\ 2bc\cos\varphi_2 = \frac{a^2}{2} - a(x-y)$$

Отсюда после вычислений получаем: $4b^2c^2\sum_1^4 \cos^2\varphi_i = 4a^2b^2$, $\sum_1^4 \cos^2\varphi_i = \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2\cdot 4}{3a^2} = \frac{4}{3}$, $\sum_1^4 \sin^2\varphi_1 = 4 - \sum_1^4 \cos^2\varphi_i = \frac{8}{3}$, тогда из (1) $s = \frac{3}{2}a^2\cdot\frac{8}{3} = 4a^2$.

Таким образом, s не зависит от положения прямой p.

№ 776. Куб можно разбить на три четырехгранные пирамиды $AC'CDD'$, $AC'CBB'$, $AC'B'A'D'$ с общей вершиной А, общим боковым ребром AC' и основаниями – гранями куба. Они равны, так как совмещаются поворотами вокруг AC' на 120° и 240°. Каждую из них можно разбить на два равных тетраэдра, например, $AC'B'A'D'$ на $AA'B'C'$ и $AA'D'C'$.

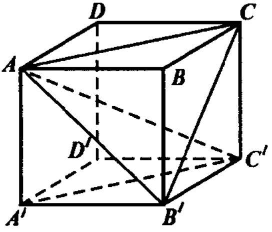
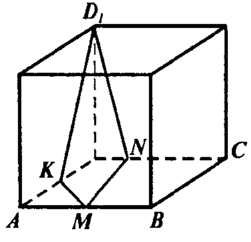


Рис. 576

№ 777. Паук сидит в середине M ребра AB, а муха – на вершине D_1. На развертке куба кратчайший путь между M и D_1 – отрезок прямой (рис. 577). Примем ребро куба равным 1. Тогда:



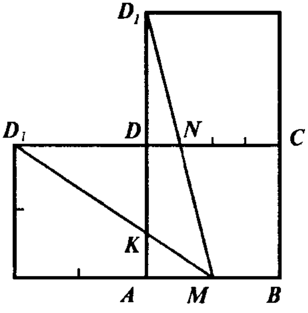


Рис. 577

$D_1NM = \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $D_1KM = \sqrt{\frac{9}{4}+1} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, но $\sqrt{13} < \sqrt{17}$ и паук должен передвигаться по отрезкам D_1K и KM.

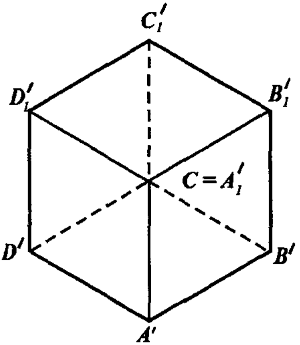


Рис. 578

№ 778. Проекция данного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость α, перпендикулярную его диагонали A_1C, является правильным шестиугольником $A'B'B_1'C_1'D_1'D'$. Ребра куба, исходящие из вершин A_1 и C, образуют с α равные углы; обозначим их величины через φ. В $\triangle AA_1C$ $\angle AA_1C = 90° - \varphi$, $\angle A_1CA = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{AC}{A_1C} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Все стороны полученного шестиугольника равны каждая $a\cos\varphi = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Радиус окружности, в него вписанной, равен $\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\sin 60° = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а сторона квадрата, вписанного в эту окружность, равна $2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45° = a$.

Этот квадрат лежит внутри этого шестиугольника. Поэтому через отверстие, направленное вдоль A_1C и проектируещееся в этот квадрат, можно протащить куб с ребром a.

Если сторону этого вписанного в окружность квадрата провести параллельно $A'B'$ и продолжить его диагонали, то они пересекут стороны шестиугольника в вершинах квадрата, вписанного в этот шестиугольник и имеющего сторону, большую a. Через соответствующее отверстие можно протащить куб, больший данного.

№ 779. Плоскость сечения проходит через середину O_1 высоты PO правильной пирамиды $PABCDEF$ и параллельна плоскости грани PAB. Она пересекает плоскость основания по прямой $A_1B_1 \parallel AB$, плоскость PFC по прямой $F_1C_1 \parallel A_1B_1$ и плоскость PED по прямой $E_1D_1 \parallel A_1B_1$.

Пусть $PM \perp AB$, $PN \perp ED$, $MN \cap A_1B_1 = M_1$, $PN \cap E_1D_1 = N_1$; тогда $MN \perp AB$, $M_1N_1 \parallel MP$, $M_1N_1 \perp A_1B_1$. По условию

$$S = S_{PAB} = \frac{ah}{2}, \qquad (1)$$

где $a = AB$ и $h = PM$.

Так как O_1 – середина PO, то M_1, A_1, B_1 – соответственно середины OM, AF, BC, $FC = 2a$, $A_1B_1 = \frac{a+2a}{2} = \frac{3a}{2}$, $F_1C_1 = \frac{2a}{2} = a$, $M_1O_1 = \frac{h}{2}$.

$$S_{A_1B_1C_1F_1} = \frac{\frac{3a}{2} + a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{5ah}{8}. \qquad (2)$$

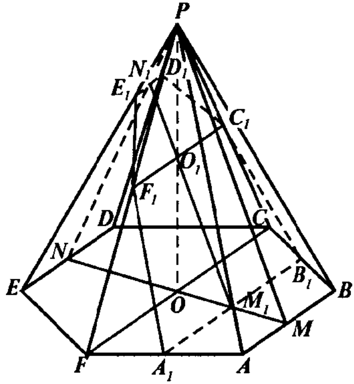


Рис. 579

Так как $\triangle M_1N_1N \sim \triangle MNP$, то $\frac{M_1N_1}{MP} = \frac{N_1N}{NP} = \frac{N_1M}{NM}$, то есть $\frac{M_1N_1}{h} = \frac{3}{4}$, откуда $M_1N_1 = \frac{3h}{4}$, $O_1N_1 = M_1N_1 - M_1O_1 = \frac{3h}{4} - \frac{h}{2} = \frac{h}{4}$, $NN_1 = \frac{3NP}{4}$, $N_1P_1 = \frac{NP}{4}$. Т. к. $\triangle E_1D_1P \sim \triangle EDP$ и $\triangle E_1N_1P \sim \triangle ENP$, то $= \frac{E_1P}{EP} = \frac{N_1P}{NP}$, откуда $\frac{E_1D_1}{a} = \frac{1}{4}$, $E_1D_1 = \frac{a}{4}$.

Следовательно, $$S_{F_1E_1D_1C_1} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{5ah}{32}. \qquad (3)$$

Из (2), (3) и (1) $S_{сечения} = \frac{5ah}{8} + \frac{5ah}{32} = \frac{25ah}{32} = \frac{25S}{16}$.

№ 780. Если тетраэдр содержится в кубе (рис. 580), то он находится внутри сферы, описанной около этого куба; наибольший из таких тетраэдров – это тетраэдр, вписанный в эту сферу. Тетраэдр AB_1CD_1 содержится в кубе и вписан в сферу, описанную около куба. Если ребро куба равно 1, то ребро этого тетраэдра равно $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

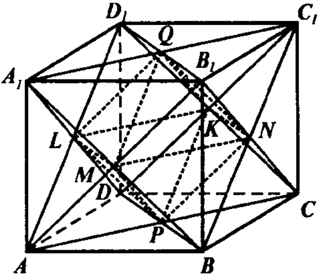


Рис. 580

№ 781. Пересечение тетраэдров AB_1CD_1 и C_1BAD есть многогранник с вершинами в центрах M, N, K, L, P, Q граней куба, то есть октаэдр. Например, его грань MNP ограничена отрезками

$$MN = (AB_1C) \cap (C_1BA_1),$$
$$PM = (AB_1C) \cap (BA_1D),$$
$$PN = (AB_1C) \cap (C_1BD).$$

Октаэдр — правильный: он выпуклый, грани его — правильные треугольники со стороной $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где a – ребро куба, и в каждой вершине сходится четыре ребра.

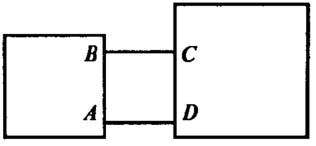


Рис. 581

№ 782. Пусть $ABCD$ — грань наименьшего куба, прилежащего к грани параллелепипеда. К его сторонам должны прилежать большие кубы. Но если к AB и CD они уже приложены, то к BC и AD приложить их нельзя.

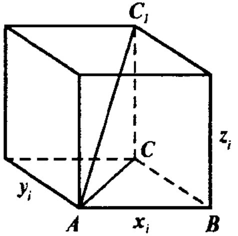


Рис. 582

№ 783. Пусть u_i – длина i-го отрезка ломаной, x_i, y_i, z_i – длины его проекций на три ребра куба с общей вершиной. Согласно условию проекции отрезков не имеют общих точек, следовательно

$$\sum x_i \leqslant 1, \sum y_i \leqslant 1,$$

$$\sum z_i \leqslant 1, AC_1 < AC + CC_1 < (AB + BC) + CC_1,$$

в соотвествии с этим $u_i < x_i + y_i + z_i$. Отсюда

$$\sum u_i < \sum x_i + \sum y_i + \sum z_i \leqslant 3.$$

Пусть теперь куб на рисунке – данный, его ребро равно 1, и ломаная $AB_0C_0C_1$ лежит внутри куба. Если точки B_0 и C_0 достаточно близки к B и C, то длина этой ломаной сколь угодно близка к длине ломаной $ABCC_1$, то есть к 3.

№ 784. Пусть выпуклый многогранник имеет f граней, k ребер и e вершин. Отделив от него какую-нибудь грань, получим многогранную поверхность P_1. Отделив от P_1 грань, прилежащую к его краю, получим многогранную поверхность P_2. Продолжая этот процесс, получим через s шагов ($1 \leqslant s < f$) поверхность P_s с числом граней f_s, ребер k_s и вершин e_s..

Докажем индукцией по числу граней, равному $f_s = f - s$, что

$$f_s + e_s - k_s = 1 \tag{1}$$

При $f_s = 1$ (то есть $s = f - 1$) равенство (1) верно, так как тогда $k_s = e_s$, откуда $1 - e_s - k_s = 1$.

Пусть (1) верно для $f_s < f_{s0}$, докажем (1) для f_{s0}.

Разрежем P_{s0} по ломаной, соединяющей две вершины, лежащие на краю, образованной ребрами и не пересекающей себя. Получим поверхности P_{s1} и P_{s2} соответственно с f_{s1} и f_{s2} гранями, k_{s1} и k_{s2} ребрами, e_{s1} и e_{s2} вершинами. Так как $f_{s1} < f_{s0}$ и $f_{s2} < f_{s0}$, то

$$f_{s1} + e_{s1} - k_{s1} = 1 \tag{2}$$

$$f_{s0} + e_{s2} - k_{s2} = 1 \tag{3}$$

Пусть n – число ребер разреза; тогда число его вершин $n + 1$.

Если сосчитать число ребер или вершин на P_{s1} и P_{s2} и результаты сложить, то каждое ребро или вершина разреза будут сосчитаны дважды; поэтому $e_{s1} + e_{s2} = e_{s0} + n$, $k_{s1} + k_{s2} = k_{s0} + n + 1$; кроме того, $f_{s1} + f_{s2} = f_{s0}$.

Тогда, складывая (2) и (3), получим

$f_{s0} + e_{s2} + n + 1 - (k_{s0} + n) = 2$, то есть $f_{s0} + e_{s2} - k_{s0} = 1$ и (1) доказано для $f_s = f_{s0}$. Тем самым (1) верно для любого f_s.

В частности, при $f_s = f$ (то есть при $s = 1$) имеем $f_1 + e_1 - k_1 = 1$; так как $f_1 = f - 1$, $e_1 = e$, $k_1 = k$, то $f + e - k = 2$.

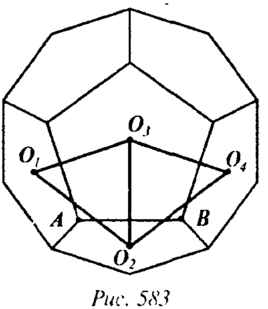


Рис. 583

№ 785. Прямая, соединяющая любые две противоположные вершины правильного додекаэдра, является для него осью симметрии 3-го порядка, то есть при повороте вокруг нее на 120° или 240° додекаэдр совмещается с собой. Пусть A – вершина додекаэдра, O_1, O_2, O_3 центры прилежащих граней (рис. 583). При повороте на 120° вокруг проходящий через A

оси 3-го порядка O_1 совмещается с O_2, O_2 — с O_3, O_3 — с O_1; следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ — правильный. Таким же образом используя ось, проходящую через B, убеждаемся, что треугольник $O_2O_3O_4$ правильный и равный треугольнику $O_1O_2O_3$. Продолжая аналогично, получаем 20 равных между собой правильных треугольников. Многоугольник, который они составляют – выпуклый, из каждой его вершины исходит 5 ребер. Он является поэтому правильным икосаэдром.

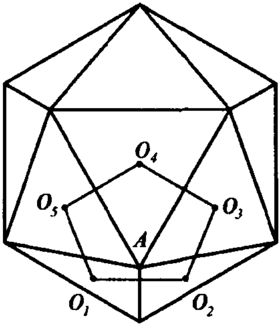


Рис. 584

№ 786. Рассуждения, как и в №785; используются оси симметрии 5-го порядка (рис. 584).

Доказательства №785, 786 интуитивны, так как материала для строгих доказательств в учебнике нет.

№ 787. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Искомый угол α равен углу между SC и прямой DC, параллельной AB, то есть углу SCD. Искомое расстояние d есть расстояние от точки A прямой AB до плоскости SCD, проходящей через DC параллельно AB, то есть высота тетраэдра $ASCD$. Так как $AS = a$ – другая его высота, то его объем.

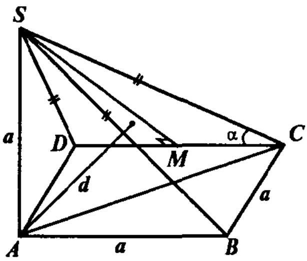


Рис. 585

$$V_{ASCD} = \frac{1}{3}S_{CSD} \cdot d = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot a. \qquad (1)$$

Так как $AS = AB = BC = AD = a$, то $SB = SC = SD = a\sqrt{2}$

Если $SM \perp DC$, то $DM = MC = \frac{a}{2}$, откуда $\cos\alpha = \frac{MC}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

$$S_{CSD} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}, \; S_{ACD} = \frac{a^2}{2}\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда из (1) получаем: $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}d = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot a}{4}$, $d = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

№ 788. Пусть $DG \parallel BC$ и $F = DE \cap BC$.

Тогда $EG = EC - GC = EC - BD = a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = BD = GC$,

$FD = DE$, $FB = BC = a$. Из $\triangle ABD$: $AD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; (1)

из $\triangle ACE$:
$AE = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$; (2)

из $\triangle DGE$:
$DE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; (3)

из (1), (2), (3) и по теореме, обратной теореме Пифагора,
$\angle ADE = 90°$.

В $\triangle FBA$:
$\angle FBA = 180° - 60° = 120°$,
$FB = BA = a$, $\angle FAB = \angle F = 30°$ и
$\angle FAC = 30° + 60° = 90°$.

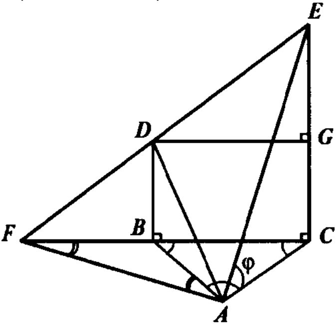


Рис. 586

По теореме о трех перпендикулярах $\angle FAE = 90°$, и $\varphi = \angle CAE$ – искомый угол между плоскостями. Из $\triangle ACE$ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

№ 789.

Если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, то

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,

аналогично:

$\overrightarrow{CA_1} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DB_1} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

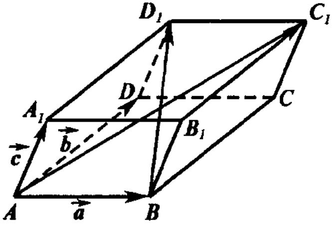


Рис. 587

При сложении квадратов этих трехчленов удвоенные произведения взаимно уничтожаются:

$$\overrightarrow{AC_1}^2 + \overrightarrow{BD_1}^2 + \overrightarrow{CA_1}^2 + \overrightarrow{DB_1}^2 = 4\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{c}^2 = 4AB^2 + 4AD^2 + 4AA_1{}^2 =$$
$$= (AB^2 + DC^2 + A_1B_1{}^2 + D_1C_1{}^2) + (AD^2 + BC^2 + A_1D_1{}^2 + B_1C_1{}^2) + (AA_1{}^2 +$$
$$+ BB_1{}^2 + CC_1{}^2 + DD_1{}^2)$$

№ 790. Направим оси координат вдоль ребер OA, OB, OC. Продолжение данного луча с направляющим вектором $\vec{a}$ $\{x; y; z\}$ и луч, отраженный от плоскости Oxy, симметричны относительно этой плоскости. Поэтому вектор $\vec{a}_1$ $\{x_1; y_1; z_1\} = \vec{a}_1$ $\{x; y; -z\}$ является направляющим вектором отраженного луча.

Действительно, $\vec{a} = (x\vec{i} + y\vec{i}) + z\vec{k}$, $\vec{a}_1 = (x\vec{i} + y\vec{i}) - z\vec{k}$, где вектор $\overrightarrow{MN} = x\vec{i} + y\vec{i}$ лежит в плоскости Oxy, а векторы $z\vec{k}$ и $-z\vec{k}$ перпендикулярны к плоскости Oxy, противоположно направлены и имеют равные длины.

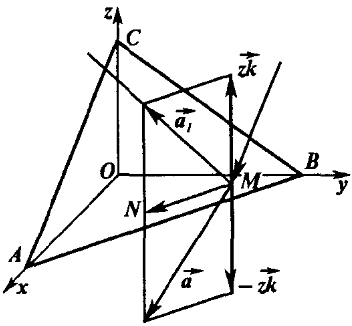


Рис. 588

Аналогично $\vec{a}_2$ $\{x_2; y_2; z_2\} = \vec{a}_2$ $\{x_1; -y_1; -z_1\} = \vec{a}_2$ $\{x; -y; -z\}$– направляющий вектор луча, отраженного от Oxz, а вектор $\vec{a}_3$ $\{x_3; y_3; z_3\} = \vec{a}_3$ $\{-x_2; y_2; z_2\} = \vec{a}_3$ $\{-x; -y; -z\}$ – направляющий вектор луча, отраженного от Oyz. Но тогда $\vec{a}_3 = -\vec{a}$, следовательно, направления входящего и выходящего лучей противоположны.

Замечание: в данной задаче существенно, что луч успевает отразится от всех граней тетраэдра.

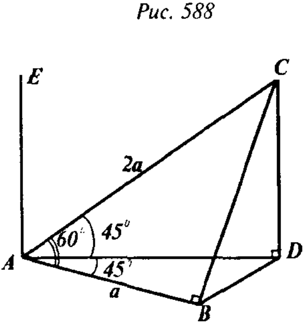


Рис. 589

№ 791. Пусть C лежит по одну сторону с E от ABD, $CB \perp AB$, $CD \perp AD$, $AB = a$. Тогда в треугольнике ABC $\angle ACB = 30°$, $AC = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$, в $\triangle ACD$ $CD = 2a \sin 45°$, в $\triangle ABD$ по теореме косинусов
$BD^2 = a^2 + 2a^2 - 2a \cdot a\sqrt{2} \cos 45° = a^2$,

в $\triangle BDC$ тогда $BC^2 = BD^2 + CD^2$ и по теореме, обратной теореме Пифагора, $CD \perp BD$; так как еще и $CD \perp AD$, то $CD \perp ABD$.

По условию, $AE \perp ABD$, следовательно, $CD \parallel AE$ и $\angle CAE = 90° - 45° = 45°$.

Если C лежит по разные стороны с E от ABD, то $\angle CAE = 90° + 45° = 135°$.

№ 792. Пусть высоты AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке H; α – плоскость ABH, $M = \alpha \cap DC$.

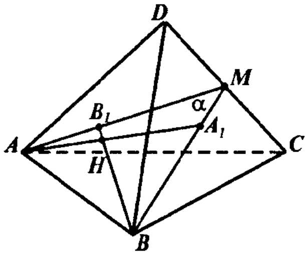


Рис. 590

Т. к. $AA_1 \perp BCD$ и $CD \subset BCD$, то $AA_1 \perp CD$; аналогично $BB_1 \perp CD$.

Т. к. $AA_1 \subset \alpha$ и $BB_1 \subset \alpha$, то $CD \perp \alpha$, но $AB \subset \alpha$, следовательно, $CD \perp AB$.

Аналогично доказывается, что $BD \perp AC$ и $AD \perp BC$.

Обратно, пусть $CD \perp AB$, $BD \perp AC$, $AD \perp BC$; α – плоскость ABA_1.

Так как $AA_1 \perp BCD$ и $DC \subset BCD$, то $AA_1 \perp DC$, а поскольку и по условию $AB \perp DC$, то $\alpha \perp DC$. Так как $BB_0 \subset \alpha$, то $BB_0 \perp DC$, но вместе с тем $BB_0 \perp AM$. Поскольку $DC \subset ADC$ и $AM \subset ADC$, то $BB_0 \perp ADC$, то есть BB_0 совпадает с высотой BB_1 тетраэдра.

Таким образом, высоты AA_1 и BB_1 тетраэдра пересекаются в точке H; аналогично и остальные высоты тетраэдра попарно пересекаются. Их точки пересечения совпадают, так как в противном случае все высоты тетраэдра лежали бы в одной плоскости.

№ 793. Если в тетраэдре $ABCD$ $AB = BC = CD = a$, $OD = d$, $\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = = \alpha$, то

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = ad\cos\alpha$, откуда

$(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})\overrightarrow{DO} = (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})\overrightarrow{DO} = 0$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$,

$DO \perp AB$, $DO \perp AC$, $DO \perp ABC$.

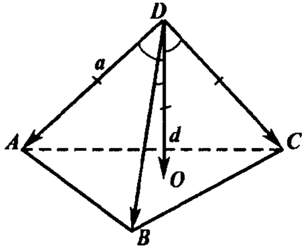


Рис. 591

№ 794. Доказано в №770. Доказательство согласно указанию в учебнике: если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OO_1} = \vec{d}$, то $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{O_1A} = \vec{a} - \vec{d}$. Отсюда вследствие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\vec{d}$: $\overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{O_1A} = \vec{c}\vec{a} - \vec{a}\vec{b} - (\vec{c} - \vec{b})\vec{d} = 0$, аналогично $O_1B \perp AC$, $O_1C \perp AB$.

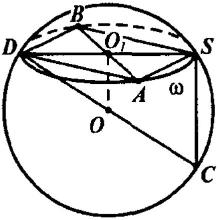


Рис. 592

№ 795. Пусть O – центр сферы, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ – данные хорды, α – плоскость SAB, ω – сечение сферы этой плоскостью.

Так как $\angle ASB = 90°$, то AB – диаметр для ω. Если DS – другой диаметр, то $ASBD$ – прямоугольник и точка O_1 пересечения его диагоналей – центр для ω и, следовательно, $OO_1 \perp \alpha$. Поскольку $SC \perp SA$ и $SC \perp SB$, то $SC \perp \alpha$ и, значит, $SC \parallel OO_1$. Плоскость, проходящая через эти прямые, содержит большой круг шара. Так как $\angle DSC = 90°$, то DC – диаметр сферы.

$$DC^2 = DS^2 + SC^2 = AB^2 + SC^2 = (a^2 + b^2) + c^2.$$

Сумма $a^2 + b^2 + c^2$ равна квадрату диаметра сферы и, следовательно, не зависит от положения хорд.

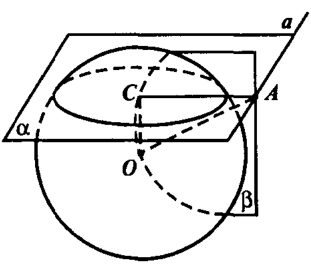


Рис. 593

№ 796. Плоскость α, проходящая через данную прямую a, пересекает сферу по некоторой окружности с центром C. Пусть $CA \perp a$, β – плоскость OAC. Тогда $OC \perp \alpha$ так как $a \subset \alpha$, то $OC \perp a$, кроме того, $CA \perp a$, и поскольку $OC \subset \beta$ и $CA \subset \beta$, то $\beta \perp a$. Так как $\angle OCA = 90°$, то C лежит на окружности с диаметром OA. Искомое множество – дуга окружности с диаметром OA, находящаяся внутри сферы и лежащая в плоскости β, проходщей через центр сферы O перпендикулярно данной прямой a.

№ 797. Пусть SA, SB, SC – данные касательные к сфере радиуса R с центром O. $\triangle ASO = \triangle BSO = \triangle SCO$ как прямоугольные по гипотенузе SO и катету R, следовательно, $SA = SB = SC$. $\triangle ASB = \triangle BSC = \triangle CSA$ по двум катетам, поэтому $AB = BC = AC$. Перпендикуляры, опущенные из S и O на плоскость ABC, пройдут поэтому через центр O_1 окружности, описанной около $\triangle ABC$, и совпадут. Если $SA = a$, то из треугольника ABS: $AB = a\sqrt{2}$.

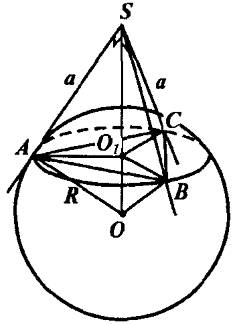


Рис. 594

Так как O_1A – радиус описанного около треугольника ABC круга, то $AB = O_1A\sqrt{3}$,

$O_1A = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. $\triangle OAS \sim \triangle O_1AS$, следовательно, $\frac{R}{OS} = \frac{AO_1}{AS} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a}$,

$OS = 0{,}5R\sqrt{6}$. Искомое множество – сфера, центр которой совпадает с центром данной сферы, а радиус равен $0{,}5R\sqrt{6}$.

№ 798. Данный тетраэдр состоит из четырех пирамид с вершинами в центре шара, высотами, равными R, и основаниями, совпадающими с гранями тетраэдра. Если объем тетраэдра V и площади его граней S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, то

$V_i = \frac{S_i h_i}{3}$, откуда $\frac{S_i}{3} = \frac{V_i}{h_i}$. С другой стороны,

$$V = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{3} S_i R_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{V}{h_i} R = VR \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}.$$

Следовательно,

$$V = VR \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}, \ \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i}.$$

№ 799. Пусть O_i – центры данных шаров, где $i = 1, 2, 3$, r_i – их радиусы, где $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, A_i – их точки касания с плоскостью. Тогда

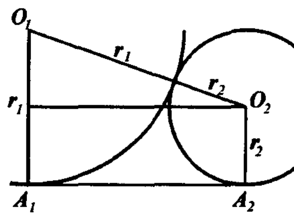


Рис. 595

$A_1A_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$, аналогично
$A_1A_3 = 2\sqrt{r_1r_3}$, $A_2A_3 = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Так как $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$, то $A_1A_2 \geqslant A_1A_3 \geqslant A_2A_3$, и по свойству сторон треугольника $A_1A_3 + A_2A_3 \geqslant A_1A_2$ (при равенстве точки лежат на одной прямой), отсюда

$$\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3} \geqslant \sqrt{r_1r_2}, \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)\sqrt{r_3} \geqslant \sqrt{r_1r_2}, r_3 \geqslant \frac{r_1r_2}{\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2}.$$

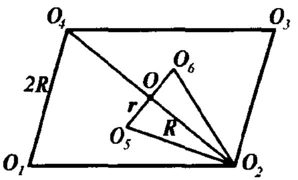


Рис. 596

№ 800. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – проекции на данную плоскость центров шаров радиуса R, а O_5, O_6 – центров шаров радиуса r. Тогда треугольники $O_1O_2O_4$ и $O_2O_3O_4$ – равносторонние со стороной $2R$, O_5 и O_6 – центры этих треугольников.

Если $O = O_2O_4 \cap O_5O_6$, то

$$\frac{1}{2}O_5O_6 = O_6O = r, O_2O = R, O_2O \perp O_5O_4 \text{ и } r = R\,\mathrm{tg}30° = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

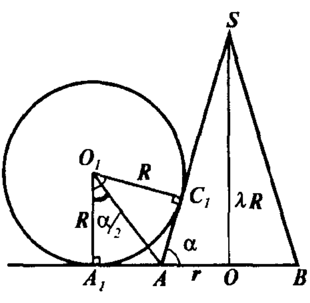


Рис. 597

№ 801. Если A_1, A_2, A_3 – точки касания шаров с плоскостью и O – центр основания конуса, то $A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = 2R$ и O – центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2A_3$. Следовательно,

$$2R = OA_1\sqrt{3} \text{ и } OA_1 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Пусть треугольник ASB – осевое сечение конуса, $OA = r$ – радиус его основания, $\angle OAS = \alpha$, O_1 – центр одного из шаров, C_1 – точка касания этого шара и конуса. Тогда в четырехугольнике $A_1AC_1O_1$: $\angle A_1AC_1 = 180° - \alpha$, $\angle O_1A_1A = \angle O_1C_1A = 90°$, следовательно, $\angle A_1O_1C_1 = \alpha$, а так как $\triangle O_1A_1A = \triangle O_1C_1A$, то $\angle A_1O_1A = 0{,}5\alpha$.

Из $\triangle AOS$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\lambda R}{r}$, $A_1A = OA_1 - OA = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3} - r$,

из $\triangle O_1A_1A$: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{A_1A}{R} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \dfrac{r}{R}$.

Подставляя эти значения в формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, получим после упрощений: $3(\lambda-2)r^2 - 4\sqrt{3}(\lambda-1)Rr + \lambda R^2 = 0$.

При $\lambda = 2 \Rightarrow -4\sqrt{3}Rr + 2R^2 = 0$, $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{6}$.

При $\lambda \neq 2 \Rightarrow\ r = \dfrac{2\sqrt{3}(\lambda-1) - \sqrt{9\lambda^2 - 18\lambda + 12}}{3(\lambda-2)}R$.

При $\lambda < 2$ только этот корень положителен.

При $\lambda > 2$ оба корня положительны, но больший корень r_2 оказывается большим, чем $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$, то есть радиус круга, описанного около $\triangle A_1A_2A_3$; A_1, A_2, A_3 находятся внутри основания конуса и касание является не внешним, а внутренним;

$9\lambda^2 - 18\lambda + 12 = 9[(\lambda-1)^2 + 3] > 9(\lambda-1)^2$;

$$r_2 > \frac{2\sqrt{3}(\lambda-1) + 3(\lambda-1)}{3(\lambda-2)}R > \frac{2\sqrt{3}(\lambda-1) + \sqrt{3}(\lambda-1)}{3(\lambda-2)}R =$$

$$= \sqrt{3}\frac{\lambda-1}{\lambda-2}R > \sqrt{3}R > \frac{2}{3}R\sqrt{3}.$$

№ 802. Точки M и N делят пополам диагонали прямоугольников ABB_1A_1 и ACC_1A_1, поэтому MN – средняя линия в треугольнике BA_1C (рис. 598).

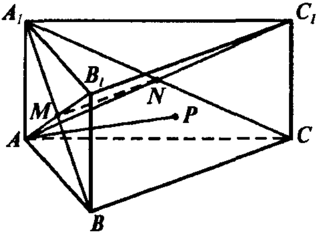


Рис. 598

Пусть V объем призмы. Тогда $V_{A_1ABC} = \dfrac{V}{3}$($AA_1$ – общая высота),

$$\frac{V_{AMNA_1}}{V_{A_1ABC}} = \frac{S_{MNA_1}}{S_{BCA_1}} = \frac{1}{4}$$ (AP – общая высота), следовательно:

$$V_{AMNA_1} = \frac{V}{12},\ V_{AMNCB} = \frac{V}{3} - \frac{V}{12} = \frac{V}{4},\ V_{AA_1B_1C_1} = V_{A_1ABC} = \frac{V}{3},$$

$$V_{A_1MNC_1B_1} = \frac{V}{3} - \frac{V}{12} = \frac{V}{4},$$

$$V_{BCC_1B_1MN} = V - \frac{V}{12} - \frac{V}{4} - \frac{V}{4} = \frac{5V}{12}.$$

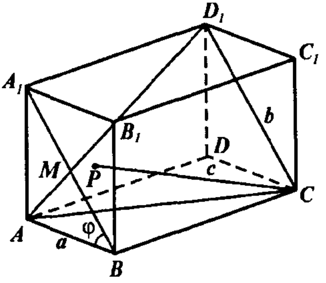


Рис. 599

№ 803. Дополним данный тетраэдр $ABCD_1$ до параллелепипеда: $ABB_1A_1 \parallel CD_1$, $BCC_1B_1 \parallel AD_1$, $CDD_1C_1 \parallel AB$, $ADD_1A_1 \parallel BC$, $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$.

Тогда $AB = a$, $CD_1 = b$, $\angle ABA_1 = AB \wedge CD_1 = \varphi$, высота параллелепипеда $CP = c$. $S_{ABB_1A_1} = 2S_{ABA_1} = ab \sin \varphi$; по задаче 776:

$$V_{ABCD_1} = \frac{V_{\text{параллелепипеда}}}{6} = c\frac{S_{ABB_1A_1}}{6} = \frac{abc \sin \varphi}{6}$$

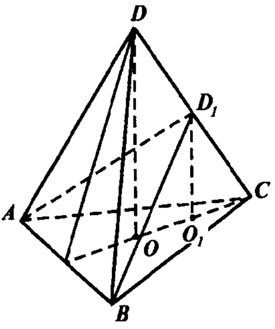


Рис. 600

№ 804. Если $DD_1 = D_1C$, $DO \perp ABC$, $D_1O_1 \perp ABC$, то $DO \parallel D_1O_1$, $D_1O_1 = \frac{DO}{2}$, следовательно $V_{ABCD_1} = \frac{V_{ABCD}}{2}$ (основание ABC – общее), т. о. $V_{DABD_1} = V_{D_1ABC}$.

№ 805. Пусть MN – средняя линия грани OCD, OO_1 и NN_1 – перпендикуляры к основанию пирамиды, V – ее объем, $V_{NABC} = \frac{V}{4}$ (так как $S_{ABC} = \frac{S_{ABCD}}{2}$, $NN_1 = \frac{OO_1}{2}$), $V_{ABNO} = V_{ABCN} = \frac{V}{4}$ ($S_{BNO} = S_{BCN}$, высота, проходящая через вершину A, общая),

$V_{AOMN} = \frac{V_{AOCD}}{4}$ $(S_{OMN} = \frac{S_{OCD}}{4}$, высота, проходящая через вершину A, общая)

$V_{AOCD} = \frac{V}{2}$ $(S_{ACD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$, высота OO_1 общая), $\Rightarrow V_{AOMN} = \frac{V}{8}$,

$V_{OABNM} = \frac{V}{8} + \frac{V}{4} = \frac{3V}{8}$,

$V_{ABCDMN} = V - \frac{3V}{8} = \frac{5V}{8}$, плоскость делит объем в отношении 3 : 5.

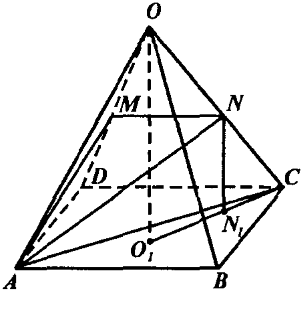


Рис. 601

№ 806. Пусть $a \parallel c \parallel d$, $A \in a$, $B \in a$, $C \in c$, $D \in d$. α – плоскость, содержащая a и c, $DD_0 \perp \alpha$ (рис. 602). Тогда S_{ABC} не зависит от положения C, длина DD_0 не зависит от положения D, следовательно

$V_{ABCD} = S_{ABC} \cdot \frac{DD_0}{3}$, не зависит от положения C и D.

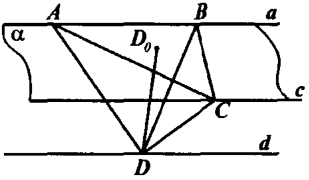


Рис. 602

№ 807. Воспользуемся задачей №803. Расстояние между скрещивающимися прямыми AF и D_1E, то есть расстояние между содержащими их параллельными гранями куба, равно $AD = 1$ см. Если F_1 – середина CC_1 и $M = DF_1 \cap DE_1$, то $DF_1 \parallel AF$ и угол между AF и D_1E равен углу DMD_1, $\triangle DD_1E = \triangle CDF_1$, $\Rightarrow$ если $DD_1E = \varphi$, то $CDF_1 = \varphi$, $D_1DM = 90° - \varphi$ и в $\triangle DD_1M$ $\angle DMD_1 = 90°$. Из треугольников ABF и DD_1E:

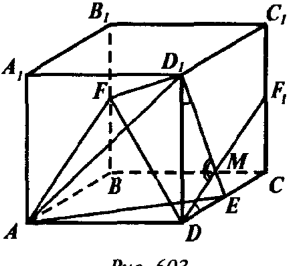


Рис. 603

$AF = D_1E = \sqrt{1 + 0{,}25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, поэтому согласно №803:

$$V_{AD_1EF} = \frac{AF \cdot D_1E \cdot AD \cdot \sin \angle DMD_1}{6} = \frac{0{,}5\sqrt{5} \cdot 0{,}5\sqrt{5} \cdot \sin 90^\circ}{6} = \frac{5}{24}.$$

№ 808. Пусть O – какая-нибудь точка на среднем сечении данного многогранника. Разобьем его на пирамиды с вершиной O. Основаниями двух из них будут служить основания многогранника, основаниями остальных – треугольники, из которых состоят его боковые грани. Объемы первых двух пирамид:

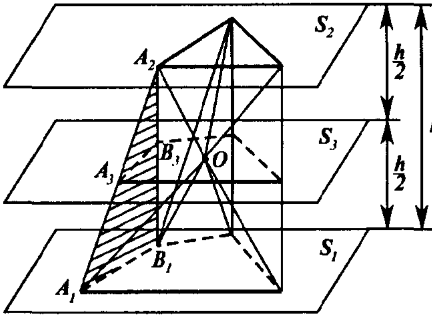


Рис. 604

$V_1 = \frac{S_1 \cdot 0{,}5h}{3} = \frac{S_1h}{6}$, $V_2 = \frac{S_2h}{6}$. Если $\triangle\ A_1B_1A_2$ – один из треугольников, на которые разбиты боковые грани, то среднее сечение пересечет его по средней линии A_3B_3. Тогда

$$S_{A_1B_1A_2} = 4S_{A_3B_3A_2},\ V_{OA_1B_1A_2} = 4V_{OA_3B_3A_2},\ V_{OA_3B_3A_3} = \frac{1}{3}S_{OA_3B_3}\frac{1}{2}, \Rightarrow$$

$$V_{OA_1B_1A_2} = 4\frac{1}{6}S_{OA_3B_3}h.$$

Так как сумма площадей всех таких треугольников равна S_3, то сумма объемов всех пирамид с основаниями на боковых гранях равна $V_3 = \frac{4S_3h}{6}$. Объем всего многогранника равен

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{h(S_1 + S_2 + 4S_3)}{6}.$$

№ 809. Если оси Oy и Oz являются осями цилиндров, то в системе $Oxyz$ их боковые поверхности имеют уравнения $x^2 + z^2 = 1$ и $y^2 + x^2 = 1$. На рисунке изображена часть данного тела, лежащая в первом октанте. Ее сечение плоскостью, перпендикулрной оси Ox – квадрат со стороной $z = y = \sqrt{1 - x^2}$. Поэтому объем этой части тела равен

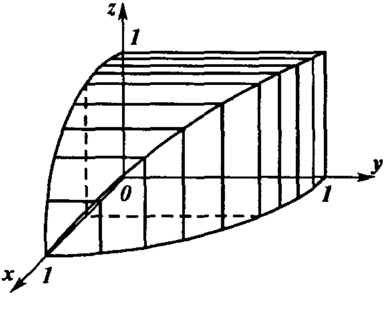


Рис. 605

$$V = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Объем всего тела равен $8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

№ 810. $S_{ASB} = \frac{AB + AS + BS}{2} OM = \frac{1}{2} AB \cdot SC$, отсюда

$(AC + SA)r = AC \cdot SC.$

$(y + \sqrt{x^2 + y^2})r = xy,$

$r \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = y(x - r),$

$r^2x^2 + r^2y^2 = y^2x^2 - 2y^2xr + y^2r^2,$

$y^2 = \frac{r^2 x}{x - 2r},$

$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^2}{x - 2r},$

$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{2x(x - 2r) - x^2}{(x - 2r)^2}$

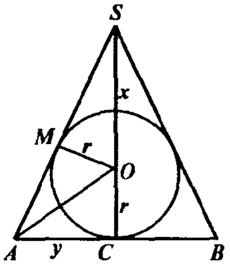


Рис. 606

По необходимому условию экстремума

$V' = 0;\ 2x(x - 2r) - x^2 = 0;\ x = 4r.$

Так как при $x < 4r$ $V' < 0$, а при $x > 4r$ $V' > 0$, то V имеет минимум. Тогда $y^2 = 2r^2$, $AS = \sqrt{x^2 + y^2} = 3r\sqrt{2}$. Если $\angle ASB = \alpha$, то $\angle ASC = \frac{\alpha}{2}$.

Из $\triangle ASC$: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AC}{AS}=\frac{r\sqrt{2}}{3r\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$, $\alpha=2\arcsin\frac{1}{3}$.

№ 811. Пусть $AC=R$ – радиус основания конуса, $AS=l$ – его образующая, $SC=h$ – его высота, $OM=r$ – радиус вписанного шара (см. рис. к №810). Тогда

$$\frac{S_{конуса}}{S_{шара}}=\frac{\pi R^2+\pi Rl}{4\pi r^2}=\frac{R(R+l)}{4r^2}.$$

$$\triangle ASC\sim\triangle OSM,\ \frac{AC}{AS}=\frac{OM}{OS},\ \frac{R}{l}=\frac{r}{h-r},\ Rh-Rr=lr,\ Rh=(R+l)r.$$

$$\frac{V_{конуса}}{V_{шара}}=\frac{\pi R^2h}{3}:\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{R\cdot Rh}{4r^3}=\frac{R(R+l)r}{4r^3}=\frac{R(R+l)}{4r^2}=\frac{S_{конуса}}{S_{шара}}.$$

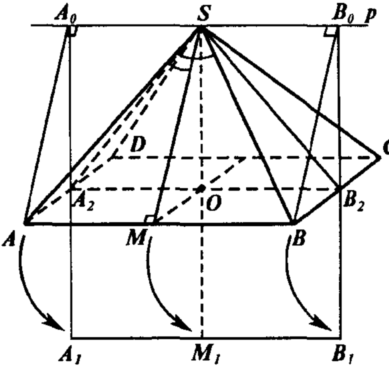


Рис. 607

№ 812. При повороте пирамиды $SABCD$ вокруг прямой p, параллельной AB, отрезки A_0A, SM, B_0B, перпендикулярные p, займут соответственно положения A_0A_1, SM_1, B_0B_1 в плоскости SA_2B_2. Поэтому тело, полученное при ее вращении, совпадает с телом, полученным при вращении многоугольника $A_1A_2SB_2B_1$. Его объем равен разности между объемом цилиндра, полученного при вращении прямоугольника $A_1B_1B_0A_0$ и объемами конусов, полученных при вращении равных треугольников A_2A_0S и B_2B_0S.

Из $\triangle ASM$: $SM=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

Из $\triangle OSM$: $OS=\sqrt{SM^2-OM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, но

$SM = SM_1$, $OS = A_2A_0$, $A_0B_0 = AB = a$, $A_0S = \dfrac{a}{2}$, поэтому объем тела вращения равен

$$V = V_{A_1B_1B_0A_0} - 2V_{A_2A_0S} = \pi SM_1^2 \cdot A_0B_0 - 2\ \frac{1}{3}A_2A_0^2 \cdot A_0S = \pi SM_1^2 a -$$

$$-\frac{2}{3}\pi OS^2\frac{a}{2} = \pi\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot a - \frac{1}{3}\pi\frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot a = \frac{\pi a^2}{12}\left(3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

№ 813. Пусть AB – диаметр полукруга, R – его радиус, O – его центр, $OK \perp AC$, $CD \perp AB$. Объем тела, полученного при вращении фигуры ANC, равен разности объемов шарового сегмента, полученного при вращении $ANCD$, и конуса, полученного при вращении ADC:

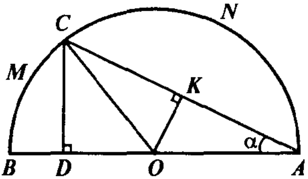


Рис. 608

$$V_{ANC} = \pi AD^2\left(R - \frac{AD}{3}\right) - \frac{\pi DC^2 AD}{3}.$$

Но $AC = 2AK = 2R\cos\alpha$, $AD = AC\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha$, $DC = AC\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha$, следовательно,

$$V_{ANC} = \pi 4R^2\cos^4\alpha\cdot\left(R - \frac{2R\cos^2\alpha}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\cdot 4R^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\cdot 2R\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3\cdot(12\cos^4\alpha - 8\cos^4\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)) = \frac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha.$$

По условию V_{ANC} равен половине объема шара:

$$\frac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

№ 814. <u>Лемма 1.</u> (*Геометрия 7–9, стр. 141, Геометрия 10– 11, стр. 94.*). Все медианы в треугольнике $A_1A_2A_3$ пересекаются в одной точке M, называемой центроидом треугольника, где для любой точки O

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right) \qquad (1)$$

и M делит каждую медиану в соотношении 2 : 1.

Если C_1 – середина A_2A_3, то (*Геометрия 7–9, стр. 199*) $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right)$. Точка M, определяемая равенством (1), лежит на медиане A_1C_1 и делит ее в соотношении 2 : 1. Действительно:

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right) - \overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-2\overrightarrow{OA_1}\right),$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right) =$$

$= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-2\overrightarrow{OA_1}\right)$, откуда $M \in A_1C$ и $\overrightarrow{A_1M} = 2\overrightarrow{MC}$. Для остальных медиан доказательство аналогично.

<u>Лемма 2.</u> Все прямые, соединяющие вершины тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке G (называемой центроидом тетраэдра), где

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right).$$

Если M_4 – центроид грани $A_1A_2A_3$, то

$$\overrightarrow{A_4G} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA_4} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right) - \overrightarrow{OA_4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-3\overrightarrow{OA_4}\right),$$

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right) - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right) =$$

$= \frac{1}{12}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-3\overrightarrow{OA_4}\right)$, следовательно, $\overrightarrow{A_4G} = 3\overrightarrow{GM}$, откуда $G \in A_4M_4$, причем $A_4G : GM_4 = 3 : 1$. Для остальных прямых доказательство аналогично.

По условию все высоты тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ пересекаются в точке H. Пусть G – центроид тетраэдра; докажем, что точка C, для которой $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HG}$, является центром описанной около тетраэдра сферы, то есть, что

$A_1C^2 = A_2C^2 = A_3C^2 = A_4C^2$ или $\overrightarrow{A_1C}^2 = \overrightarrow{A_2C}^2 = \overrightarrow{A_3C}^2 = \overrightarrow{A_4C}^2$ (1)

Согласно лемме 2:

$$\overrightarrow{A_1C}^2 = \left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA_1}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HA_1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HA_2} + \overrightarrow{HA_3} + \overrightarrow{HA_4}\right) - \overrightarrow{HA_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HA_2} + \overrightarrow{HA_3} + \overrightarrow{HA_4} - \overrightarrow{HA_1}\right)^2 \qquad (2)$$

Аналогично $\overrightarrow{A_2C}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HA_3} + \overrightarrow{HA_4} - \overrightarrow{HA_2}\right)^2$ (3)

Так как $HA_1 \perp A_2A_3A_4$, то

$\overrightarrow{HA_1} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{HA_1} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 0$,

$\overrightarrow{HA_1} \cdot \left(\overrightarrow{HA_3} - \overrightarrow{HA_2}\right) = 0; \overrightarrow{HA_1} \cdot \overrightarrow{HA_3} = \overrightarrow{HA_1} \cdot \overrightarrow{HA_2}$.

Аналогично равны друг другу все произведения вида

$\overrightarrow{HA_i} \cdot \overrightarrow{HA_j}$, где $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$

После раскрытия скобок в (2) и (3) все удвоенные произведения окажутся равными между собой, так что $\overrightarrow{A_1C}^2 = \overrightarrow{A_2C}^2$.

Аналогичны верны и остальные равенства (1). Так как $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HG}$, то точки H, C и G лежат на одной прямой.

№ 815. Сохраним обозначения из №814.

Докажем, что точка Q, для которой $\overrightarrow{HQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$ – центр сферы Эйлера.

Если точка B_1 делит отрезок A_1H в соотношении $2 : 1$, то

$\overrightarrow{HB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA_1}$, а если M_1 – центроид грани $A_2A_3A_4$, то согласно №366

$\overrightarrow{HM}_1 = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{HA}_2 + \overrightarrow{HA}_3 + \overrightarrow{HA}_4\right)$; по лемме 2 из №814 $\overrightarrow{HG} =$

$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{HA}_1 + \overrightarrow{HA}_2 + \overrightarrow{HA}_3 + \overrightarrow{HA}_4\right)$. Отсюда

$$\overrightarrow{QM}_1 = \overrightarrow{HM}_1 - \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HM}_1 - \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{HA}_2 + \overrightarrow{HA}_3 + \overrightarrow{HA}_4 - \overrightarrow{HA}_1\right),$$

$$\overrightarrow{QB}_1 = \overrightarrow{HB}_1 - \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HB}_1 - \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{HA}_2 + \overrightarrow{HA}_3 + \overrightarrow{HA}_4 - \overrightarrow{HA}_1\right)$$

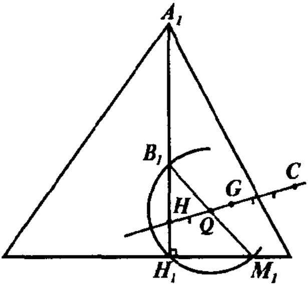


Рис. 609

Аналогично находим остальные векторы $\overrightarrow{QM}_2, \overrightarrow{QB}_2$...

В №814 доказано, что все произведения $\overrightarrow{HA}_i \cdot \overrightarrow{HA}_j$, где $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$, равны между собой. Поэтому после раскрытия скобок получим

$$\overrightarrow{QM}_1^2 = \overrightarrow{QM}_2^2 = \overrightarrow{QM}_3^2 = \overrightarrow{QM}_4^2 =$$

$$= \overrightarrow{QB}_1^2 = \overrightarrow{QB}_2^2 = \overrightarrow{QB}_3^2 = \overrightarrow{QB}_4^2,$$

следовательно, все точки M_i и B_i лежат на сфере с центром Q.

Так как $\overrightarrow{QM}_1 = -\overrightarrow{QB}_1$, то M_1 и B_1 – концы диаметра этой сферы; так как B_1 и H лежат на высоте A_1H_1, а H_1 и M_1 – на перпендикулярной ей грани $A_2A_3A_4$, то $B_1H_1M_1$ и H_1 лежит на сфере. Аналогично на сфере лежат и точки H_2, H_3, H_4.