ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ГИА-9

ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

РЕШЕБНИК
МАТЕМАТИКА

9 КЛАСС

ПОДГОТОВКА К ГИА-9
2011

ЛЕГИОН

ГИА-9

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

9-й КЛАСС

ПОДГОТОВКА К ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ-2011

Учебно-методическое пособие

™

ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2010

ББК 22.14
Р 47

Рецензенты: *Л. Н. Евич* — к. ф.-м. н., доцент,
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России

Авторский коллектив:
Кулабухов С. Ю., Резникова Н. М., Таран А. А.,
Тимофеенко И. В., Фофонов А. Е.

Р 47 Решебник. Математика. 9 класс. Подготовка к государственной итоговой аттестации-2011: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 240 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-91724-048-0

Решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации (ГИА-9) по математике в 9-м классе. Он содержит решения **всех тестовых заданий повышенного уровня сложности** и **всех задач из раздела «Задачник»** пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2011» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова за исключением решений, представленных в указанной книге.

Предлагаемый материал поможет школьникам отработать навыки решения заданий предстоящего экзамена и систематизировать знания в процессе подготовки к ГИА-9. Пособие также адресовано учителям, организующим подготовку учеников к экзамену.

ББК 22.14

ISBN 978-5-91724-048-0

Оглавление

Глава I. Решения учебно-тренировочных тестов

Решение варианта №1

17. ОДЗ: $x \neq 2$. $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{16}{x^2-4}$;

$\dfrac{x^2-4x+4+x^2+2x-16}{x^2-4} = 0$;

$2x^2-2x-12=0$; $x^2-x-6=0$; $x_1=3$, $x_2=-2$ — не входит в ОДЗ.

Ответ: 3.

18. Так как прямая проходит через обе точки, составим систему уравнений, где уравнение прямой имеет вид $y = ax + b$: $\begin{cases} -10a+b=-7, \\ 15a+b=-2. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, тогда $25a = 5$, $a = \dfrac{1}{5}$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем: $15 \cdot \dfrac{1}{5} + b = -2$; $b = -5$. Уравнение прямой: $y = \dfrac{1}{5}x - 5$. Прямая пересекает ось Oy, когда $x = 0$, тогда $y = -5$, значит, в точке $(0; -5)$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{5}x - b$; $(0; -5)$.

19. $\dfrac{3c+3d-2}{2d-2c+3c^2-3d^2} = \dfrac{3c+3d-2}{-2(c-d)+3(c-d)(c+d)} =$

$= \dfrac{3c+3d-2}{(c-d)(3c+3d-2)} = \dfrac{1}{c-d}$.

Ответ: $\dfrac{1}{c-d}$.

20. Пусть x — это начальная стоимость сахара, а t — количество сахара, которое можно купить после повышения цены, тогда $x \cdot 3{,}9 = 1{,}3x \cdot t$; $3{,}9 = 1{,}3t$; $t = 3$.

Ответ: 3.

21. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 1). Так как прямая $y = a$ параллельна оси Ox, то она будет иметь 2 общие точки с графиком функции $y = f(x)$ при $a = -4$, $a = 0$.

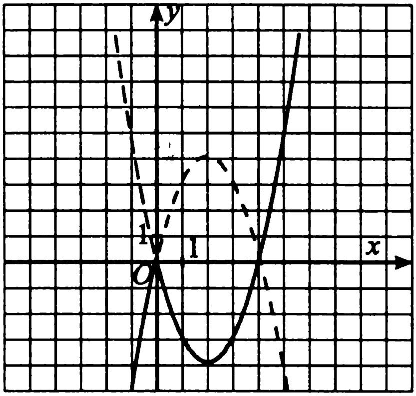

Рис. 1

Ответ: $-4; 0$.

Решение варианта №2

17. ОДЗ: $x = \pm 3$. $\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{72}{x^2-9}$,

$\dfrac{x^2+6x+9-x^2+3x-72}{x^2-9} = 0$, $9x - 63 = 0$, $x = 7$.

Ответ: 7.

18. Так как прямая проходит через обе точки, составим систему уравнений, где уравнение прямой имеет вид $y = ax + b$: $\begin{cases} -8a + b = -30, \\ 4a + b = 6. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, тогда $12a = 36$, $a = 3$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем: $4 \cdot 3 + b = 6$; $b = -6$. Уравнение прямой: $y = 3x - 6$. Прямая пересекает ось Ox, когда $y = 0$, тогда $x = 2$, значит, в точке $(2; 0)$.

Ответ: $y = 3x - 6$; $(2; 0)$.

19. $\dfrac{3a^2-3b^2-2a+2b}{2-3a-3b} = \dfrac{3(a-b)(a+b)+2(b-a)}{2-3a-3b} =$

$= \dfrac{(b-a)(-3a-3b)+2(b-a)}{2-3a-3b} = \dfrac{(b-a)(2-3a-3b)}{2-3a-3b} = b-a.$

Ответ: $b-a$.

20. Пусть x — это начальная стоимость конфет, а t — количество конфет, которое можно купить после понижения цены, тогда $x \cdot 3{,}2 = 0{,}8x \cdot t$; $3{,}2 = 0{,}8t$; $t = 4$.

Ответ: 4.

21. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 2). Так как прямая $y = a$ параллельна Ox, то она будет иметь 3 общие точки с графиком функции $y = f(x)$ при $0 < a < 4$.

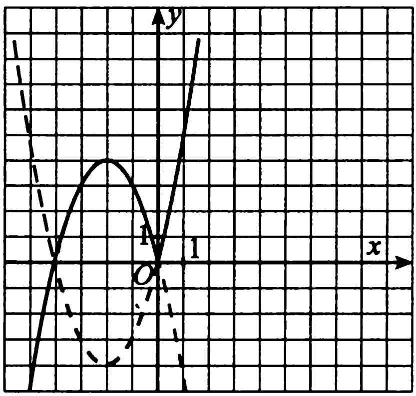

Рис. 2

Ответ: $(0; 4)$.

Решение варианта №3

17. ОДЗ: $x \neq \pm 3$. $\dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{15-x}{9-x^2} = \dfrac{1}{x+3}$.

$\dfrac{(x+3)(x-1)-(15-x)}{x^2-9} = \dfrac{x-3}{x^2-9}$;

$$\frac{x^2+3x-x-3-15+x-x+3}{x^2-9}=0.\ x^2+2x-15=0;\ x_1=-5, x_2=3.$$

$x_2 = 3$ — не входит в ОДЗ.

Ответ: $x = -5$.

18. В общем виде уравнение прямой может быть записано как $y = kx + b$ либо $x = a$.

Второй вариант противоречит условию, так как точки A и B имеют различные абсциссы.

Подставим координаты точек A и B в уравнение $y = kx + b$.

$$\begin{cases} -3 = k\cdot 30 + b \\ 5 = k\cdot 10 + b \end{cases} \Rightarrow -8 = 20k \Rightarrow k = -\frac{2}{5}.$$

$$-3 = -\frac{2}{5}\cdot 30 + b \Rightarrow b = 9.$$

Получаем уравнение прямой: $y = -\frac{2}{5}x + 9$.

Пересекает ось абсцисс $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\frac{2}{5}x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{45}{2}$.

Прямая пересекает ось x в точке $\left(\frac{45}{2}; 0\right)$.

Ответ: $y = -\frac{2}{5}x + 9$, $\left(\frac{45}{2}; 0\right)$.

19. $$\frac{b-ba-a}{a^2+ab^2+a^2b-b^2}=\frac{-(a+ab-b)}{a^2-b^2+ab^2+a^2b}=$$

$$=\frac{-(a+ab-b)}{(a-b)(a+b)+ab(a+b)}=\frac{-(a+ab-b)}{(a+b)(a+ab-b)}=$$

$$=-\frac{1}{a+b}.$$

Ответ: $-\frac{1}{a+b}$.

20. Пусть x — цена ткани до подорожания, тогда новая цена — $1{,}4x$.

На покупку 3,5 метров ткани ранее тратили $3{,}5x$. Пусть y — объем товара, который теперь можно купить на эти деньги.

Значит, $3{,}5x = 1{,}4xy \Rightarrow y = \dfrac{3{,}5x}{1{,}4x} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Теперь можно купить 2,5 м ткани. Разность: $3{,}5 - 2{,}5 = 1$.

Ответ: 1.

21. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 3). Так как прямая $y = p$ параллельна оси Ox, то она будет иметь более одной общей точки с графиком функции $y = f(x)$ при $-3 < p \leqslant \dfrac{9}{4}$.

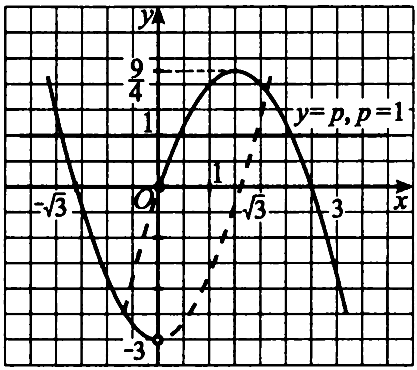

Рис. 3

Ответ: $p \in \left(3; \dfrac{9}{4}\right]$.

Решение варианта №4

17. ОДЗ: $x \neq \pm\dfrac{3}{2}$.

$$\frac{x-2}{2(3-2x)} + \frac{2x-4{,}5}{4x^2-9} = \frac{1}{2x+3};$$

$$\frac{(2x+3)(2-x)+2(2x-4{,}5)-2(2x-3)}{2(4x^2-9)} = 0;$$

$$\frac{4x+6-2x^2-3x+4x-9-4x+6}{2(4x^2-9)}=0;\ 2x^2-x-3=0;$$
$x_1=-1,\ x_2=1,5.$
$x_2=1,5$ — вне ОДЗ исходного уравнения.

Ответ: -1.

18. В общем виде уравнение прямой может быть представлено как $y=kx+b$, либо $x=a$.

Второй вариант противоречит условию, так как точки A и B имеют различные абсциссы.

Подставим координаты A и B в уравнение $y=kx+b$.

$$\begin{cases} 3=16k+b, \\ 12=-20k+b. \end{cases} \Rightarrow 36k=-9\Rightarrow k=-\frac{1}{4};$$

$$3=-16\cdot\frac{1}{4}+b\Rightarrow b=7.$$

Получаем уравнение прямой: $y=-\frac{1}{4}x+7$.

Она пересекает ось абсцисс при $y=0\Rightarrow 0=-\frac{1}{4}x+7\Rightarrow x=28$.

Ответ: $y=-\frac{1}{4}x+7$, $(28;0)$.

19. $$\frac{(a+b)^2-2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}=\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)(a-b)}=\frac{1}{a-b}.$$

Ответ: $\frac{1}{a-b}$.

20. Пусть x — старая цена, тогда $0{,}84x$ — новая цена метра ткани.

На 10,5 метров раньше было затрачено $10{,}5x$.

Пусть y — количество метров ткани, которые можно купить по новой цене. Тогда на покупку будет затрачено $0{,}84x\cdot y$, что по условию равно $10{,}5x$.

$$0{,}84xy=10{,}5x\Rightarrow y=\frac{10{,}5x}{0{,}84x}=12{,}5.$$

Теперь можно купить 12,5 метров ткани.

Разность: $12{,}5 - 10{,}5 = 2$.

Ответ: 2.

21. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 4). Так как прямая $y = p$ параллельна оси Ox, то она будет иметь не менее трёх общих точек с графиком функции $y = f(x)$ при $-1 < p < 4$.

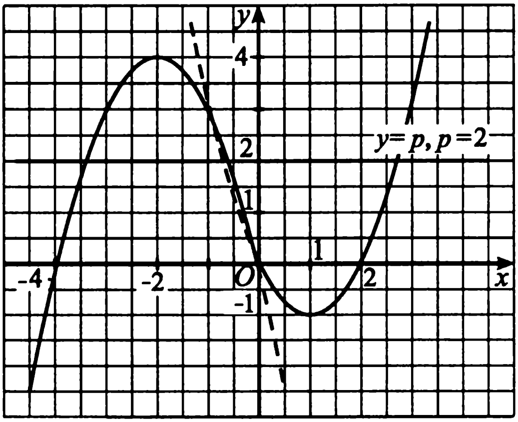

Рис. 4

Ответ: $(-1; 4)$.

Решение варианта №5

17. ОДЗ: $x \neq \pm 4$. $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x}{x+4} = \frac{10}{x^2-16}$; $(x+4)(x+4) - x(x-4) = 10$;

$x^2 + 8x + 16 - x^2 + 4x = 10$; $12x = -6$; $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

18. Даны точки $A(5; -1)$ и $B(-10; 5)$. Уравнение прямой, не параллельной оси Oy, имеет вид: $y = kx + b$. Составим систему уравнений:

$\begin{cases} -1 = k \cdot 5 + b, \\ 5 = k \cdot (-10) + b; \end{cases}$ $15k = -6$; $k = -0{,}4$; $b = -1 - 5 \cdot (-0{,}4) = 1$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид: $y = -0{,}4x + 1$. При $y = 0$, $-0{,}4x + 1 = 0$; $x = 2{,}5$.

Ответ: $y = -0{,}4x + 1$; $(-2{,}5; 0)$.

19. $\dfrac{3b - 3a + 1}{3a^2 - 3b^2 - a - b} = \dfrac{3b - 3a + 1}{3(a^2 - b^2) - (a + b)} =$
$= -\dfrac{3a - 3b - 1}{(a + b)(3a - 3b - 1)} = -\dfrac{1}{a + b}.$

Ответ: $-\dfrac{1}{a + b}$.

20. Пусть первоначальная стоимость одного килограмма овощей — x. Когда стоимость повысилась на 40%, она стала $1{,}4x$. На эту сумму купили 5 кг, то есть уплатили $1{,}4x \cdot 5 = 7x$. Значит, ранее на эту сумму можно было купить $\dfrac{7x}{x} = 7$ (кг).

Ответ: 7.

21. Построим график функции $y = f(x)$ (см. рис. 5),
где $f(x) = \begin{cases} x(x - 4), x < 4; \\ x(4 - x), x \geqslant 4. \end{cases}$

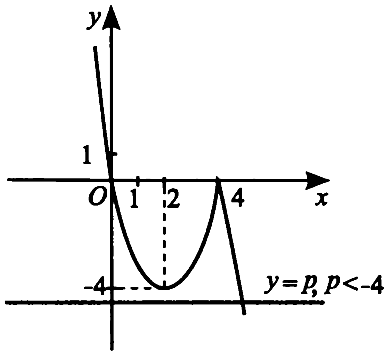

Рис. 5

Прямая $y = p$, параллельная оси Oy будет иметь более одной общей точки с графиком функции $y = f(x)$ при условии $-4 \leqslant p < 0$.

Ответ: $[-4; 0)$.

Решение варианта №6

17. ОДЗ: $x \neq \pm 5$. $\dfrac{x}{x-5} - \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{11}{x^2-25}$, $x(x+5) - (x-5)^2 = 11$,

$x^2 + 5x - x^2 + 10x - 25 - 11 = 0$, $15x - 36 = 0$, $x = \dfrac{36}{15}$, $x = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

18. Уравнение прямой имеет вид: $y = kx + b$. Она проходит через точки $A(3; -2)$ и $B(-5; 6)$. Составим систему уравнений: $\begin{cases} 3k + b = -2, \\ -5k + b = 6; \end{cases} \Leftrightarrow$ $k = -1$, $b = 1$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид: $y = -x + 1$. Если $y = 0$, то $x = 1$.

Ответ: $y = -x + 1$; $(1; 0)$.

19. $\dfrac{4a + 4b + 1}{4a^2 - 4b^2 + a - b} = \dfrac{4a + 4b + 1}{4(a^2 - b^2) + (a - b)} =$

$= \dfrac{(4a + 4b + 1)}{(a - b)(4a + 4b + 1)} = \dfrac{1}{a - b}$.

Ответ: $\dfrac{1}{a - b}$.

20. Пусть первоначальная стоимость 1 кг овощей — x рублей. Когда стоимость повысилась на 20%, она составила $1{,}2x$ рублей. На эту сумму купили 5 кг, то есть уплатили $1{,}2x \cdot 5 = 6x$ (руб). Значит, ранее на эту сумму можно было купить $\dfrac{6x}{x} = 6$ (кг).

Ответ: 6.

21. Построим график функции $y = f(x)$ (см. рис. 6),

где $f(x) = \begin{cases} x(6 - x), x < 6; \\ x(x - 6), x \geqslant 6. \end{cases}$

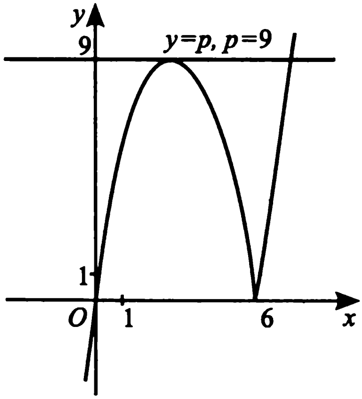

Рис. 6

Уравнение $f(x) = p$ имеет два решения при условии $p = 9$ или $p = 0$.

Ответ: 0; 9.

Решение варианта №7

17. $\frac{x-10}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$. ОДЗ: $x \neq \pm 2$. Умножив обе части уравнения на x^2-4, получим: $(x-10)(x+2)+x(x-2)=8$; $x^2-5x-14=0$; $x_1=-2$, $x_2=7$. При этом x_1 не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 7.

18. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(-5;\ 7)$ и $B(6;-11)$. Для этого подставим координаты точек в уравнение прямой $y = kx + b$. Получим систему уравнений:

$\begin{cases} 7=-5k+b, \\ -11=6k+b; \end{cases} \Leftrightarrow k=-\frac{18}{11},\ b=-\frac{13}{11}$. Таким образом, уравнение прямой имеет вид: $y=-\frac{18}{11}x-\frac{13}{11}$. Так как уравнение $0=-\frac{18}{11}x-\frac{13}{11}$ имеет корень $x=-\frac{13}{18}$, то эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $\left(-\frac{13}{18};\ 0\right)$.

Ответ: $y=-\frac{18}{11}x-\frac{13}{11}$, $\left(-\frac{13}{18};\ 0\right)$.

19. $\dfrac{10x^2-10y^2+10x+10y}{5x-5y+5}=\dfrac{10(x+y)(x-y+1)}{5(x-y+1)}=2x+2y.$

Ответ: $2x+2y$.

20. Пусть x — первоначальная цена одного килограмма изюма. Купив 21 кг, заплатили $21x$ рублей. Далее цена изюма снизилась на 16%, то есть один килограмм изюма стал стоить $x-0{,}16x=0{,}84x$ (руб). На сумму $21x$ рублей по цене $0{,}84x$ рублей можно купить $\dfrac{21x}{0{,}84x}=25$ (кг) изюма.

Ответ: 25.

21. Построим график функции $y=|2x^2-15x-27|$ и найдём, при каких значениях a этот график имеет две общие точки с графиком функции $y=a$ (см. рис. 7).

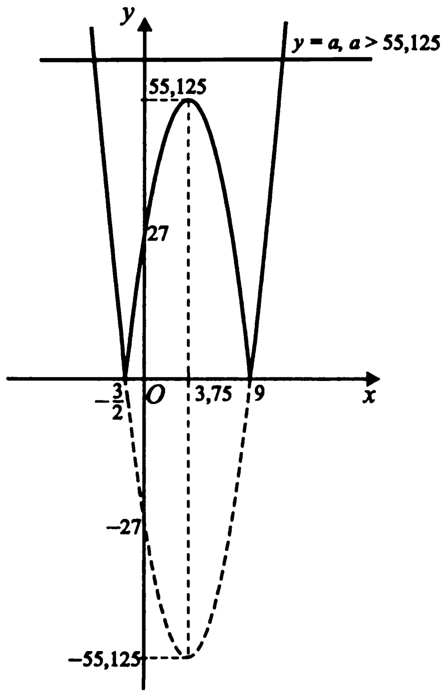

Рис. 7

Для этого вначале построим график функции $y = 2x^2 - 15x - 27$. Это парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина имеет координаты $x_0 = -\frac{-15}{2 \cdot 2} = 3{,}75$ и $y_0 = y(x_0) = 2 \cdot 3{,}75^2 - 15 \cdot 3{,}75 - 27 = -55{,}125$. Координаты точек пересечения с осью Ox найдём, решив уравнение $2x^2 - 15x - 27 = 0$. Его корни $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = 9$. Так как $y(0) = -27$, то точка $(0; -27)$ — это точка пересечения графика параболы с осью Oy.

Симметрично отразив относительно оси Ox часть графика параболы, находящуюся ниже этой оси, получим график функции $y = |2x^2 - 15x - 27|$. Из рисунка видно, что графики функций $y = |2x^2 - 15x - 27|$ и $y = a$ имеют две общие точки, если $a = 0$ или $a > 55{,}125$.

Ответ: $\{0\} \cup (55{,}125; +\infty)$.

Решение варианта №8

17. $\frac{x-26}{x+5} + \frac{x}{x-5} = \frac{50}{x^2-25}$. ОДЗ: $x \neq \pm 5$. Умножив обе части уравнения на $x^2 - 25$, получим: $(x-26)(x-5) + x(x+5) = 50$; $x^2 - 13x + 40 = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = 8$. При этом x_1 не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 8.

18. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4;\ 9)$ и $B(5; -13)$. Для этого подставим координаты точек в уравнение прямой $y = kx + b$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 9 = -4k + b, \\ -13 = 5k + b; \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{22}{9},\ b = -\frac{7}{9}.$$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид: $y = -\frac{22}{9}x - \frac{7}{9}$. Так как уравнение $0 = -\frac{22}{9}x - \frac{7}{9}$ имеет корень $x = -\frac{7}{22}$, то эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $\left(-\frac{7}{22};\ 0\right)$.

Ответ: $y = -\frac{22}{9}x - \frac{7}{9}$, $\left(-\frac{7}{22};\ 0\right)$.

19. $\dfrac{12a^2 - 12b^2 + 3a + 3b}{4a - 4b + 1} = \dfrac{3(a+b)(4a - 4b + 1)}{4a - 4b + 1} = 3a + 3b.$

Ответ: $3a + 3b$.

20. Пусть x — первоначальная цена одного килограмма яблок. Купив 11 кг, заплатили $11x$ рублей. Далее цена яблок снизилась на 12%, то есть один килограмм яблок стал стоить $x - 0{,}12x = 0{,}88x$ (руб). На сумму $11x$ рублей по цене $0{,}88x$ рублей можно купить $\dfrac{11x}{0{,}88x} = 12{,}5$ (кг) яблок.

Ответ: 12,5.

21. Построим график функции $y = |2x^2 - 7x - 72|$ и найдём, при каких значениях a этот график имеет четыре общие точки с графиком функции $y = a$ (см. рис. 8).

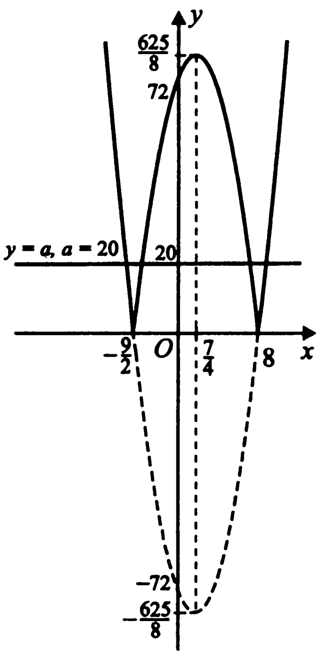

Рис. 8

Для этого вначале построим график функции $y = 2x^2 - 7x - 72$. Это парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина имеет координаты $x_0 = \frac{7}{4}$ и $y_0 = y(x_0) = 2 \cdot \frac{49}{16} - 7 \cdot \frac{7}{4} - 72 = -\frac{625}{8}$. Координаты точек пересечения с осью Ox найдём решив уравнение $2x^2 - 7x - 72 = 0$. Его корни $x_1 = -\frac{9}{2}$ и $x_2 = 8$. Так как $y(0) = -72$, то точка $(0; -72)$ — это точка пересечения графика параболы с осью Oy.

Симметрично отразив относительно оси Ox часть графика параболы, находящуюся ниже этой оси, получим график функции $y = |2x^2 - 7x - 72|$. Из рисунка видно, что графики функций $y = |2x^2 - 7x - 72|$ и $y = a$ имеют четыре общие точки, если $0 < a < \frac{625}{8}$.

Ответ: (0; 78,125).

Решение варианта №9

17. $\frac{x-3}{x+3} + \frac{x-6}{x-3} = \frac{18}{9-x^2}$; $\frac{(x-3)^2 + (x-6)(x+3) + 18}{x^2-9} = 0$;
$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 3x - 18 + 18 = 0$; $2x^2 - 9x + 9 = 0$; $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 3$.

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение значений x_1 и x_2 убеждаемся, что $x_1 = 1{,}5$ — корень, а при $x_2 = 3$ исходное уравнение не имеет смысла.

Ответ: 1,5.

18. Общий вид уравнения прямой, не параллельной оси Oy, имеет вид: $y = kx + b$.

Точки $A(8; 57)$ и $B(-4; -18)$ принадлежат одной прямой, значит, подставив вместо x и y соответствующие значения, получим систему:
$$\begin{cases} 57 = k \cdot 8 + b, \\ -18 = k \cdot (-4) + b. \end{cases}$$

Решив её, найдём $k = \frac{50}{8}$, $b = 7$, то есть искомое уравнение прямой: $y = \frac{25}{4}x + 7$.

2 Зак № 263

Точка пересечения прямой с осью Oy имеет абсциссу, равную 0, $\Rightarrow$ $y_0 = \frac{25}{4} \cdot 0 + 7$, $y_0 = 7$.

Ответ: $y = \frac{25}{4}x + 7$, $(0;7)$.

19. $\frac{2a+3b}{4a^2+4ab-3b^2} = \frac{2a+3b}{4a^2+4ab+b^2-4b^2} = \frac{2a+3b}{(2a+b)^2-4b^2} =$
$= \frac{2a+3b}{(2a+b+2b)(2a+b-2b)} = \frac{2a+3b}{(2a+3b)(2a-b)} = \frac{1}{2a-b}.$

Ответ: $\frac{1}{2a-b}$.

20. Пусть x — первоначальная стоимость телевизора, тогда $7x$ — стоимость 7 телевизоров. После подорожания стоимость телевизора составила $x + 0,17x = 1,17x$, значит, на $7x$ можно купить $\frac{7x}{1,17x} = 5\frac{115}{117}$, то есть 5 штук.

Ответ: 5.

21. Изобразим график функции $y = f(x)$ (см. рис. 9). По графику определяем, что прямая $y = a + 7$ имеет нечётное количество общих точек с графиком функции $y = f(x)$ при
а) $y > 4$, $\Rightarrow a + 7 > 4 \Rightarrow a > -3$;
б) $y = 2,25$, $\Rightarrow a + 7 = 2,25 \Rightarrow a = -4,75$;
в) $y = -2,25$, $\Rightarrow a + 7 = -2,25 \Rightarrow a = -9,25$;
г) $y \leqslant -4$, $\Rightarrow a + 7 \leqslant -4 \Rightarrow a \leqslant -11$.

Ответ: $(-\infty; -11] \cup \{-9,25\} \cup \{-4,75\} \cup (-3; +\infty)$.

Решение варианта №10

17. $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{4x^2-1}$; $\frac{(2x+1)^2-(2x-1)(x+1)-4}{4x^2-1} = 0$;
$4x^2+4x+1-2x^2-x+1-4=0$; $2x^2+3x-2=0$; $x_1=-2$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

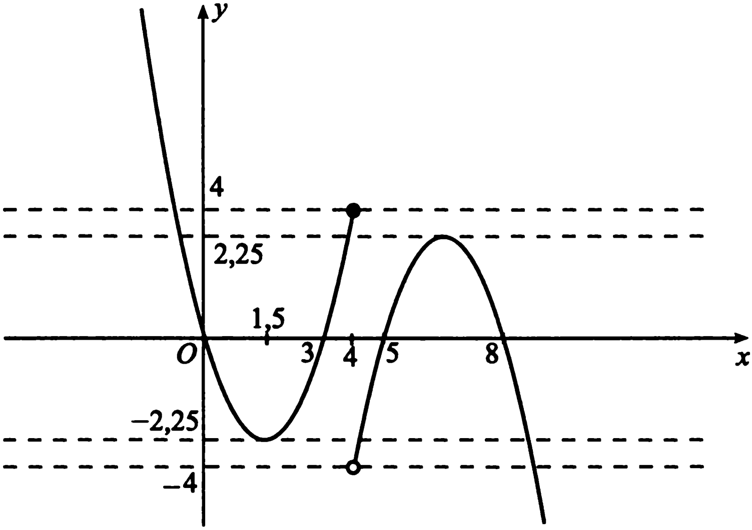

Рис. 9

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение значений x_1 и x_2 убеждаемся, что $x_1 = -2$ — корень, а при $x_2 = \frac{1}{2}$ исходное уравнение не имеет смысла.

Ответ: -2.

18. Общий вид уравнения прямой, не параллельной оси Oy, имеет вид: $y = kx + b$. Точки $A(-12; 82)$ и $B(9; -37)$ принадлежат одной прямой, значит, подставив вместо x и y соответствующие значения, получим систему:

$$\begin{cases} 82 = k \cdot (-12) + b, \\ -37 = k \cdot 9 + b; \end{cases}$$

Решив её, найдем $k = -\frac{17}{3}$, $b = 14$, то есть искомое уравнение прямой: $y = -\frac{17}{3}x + 14$.

Точка пересечения прямой с осью Oy имеет абсциссу, равную 0, $\Rightarrow$ $y_0 = -\frac{17}{3} \cdot 0 + 14$, $y_0 = 14$.

Ответ: $y = -\frac{17}{3}x + 14$, $(0; 14)$.

19. $\dfrac{8b^2+10ab-3a^2}{64b^3-a^3}=\dfrac{8b^2+12ab-2ab-3a^2}{(4b-a)(16b^2+4ab+a^2)}=$

$=\dfrac{4b(2b+3a)-a(2b+3a)}{(4b-a)(16b^2+4ab+a^2)}=\dfrac{(2b+3a)(4b-a)}{(4b-a)(16b^2+4ab+a^2)}=$

$=\dfrac{2b+3a}{16b^2+4ab+a^2}.$

Ответ: $\dfrac{2b+3a}{16b^2+4ab+a^2}.$

20. Пусть x — первоначальная стоимость набора инструментов, тогда $13x$ — стоимость 13 наборов. После снижения цен стоимость набора составила $x-0,31x=0,69x$, значит, на $13x$ можно купить $\dfrac{13x}{0,69x}=$

$=18\dfrac{58}{69}$, то есть 18 наборов.

Ответ: 18.

21. Изобразим график функции $y=f(x)$ (см. рис. 10). По графику определяем, что прямая $y=4-a$ имеет чётное количество общих точек с графиком функции $y=f(x)$ при

а) $9<y\leqslant 12,\ \Rightarrow -8\leqslant a<-5$;

б) $0<y<9,\ \Rightarrow -5<a<4$;

в) $y=-4,\ \Rightarrow a=8$.

Ответ: $[-8;-5)\cup(-5;4)\cup\{8\}$.

Решение варианта №11

17. $x^3+3x^2-4x-12=0\Leftrightarrow x^2(x+3)-4(x+3)=0\Leftrightarrow(x^2-4)(x+3)=0$ $\Leftrightarrow(x-2)(x+2)(x+3)=0.$

Ответ: -3; -2; 2.

18. $(3-2\sqrt{2})(20-6x)>0$. Так как $3-2\sqrt{2}>0$, то $20-6x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{10}{3}$.

Ответ: $x<\dfrac{10}{3}$.

19. По условию задачи составим систему уравнений:

$\begin{cases} b_1+b_1q=-12,\\ b_1q+b_1q^2=16;\end{cases}\quad \begin{cases} b_1=-\dfrac{12}{1+q},\\ b_1q(1+q)=16.\end{cases}$

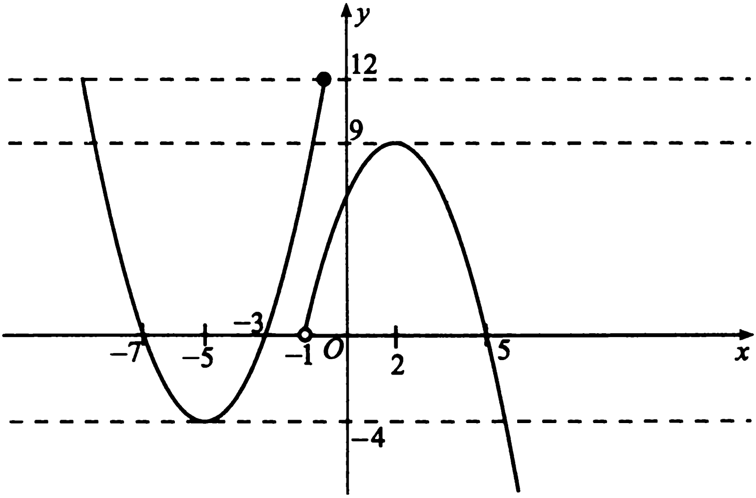

Рис. 10

Подставим значение b_1 во второе уравнение.

$-\dfrac{12q(1+q)}{1+q} = 16 \Rightarrow -12q = 16 \Rightarrow q = -\dfrac{4}{3}$. Подставим в первое уравнение системы:

$b_1 + b_1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -12 \Leftrightarrow b_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -12 \Rightarrow b_1 = 36.$

Тогда $b_2 = 36 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -48$; $b_3 = 36 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{36 \cdot 16}{9} = 64.$

Ответ: 36; −48; 64.

20. Так как $m = n + 2$, то $m^2 + 3mn - 5n^2 =$
$= (n+2)^2+3(n+2)n-5n^2 = n^2+4n+4+3n^2+6n-5n^2 = -n^2+10n+4.$
Графиком функции $y = -n^2 + 10n + 4$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Значит, наибольшее значение достигается в вершине при $n = -\dfrac{10}{2 \cdot (-1)} = 5$. Тогда $m = n + 2 = 5 + 2 = 7$.

Ответ: $m = 7; n = 5$.

21. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$, $\begin{cases} x^2 - 4x + 3, x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty), \\ -x^2 + 4x - 3, x \in [1; 3]. \end{cases}$

Построим график функции (см. рис. 11). Тогда $y = p$ будет иметь 2 точки пересечения с графиком функции $y = f(x)$ тогда, когда $p \in \{0\} \cup (1; +\infty)$.

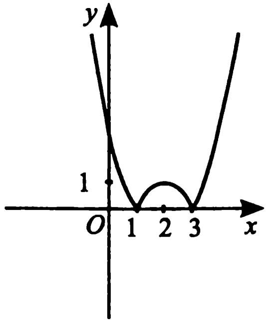

Рис. 11

Ответ: $\{0\} \cup (1; +\infty)$.

Решение варианта №12

17. $x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x^2 - 9)(x - 1) =$
$= (x+3)(x-3)(x-1) = 0.$

Ответ: $-3; -1; 3$.

18. $(2\sqrt{5} - 5)(6 - 4x) < 0$. Так как $2\sqrt{5} - 5 < 0$, то $6 - 4x > 0$; $x < 1{,}5$.

Ответ: $x < 1{,}5$.

19. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 16, \\ b_1 q + b_1 q^2 = -20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{16}{1+q}; \\ b_1 q(1+q) = -20. \end{cases}$$

Подставим значение b_1 во второе уравнение:

$\dfrac{16q(1+q)}{1+q} = -20 \Leftrightarrow 16q = -20 \Leftrightarrow q = -1{,}25$. Подставим значение q в первое уравнение: $\dfrac{16}{1-1{,}25} = -64$.

Тогда $b_2 = -64 \cdot (-1{,}25) = 80$; $b_3 = -64 \cdot (-1{,}25)^2 = -100$.

Ответ: -64; 80; -100.

20. Так как $m = 1 - n$, то $m^2 - 2mn - n^2 =$
$= (1-n)^2 - 2(1-n)n - n^2 = 1 - 2n + n^2 - 2n + 2n^2 - n^2 = 2n^2 - 4n + 1$.
Графиком функции $y = 2n^2 - 4n + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, наименьшее значение достигается в вершине при $n = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1$. Тогда $m = 1 - n = 1 - 1 = 0$.

Ответ: $m = 0$; $n = 1$.

21. $f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geqslant 0, \\ x^2 + 4x + 3, & x < 0. \end{cases}$ Построим график функции (см. рис. 12). Прямая $y = p$ будет иметь 2 точки пересечения с графиком функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда $p \in \{-1\} \cup (3; +\infty)$.

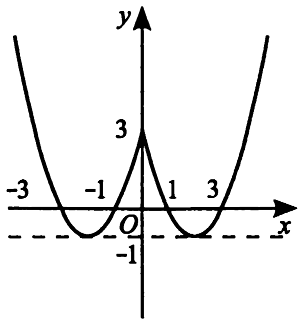

Рис. 12

Ответ: $\{-1\} \cup (3; +\infty)$.

Решение варианта №13

17. $\dfrac{5{,}5x - 1}{5} \geqslant \dfrac{x^2}{2}$; $11x - 2 \geqslant 5x^2$; $5x^2 - 11x + 2 \leqslant 0$; $0{,}2 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[0{,}2;\ 2]$.

18. Преобразуем исходное выражение на ОДЗ:
$$\frac{49 - a^2}{a - 9} \cdot \left(\frac{a}{a - 7} - \frac{2a}{a^2 - 14a + 49}\right) + \frac{14a}{a - 7} =$$

$$= \frac{49 - a^2}{a - 9} \cdot \left(\frac{a}{a - 7} - \frac{2a}{(a - 7)^2}\right) + \frac{14a}{a - 7} =$$

$$= \frac{49 - a^2}{a - 9} \cdot \frac{a(a - 7) - 2a}{(a - 7)^2} + \frac{14a}{a - 7} = \frac{a(49 - a^2)}{(a - 7)^2} + \frac{14a}{a - 7} =$$

$$= \frac{49a - a^3 + 14a(a - 7))}{(a - 7)^2} = \frac{-a^3 + 14a^2 - 49a}{(a - 7)^2} = \frac{-a(a - 7)^2}{(a - 7)^2} = -a.$$

Ответ: $-a$.

19. Построим график функции $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 5, \text{ если } x \geqslant 4, \\ 4 - x, \text{ если } x < 4. \end{cases}$

1. При $x \geqslant 4$ график функции $y = \frac{1}{2}x - 5$ есть прямая, проходящая через точки $(4; -3)$ и $(6; -2)$ (см. рис. 13).

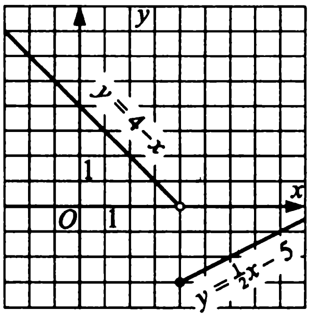

Рис. 13

2. При $x < 4$ график функции $y = 4 - x$ есть прямая, проходящая через точки $(0;\ 4)$ и $(1;\ 3)$.

Видно, что функция возрастает на промежутке $[4; +\infty)$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

20. Графиком функции $y = 6 - 3x$ является прямая, проходящая через точки $(2;\ 0)$ и $(0;\ 6)$ (см. рис. 14).

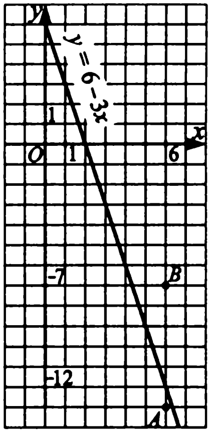

Рис. 14

Из рисунка видно, что точка $A(6;\ b)$ и точка $B(6;-7)$ расположены по разные стороны от прямой $y = 6 - 3x$ тогда и только тогда, когда точка A находится ниже этой прямой, то есть когда $b < -12$ (точка $(6;-12)$ находится на прямой $y = 6 - 3x$).

Ответ: $(-\infty;-12)$.

21. Пусть x — вес (в некоторых единицах веса) первого раствора, y — второго. Тогда $0{,}25x$ — количество сахара в первом растворе, $0{,}35y$ — количество сахара во втором растворе. Из условия следует уравнение $0{,}25x + 0{,}35y = 0{,}325(x + y)$. Решаем полученное уравнение относительно $\frac{x}{y}$: $0{,}25\frac{x}{y} + 0{,}35 = 0{,}325\frac{x}{y} + 0{,}325$; $-0{,}075\frac{x}{y} = -0{,}025$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $1:3$.

Решение варианта №14

17. $\frac{7{,}5x-1}{7} \leqslant \frac{x^2}{2}$; $15x - 2 \leqslant 7x^2$; $7x^2 - 15x + 2 \geqslant 0$;

$x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{7}\right] \cup [2;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{1}{7}\right] \cup [2;+\infty)$.

18. Преобразуем исходное выражение на ОДЗ:

$$\left(\frac{b}{b-5}-\frac{2b}{b^2-10b+25}\right)\cdot\frac{25-b^2}{b-7}+\frac{10b}{b-5}=$$

$$=\left(\frac{b}{b-5}-\frac{2b}{(b-5)^2}\right)\cdot\frac{25-b^2}{b-7}+\frac{10b}{b-5}=$$

$$=\frac{b(b-5)-2b}{(b-5)^2}\cdot\frac{25-b^2}{b-7}+\frac{10b}{b-5}=\frac{-(b^2-7b)(b-5)(b+5)}{(b-5)^2(b-7)}+\frac{10b}{b-5}=$$

$$=\frac{-b(b+5)}{b-5}+\frac{10b}{b-5}=\frac{-b^2-5b+10b}{b-5}=\frac{-b^2+5b}{b-5}=\frac{-b(b-5)}{b-5}=-b.$$

Ответ: $-b$.

19. Построим график функции $y=\begin{cases}3+x, \text{ если } x>-3,\\ -\frac{1}{3}x-2, \text{ если } x\leqslant -3.\end{cases}$

1. При $x>-3$ график функции $y=3+x$ есть прямая, проходящая через точки $(-2;\ 1)$ и $(0;\ 3)$ (см. рис. 15).

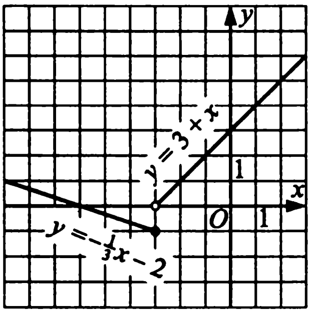

Рис. 15

2. При $x\leqslant -3$ график функции $y=-\frac{1}{3}x-2$ есть прямая, проходящая через точки $(-3; -1)$ и $(-6;\ 0)$.

Видно, что функция убывает на промежутке $(-\infty; -3]$.

Ответ: $(-\infty; -3]$.

20. Графиком функции $y=4-2x$ является прямая, проходящая через точки $(0;\ 4)$ и $(2;\ 0)$ (см. рис. 16).

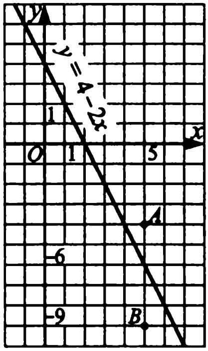

Рис. 16

Из рисунка видно, что точка $A(5;\ a)$ и точка $B(5;\ -9)$ расположены по разные стороны от прямой $y = 4 - 2x$ тогда и только тогда, когда точка A находится выше этой прямой, то есть когда $a > -6$ (точка $(5; -6)$ находится на прямой $y = 4 - 2x$).

Ответ: $(-6; +\infty)$.

21. Пусть x — вес (в некоторых единицах веса) соли в первом растворе, y — во втором. Тогда $0{,}1x$ — количество соли в первом растворе, $0{,}3y$ — количество соли во втором растворе. Из условия следует уравнение $0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}24(x + y)$. Решаем полученное уравнение относительно $\frac{x}{y}$: $0{,}1\frac{x}{y} + 0{,}3 = 0{,}24\frac{x}{y} + 0{,}24$; $-0{,}14\frac{x}{y} = -0{,}06$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$.

Ответ: 3 : 7.

Решение варианта №15

19. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x - 4x^2 - 4x + 24 = 0 \Leftrightarrow x(x^2+x-6) - 4(x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+x-6) = (x-4)(x-2)(x+3)$.

Ответ: -3; 2; 4.

20. $(3{,}8 - \sqrt{10})(2 - 4x) > 0$. Так как $3{,}8 - \sqrt{10} > 0$, то $2 - 4x > 0 \Leftrightarrow 2 > 4x \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$.

Ответ: $x < 0{,}5$.

21. По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 108, \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 168{,}75; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{108}{q+1}, \\ b_1 q^2(q+1) = 168{,}75. \end{cases}$$

Подставим значение b_1 во второе уравнение:

$$\frac{108}{q+1} \cdot q^2(q+1) = 168{,}75 \Leftrightarrow q^2 = \frac{168{,}75}{108} = 1{,}5625 \Leftrightarrow q = 1{,}25.$$

Тогда $b_1 + 1{,}25b_1 = 108 \Leftrightarrow b_1 = \dfrac{108}{2{,}25} = 48$; $b_2 = b_1 q = 48 \cdot 1{,}25 = 60$; $b_3 = b_1 q^2 = 48 \cdot 1{,}25^2 = 75$.

Ответ: 48; 60; 75.

22. Если графики функций касаются, то они имеют одну общую точку. Тогда $\begin{cases} x + y = c, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = c - x, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{x} = c - x \Leftrightarrow 1 = cx - x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - cx + 1 = 0$. Так как общая точка только одна, то дискриминант последнего квадратного уравнения $D = 0$. $D = c^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow c = \pm 2$.

При $c = 2$ уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет единственный корень $x = 1$. Это означает, что абсцисса точки касания графиков положительна. При этом ордината точки касания $y = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$ также положительна. Следовательно, $c = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что $c = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 2.

23. Пусть C — точка, в которой встретились автобус и маршрутное такси; $v_м$, $v_а$ — скорости маршрутного такси и автобуса соответственно. Тогда из условия задачи следует, что $BC = 2v_м = tv_а$; $AC = 8v_а = tv_м$, где t — время, прошедшее от начала движения до встречи. Тогда $t = \dfrac{2v_м}{v_а} = \dfrac{8v_а}{v_м}$.

Отсюда $\dfrac{2v_м}{v_а} = \dfrac{8v_а}{v_м}$; $\left(\dfrac{v_м}{v_а}\right)^2 = \dfrac{8}{2} = 4$; $v_м = 2v_а$.

Так как 200 км автобус и маршрутное такси, двигаясь навстречу друг другу, преодолели за $\dfrac{4}{3}$ часа со скоростью $v_а + v_м$, то

$v_а + v_м = 200 : \dfrac{4}{3} = 150$ (км/ч).

Тогда $v_а + v_м = v_а + 2v_а = 3v_а = 150$. Отсюда $v_а = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

Решение варианта №16

19. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x - 4x^2 + 20x - 24 = 0 \Leftrightarrow$ $x(x^2 - 5x + 6) - 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 5x + 6) =$ $= (x - 4)(x - 3)(x - 2) = 0$.

Ответ: 2; 3; 4.

20. $(\sqrt{28} - 5{,}6)(3x - 6) \leqslant 0$. Так как $\sqrt{28} - 5{,}6 < 0$, то $3x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $3x \geqslant 6 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.

Ответ: $x \geqslant 2$.

21. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q = -10, \\ b_1q + b_1q^2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{-10}{q+1}, \\ b_1q(q+1) = 5. \end{cases}$$

Подставим значение b_1 во второе уравнение: $\dfrac{-10}{q+1}q(q+1) = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10q = 5 \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $b_1 - \dfrac{1}{2}b_1 = -10$; $b_1 = -20$.

$b_2 = b_1q = -20 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 10$; $b_3 = b_1q^2 = -20 \cdot \dfrac{1}{4} = -5$.

Ответ: -20; 10; -5.

22. Если графики функций касаются, то они имеют одну общую точку. Тогда $\begin{cases} y + x = c, \\ y = \dfrac{c}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} y = c - x, \\ y = \dfrac{c}{x} \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{c}{x} = c - x \Leftrightarrow c = cx - x^2 \Leftrightarrow$ $x^2 - cx + c = 0$. Так как общая точка всего одна, то дискриминант последнего квадратного уравнения $D = 0$. $D = c^2 - 4c = c(c - 4) = 0$; $c_1 = 0$, $c_2 = 4$.

При $c = 0$ уравнение $x^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$. Это не удовлетворяет условию. При $c = 4$ уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x - 2) = 0$ имеет единственный корень $x = 2$. Это означает, что абсцисса точки касания графиков положительна. При этом ордината точки касания $y = \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{2} = 2$ также положительна.

Следовательно, $c = 4$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4.

23. Пусть C — точка, в которой встретились машина и автобус; $v_м$, $v_а$ — скорости машины и автобуса соответственно. Тогда из условия задачи следует, что $AC = 9v_а = tv_м$; $BC = 1 \cdot v_м = tv_а$, где t — время, прошедшее от начала движения до встречи. Тогда $t = \frac{9v_а}{v_м} = \frac{v_м}{v_а}$. Отсюда $\left(\frac{v_м}{v_а}\right)^2 = 9$; $v_м = 3v_а$.

Так как 200 км машина и автобус, двигаясь навстречу друг другу, преодолели за $\frac{5}{4}$ часа со скоростью $v_а + v_м$, то $v_а + v_м = 200 : \frac{5}{4} = 160$ (км/ч).

Тогда $v_а + v_м = v_а + 3v_а = 4v_а = 160$.

Отсюда $v_а = 40$ (км/ч); $v_м = 3v_а = 120$ (км/ч).

Ответ: 120.

Решение варианта №17

19. Решить уравнение $x^3 - 6x^2 - 31x + 36 = 0$.

Если данное уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа 36. Проверка убеждает, что число 1 — корень уравнения $x^3 - 6x^2 - 31x + 36 = 0$, левая часть которого может быть представлена в виде $(x-1) \cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - 6x^2 - 31x + 36 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 - 5x - 36 \\ \cline{1-1}
-\,-5x^2 - 31x \qquad & \\
-5x^2 + 5x \qquad & \\ \cline{1-1}
-36x + 36 & \\
-36x + 36 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$x^3 - 6x^2 - 31x + 36 = (x-1)(x^2 - 5x - 36) = 0$;

$x^2 - 5x - 36 = 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$; $x_1 = 9$; $x_2 = -4$.

Ответ: $-4; 1; 9$.

20. $(4-2\sqrt{5})(3x-5) \leqslant 0$. Так как $4-2\sqrt{5} < 0$, то $3x-5 \geqslant 0$, $3x \geqslant 5$, $x \geqslant \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$.

21. По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1 \cdot (q^5-1)}{q-1} = 242, \\ b_1 \cdot q = 6. \end{cases}$$

Подставим $b_1 = \frac{6}{q}$ в первое уравнение и решим его относительно q.

$\frac{6}{q} \cdot \frac{q^5-1}{q-1} = 242$. Разделим на $(q-1)$ столбиком и получим:

$\frac{6}{q} \cdot (q^4+q^3+q^2+q+1) = 242$;

$6 \cdot (q^3+q^2+q+1) + \frac{6}{q} = 242$;

$3 \cdot (q^3+q^2+q+1) + \frac{3}{q} = 121$.

Так как прогрессия целочисленная, то число q должно быть целым. Проверкой убеждаемся, что $q=3$. Тогда $b_1 = \frac{6}{3} = 2$;

$b_4 = 2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 27 = 54$.

Ответ: 54.

22. Найдём координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2-2x+8$ и $y = 4+4x-x^2$, решив уравнение $x^2-2x+8 = 4+4x-x^2$; $2x^2-6x+4=0$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $y_1 = 7$; $y_2 = 8$.

Ответ: $(1;7); (2;8)$.

23. Пусть x кг — объем раствора.

Тогда $0{,}2x+5 = 0{,}36(x+5)$; $0{,}36x+1{,}8-5-0{,}2x=0$; $0{,}16x = 3{,}2$. $x = 20$ (кг).

Пусть y кг — вес соли, которую нужно добавить к 36%-ному раствору, чтобы он стал 60%-ным.

Тогда $0{,}36 \cdot 25 + y = 0{,}6(y + 25)$; $9 + y = 0{,}6y + 15$; $0{,}4y = 6$; $y = 15$.

Ответ: 15.

Решение варианта №18

19. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$.

Проверкой убеждаемся, что $x = -2$ — корень уравнения. Тогда при делении многочлена $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ на $(x + 2)$ имеем:

$$\begin{array}{rrrr|l} \_\,x^3 & -\,2x^2 & -\,13x & -\,10 & x+2 \\ \cline{5-5} x^3 & +\,2x^2 & & & x^2 - 4x - 5 \\ \cline{1-2} & \_\,-4x^2 & -\,13x & & \\ & -4x^2 & -\,8x & & \\ \cline{2-3} & & -5x & -10 & \\ & & -5x & -10 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = (x + 2)(x^2 - 4x - 5)$,

$(x + 2)(x^2 - 4x - 5) = 0$, $x_1 = -2$ или $x^2 - 4x - 5 = 0$;

$x_2 = 5$, $x_3 = -1$.

Ответ: -2; -1; 5.

20. $(10 - 2\sqrt{21})(2x + 7) \geqslant 0$. Так как $10 - 2\sqrt{21} > 0$, то $2x + 7 \geqslant 0$, $x \geqslant -3{,}5$.

Ответ: $[-3{,}5; \infty)$.

21. На основании условия задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1 \cdot (q^4 - 1)}{q - 1} = 255, \\ b_1 \cdot q^2 = 48. \end{cases}$$

Найдем q:

$$\frac{b_1 \cdot (q^4 - 1)}{q - 1} = 255; \ \frac{b_1 \cdot (q^2 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1} = 255;$$

$b_1 \cdot (q+1)(q^2+1) = 255$; $\dfrac{48}{q^2} \cdot (q+1)(q^2+1) = 255$; $16(q+1)(q^2+1) = 85q^2$.

Так как прогрессия целочисленная, то q — целое число, а q^2 — натуральное число. Значит, $q + 1 > 0$. Следовательно, q — натуральное число.

Уравнение $16(q+1)(q^2+1) = 85q^5$; $16q^3+16q-69q+16=0$ имеет единственный целый корень $q=4$. Тогда $b_1 = \dfrac{48}{16} = 3$; $b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: 12.

22. Найдём абсциссы точек пересечения, решив уравнение:

$x^2 - 4x + 6 = -2x^2 + 11x - 12;\ 3x^2 - 15x + 18 = 0;$

$x^2 - 5x + 6 = 0;\ x_1 = 2; x_2 = 3.$

$y_1 = y(x_1) = 2;\ y_2 = y(x_2) = 3.$

Ответ: $(2;2)$; $(3;3)$.

23. Пусть x — вес раствора, тогда $0{,}25x + 6 = 0{,}4(x+6)$;
$0{,}25x - 0{,}4x = 2{,}4 - 6$; $-0{,}15x = -3{,}6$.

$x = 24$.

В задаче вопрос, сколько надо добавить соли к 40%-ному раствору, чтобы получить 50%-ный раствор, для этого составим уравнение, где y — количество добавленной соли:

$0{,}4 \cdot (24+6) + y = 0{,}5(24+6+y)$; $12 + y = 15 + 0{,}5y$; $0{,}5y = 15 - 12$; $y = 6$.

Ответ: 6.

Решение варианта №19

19. Решим уравнение $x^3 - 13x^2 - 33x + 45 = 0$.

Если данное уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа 45. Проверка убеждает, что число 1 — корень уравнения $x^3 - 13x^2 - 33x + 45 = 0$. Левая часть может быть представлена в виде $(x-1) \cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - 13x^2 - 33x + 45 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad\qquad & x^2 - 12x - 45 \\
-\,-12x^2 - 33x \qquad & \\
\underline{-12x^2 + 12x} \qquad & \\
-45x + 45 & \\
\underline{-45x + 45} & \\
0 \qquad &
\end{array}
$$

Итак, $x^3 - 6x^2 - 31x + 36 = (x-1)(x^2 - 12x - 45)$.

3 Зак № 263

Из уравнения $(x-1)(x^2-12x-45)=0$ следует $x-1=0$ или $x^2-12x-45=0$, $x_1=1, x_2=-3, x_3=15$.

Ответ: $-3; 1; 15$.

20. $(4\sqrt{3}-7)(3x-2)\geqslant 0$. Так как $4\sqrt{3}-7<0$, то $3x-2\leqslant 0$, $3x\leqslant 2$, $x\leqslant \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

21. $$\begin{cases} b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\frac{211}{8},\\ b_1=2,\\ b_1-b_2+b_3-b_4+b_5=\frac{55}{8}.\end{cases}$$

Сложив первое и третье уравнения системы, получим:

$2b_1+2b_3+2b_5=\frac{266}{8}$, $b_1+b_3+b_5=\frac{266}{16}$, $b_1+b_1q^2+b_1q^4=\frac{266}{16}$, $2(1+q^2+q^4)=\frac{266}{16}$, $16q^4+16q^2-177=0$, $q^2=\frac{-16\pm 88}{32}$, $q^2=\frac{36}{16}$.

Так как $q>0$, то $q=\frac{6}{4}$, $q=1{,}5$.

Ответ: $q=1{,}5$.

22. Параболы касаются, то есть нижеследующее уравнение должно иметь единственное решение.

$6x^2-cx-3=5x-2x^2-5$, $8x^2-x(c+5)+2=0$, $D=(c+5)^2-4\cdot 2\cdot 8$, $c^2+10c-39=0$, $c=5\pm\sqrt{25+39}=-5\pm 8$, $c_1=3$, $c_2=-13$.

При $c=3$ уравнение $8x^2-(3+5)x+2=0$ имеет единственный корень $x=\frac{1}{2}$. Это означает, что абсцисса точки касания парабол положительна. При $c=-13$ уравнение $8x^2-(-13+5)x+2=0$ имеет единственный корень $x=-\frac{1}{2}$. Это означает, что абсцисса точки касания парабол отрицательна.

Ответ: $c=3$.

23. Так как за 1 час мотоциклист проехал 37 км, то $60 - 37 = 23$ (км) проехал за 1 час велосипедист, его скорость равна 23 км в час.

Из пункта A велосипедист и мотоциклист выехали одновременно. Один от другого за час отставал на 14 км ($37 - 23 = 14$). Достигнув пункта B, велосипедист отстал от мотоциклиста на 28 км. Таким образом, он преодолел путь AB за 2 часа. Следовательно, расстояние от A до B равно $23 \cdot 2 = 46$ (км).

Ответ: 46.

Решение варианта №20

19. $5x^3 + 2x^2 - 45x - 18 = x^2(5x+2) - 9(5x+2) =$
$= (5x+2)(x^2-9) = (5x+2)(x-3)(x+3) = 0$. Следовательно, $x_1 = -\frac{2}{5}$; $x_2 = 3$; $x_3 = -3$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $-0{,}4$; 3; -3.

20. Так как $7 - 3\sqrt{5} > 0$, то из неравенства $(7 - 3\sqrt{5})(7x - 3) < 0$ следует неравенство $7x - 3 < 0$. Значит, $7x < 3$; $x < \frac{3}{7}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right)$.

21. $\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 5{,}6, \\ \dfrac{b_1(q^4-1)}{q-1} = 5{,}25; \end{cases}$

$-5{,}6(q^4 - 1) = 5{,}25$; $q^4 - 1 = -0{,}9375$; $q^4 = 1 - 0{,}9375$; $q^4 = 0{,}0625$; $q = \pm 0{,}5$.

1) $b_1 = 5{,}6 \cdot (1 - 0{,}5) = 2{,}8$; $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2{,}8 \cdot 0{,}0625 = 0{,}175$.

2) $b_1 = 5{,}6 \cdot (1 + 0{,}5) = 5{,}6 \cdot 1{,}5 = 8{,}4$.

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 8{,}4 \cdot 0{,}0625 = 0{,}525$.

Ответ: $0{,}175; 0{,}525$.

22. Так как параболы пересекаются в одной точке, то следующее уравнение должно иметь единственный корень.

$16x^2 - cx + 30 = 15x^2 - 3x + 5$; $16x^2 - 5x^2 - cx + 3x + 30 - 5 = 0$; $x^2 - x(c-3) + 25 = 0$, $D = 0$; $(c-3)^2 - 25 \cdot 4 = 0$; $(c-3)^2 = 100$; $c - 3 = \pm 10$; $c_1 = 13$; $c_2 = -7$.

При $c = 13$ уравнение $x^2 - (13 - 3)x + 25 = 0$ имеет единственный корень $x = 5$. Это означает, что абсцисса точки пересечения парабол положительна, что не удовлетворяет условию. При $c = -7$ уравнение $x^2-(-7-3)x+25 = 0$ имеет единственный отрицательный корень $x = -5$.

Ответ: -7.

23. Скорость велосипедиста $x\frac{\text{км}}{\text{мин}}$, тогда скорость мотоциклиста $2x\frac{\text{км}}{\text{мин}}$, составим уравнение:

$$\frac{14}{x}+9=\frac{34}{2x},\ 9=\frac{17}{x}-\frac{14}{x},\ 9=\frac{3}{x},\ x=\frac{1}{3}\left(\frac{\text{км}}{\text{мин}}\right).$$

Время до встречи $\frac{14}{\frac{1}{3}}+9=51$ (мин).

Ответ: 51.

Решение варианта №21

19. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ — корень уравнения. Приводим левую часть к виду $(x - 1)\cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+3x^2-3x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{2x^3-2x^2} & 2x^2+3x+2 \\
5x^2-3x & \\
-\underline{5x^2-5x} & \\
2x-2 & \\
-\underline{2x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$; $2x^2 + 5x + 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot 2} = \frac{-5\pm 3}{4}$; $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$.

Ответ: -2; $-0{,}5$; 1.

20. $(7x-4)(\sqrt{2}-1{,}4) \leqslant 0$. Так как $\sqrt{2}-1{,}4 > 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $7x - 4 \leqslant 0$; $x \leqslant \frac{4}{7}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{4}{7}\right]$.

21. По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_4 = 18, \\ \dfrac{b_{10}}{b_{12}} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot b_1 \cdot q^3 = 18, \\ \dfrac{b_1 \cdot q^9}{b_1 \cdot q^{11}} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 q^3 = 18, \\ \dfrac{1}{q^2} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (b_1 \cdot q)^2 q = 18, \\ q^2 = \dfrac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b_2^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 18, \ q > 0, \\ b_2^2 = 36, \\ b_2 = 6. \end{array}$$

Ответ: 6.

22. Прямая $y = 2x - c$ имеет две общие точки с кубической параболой $y = x^3 + x^2 + x - 7$, если уравнение $2x - c = x^3 + x^2 + x - 7$ имеет два различных действительных корня. То есть тогда, когда многочлен $x^3 + x^2 - x - 7 + c$ можно представить в виде
$(x-a)(x-b)^2 = x^3 + x^2(-2b-a) + x(b^2+2ab) - ab^2$, где $a, b \in R$, $a \neq b$.

Тогда из равенства $x^3+x^2-x-7+c = x^3+(-2b-a)x^2+(b^2+2ab)x-ab^2$ получаем систему:

$$\begin{cases} -2b - a = 1, \\ b^2 + 2ab = -1, \\ -ab^2 = c - 7; \end{cases} \quad a = -2b-1; b^2+2(-2b-1)b = -1; 3b^2+2b-1 = 0;$$

$b_1 = -1, b_2 = \dfrac{1}{3}; a_1 = 1, a_2 = -1\dfrac{2}{3}; c = 7 - ab^2, c_1 = 6, c_2 = 7\dfrac{5}{27}.$

Ответ: $6; 7\dfrac{5}{27}$.

23. Пусть x л — вместимость кувшина; $0{,}2x$ — количество соли в растворе; $0{,}2x - 0{,}2 \cdot 1$ — количество соли в растворе после того, как 1 л раствора отлили. Тогда $\dfrac{0{,}2x - 0{,}2}{x}$ — содержание соли в получившемся растворе после того, как долили 1 л воды. Так как количество соли во вновь полученном растворе равно $0{,}05x$, то получаем уравнение:

$$0{,}2x - 0{,}2 - \frac{0{,}2x - 0{,}2}{x} = 0{,}05x; \ x > 0,$$
$$0{,}2x^2 - 0{,}2x - 0{,}2x + 0{,}2 = 0{,}05x^2;$$
$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Так как по условию задачи вместимость кувшина не менее 1 литра, то x_2 не удовлетворяет условию.

Ответ: 2.

Решение варианта №22

19. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = -1$ — корень уравнения. Приводим левую часть к виду $(x+1)\cdot P(x)$, где $P(x)$ — многочлен второй степени.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2-3x+2 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-5x+2 \\ -5x^2-3x & \\ -\underline{-5x^2-5x} & \\ 2x+2 & \\ -\underline{2x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: -1; $\frac{1}{2}$; 2.

20. $(4x+9)(2\sqrt{3}-3{,}4) \geqslant 0$. Так как $2\sqrt{3}-3{,}4 > 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $4x + 9 \geqslant 0$; $x \geqslant -\frac{9}{4}$.

Ответ: $\left[-2\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

21. По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_5 = 4, \\ \dfrac{b_5}{b_7} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot b_1 \cdot q^4 = 4, \\ \dfrac{b_1 \cdot q^4}{b_1 \cdot q^6} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 q^4 = 4, \\ \dfrac{1}{q^2} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b_1^2 (q^2)^2 = 4, \\ q^2 = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b_1^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 4, \\ b_1^2 = 4 \cdot 9^2 = 324, \\ b_1 = \pm 18. \end{array}$$

При $q = \frac{1}{3}$ $b_1 = 18$; $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$.

При $q = -\frac{1}{3}$ $b_1 = 18; b_4 = b_1 \cdot q^3 = 18 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3}$.

При $b_1 = -18$ $q = \pm\frac{1}{3}$ получим те значения $b_4 = \frac{2}{3}$ или $b_4 = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$.

22. Прямая $y = 15x + c$ имеет две общие точки с кубической параболой $y = x^3 - 3x^2 - 30x + 18$, если уравнение $15x + c = x^3 - 3x^2 - 30x + 18$ имеет два различных действительных корня. То есть тогда, когда многочлен $x^3 - 3x^2 - 45x + 18 - c$ можно представить в виде
$(x-a)(x-b)^2 = x^3 + x^2(-2b-a) + x(b^2+2ab) - ab^2$, где $a, b \in R$, $a \neq b$.

Тогда из равенства $x^3 - 3x^2 - 45x + 18 - c =$
$= x^3 + (-2b-a)x^2 + (b^2+2ab)x - ab^2$ получаем систему:

$$\begin{cases} -2b - a = -3, \\ b^2 + 2ab = -45, \quad a = -2b + 3; b^2 + 2(-2b+3)b = -45; \\ 18 - c = -ab^2; \end{cases}$$

$b^2 - 2b - 15 = 0; b_1 = 5, b_2 = -3; a_1 = -7, a_2 = 9; c = 18 + ab^2, c_1 = -157$, $c_2 = 99$.

Ответ: $-157; 99$.

23. Пусть x л — вместимость кувшина; $0{,}2x$ — количество соли в растворе; $0{,}2x - 0{,}2 \cdot 1$ — количество соли в растворе после того, как 1 л раствора отлили. Тогда $\frac{0{,}2x - 0{,}2}{x}$ — содержание соли в получившемся растворе после того, как долили 1 л воды. Так как количество соли во вновь полученном растворе равно $0{,}1125x$, то получаем уравнение:

$$0{,}2x - 0{,}2 - \frac{0{,}2x - 0{,}2}{x} = 0{,}1125x; \; x > 0,$$
$$0{,}2x^2 - 0{,}2x - 0{,}2x + 0{,}2 = 0{,}1125x^2;$$
$$7x^2 - 32x + 16 = 0;$$
$$x_1 = 4, x_2 = \frac{4}{7}.$$

Так как по условию задачи вместимость кувшина не менее 1 литра, то x_2 не удовлетворяет условию.

Ответ: 4.

Решение варианта №25

19. ОДЗ: $x \neq \pm 3$. $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{36}{x^2-9} = 0$;
$\dfrac{(x+3)^2 + x(x-3) - 36}{x^2-9} = 0$; $\dfrac{2x^2+3x-27}{x^2-9} = 0$; $2x^2 + 3x - 27 = 0$;
$x_1 = 3$ — не удовлетворяет ОДЗ; $x_2 = -4{,}5$.

Ответ: $-4{,}5$.

20. По условию задачи составим систему уравнений: $\begin{cases} 2^2 + 2b + c = 2, \\ 3^2 + 3b + c = 5. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения системы первое, получим: $5 + b = 3$; $b = -2$. Тогда, подставляя найденное значение b в первое уравнение, получим: $c = 2$. Значит, $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = -4 < 0$. Следовательно, график функции $y = f(x)$ не пересекает ось Ox.

Ответ: $x^2 - 2x + 2$, не пересекает.

21. $\dfrac{3x-3y+1}{3y^2-3x^2-x-y} = \dfrac{3x-3y+1}{3(x+y)(y-x)-(x+y)} =$
$= \dfrac{3x-3y+1}{(x+y)(3y-3x-1)} = \dfrac{3x-3y+1}{-(x+y)(3x-3y+1)} = -\dfrac{1}{x+y}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{x+y}$.

22. Пусть t — количество бензина, которое можно купить со скидкой. Тогда $57 = 0{,}95t$; $t = 60$.

Ответ: 60.

23. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 17).

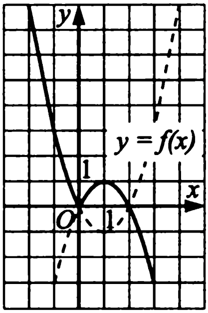

Рис. 17

Заметим, что для того чтобы графики функций $y = f(x)$ и $y = 2p$ имели не менее двух общих точек, необходимо и достаточно, чтобы $2p \in [0;\ 1]$, то есть $p \in [0;\ 0{,}5]$.

Ответ: $[0;\ 0{,}5]$.

Решение варианта №26

19. ОДЗ: $x \neq \pm 1$. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = 0$;
$\dfrac{(x+1)^2 + x(x-1) - 2}{x^2-1} = 0$; $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1} = 0$; $2x^2+x-1 = 0$; $x_1 = -1$ — не удовлетворяет ОДЗ; $x_2 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

20. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^2 + 2b + c = 11, \\ 1^2 + b + c = 5. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим: $3 + b = 6$; $b = 3$. Тогда, подставляя найденное значение b во второе уравнение, получим: $c = 1$. Значит, $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Так как $f(0) = 1$, то график функции $y = f(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0;\ 1)$.

Ответ: $x^2 + 3x + 1$, $(0;\ 1)$.

21. $\dfrac{2x^2-2y^2-3x+3y}{2x+2y-3}=\dfrac{2(x-y)(x+y)-3(x-y)}{2x+2y-3}=$

$=\dfrac{(x-y)(2x+2y-3)}{2x+2y-3}=x-y.$

Ответ: $x-y$.

22. Пусть t — количество бензина, которое можно купить после повышения цены. Тогда $10=1{,}25t$; $t=8$.

Ответ: 8.

23. Построим график функции $f(x)$ (см. рис. 18).

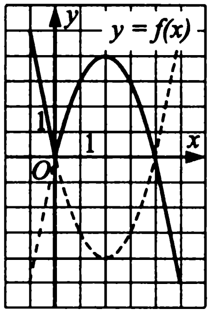

Рис. 18

Заметим, что для того чтобы графики функций $y=f(x)$ и $y=p$ имели одну общую точку, необходимо и достаточно, чтобы $p\in(-\infty;\ 0)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(4;+\infty)$.

Решение варианта №27

19. $x^3-2x^2-8x+16=0$; $x^2(x-2)-8(x-2)=0$; $(x^2-8)(x-2)=0$; $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x-2)=0$; $x_1=-2\sqrt{2}$, $x_2=2\sqrt{2}$, $x_3=2$.

Ответ: $-2\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$.

20. $(\sqrt{15}-4)(2x-4{,}8)<0$. Так как $\sqrt{15}<4$, то $\sqrt{15}-4<0$. Следовательно, $2x-4{,}8>0$, $2x>4{,}8$, $x>2{,}4$.

Ответ: $x>2{,}4$.

21. По условию составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q = 300, \\ b_1q^2 + b_1q^3 = 675; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{300}{q+1}, \\ b_1q^2(q+1) = 675. \end{cases}$$

Подставляя значение b_1 во второе уравнение, получим:

$\dfrac{300}{q+1}q^2(q+1) = 675$, $q^2 = \dfrac{675}{300}$, $q^2 = 2{,}25$. Так как сумма первого и второго членов меньше суммы третьего и четвёртого, то прогрессия возрастающая, а значит, $q = 1{,}5$. Тогда $b_1 = \dfrac{300}{1{,}5+1} = 120$; $b_2 = 120 \cdot 1{,}5 = 180$; $b_3 = 120 \cdot 2{,}25 = 270$.

Ответ: 120; 180; 270.

22. $9x + y = c$, $y = c - 9x$. Тогда, так как графики функций касаются (имеют общую точку), то $c - 9x = \dfrac{4}{x}$, $cx - 9x^2 = 4$, $9x^2 - cx + 4 = 0$, Так как графики функций имеют только одну общую точку, то дискриминант последнего квадратного уравнения равен нулю. Следовательно, $c^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$, $c = \pm 12$. При $c = -12$ уравнение $9x^2 + 12x + 4 = 0$; $(3x+4)^2 = 0$ имеет отрицательный корень $x = -\dfrac{2}{3}$, что удовлетворяет условию. Если же $c = 12$, то уравнение $9x^2 - 12x + 4 = 0$; $(3x-2)^2 = 0$ имеет положительный корень $\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $c = -12$.

23. Пусть x — скорость течения, тогда скорость катера по течению — $10 + x$, а против течения — $10 - x$. Составим уравнение исходя из того, что на весь путь катер потратил полтора часа: $\dfrac{14}{10+x} + \dfrac{3}{10-x} = 1{,}5$;
$\dfrac{140 - 14x + 30 + 3x - 150 + 1{,}5x^2}{100 - x^2} = 0$; $1{,}5x^2 - 11x + 20 = 0$; $x_{1,2} =$
$= \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{3} = \dfrac{11 \pm 1}{3}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$ — не удовлетворяет условию $x > 3{,}5$.

Ответ: 4.

Решение варианта №28

19. $x^3 - 6x^2 - 6x + 36 = 0$; $x^2(x-6) - 6(x-6) = 0$; $(x^2-6)(x-6) = 0$, $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x-6) = 0$; $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$, $x_3 = 6$.

Ответ: $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; 6.

20. $(\sqrt{17} - 3{,}2)(3 - x) < 0$. Так как $\sqrt{17} > 3{,}2$, то $\sqrt{17} - 3{,}2 > 0$. Следовательно, $3 - x < 0$; $x > 3$.

Ответ: $x > 3$.

21. По условию составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{210}{q+1}, \\ b_1q(q+1) = 42. \end{cases}$$

Подставим значение b_1 во второе уравнение, получим: $\dfrac{210}{q+1}q(q+1) = 42$; $q = \dfrac{42}{210} = 0{,}2$. Откуда $b_1(1 + 0,2) = 210$; $b_1 = 175$. Тогда $b_2 = 175 \cdot 0{,}2 = 35$, $b_3 = 175 \cdot 0{,}04 = 7$.

Ответ: 175; 35; 7.

22. $x + y = c$, $y = c - x$. Тогда, так как графики функций касаются (имеют общую точку), то $c - x = \dfrac{1}{x}$; $cx - x^2 = 1$; $x^2 - cx + 1 = 0$. Так как графики функций имеют только одну общую точку, то дискриминант последнего уравнения равен нулю. Следовательно, $c^2 - 4 = 0$, тогда $c = \pm 2$. При $c = 2$ уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x-1)^2 = 0$ имеет положительный корень $x = 1$, что удовлетворяет условию. Если же $c = -2$, то уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x+1)^2 = 0$ имеет отрицательный корень $x = -1$.

Ответ: 2.

23. Пусть x — скорость катера, тогда скорость катера по течению — $x+4$, а против течения — $x - 4$. Составим уравнение исходя из того, что на весь путь катер потратил один час: $\dfrac{10}{x+4} + \dfrac{6}{x-4} = 1$;

$$\frac{10x - 40 + 6x + 24 + 16 - x^2}{x^2 - 16} = 0; \quad x^2 - 16x = 0; \ x(x-16) = 0;$$

$x_1 = 16$, $x_2 = 0$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 16.

Глава II. Решения задач из сборника

1. По условию задачи рост Томы больше среднего на 8%, значит, на $150 \cdot 0{,}08 = 12$ (см). Так как средний рост девочек возраста Томы равен 150 см, то рост Томы равен $150 + 12 = 162$ (см).

Ответ: 162.

2. На второй день цена розы снизилась на 15% от цены первого дня, то есть на $80 \cdot 0{,}15 = 12$ (руб.), и стала равна $80 - 12 = 68$ (руб.). Тогда на третий день цена снизилась на 15% от цены второго дня, то есть на $68 \cdot 0{,}15 = 10{,}2$ (руб.), и стала равна $68 - 10{,}2 = 57{,}8$ (руб.).

Ответ: 57,8.

3. По условию задачи 1,44 м составляет 75%. Пусть x м — высота прыжка взрослого кенгуру. Тогда x составляет 100%. Следовательно,

$$x = \frac{1{,}44 \cdot 100}{75} = 1{,}92\,(\text{м}) = 192\,(\text{см}).$$

Ответ: 192.

4. По условию в первом магазине число порций мороженого уменьшилось на 50%; это означает, что порций мороженого стало меньше в 2 раза. Таким образом, во втором магазине осталось больше порций мороженого.

Ответ: Во втором.

5. Пусть x шт. — первоначальное количество книг в каждой из библиотек. Тогда в первой библиотеке количество книг увеличилось на $x \cdot 0{,}8$ (шт.) и стало равно $x + 0{,}8x = 1{,}8x$. Значит, количество книг в первой библиотеке увеличилось в 1,8 раза. Так как во второй библиотеке количество книг увеличилось в 1,7 раза, то в первой библиотеке книг стало больше.

Ответ: В первой библиотеке.

6. Увеличение во втором аквариуме хомячков в 1,6 раза означает, что количество хомячков в нём составило $1{,}6 \cdot 100\% = 160\%$, то есть увеличилось на 60% от первоначального количества. Так как в первом аквариуме количество хомячков увеличилось на столько же процентов, то хомячков осталось поровну.

Ответ: Хомячков осталось поровну.

7. Так как через неделю на обоих складах книг стало поровну и количество книг на первом складе не изменилось, то количество книг на втором — складе увеличилось в 2 раза, то есть составило $2 \cdot 100\% = 200\%$. Следовательно, количество продукции на этом складе увеличилось на 100%.

Ответ: 100.

8. Пусть в маленьком аквариуме было x рыб, тогда в большом аквариуме рыб было $2x$. Через два года в большом аквариуме количество рыб уменьшилось на 25%, то есть стало равно $2x - 2x \cdot 0{,}25 = 1{,}5x$, а в маленьком — стало равно $1{,}5x$. Следовательно, рыб стало поровну.

Ответ: Рыб стало поровну.

9. Пусть во втором спичечном коробке было x спичек. Тогда в первом коробке было $3x$ спичек. Через день в первом коробке число спичек стало $\frac{3x}{4} = 0{,}75x$, во втором $x - 0{,}3x = 0{,}7x$. Следовательно, в первом коробке спичек осталось больше.

Ответ: В первом коробке.

10. Пусть на складе B было x продукции. Тогда на складе A было $x + x \cdot 0{,}5 = 1{,}5x$ продукции. Через месяц количество продукции на складе A уменьшилось в 1,25 раза, то есть стало равно $\frac{1{,}5x}{1{,}25} = 1{,}2x$. На складе B через месяц количество продукции увеличилось на 25%, то есть стало равно $x + x \cdot 0{,}25 = 1{,}25x$. Значит, на складе B продукции стало больше.

Ответ: B.

11. Пусть в 9-х классах обучается x человек. По условию число неуспевающих в 8 раз меньше числа успевающих, значит, отношение числа неуспевающих учащихся к числу успевающих равно $1 : 8$. Следовательно, $\frac{x}{9}$ — неуспевающих учащихся, $\frac{8x}{9}$ — успевающих.

Так как отличники составляют 15% от числа всех учащихся 9-х классов, то их количество $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ человек.

Приведём дроби $\frac{x}{9}, \frac{8x}{9}, \frac{3x}{20}$ к общему знаменателю: $\frac{20x}{180}, \frac{160x}{180}, \frac{27x}{180}$. Следовательно, наименьшее число учащихся 9-х классов, удовлетворяющих условию задачи, равно 180.

Ответ: 180.

12. Пусть в школе x девочек и x мальчиков. Тогда блондинок — $0{,}15 \cdot x$, а блондинов — $\frac{1}{7} \cdot x$ (мальчиков с иным цветом волос $\frac{6}{7} \cdot x$).

$0{,}15x = \frac{15}{100}x = \frac{3}{20}x = \frac{21}{140}x$; $\frac{1}{7}x = \frac{20}{140}x$.

Так как $\frac{21}{140} > \frac{20}{140}$, то $0{,}15x > \frac{1}{7}x$. Следовательно, в школе блондинок больше.

Ответ: Блондинок больше.

13. Переведём десятичную дробь 0,25 в проценты: $0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$. Следовательно, спортсмен улучшил свой результат на 25%.

Ответ: 25.

14. Температура воздуха понизилась на 30%, то есть на $20^\circ \cdot 0{,}30 = 6^\circ$. Следовательно, температура стала равна $20^\circ - 6^\circ = 14^\circ$.

Ответ: 14.

15. Пусть нужно взять x л воды. Тогда раствора получим $(x + 0{,}2)$ л, что составляет 100%. По условию 0,2 л соли в этом растворе должно составлять 5%. Следовательно, $\frac{x+0{,}2}{0{,}2} = \frac{100}{5}$; $x + 0{,}2 = \frac{0{,}2 \cdot 100}{5}$; $x = 4 - 0{,}2 = 3{,}8$ (л).

Ответ: 3,8.

16. Расстояние S км за 10,5 ч мотоциклист преодолевает со скоростью $\frac{S}{10{,}5}$ км/ч, а это же расстояние за 8 ч 24 мин $= 8\frac{24}{60}$ ч $= 8{,}4$ ч он преодолевает со скоростью $\frac{S}{8{,}4}$ км/ч.

Пусть скорость мотоциклиста повысилась на $x\%$ от первоначальной, то есть на $\frac{S}{10{,}5} + \frac{S}{10{,}5} \cdot \frac{x}{100} = \frac{S}{8{,}4}$; $\left(\frac{x}{100} + 1\right) \cdot \frac{1}{10{,}5} = \frac{1}{8{,}4}$; $\frac{x}{100} = 0{,}25$; $x = 25\%$.

Ответ: 25.

17. Всего в походе участвовало $20 + 60 = 80$ детей, что составляет 100%. Следовательно, 60 мальчиков от общего числа ребят составляет

$$\frac{60 \cdot 100\%}{80} = 75\%.$$

Ответ: 75.

18. Увеличение зарплаты на 20% от 4000 рублей составляет $4000 \cdot 0{,}2 = 800$ (руб). Следовательно, рабочий стал получать $4000 + 800 = 4800$ (руб.).

Ответ: 4800.

19. Увеличение цены товара на 15% от 600 рублей составляет $600 \cdot 0{,}15 = 90$ (руб). Следовательно, товар будет стоить $600 + 90 = 690$ (руб.).

Ответ: 690.

20. По расчётам первой группы физиков масса барионной материи составляет $\frac{1}{25}$ массы Вселенной, что составляет $\frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%$ от массы Вселенной. Следовательно, вторая группа физиков отводит массе барионной материи бóльшую долю — 4,5%.

Ответ: Вторая.

21. Пусть в прошлом году в каждом филиале было по x клиентов. Тогда в этом году в первом филиале стало $x + x\frac{150\%}{100\%} = 2{,}5x$ клиентов, что совпадает с числом клиентов во втором филиале, которое возросло в этом году в 2,5 раза.

Ответ: Количество клиентов в обоих филиалах осталось одинаковым.

22. $$\frac{25x^2-9}{x^2+x-12} \cdot \frac{x+4}{5x+3} + \frac{2x}{3-x} =$$
$$= \frac{(5x-3)(5x+3)(x+4)}{(x-3)(x+4)(5x+3)} + \frac{2x}{3-x} = \frac{5x-3}{x-3} - \frac{2x}{x-3} =$$
$$= \frac{5x-3-2x}{x-3} = \frac{3(x-1)}{x-3}.$$

Ответ: $\frac{3(x-1)}{x-3}$.

23. $$\frac{9x^2-49}{2x^2+15x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} - \frac{1}{1-2x} =$$
$$= \frac{(3x-7)(3x+7)}{2x^2+16x-x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} + \frac{1}{2x-1} =$$
$$= \frac{(3x-7)(x+8)}{(x+8)(2x-1)} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-7}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-6}{2x-1}.$$

Ответ: $\frac{3(x-2)}{2x-1}$.

24. Обозначим заданное выражение через A, тогда

$$A = \left(\frac{(x+3y)^2+3y(x-3y)}{xy(x-3y)(x+3y)}\right) \cdot \frac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2} =$$

$$= \frac{x^2+6xy+9y^2+3xy-9y^2}{xy(x^2-9y^2)}\cdot\frac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2} =$$

$$= -\frac{x^2+9xy}{xy}\cdot\frac{y}{(9y+x)^2} = -\frac{1}{x+9y}.$$

Ответ: $-\frac{1}{x+9y}$.

25. $\left(\frac{2x+y}{2x^2y-xy^2}-\frac{2}{y^2+2xy}\right):\frac{(6x+y)^2}{4x^3-y^2x} =$

$$= \left(\frac{2x+y}{xy(2x-y)}-\frac{2}{y(2x+y)}\right)\cdot\frac{x(2x-y)(2x+y)}{(6x+y)^2} =$$

$$= \frac{(2x+y)x(2x-y)(2x+y)}{xy(2x-y)(6x+y)^2}-\frac{2x(2x-y)(2x+y)}{y(2x+y)(6x+y)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+4xy+y^2-4x^2+2xy}{y(6x+y)^2} = \frac{6xy+y^2}{y(6x+y)^2} = \frac{y(6x+y)}{y(6x+y)^2} = \frac{1}{6x+y}.$$

Ответ: $\frac{1}{6x+y}$.

26. $\left(\frac{a^2-4b^2}{a^2+ab-6b^2}-\frac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}\right)\cdot\frac{a+3b}{b} =$

$$= \left(\frac{(a-2b)(a+2b)}{(a-2b)(a+3b)}-\frac{(a-3b)(a+3b)}{(a+3b)^2}\right)\cdot\frac{a+3b}{b} =$$

$$= \left(\frac{a+2b}{a+3b}-\frac{a-3b}{a+3b}\right)\cdot\frac{a+3b}{b} = \frac{a+2b-a+3b}{a+3b}\cdot\frac{a+3b}{b} = \frac{5b}{b} = 5.$$

Ответ: 5.

27. $\left(\frac{6a+1}{a^2-6a}+\frac{6a-1}{a^2+6a}\right)\cdot\frac{a^4-35a^2-36}{a^4+2a^2+1} =$

$$= \frac{6a^2+a+36a+6+6a^2-36a-a+6}{a(a-6)(a+6)}\cdot\frac{a^4-36a^2+a^2-36}{\left(a^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{12a^2+12}{a(a-6)(a+6)}\cdot\frac{\left(a^2-36\right)a^2+\left(a^2-36\right)}{\left(a^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{12\left(a^2+1\right)\left(a^2-36\right)\left(a^2+1\right)}{a\left(a^2-36\right)\left(a^2+1\right)^2} = \frac{12}{a}.$$

Ответ: $\frac{12}{a}$.

4 Зак. № 263

28. $\left(\frac{x+7a}{7ax-x^2}+\frac{x-7a}{7ax+x^2}\right):\frac{28a}{x^2-49a^2}=$

$=\left(\frac{x+7a}{x(7a-x)}+\frac{x-7a}{x(7a+x)}\right)\cdot\frac{(x-7a)(x+7a)}{28a}=$

$=\frac{(x+7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a-x)\cdot 28a}+\frac{(x-7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a+x)\cdot 28a}=$

$=\frac{-x^2-14ax-49a^2+x^2-14ax+49a^2}{28ax}=\frac{-28ax}{28ax}=-1.$

Ответ: -1.

29. $\left(\frac{x-4a}{4ax-x^2}+\frac{4a+x}{4xa+x^2}\right):\frac{16a}{x^2-16a^2}=$

$=\left(\frac{x-4a}{x(4a-x)}+\frac{4a+x}{x(4a+x)}\right):\frac{16a}{(x-4a)(x+4a)}=$

$=\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\frac{(x-4a)(x+4a)}{16a}=0.\ \frac{(x-4a)(x+4a)}{16a}=0.$

Ответ: 0.

30. $\left(\frac{x^2-2ax+4a^2}{x-2a}+\frac{x^2+2ax+4a^2}{2a+x}\right)\cdot\frac{4a^2-x^2}{2x^3}=$

$=\frac{x^3+8a^3+x^3-8a^3}{(x-2a)(x+2a)}\cdot\frac{(2a-x)(2a+x)}{2x^3}=-\frac{2x^3(2a-x)(2a+x)}{(2a-x)(2a+x)\cdot 2x^3}=$
$=-1.$

Ответ: -1.

31. $\left(\frac{x+4a}{x-a}-\frac{3-ax}{x+a}-\frac{5a-3-a^2}{x^2-a^2}:\frac{1}{x}\right)(x^2-a^2)=$

$=\left(\frac{x+4a}{x-a}-\frac{3-ax}{x+a}-\frac{(5a-3-a^2)x}{(x-a)(x+a)}\right)(x^2-a^2)=$

$=(x+4a)(x+a)-(3-ax)(x-a)-x(5a-3-a^2)=$

$=x^2+4ax+ax+4a^2-3x+3a+ax^2-a^2x-5ax+3x+a^2x=$

$=x^2+ax^2+4a^2+3a.$

Ответ: $x^2+ax^2+4a^2+3a$.

32. $\frac{b^2}{a-b}:\left(\frac{a^2+ab+b^2}{ab+b^2}-\frac{a^2-ab+b^2}{ab-b^2}\right)=$

$=\frac{b^2}{a-b}:\frac{a^3-b^3-a^3-b^3}{b(a-b)(a+b)}=\frac{b^2\cdot b(a-b)(a+b)}{(a-b)(-2b^3)}=-\frac{a+b}{2}.$

Ответ: $-\frac{a+b}{2}$.

33. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)\cdot\frac{ab^3-a^4}{b^5-4a^4b}=$

$$=\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a(b^3-a^3)}{b(b^4-4a^4)}=$$

$$=\frac{a^3+a^2b+ab^2+a^2b+ab^2+b^3-(a^3-a^2b+ab^2-a^2b+ab^2-b^3)}{a^3-b^3}\times$$

$$\times\frac{a(a^3-b^3)}{b(4a^4-b^4)}=\frac{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-a^3+2a^2b-2ab^2+b^3}{1}\times$$

$$\times\frac{a}{b(4a^4-b^4)}=\frac{2b^3+4a^2b}{1}\cdot\frac{a}{b(4a^4-b^4)}=\frac{2b(b^2+2a^2)\cdot a}{b(2a^2-b^2)(2a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{2a}{2a^2-b^2}.$$

Ответ: $\frac{2a}{2a^2-b^2}$.

34. $\left(\frac{2a-4b}{b^2+4ab}-\frac{3a+b}{b^2-4ab}\right)(b^2-4ab)+\frac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b}=$

$$=\frac{(2ab-4b^2-8a^2+16ab-3ab-b^2-12a^2-4ab)b(b-4a)}{b(b+4a)(b-4a)}+$$

$$+\frac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b}=\frac{11ab-5b^2-20a^2+21a^2+6b^2-9ab}{4a+b}=$$

$$=\frac{2ab+b^2+a^2}{4a+b}=\frac{(a+b)^2}{4a+b}.$$

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{4a+b}$.

35. $\left(\frac{a+b}{a^2-b}-\frac{a-b}{a^2+b}\right):\frac{a+1}{a^2-b}=$

$$=\frac{(a^3+ab+a^2b+b^2-a^3+ab+a^2b-b^2)(a^2-b)}{(a^2-b)(a^2+b)(a+1)}=$$

$$=\frac{2ab+2a^2b}{(a^2+b)(a+1)}=\frac{2ab(a+1)}{(a^2+b)(a+1)}=\frac{2ab}{a^2+b}.$$

Ответ: $\frac{2ab}{a^2+b}$.

36. $\frac{16}{a+5}-\frac{3-2a}{72a^2+24a+8}\cdot\frac{-8+216a^3}{2a^2+7a-15}=$

$$= \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)} \cdot \frac{-8\left(1-27a^3\right)}{2a^2-3a+10a-15} =$$

$$= \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)} \cdot \frac{-8(1-3a)\left(1+3a+9a^2\right)}{a(2a-3)+5(2a-3)} =$$

$$= \frac{16}{a+5} + \frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)} \cdot \frac{-8(1-3a)\left(9a^2+3a+1\right)}{(2a-3)(a+5)} =$$

$$= \frac{16}{a+5} + \frac{-(1-3a)}{a+5} = \frac{16-1+3a}{a+5} = \frac{3(a+5)}{a+5} = 3.$$

Ответ: 3.

37. $\frac{a^2-1}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a-1;$

$$\frac{1}{a-1} - \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{1}{a-1} - (a-1) = \frac{1-(a-1)^2}{a-1} = \frac{-a^2+2a}{a-1} = \frac{a^2-2a}{1-a}.$$

Итак, $\left(\frac{1}{a-1} - \frac{a^2-1}{a+1}\right)^{-1} + \frac{a^2-a-1}{a^2-2a} = \frac{1-a}{a^2-2a} + \frac{a^2-a-1}{a^2-2a} =$

$$= \frac{a^2-2a}{a^2-2a} = 1.$$

Ответ: 1.

38. $\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right)^{-1} + \frac{2}{a^2+1} = \left(\frac{a^2-a+a+1}{a^2-1}\right)^{-1} + \frac{2}{a^2+1} =$

$$= \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{a^2+1} = 1.$$

Ответ: 1.

39. $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b + a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b = 2(a+b)$$

Ответ: $2(a+b)$.

40. $\frac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2} = \frac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2},$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-3ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a+b)},$$

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}\right)^{-1}=\frac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}.$$

$$\frac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2}-3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2}-\frac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=a+b.$$

Ответ: $a+b$.

41. $$\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{a(b-a)}{1+ab}\right)=\frac{(a+a^2b+b-a)(1+ab)}{(1+ab)(1+ab-ab+a^2)}=$$

$$=\frac{b(a^2+1)}{a^2+1}=b.$$

Ответ: b.

42. $$\left(a-\frac{4a-9}{a-2}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-2}\right)=\frac{a^2-2a-4a+9}{a-2}:\frac{2a^2-4a-2a}{a-2}=$$

$$=\frac{(a^2-6a+9)(a-2)}{(a-2)(2a^2-6a)}=\frac{(a-3)^2}{2a(a-3)}=\frac{a-3}{2a}.$$

Ответ: $\frac{a-3}{2a}$.

43. $$\left(x+1-\frac{12x-13}{x+3}\right):\left(x-3-\frac{7}{x+3}\right)=$$

$$=\frac{x^2+4x+3-12x+13}{x+3}:\frac{x^2-9-7}{x+3}=\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}=$$

$$=\frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\frac{x-4}{x+4}.$$

Ответ: $\frac{x-4}{x+4}$.

44. $$\frac{x}{\frac{2}{x+1}-1}-\frac{2+\frac{4x}{1-x}}{x+1}+3=\frac{x(x+1)}{1-x}-\frac{2+2x}{(1-x)(1+x)}+3=$$

$$= \frac{x(x+1)^2 - 2 - 2x + 3\left(1 - x^2\right)}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{x\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 2x + 3 - 3x^2}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2x - 3x^2 + 1}{1 - x^2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - x^2} =$$

$$= -\frac{x^2(x-1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{(x-1)\left(x^2 - 1\right)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= -\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 1 - x.$$

Ответ: $1 - x$.

45. $$\frac{18 \cdot 12^{3n-1}}{9^{2n+1} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{3^2 \cdot 2 \cdot \left(2^2 \cdot 3\right)^{3n-1}}{3^{2\cdot(2n+1)} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{3^{2+3n-1} \cdot 2^{1+6n-2}}{3^{4n+2} \cdot 2^{4n-3}} =$$

$$= \frac{3^{3n+1} \cdot 2^{6n-1}}{3^{4n+2} \cdot 2^{4n-3}} = \frac{2^{2n+2}}{3^{n+1}} = \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$.

46. $$\left(\frac{3}{4a-b} - \frac{2}{4a+b} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2 - b^2} =$$

$$= \left(\frac{12a + 3b - 8a + 2b}{(4a-b)(4a+b)} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2 - b^2} =$$

$$= \left(\frac{4a + 5b}{16a^2 - b^2} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{\left(16a^2 - 25b^2 - 16a^2 + b^2\right)\left(16a^2 - b^2\right)}{\left(16a^2 - b^2\right)(4a-5b) \cdot b^2} = \frac{-24}{4a-5b} = \frac{24}{5b-4a}.$$

Ответ: $\frac{24}{5b-4a}$.

47. $$\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+2)}\right) : \frac{x + 3 - x - 1}{(x+1)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x + 3 - x - 1)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3) \cdot 2} = \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\frac{1}{x+2}$.

48. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{13}{4-\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{1}{3+3\sqrt{3}}=$

$$=\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}+\frac{13(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}}=(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2+4+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}}=(3+3\sqrt{3})\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}}=1.$$

Ответ: 1.

49. Обозначим заданное выражение через A. Представим выражение под корнем в виде полных квадратов и получим:

$$A=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

При извлечении корня учитываем, что арифметический квадратный корень — величина неотрицательная:

$$A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

50. $\left(\dfrac{2m}{m-7}+\dfrac{4m}{m^2-14m+49}\right)\cdot\dfrac{m^2-9m+14}{m-5}+\dfrac{10m}{7-m}=$

$$=\left(\frac{2m}{m-7}+\frac{4m}{(m-7)^2}\right)\cdot\frac{(m-7)(m-2)}{m-5}+\frac{10m}{7-m}=$$

$$=\frac{(2m(m-7)+4m)(m-7)(m-2)}{(m-7)^2(m-5)}+\frac{10m}{7-m}=$$

$$=\frac{(2m^2-14m+4m)(m-2)}{(m-7)(m-5)}+\frac{10m}{7-m}=\frac{2m(m-5)(m-2)}{(m-7)(m-5)}-\frac{10m}{m-7}=$$

$$=\frac{2m^2-4m-10m}{m-7}=\frac{2m(m-7)}{m-7}=2m.$$

Ответ: $2m$.

51. $\left(\dfrac{m}{m-5}+\dfrac{3m}{2m^2-11m+5}\right)\cdot\dfrac{m^2+m-30}{m+1}-\dfrac{4m}{2m-1}=$

$$=\left(\frac{m}{m-5}+\frac{3m}{(m-5)(2m-1)}\right)\cdot\frac{(m+6)(m-5)}{m+1}-\frac{4m}{2m-1}=$$

$$=\frac{(2m^2-m+3m)(m+6)(m-5)}{(m-5)(2m-1)(m+1)}-\frac{4m}{2m-1}=$$

$$=\frac{2m(m+1)(m+6)}{(2m-1)(m+1)}-\frac{4m}{2m-1}=\frac{2m(m+6)-4m}{2m-1}=$$

$$= \frac{2m^2+8m}{2m-1} = \frac{2m(m+4)}{2m-1}.$$

Ответ: $\dfrac{2m(m+4)}{2m-1}$.

52. $A = \sqrt{\left(2-\sqrt[3]{20}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt[3]{20}\right)^2} = \left|2-\sqrt[3]{20}\right| + \left|3-\sqrt[3]{20}\right|$.

Так как $2 < \sqrt[3]{20} < 3$, то $A = \sqrt[3]{20} - 2 + 3 - \sqrt[3]{20} = 1$.

Ответ: 1.

53. $A = \sqrt{\left(\sqrt[5]{240}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt[5]{240}-3\right)^2} = \left|\sqrt[5]{240}-2\right| + \left|\sqrt[5]{240}-3\right|$.

Так как $2 < \sqrt[5]{240} < 3$, то получим: $A = \sqrt[5]{240} - 2 + 3 - \sqrt[5]{240} = 1$.

Ответ: 1.

54. $$\left(\left(\frac{b^2-2b+2}{b^4+4}\right)^{-1} - 1\right)\cdot(b+1)^{-1} = \left(\frac{b^4+4}{b^2-2b+2} - 1\right)\cdot\frac{1}{b+1} =$$

$$= \frac{b^4+4-b^2+2b-2}{\left(b^2-2b+2\right)(b+1)} = \frac{b^4-b^2+2b+2}{\left(b^2-2b+2\right)(b+1)} =$$

$$= \frac{b^2\left(b^2-1\right)+2(b+1)}{\left(b^2-2b+2\right)(b+1)} = \frac{b^2(b-1)+2}{b^2-2b+2} = \frac{b^3-b^2+2}{b^2-2b+2} =$$

$$= \frac{(b+1)\left(b^2-2b+2\right)}{b^2-2b+2} = b+1.$$

Ответ: $b+1$.

55. $$x^{-8}\cdot\left(\frac{1}{x-1} + (x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\right) =$$

$$= x^{-8}\cdot\left(\frac{1+\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}{x-1}\right) = x^{-8}\cdot\frac{1+\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)}{x-1} =$$

$$= x^{-8}\cdot\frac{1+x^8-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x-1}$.

56. $$\frac{4\cdot 36^n}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n-3}} = \frac{4\cdot 6^{2n}}{2^2\cdot 2^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3^{-3}} = \frac{6^{2n}\cdot 3^3}{6^{2n}} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

57. $$\frac{8\cdot 100^n}{5^{2n-2}\cdot 2^{2n+1}} = \frac{8\cdot 10^{2n}}{5^{2n}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{2n}\cdot 2} = \frac{4\cdot 10^{2n}\cdot 5^2}{10^{2n}} = 4\cdot 5^2 = 100.$$

Ответ: 100.

58. $$\frac{\left(5^{1-5n}\right)^2\cdot\left(4^{2n+1}\right)^3\cdot(2{,}5)^{11n}}{160} = \frac{5^2\cdot 4^{6n}\cdot 4^3\cdot 5^{11n}}{5^{10n}\cdot 160\cdot 2^{11n}} =$$

$$= \frac{5^2 \cdot 2^{12n} \cdot 4^2 \cdot 2^2 \cdot 5^n}{4^2 \cdot 10 \cdot 2^{11n}} = 10 \cdot 2^n \cdot 5^n = 10 \cdot 10^n = 10^{n+1}.$$

Ответ: 10^{n+1}.

59. $81 \cdot \dfrac{\left(3 \cdot 3^n\right)^{3n}}{\left(9^n\right)^2} : 27^{n^2-n} = \dfrac{3^4 \cdot 3^{3n} \cdot 3^{3n^2}}{\left(3^{2n}\right)^2} : 3^{3(n^2-n)} =$

$= \dfrac{3^{3n^2+3n+4}}{3^{4n}} : 3^{3n^2-3n} = 3^{3n^2+3n+4-4n-3n^2+3n} = 3^{2n+4} = 3^{2(n+2)} =$
$= 9^{n+2}$.

Ответ: 9^{n+2}.

62. $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} =$
$= \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| + 2 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$

Ответ: 4.

66. Данное выражение имеет смысл при $a < 0$, $b < 0$. Заметим, что $\sqrt{(-a)^2} = |a| = -a$, при $a < 0$. Поэтому $\dfrac{\sqrt{ab} - a}{\sqrt{-a}} = \dfrac{\sqrt{ab} - \sqrt{(-a)^2}}{\sqrt{-a}} =$
$= \dfrac{\sqrt{-a} \cdot \left(\sqrt{-b} + \sqrt{-a}\right)}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-a} + \sqrt{-b}.$

Ответ: $\sqrt{-a} + \sqrt{-b}$.

67. Заметим, что при $a < 0$ имеем: $\sqrt{(-a)^2} = |a| = -a$. Поэтому

$$\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{-\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}}{-\sqrt{(-b)^2} + \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \left(-\sqrt{-a} + \sqrt{-b}\right)}{\sqrt{-b} \cdot \left(-\sqrt{-b} + \sqrt{-a}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

68. $\dfrac{2ab - 10a + 5 - b}{2a^2 - 7a + 3} = \dfrac{2a(b-5) - (b-5)}{2(a-3)\left(a - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{(b-5)(2a-1)}{(a-3)(2a-1)} = \dfrac{b-5}{a-3}.$

Ответ: $\dfrac{b-5}{a-3}$.

69. $\frac{6-9n+6mn-4m}{3n^2+n-2}=\frac{3(2-3n)+2m(3n-2)}{3\left(n-\frac{2}{3}\right)(n+1)}=$

$=\frac{(3n-2)(2m-3)}{(3n-2)(n+1)}=\frac{2m-3}{n+1}.$

Ответ: $\frac{2m-3}{n+1}$.

70. $\frac{3ab+21a+2b+14}{9a^2+9a+2}=\frac{3a(b+7)+2(b+7)}{9a^2+6a+1+3a+1}=$

$=\frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)^2+3a+1}=\frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)(3a+2)}=\frac{b+7}{3a+1}.$

Ответ: $\frac{b+7}{3a+1}$.

71. $\frac{4ab-16a+b-4}{16a^2-8a-3}=\frac{4a(b-4)+b-4}{16a^2-8a+1-4}=\frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-1)^2-2^2}=$

$=\frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-3)(4a+1)}=\frac{b-4}{4a-3}.$

Ответ: $\frac{b-4}{4a-3}$.

72. $\left(\frac{a(1-a)}{2}+\frac{a^2-4a+3}{2a^2-6a}\right):(a-1)^2=$

$=\left(\frac{a(1-a)}{2}+\frac{(a-1)(a-3)}{2a(a-3)}\right)\cdot\frac{1}{(a-1)^2}=$

$=\left(\frac{a^2(1-a)-(1-a)}{2a}\right)\cdot\frac{1}{(a-1)^2}=\frac{(1-a)(a-1)(a+1)}{2a(a-1)^2}=$

$=-\frac{(a-1)^2(a+1)}{2a(a-1)^2}=-\frac{a+1}{2a}.$

Ответ: $-\frac{a+1}{2a}$.

73. $\left(\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x-1}\right):\frac{5}{(x-1)^2}=\left(\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{(x-1)^2}{5}=$

$=\frac{x-(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{5}=\frac{x-x+1}{5}=\frac{1}{5}=0{,}2.$

Ответ: 0,2.

74. $\left(\frac{a(1-a)}{2}+\frac{a^2-4a+3}{2a^2-6a}\right):(a-1)^2=$

$=\frac{a(1-a)\cdot a(a-3)+(a-3)(a-1)}{2a(a-3)}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}=$

$=\frac{(a-1)(a-3)\left(1-a^2\right)}{2a(a-3)(a-1)^2}=\frac{(1-a)(1+a)}{2a(a-1)}=-\frac{1+a}{2a}.$

Ответ: $-\frac{1+a}{2a}.$

75. $\left(\frac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)}{b^2}-\frac{b^2-4b+3}{b}\right):(b-1)^2=$

$=\frac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)-b\left(b^2-4b+3\right)}{b^2(b-1)^2}=$

$=\frac{(b-1)(b-2)(b-1)-b(b-1)(b-3)}{b^2(b-1)^2}=$

$=\frac{(b-1)(b-2)-b(b-3)}{b^2(b-1)}=\frac{b^2-3b+2-b^2+3b}{b^2(b-1)}=\frac{2}{b^2(b-1)}.$

Ответ: $\frac{2}{b^2(b-1)}.$

76. $\left(\frac{k+2}{k^2+3k-4}-\frac{k-8}{k^2+8k+16}\right):\frac{5}{(k+4)^2}=$

$=\left(\frac{k+2}{(k+4)(k-1)}-\frac{k-8}{(k+4)^2}\right)\cdot\frac{(k+4)^2}{5}=$

$=\frac{(k+2)(k+4)-(k-8)(k-1)}{(k+4)^2(k-1)}\cdot\frac{(k+4)^2}{5}=$

$=\frac{\left(k^2+6k+8\right)-\left(k^2-9k+8\right)}{5(k-1)}=\frac{15k}{5(k-1)}=\frac{3k}{k-1}.$

Ответ: $\frac{3k}{k-1}.$

77. $\left(\frac{1}{t^2-4}-\frac{1}{t^2+t-6}\right):\frac{1}{t^2+5t+6}=$

$=\left(\frac{1}{(t-2)(t+2)}-\frac{1}{(t+3)(t-2)}\right)\cdot\frac{(t+3)(t+2)}{1}=$

$$= \frac{(t+3)-(t+2)}{(t-2)(t+2)(t+3)} \cdot (t+3)(t+2) = \frac{1}{t-2}.$$

Ответ: $\frac{1}{t-2}$.

78. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{0}{(a-c)(a-b)(b-c)} = 0.$$

Ответ: 0.

79. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^2b-a^2c-b^2a+b^2c+c^2a-c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{b(a-c)(a+c)-b^2(a-c)-ac(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a+c)-b^2-ac]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a-b)-c(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.$$

Ответ: 1.

80. $\left(\frac{m-3}{m^2-4m+3} - \frac{2m}{m^2-1}\right) : \frac{1}{5m+5} =$

$$= \left(\frac{m-3}{(m-3)(m-1)} - \frac{2m}{(m-1)(m+1)}\right) \cdot 5(m+1) =$$

$$= \frac{m+1-2m}{(m-1)(m+1)} \cdot 5(m+1) = \frac{1-m}{m-1} \cdot 5 = -5.$$

Ответ: -5.

81. $\left(\frac{m+3}{m^2+4m+4} - \frac{2m+6}{m^2+5m+6}\right) \cdot \frac{m^2-4}{m+1} =$

$$= \left(\frac{m+3}{(m+2)^2} - \frac{2(m+3)}{(m+2)(m+3)}\right) \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} =$$

$$= \frac{m+3-2(m+2)}{(m+2)^2} \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} = \frac{-m-1}{m+2} \cdot \frac{m-2}{m+1} = \frac{2-m}{m+2}.$$

Ответ: $\frac{2-m}{m+2}$.

82. $\left(\frac{x-1}{x^2-6x+8} - \frac{3}{x^2-16}\right) : \frac{2x^2+4}{x^2+2x-8} + \frac{1}{8-2x} =$

$$= \left(\frac{x-1}{(x-4)(x-2)} - \frac{3}{(x-4)(x+4)}\right) : \frac{2x^2+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1}{8-2x} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+4)-3(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+4)} \cdot \frac{(x+4)(x-2)}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} =$$

$$= \frac{x^2+3x-4-3x+6}{2(x-4)(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} = \frac{x^2+2}{2(x-4)(x^2+2)} - \frac{1}{2(x-4)} = 0.$$

Ответ: 0.

83. $\left(\frac{x+6}{x^2-6x} + \frac{x-6}{x^2+6x}\right) : \frac{x^2+36}{x^2-36} - \frac{2}{x} =$

$$= \left(\frac{x+6}{x(x-6)} + \frac{x-6}{x(x+6)}\right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+36} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{(x+6)^2+(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)} \cdot \frac{(x-6)(x+6)}{x^2+36} - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2+36)}{x(x^2+36)} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0.$$

Ответ: 0.

84. $\left(\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) =$

$$= \left(\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)-a^2}{a+b} \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) = \frac{1}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{1}{a+b}$.

85. $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} + \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{3b} = \left(\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} + \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{3b} =$

$$= \frac{(a-b)+b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{3b} = \frac{a}{3b}.$$

Ответ: $\frac{a}{3b}$.

86. $\left(\frac{2a+1}{2a-1} - \frac{2a-1}{2a+1}\right)\left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{4a^2}\right) =$

$$= \frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)} \cdot \frac{4a^2-4a+1}{4a^2} =$$

$$= \frac{(4a^2+4a+1-4a^2+4a-1)(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)4a^2} =$$

$$= \frac{8a(2a-1)}{(2a+1)\cdot 4a^2} = \frac{2(2a-1)}{a(2a+1)} = \frac{4a-2}{2a^2+a},$$ что и требовалось доказать.

87. $$\left(a-b+\frac{4ab}{a-b}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{2ab}{b^2-a^2}\right) =$$

$$= \frac{(a-b)^2+4ab}{a-b} : \frac{a(a-b)+2ab}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{a-b} : \frac{a^2-ab+2ab}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2(a-b)(a+b)}{(a-b)a(a+b)} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{a}.$$

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{a}$.

88. $$\frac{1}{3b-1} - \frac{27b^3-3b}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2-6b+1} - \frac{1}{9b^2-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b(9b^2-1)}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{(3b-1)^2} - \frac{1}{(3b-1)(3b+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b(3b-1)(3b+1)}{9b^2+1} \cdot \frac{3b(3b+1)-(3b-1)}{(3b-1)^2(3b+1)} =$$

$$= \frac{1}{3b-1} - \frac{3b}{9b^2+1} \cdot \frac{9b^2+3b-3b+1}{3b-1} = \frac{1}{3b-1} - \frac{3b}{3b-1} = \frac{1-3b}{3b-1} = -1.$$

Ответ: -1.

89. $$\frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9}\right) =$$

$$= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(4a^2-9)}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{(2a-3)^2} - \frac{3}{(2a-3)(2a+3)}\right) =$$

$$= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(2a-3)(2a+3)}{4a^2+9} \cdot \frac{2a(2a+3)-3(2a-3)}{(2a-3)^2(2a+3)} =$$

$$= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(4a^2+6a-6a+9)}{(4a^2+9)(2a-3)} = \frac{3}{2a-3} - \frac{2a}{2a-3} = \frac{3-2a}{2a-3} = -1.$$

Ответ: -1.

90. $\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{3}{x-4}-\frac{6-4x}{x^2-3x-4}\right):\frac{2x-3}{x}=$

$=\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{3}{x-4}-\frac{6-4x}{(x+1)(x-4)}\right)\cdot\frac{x}{2x-3}=$

$=\frac{2x(x-4)+3(x+1)-(6-4x)}{(x+1)(x-4)}\cdot\frac{x}{2x-3}=\frac{2x^2-x-3}{(x+1)(x-4)}\cdot\frac{x}{2x-3}=$

$=\frac{(x+1)(2x-3)x}{(x+1)(x-4)(2x-3)}=\frac{x}{x-4}.$

Ответ: $\frac{x}{x-4}$.

91. $\frac{2x-5}{x}:\left(\frac{2x}{x+3}+\frac{2}{x-2}-\frac{21-3x}{(x+3)(x-2)}\right)=$

$=\frac{(2x-5)}{x}:\frac{(2x(x-2)+2(x+3)-(21-3x))}{(x+3)(x-2)}=$

$=\frac{2x-5}{x}:\frac{2x^2+x-15}{(x+3)(x-2)}=$

$=\frac{2x-5}{x}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(2x-5)(x+3)}=\frac{x-2}{x}.$

Ответ: $\frac{x-2}{x}$.

92. $\left(\frac{1}{a+2}+\frac{5}{(a+2)(a-3)}+\frac{2a}{a-3}\right)\cdot\frac{a}{2a+1}=$

$=\frac{a-3+5+2a^2+4a}{(a+2)(a-3)}\cdot\frac{a}{2a+1}=\frac{2a^2+5a+2}{(a+2)(a-3)}\cdot\frac{a}{2a+1}=$

$=\frac{(2a+1)(a+2)}{(a+2)(a-3)}\cdot\frac{a}{(2a+1)}=\frac{a}{a-3}.$

Ответ: $\frac{a}{a-3}$.

93. $\left(\frac{2}{b+1}+\frac{10}{(b+1)(b-4)}+\frac{3b}{b-4}\right):\frac{3b+2}{3}=$

$=\frac{2b-8+10+3b^2+3b}{(b-4)(b+1)}\cdot\frac{3}{3b+2}=\frac{3b^2+5b+2}{(b-4)(b+1)}\cdot\frac{3}{3b+2}=$

$$= \frac{(3b+2)(b+1)}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \frac{3}{b-4}.$$

Ответ: $\frac{3}{b-4}$.

94. $\left(\frac{m^2+3m}{m^2+3m+2} - \frac{m^2-2m}{m^2-2m-3}\right) : \frac{1}{m^2-m-6} - \frac{5}{m+1} =$

$$= \left(\frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)}{(m-3)(m+1)}\right) \cdot (m-3)(m+2) - \frac{5}{m+1} =$$

$$= \frac{m(m+3)(m-3)(m+2)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)(m-3)(m+2)}{(m-3)(m+1)} - \frac{5}{m+1} =$$

$$= \frac{m^3-9m-m^3+4m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -\frac{5m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -5.$$

Ответ: -5.

95. $\left(\frac{m(m+3)}{(m-1)(m+4)} - \frac{m(m-4)}{(m-1)(m-3)}\right) \cdot \frac{(m-3)(m+4)}{m} =$

$$= \frac{m(m+3)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m+4)\cdot m} - \frac{m(m-4)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m-3)\cdot m} =$$

$$= \frac{m^2-9}{m-1} - \frac{m^2-16}{m-1} = \frac{7}{m-1}.$$

Ответ: $\frac{7}{m-1}$.

100. Так как $(2x^2+3y+x+5)^2 \geqslant 0$ и $(y+3-2x)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(2x+3y+x+5)+(y+3-2x)^2$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 2x^2+3y+x+5=0, \\ y+3-2x=0. \end{cases}$ Тогда:

$$\begin{cases} 2x^2+3y+x+5=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2+3(2x-3)+x+5=0 \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0.$$

$x_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $x_2 = -4$. $y_1 = -2$; $y_2 = -11$.

Ответ: 0; $x_1 = 0{,}5$; $y_1 = -2$; $x_2 = -4$; $y_2 = -11$.

102. Так как $(17-4x-5y)^2 \geqslant 0$ и $(3x-y-4{,}2)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(17-4x-5y)^2+(3x-y-4{,}2)^2+3$ будет равно 3 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 17-4x-5y=0, \\ 3x-y-4{,}2=0. \end{cases}$ Надо найти x и y, удовлетворяющие системе $\begin{cases} 4x+5y=17, \\ 3x-y=4{,}2. \end{cases}$

Умножим второе уравнение этой системы на 5 и прибавим к первому. Получим: $19x = 38$; $x = 2$.
Из второго уравнения системы $y = 3x - 4{,}2 = 3 \cdot 2 - 4{,}2 = 1{,}8$.

Ответ: 3; $x = 2$; $y = 1{,}8$.

104. Запишем условие задачи в виде равенства:
$x + \sqrt{2a - 3b - 1} = \sqrt{4 - (a - 2b)^2}$.
Поскольку $\sqrt{2a - 3b - 1} \geqslant 0$ и $(a - 2b)^2 \geqslant 0$, то левая часть этого равенства не меньше двух, а правая — не больше 2. Равенство верно, когда обе его части равны 2, то есть при $\begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0, \\ a = 2b; \end{cases} \Leftrightarrow b = 1,\ a = 2.$

Ответ: $(2; 1)$.

106. $\dfrac{3}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{5}{x^2 - 8x + 7} = \dfrac{2}{x - 1}$,

$$\frac{3}{(x-1)(x+5)} - \frac{5}{(x-1)(x-7)} = \frac{2}{x-1}.$$

ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq -5$; $x \neq 7$.
$3x - 21 - 5x - 25 = 2x^2 - 4x - 70$; $2x^2 - 2x - 24 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $-3; 4$.

107. $\dfrac{3}{x^2 + x - 6} - \dfrac{2}{2x^2 - 5x + 2} - \dfrac{x}{2x^2 + 5x - 3} = 0$.
Разложив знаменатели дробей на множители, запишем уравнение в виде:

$$\frac{3}{(x+3)(x-2)} - \frac{2}{2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)} = 0,$$

$$\frac{6\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2(x+3) - x(x-2)}{2(x+3)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} = 0;\ x + 3 \neq 0;\ x - 2 \neq 0;\ x - \frac{1}{2} \neq 0.$$

Умножив обе части уравнения на $2(x+3)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, получим:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x - 3)^2 = 0$; $x = 3$.
При $x = 3$ знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение, не равны нулю, поэтому $x = 3$ — корень данного уравнения.

Ответ: 3.

5 Зак. № 263

108. Запишем уравнение в виде $\dfrac{x}{2+3x}+\dfrac{5}{2-3x}=\dfrac{15x+10}{(2-3x)(2+3x)}$.

ОДЗ: $2-3x\neq 0$; $2+3x\neq 0$, то есть $x\neq \pm\dfrac{2}{3}$.

Умножим обе части уравнения на $(2-3x)(2+3x)\neq 0$:
$x(2-3x)+5(2+3x)=15x+10$; $2x-3x^2+10+15x=15x+10$;
$3x^2-2x=0$; $x(3x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{3}$.

Так как $x\neq\pm\dfrac{2}{3}$, то $x=\dfrac{2}{3}$ — посторонний корень. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: 0.

110. $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0$; $x\left(2x^3+3x^2-8x-12\right)=0$; $x_1=0$;
$2x^3+3x^2-8x-12=0$; $x^2(2x+3)-4(2x+3)=0$; $\left(x^2-4\right)(2x+3)=0$;
$x^2-4=0$; $x_2=2$, $x_3=-2$; $2x+3=0$; $2x=-3$; $x_4=-1{,}5$.

Ответ: 0; 2; -2; $-1{,}5$.

111. $10x^4-45x=30x^2-15x^3$; $10x^4+15x^3-30x^2-45x=0$;
$5x^3(2x+3)-15x(2x+3)=0$; $(2x+3)\left(5x^3-15x\right)=0$; $2x+3=0$;
$x_1=-1{,}5$;
$5x^3-15x=0$; $5x\left(x^2-3\right)=0$; $x_2=0$; $x^2-3=0$; $x^2=3$; $x_3=-\sqrt{3}$,
$x_4=\sqrt{3}$.

Ответ: $-1{,}5$; 0; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

112. $\left(x^2+3\right)^2+3=7x^3-7x^2+7x$; $x^4+6x^2+9+3-7x^3+7x^2-7x=0$;
$x^4-7x^3+13x^2-7x+12=0$; $\left(x^4-7x^3+12x^2\right)+\left(x^2-7x+12\right)=0$;
$x^2\left(x^2-7x+12\right)+\left(x^2-7x+12\right)=0$; $\left(x^2+1\right)\left(x^2-7x+12\right)=0$,
$x^2+1>0$; $x^2-7x+12=0$.
По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=3$, $x_2=4$.

Ответ: 3; 4.

113. $5x^3+3x^2-5x-3=0$; $\left(5x^3+3x^2\right)-(5x+3)=0$;
$x^2(5x+3)-(5x+3)=0$; $(5x+3)\left(x^2-1\right)=0$; $5x+3=0$; $x_1=-0{,}6$;
$x^2-1=0$; $(x-1)(x+1)=0$; $x_2=1$, $x_3=-1$.

Ответ: $-0{,}6$; 1; -1.

114. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$; $\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^2+2x+1\right)=0$;
$x^2\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)=0$; $\left(x^2+1\right)(x+1)^2=0$, $x^2+1>0$;
$(x+1)^2=0$; $x+1=0$; $x=-1$.

Ответ: -1.

115. $x^4+3x^3+3x^2+3x+2=0;$
$(x^4+2x^3+x^2)+(x^3+2x^2+x)+(2x+2)=0;$
$x^2(x^2+2x+1)+x(x^2+2x+1)+2(x+1)=0;$
$x^2(x+1)^2+x(x+1)^2+2(x+1)=0;\ (x+1)(x^2(x+1)+x(x+1)+2)=0;$
$x+1=0,\ x_1=-1;$
$x^3+x^2+x^2+x+2=0;\ (x^3+2x^2)+(x+2)=0;\ x^2(x+2)+(x+2)=0;$
$(x+2)(x^2+1)=0,\ x^2+1>0;\ x+2=0;\ x_2=-2.$

Ответ: $-1;\ -2.$

116. $x^6-2x^4+4x^2-8=0.$
Замена $x^2=t;\ t\geqslant 0$. Получим:
$t^3-2t^2+4t-8=0;\ t(t^2+4)-2(t^2+4)=0;\ (t^2+4)(t-2)=0.$
$t^2+4=0$ — действительных корней нет; $t-2=0;\ t=2.$
Вернёмся к замене: $x^2=2,\ x_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$

Ответ: $\pm\sqrt{2}.$

118. $(x^2+8x+17)(x^2-4x+7)=3$. Рассмотрим
а) $y=x^2+8x+17;\ x^2+8x+17=0;\ D=64-68=-4;\ -4<0.$
$x_0=-\frac{8}{2}=-4;\ y_0=16-32+17=1;\ E(y)=[1;+\infty).$
б) $y=x^2-4x+7;\ x^2-4x+7=0;\ D=16-28=-12;\ -12<0.$
$x_0=\frac{4}{2}=2;\ y_0=4-8+7=3;\ E(y)=[3;+\infty).$
в) Запишем $x^2+8x+17=\frac{3}{x^2-4x+7};\ E(x^2+8x+17)=[1;+\infty),$
$E\left(\frac{3}{x^2-4x+7}\right)=(0;1].$
Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x=-4$, а правая — при $x=2$, то есть корней уравнение не имеет, следовательно, исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

119. $(x^2-6x+10)(x^2-10x+32)=7.$
а) Рассмотрим $y=x^2-6x+10;\ x^2-6x+10=0;\ D=36-40=-4;$
$-4<0;\ x_0=3;\ y_0=9-18+10=1;\ E(y)=[1;+\infty).$
б) $y=x^2-10x+32;\ x^2-10x+32=0;\ D=100-128=-28;\ -28<0;$
$x_0=5;\ y_0=25-50+32=7;\ E(y)=[7;+\infty).$
в) Запишем в виде $x^2-6x+10=\frac{7}{x^2-10x+32};$
$E(x^2-6x+10)=[1;+\infty);\ E\left(\frac{7}{x^2-10x+32}\right)=(0;1].$

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = 3$, а правая — при $x = 5$. Следовательно, корней нет.

Ответ: корней нет.

120. Преобразуем уравнение $\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{x+1}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Умножив обе части уравнения на $(x-1)^2(x+1)$, получим: $3(x+1) - 2(x-1) = x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Число $x_1 = -1$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: $x = 4$.

121. Преобразуем уравнение к виду $\frac{4}{(x+3)^2} - \frac{6}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{x-3}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 3$. Умножив обе части уравнения на $(x+3)^2(x-3)$, получим: $4(x-3) + 6(x+3) = x^2 + 6x + 9$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Число $x_2 = 3$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: $x = 1$.

122. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = 2x - 5$. Точка $(x; y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 2x - 5$.

Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 3 и применив теорему Виета: $x^2 - 6x + 12 = 6x - 15$; $x^2 - 12x + 27 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x - 5$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 1$, $y_2 = 13$.

Ответ: $(3; 1), (9; 13)$.

123. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Точка $(x; y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 7 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 2 и применив теорему Виета: $x^2 - 5x - 14 = -3x + 1$; $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 5$, $y_2 = -7$.

Ответ: $(-3; 5)$, $(5; -7)$.

124. Легко видеть, что число 0 не входит в область определения уравнения. Умножив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному ($x^2 \neq 0$): $x^4 + 2 = 3x^2$. Обозначив $t = x^2$, получаем

уравнение: $t^2 - 3t + 2 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности:
$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{array}\right.$
и его целыми корнями являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Ответ: -1; 1.

125. Уравнение параболы с вершиной в точке $(3;3)$ и старшим коэффициентом 1 может быть записано в виде $y = (x-3)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12$. Чтобы найти абсциссы точек пересечения этой параболы с прямой $y = 2x$, решим уравнение: $x^2 - 6x + 12 = 2x$; $x^2 - 8x + 12 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Подставляя полученные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 4$, $y_2 = 12$.

Ответ: $(2;4)$, $(6;12)$.

126. Так как выражение x^2+2 не обращается в нуль, то, домножив на него обе части исходного уравнения, получим уравнение, равносильное данному: $x^2 - 10 + (x^2-2)(x^2+2) = x^2 + 2$; $x^4 - 4 = 12$; $x^4 - 16 = 0$; $(x^2-4)(x^2+4) = 0$; $(x+2)(x-2)(x^2+4) = 0$; $x^2 + 4 > 0$, $x = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

127. Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, нужно решить систему: $\left\{\begin{array}{l} y - x - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{array}\right.$
Подставив $y = x + 3$ во второе уравнение, получаем: $x^2 + (x+3)^2 = 9$, $2x^2 + 6x + 9 = 9$, $2x^2 + 6x = 0$, $x(x+3) = 0$. Т.е. абсциссы точек пересечения равны $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, а ординаты равны $y_1 = -3 + 3 = 0$, $y_2 = 0 + 3 = 3$.

Ответ: $(-3;0), (0;3)$.

128. Преобразуем исходное уравнение: $(x-3)^4 + 2(x-3)^2 = 3$. Пусть $(x-3)^2 = t \geqslant 0$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1, \end{array}\right.$ $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Ответ: $2;4$.

129. Заметим, что $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Пусть $(x+2)^2 = t \geqslant 0$, тогда имеем: $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x + 2 = -1, \\ x + 2 = 1, \end{array}\right.$ $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

Ответ: $-3; -1$.

130. Сделаем замену $\dfrac{(x^2-5)^2}{4} = t$; $t \geqslant 0$. Тогда $(t-3)(t+2)-6=0$, $t^2-t-12=0$. Решение этого уравнения: $t_1 = 4$; $t_2 = -3$. Второе значение $t=-3$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Поэтому $t = 4$. Возвращаясь к неизвестной x, имеем $\dfrac{(x^2-5)^2}{4} = 4$; $(x^2-5)^2 = 16$. Отсюда $x^2-5=4$ или $x^2-5=-4$. Решим первое: $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm3$. Решим второе: $x^2=1$, $x_{3,4}=\pm1$.

Ответ: ±1; ±3.

131. Пусть $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t,\ t \geqslant 0$. Тогда $\left(t-\dfrac{21}{8}\right)\left(t+5\right)-3=0$; $8t^2+19t-129=0$. Решая это уравнение, получим $t_1 = -\dfrac{43}{8}$, $t_2=3$.

Значение $t=-\dfrac{43}{8}$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Подставим значение $t=3$ в равенство $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t$. Получим $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = 3$, $(x^2-1)^2 = 9$. Отсюда $x^2-1=\pm3$.

Значит, $x^2=4$ или $x^2=-2$. Второе уравнение решений не имеет, а первое имеет два решения $x_{1,2}=\pm2$.

Ответ: ±2.

134. Запишем уравнение в виде $x^2+2(2\sqrt{2}-1)x+2+\sqrt{2}=0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D=4(2\sqrt{2}-1)^2-4(2+\sqrt{2}) = 7-5\sqrt{2}$. Так как $49<50 \Leftrightarrow 7<5\sqrt{2} \Leftrightarrow D=7-5\sqrt{2}<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет.

136. Запишем уравнение в виде $x^2+(3+2\sqrt{2})x+8{,}4=0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D=(3+2\sqrt{2})^2-4\cdot8{,}4 = 17+12\sqrt{2}-33{,}6 = 12\sqrt{2}-16{,}6$. Так как $144\cdot2>(16{,}6)^2 \Leftrightarrow 12\sqrt{2}>16{,}6 \Leftrightarrow D=12\sqrt{2}-16{,}6>0$, то исходное уравнение имеет действительные корни.

Ответ: да.

138. 1) Это приведённое квадратное уравнение.
По теореме Виета: $x_1+x_2=\sqrt{2}+1\approx2{,}4$ (поскольку $\sqrt{2}\approx1{,}4$).
2) Это приведённое квадратное уравнение.
По теореме Виета: $x_1+x_2=2\sqrt{2}\approx2{,}8$.

3) Запишем наше уравнение в виде: $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Наименьшую сумму корней имеет третье уравнение.

Ответ: 3.

140. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 3x - 7y = -29. \end{cases}$

Выразим из второго уравнения системы x через y и подставим в первое уравнение:

$x = \frac{7y - 29}{3}$; $\frac{49y^2 - 406y + 841 + 9y^2}{9} = 29$; $58y^2 - 406y + 841 = 29 \cdot 9$;

$2y^2 - 14y + 29 - 9 = 0$; $y^2 - 7y + 10 = 0$; $y_1 = 5, y_2 = 2$; $x_1 = \frac{35 - 29}{3} = $

$= \frac{6}{3} = 2$, $x_2 = \frac{14 - 29}{3} = -\frac{15}{3} = -5$.

Ответ: $(-5; 2)$, $(2; 5)$.

142. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Заметим, что если $x = 0$ или $y = 0$, то $xy = 0$, что противоречит условию $xy = 2$, значит, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3, \\ y = \frac{2}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$.

Обозначим $x^2 = t$, $t > 0$. Уравнение примет вид:

$t - \frac{4}{t} = 3$; $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = 4, t_2 = -1$. Значение $t = -1$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Вернёмся к исходной переменной: $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Так как $y = \frac{2}{x}$, то $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

143. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x}=5, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ Следовательно, $x=\dfrac{2}{5}, y=2$.

Ответ: $(0{,}4; 2)$.

145. $\begin{cases} y^2-x^2=9, \\ 2x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x^2=9, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2-x^2=9, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12x+9-x^2-9=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-12x=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x\cdot(x-4)=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \end{array}\right. \\ y=2x-3; \end{cases}$ $x_1=0, y_1=-3; x_2=4, y_2=5$.

Ответ: $(0;-3)$, $(4;5)$.

146. Сделаем замену в первом уравнении $t=\dfrac{x}{y}$ и получим $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{25}{12}$.

Решаем это уравнение и находим корни $t_1=\dfrac{3}{4}$; $t_2=\dfrac{4}{3}$. Выражаем y через x, подставляем во второе уравнение и получаем ответ.

Ответ: $(3;4), (4;3), (-3;-4), (-4;-3)$.

147. $\begin{cases} x^2-y=0, \\ x+6-y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \Rightarrow x_1=2,\ y_1=4;\ x_2=-3,$ $y_2=9$.

Ответ: $(2;4)$, $(-3;9)$.

149. $\begin{cases} \sqrt{xy}=x+12, \\ y-x=48. \end{cases}$ Пусть искомые числа x и y, $x<y$. Тогда

$\begin{cases} \sqrt{xy}=x+12, \\ \dfrac{x+y}{2}=y-24. \end{cases}$ Выразим y из второго уравнения: $y=x+48$, и подставим его в первое.

1) $\sqrt{x^2+48x}=x+12$. Перейдём к равносильной системе.

$$\begin{cases} x+12\geqslant 0, \\ x^2+48x=x^2+24x+144; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -12, \\ x=6; \end{cases} \quad x=6.$$

2) Находим значение второй переменной системы $y=6+48=54$.

Итак, $\begin{cases} x=6, \\ y=54. \end{cases}$

Ответ: 6 и 54.

150. $$\begin{cases} 2x-\dfrac{12x+y}{8}=3, \\ \dfrac{x-y}{2}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{y}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\dfrac{12x}{8}-\dfrac{y}{8}=3, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{16}=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{8}+3, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{5y}{6}+\dfrac{1}{16}=0. \end{cases}$$

Подставив значение $\frac{x}{2}$ из первого уравнения системы во второе, получим:

$$\frac{y}{8}+3-\frac{5y}{6}+\frac{1}{16}=0 \Leftrightarrow -\frac{17y}{24}+\frac{49}{16}=0 \Leftrightarrow y=\frac{49}{16}\cdot\frac{24}{17}=\frac{147}{34}.$$

Найденное значение y подставим в первое уравнение системы:

$$x=\frac{y}{4}+6,\ x=\frac{147}{34\cdot 4}+6=\frac{963}{136}.$$

Ответ: $x=\dfrac{963}{136}$, $y=\dfrac{147}{34}$.

151. $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}+2x=11, \\ \dfrac{3y}{5}+\dfrac{y-x}{15}=\dfrac{x}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2+\dfrac{1}{5}\right)x+\dfrac{y}{5}=11, \\ \left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{15}\right)y-\left(\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{5}\right)x=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{y}{11}+5, \\ y=\dfrac{2x}{5}. \end{cases}$$

Подставим значение y из второго уравнения системы в первое:
$x = -\frac{2x}{55} + 5$; $x = \frac{275}{57}$. Тогда $y = \frac{2x}{5} = \frac{110}{57}$.

Ответ: $x = \frac{275}{57}$, $y = \frac{110}{57}$.

152. $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} + \frac{11}{3} = 2x, \\ 2 + \frac{y-x}{4} = \frac{y}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - 2\right)x - \frac{2y}{3} = -\frac{11}{3}, \\ -\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)y = -2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11-2y}{5}, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3y}{28} = -2. \end{cases}$

Подставим полученное значение x из первого уравнения системы во второе: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2y-11}{5} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{20} + \frac{y}{10} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow \frac{29y}{140} =$

$= -2 + \frac{11}{20} \Rightarrow y = -7.$

Так как $x = \frac{11-2y}{5}$, то $x = \frac{11+14}{5} = 5$.

Ответ: $x = 5, y = -7$.

153. $\begin{cases} \frac{x+3y}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{x}{2}, \\ \frac{5y}{2} + 3 = -\frac{x+y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{3y}{4} = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{5}x + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right)y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{15}{2} - \frac{3}{4}y, \\ x + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y, \\ 10 - y + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = -2. \end{cases}$

Ответ: $x = 12$, $y = -2$.

154. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений:

$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 7, \\ x + y + 5xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{7}{12}, \\ xy=\frac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{12}-x, \\ 12x^2-7x+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{12}-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ x=\frac{1}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{1}{3}, \\ x=\frac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{4}, \\ x=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

155. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=6, \\ x+y+10xy=2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6xy, \\ 16xy=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{4}, \\ xy=\frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ 8x^2-6x+1=0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим: $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$ и $y_2 = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$.

Ответ: $(0{,}25; 0{,}5), (0{,}5; 0{,}25)$.

156. $\begin{cases} 2x-6-4y-28=1, \\ 6-3x+7y-7=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=35, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=39, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=-3y+39, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x=-3y+39, \\ -9y+117+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-39, \\ y=\frac{113}{2}=56{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=130{,}5, \\ y=56{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $(130{,}5; 56{,}5)$.

157. $\begin{cases} 5x+4y-2x=6, \\ x-2y+4x=-16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=6, \\ 5x-2y=-16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=-26, \\ 2y=5x+16; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: $(-2;3)$.

158. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим в первое:
1) $2x+y=-2 \Rightarrow y=-2-2x$.
2) $x^2-y=x^2+2x+2=2 \Rightarrow x^2+2x=0$.
3) Решениями уравнения $x^2+2x=0$ являются $x_1=-2$, $x_2=0$, которым соответствуют $y_1=2$; $y_2=-2$.

Ответ: $(0;-2),(-2;2)$.

159. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x=x^2$ и $y=y^2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x=x^2, \\ y=y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0, \\ y(y-1)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=1; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0;0),(0;1),(1;0),(1;1)$.

160. По теореме, обратной теореме Виета, x и y^2 удовлетворяют квадратному уравнению $z^2-7z+12=0$. Откуда $x=3$, $y^2=4$ или $x=4$, $y^2=3$. Значит, решением системы являются пары: $(3;2)$, $(3;-2)$, $(4;\sqrt{3})$, $(4;-\sqrt{3})$.

Ответ: $(3;2)$, $(3;-2)$, $(4;\sqrt{3})$, $(4;-\sqrt{3})$.

161. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x=|x|$ и $y=|y|$. Получаем систему уравнений:
$\begin{cases} x=|x|, \\ y=|y|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

162. Пусть $\dfrac{1}{x+y}=b$, $\dfrac{1}{x-y}=a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} 9b+2a=3, \\ 18b-5a=-3. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим: $-9a=-9$; $a=1$. Подставляя $a=1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{9}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем: $x = 5$, $y = 4$.

Ответ: $(5; 4)$.

163. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} 6b + 5a = 7, \\ 3b - 2a = -1. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим: $9a = 9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{3}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем: $x = 2$, $y = 1$.

Ответ: $(2; 1)$.

164. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} 4a + 12b = 3, \\ 8a - 18b = -1. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим: $-42b = -7$; $b = \frac{1}{6}$. Подставляя $b = \frac{1}{6}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \frac{1}{4}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем: $x = 5$, $y = 1$.

Ответ: $(5; 1)$.

165. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} 6a - 8b = -2, \\ 9a + 10b = 8. \end{cases}$

Умножив первое уравнение на 3 и вычитая из полученного уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим: $-44b = -22$; $b = \dfrac{1}{2}$. Подставляя $b = \dfrac{1}{2}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем: $x = 2{,}5$, $y = -0{,}5$.

Ответ: $x = 2{,}5$, $y = -0{,}5$.

166. Из второго уравнения системы выразим y через x: $y = x - 7$ (1). Подставив выражение (1) в первое уравнение системы, получим: $(3x - 7)^2 = 3x - 5$; $9x^2 - 42x + 49 = 3x - 5$; $9x^2 - 45x + 54 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Из уравнения (1) находим, что значениям $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ соответствуют значения $y_1 = -5$, $y_2 = -4$.

Ответ: $(2; -5)$, $(3; -4)$.

167. $\begin{cases} (3x - y)^2 = 12 - 3x + y, \\ x + y = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 5 + x)^2 = 12 - 3x + 5 - x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x - 5)^2 = 17 - 4x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 36x + 8 = 0, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x + 2 = 0 \\ y = 5 - x. \end{cases}$

Решением первого уравнения этой системы являются числа $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 2$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы, получаем: $y_1 = 4{,}75$, $y_2 = 3$.

Ответ: $(0{,}25; 4{,}75)$, $(2; 3)$.

168. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{6y}{x}, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Обозначим $\dfrac{x}{y} = t\,(x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда $t^2 + t - 6 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -3$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ y = 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y, \\ y = 3 - x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4{,}5, \\ y = -1{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2; 1)$, $(4{,}5; -1{,}5)$.

169. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 3 = \dfrac{4y}{x}, \\ y - x = 5. \end{cases}$ Обозначим $\dfrac{x}{y} = t\,(x \neq 0, y \neq 0)$.

Тогда $t^2 + 3t - 4 = 0$;
$t_1 = -4$, $t_2 = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4y, \\ y = 5 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ y = 5 + x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1)$.

170. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.
Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y - x}{xy} = 1, \\ y - x + 11xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{12}, \\ xy = \dfrac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{12} + x, \\ 12x^2 + x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{12} + x, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{4}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}, \\ x = -\frac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

171. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y - x}{xy} = 2, \\ y - x - 10xy = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 2xy, \\ 8xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \frac{1}{4}, \\ xy = \frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} + x, \\ 8x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим: $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}25$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25$; $y_2 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5; 0{,}25)$, $(0{,}25; 0{,}5)$.

172. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = -5; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2x(5 - 2x) = 9, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2x(-5 - 2x) = 9, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 10x + 9 = 0, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9, \\ y = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9, \\ y = 13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(-9; 13)$, $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(9; -13)$.

173. Исходная система равносильна совокупности двух систем:
$\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6. \end{cases}$

$$1)\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 5 = 0, \\ x = 6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -5, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 7; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y - 5 = 0, \\ x = -6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -7, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5, \\ x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-7; -1), (-1; 5), (1; -5), (7; 1)$.

174. Пусть $t = \frac{x}{y}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид: $t + \frac{6}{t} - 5 = 0$; $t^2 - 5t + 6 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Следовательно, $x = 2y$ или $x = 3y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + 8y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \sqrt{2}, \\ x = 2\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + 12y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3; -1), (3; 1), \left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.

175. Пусть $t = \frac{x}{y}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид: $t - \frac{2}{t} - 1 = 0$; $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Следовательно, $x = -y$ или $x = 2y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 5y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2, \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 10y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = -8. \end{cases}$$ Эта система не имеет решений.

Ответ: $(2;-2), (-2;2)$.

176. $$\begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)(9x^2 - y^2) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)^2(3x-y) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)^2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6, \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;-2), \left(\frac{2}{3};-6\right)$.

177. $$\begin{cases} (x^2 - 4y^2)(x - 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2(x+2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 64, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10 - 2y - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} 10 - 2y - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}, \\ x = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4\dfrac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(9;0{,}5), (1;4{,}5)$.

178. $\begin{cases}(x^2-y^2)(x-y)=81,\\ x+y=9;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(x-y)^2=81,\\ x+y=9;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=9,\\ x+y=9;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=-3,\\ x=9-y,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=3,\\ x=9-y;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}9-y-y=-3,\\ x=9-y,\end{cases}\\ \begin{cases}9-y-y=3,\\ x=9-y;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=6,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}y=3,\\ x=6.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $(6;3), (3;6)$.

179. $\begin{cases}(y^2-x^2)(y-x)=75,\\ x-y=-5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-x)^2(y+x)=75,\\ y-x=5;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}y+x=3,\\ y-x=5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=4,\\ x=-1.\end{cases}$

Ответ: $(-1;4)$.

183. $x-2+\dfrac{2{,}25}{x+1}\leqslant 0$; $\dfrac{x^2-2x+x-2+2{,}25}{x+1}\leqslant 0$; $\dfrac{(x-0{,}5)^2}{x+1}\leqslant 0$;

$\left[\begin{array}{l}x=0{,}5,\\ x<-1.\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\{0{,}5\}$.

184. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-20}}{4x+1}\geqslant\dfrac{\sqrt{x^2+x-20}}{2x+3}$. ОДЗ: $x\neq-\frac{1}{4}$; $x\neq-\frac{3}{2}$.

Рассмотрим два случая:

а) $x^2+x-20=0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=4$, $x_2=-5$. Числа -5 и 4 являются решениями данного неравенства.

б) $\begin{cases}x^2+x-20>0,\\ \dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{1}{2x+3}\geqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+5)(x-4)>0 \text{ (см. рис. 1)},\\ \dfrac{1-x}{(4x+1)(2x+3)}\leqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-5,\\ x>4,\end{array}\right.\\ \dfrac{1-x}{8\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}\leqslant 0 \text{ (см. рис. 2)};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-5,\\ x>4,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<-\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{4}<x\leqslant 1;\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-5$.

Объединим решения, полученные в а) и б):
$x \in (-\infty; -5] \cup \{4\}$.

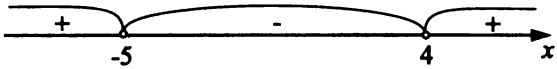

Рис. 1

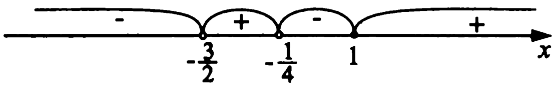

Рис. 2

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{4\}$.

185. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{-x^2-0{,}5x+0{,}5}} \geqslant \dfrac{5x+1}{\sqrt{-x^2-0{,}5x+0{,}5}}$.

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 5x+1, \\ -x^2-0{,}5x+0{,}5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x^2+0{,}5x-0{,}5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ (x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leqslant -\frac{2}{3} \text{ (см. рис. 3).}$$

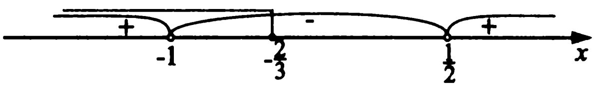

Рис. 3

Ответ: $\left(-1; -\dfrac{2}{3}\right]$.

186. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 7$; $x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} > 9$; $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 > 9$; $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$. Получим

$x + \dfrac{1}{x} > 3$ или $x + \dfrac{1}{x} < -3$.

1) $x+\dfrac{1}{x}-3>0$; $\dfrac{x^2-3x+1}{x}>0$; $\dfrac{\left(x-\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)}{x}>0$;

$$\left[\begin{aligned}&0<x<\frac{3-\sqrt5}{2},\\&x>\frac{3+\sqrt5}{2};\end{aligned}\right.\quad\text{(см. рис. 4).}$$

2) $x+\dfrac{1}{x}+3<0$; $\dfrac{x^2+3x+1}{x}<0$; $\dfrac{\left(x-\dfrac{-3+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\dfrac{-3-\sqrt5}{2}\right)}{x}<0$;

$$\left[\begin{aligned}&x<\frac{-3-\sqrt5}{2},\\&\frac{-3+\sqrt5}{2}<x<0;\end{aligned}\right.\quad\text{(см. рис. 5).}$$

Объединяя решения 1 и 2, имеем:
$\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt5}{2};+\infty\right)$.

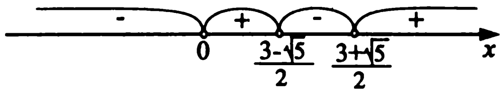

Рис. 4

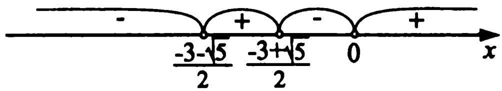

Рис. 5

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)\cup$
$\cup\left(\dfrac{3+\sqrt5}{2};+\infty\right)$.

187. Преобразуем данное неравенство: $x^2+4+\dfrac{4}{x^2}<9$; $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2<3^2$.

Рассмотрим отдельно два случая: $x>0$ и $x<0$.

1) Так как при $x>0\Rightarrow x+\dfrac{2}{x}>0$, то $0<x+\dfrac{2}{x}<3\Leftrightarrow x^2-3x+2<0$;
$x\in(1;2)$.

2) При рассмотрении случая $x < 0$ достаточно заметить, что функция $y = x + \frac{2}{x}$ нечётна, и, значит, решением неравенства $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 < 3^2$ на отрицательной полуоси будет множество $(-2; -1)$, симметричное множеству $(1; 2)$ относительно нуля.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

190. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы.

1) $\frac{6-x}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 6$ (см. рис. 6).

2) $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leqslant 0$; $\frac{x+2}{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 7).

3) Следовательно: $\begin{cases} -3 < x \leqslant 6, \\ -2 \leqslant x < 0. \end{cases}$

$-2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 8).

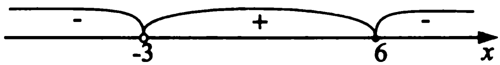

Рис. 6

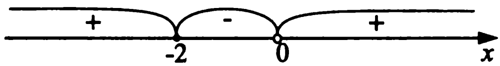

Рис. 7

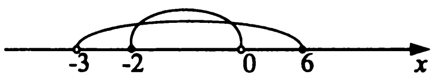

Рис. 8

Ответ: $-2 \leqslant x < 0$.

191. Решим сначала первое неравенство, потом — второе и найдём общее решение.

1) $x^2 - 4x - 5 < 0$; $(x+1)(x-5) < 0$; $-1 < x < 5$.

2) $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{4}$; $\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \geqslant 0$; $\frac{4-x}{4x} \geqslant 0$; $\frac{x-4}{x} \leqslant 0$; $0 < x \leqslant 4$.

Следовательно, $0 < x \leqslant 4$ (см. рис. 9).

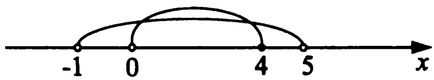

Рис. 9

Ответ: $(0; 4]$.

192. $\begin{cases} 2 - \frac{3+2x}{3} > 1 - \frac{x+6}{2}, \\ 3 - \frac{x}{4} < x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 6 - 4x > 6 - 3x - 18, \\ 12 - x < 4x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 18, \\ x > 2{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow 2{,}4 < x < 18.$

Ответ: $2{,}4 < x < 18$.

193. $\begin{cases} 1 - \frac{1-x}{2} < 4 - \frac{5+5x}{3}, \\ 2 - \frac{x+8}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3 + 3x < 24 - 10 - 10x, \\ 8 - x - 8 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x < 11, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{11}{13}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$

Ответ: $x < 0$.

195. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств:

$\begin{cases} 3x^2 - 20x - 7 \geqslant 0, \\ 2x^2 + 5x \neq 0, \\ 3x - 21 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-7)\left(x + \frac{1}{3}\right) \geqslant 0, \\ x(2x+5) \neq 0, \\ x \neq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\frac{1}{3}, \\ x \geqslant 7 \text{ (см. рис. 10)}, \end{array}\right. \\ x \neq 0,\ x \neq -2{,}5, \\ x \neq 7. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (-\infty; -2{,}5) \cup \left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

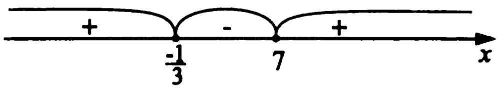

Рис. 10

Ответ: $(-\infty; -2{,}5) \cup \left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

196. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geqslant 0, \\ x^2 - 25 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-7) \geqslant 0, \\ x^2 \neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -3, \\ x \geqslant 7, \end{array}\right. \\ x \neq 5,\ x \neq -5. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [7; +\infty)$ (см. рис. 11).

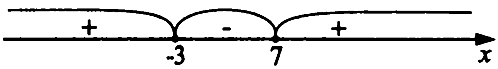

Рис. 11

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [7; +\infty)$.

197. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию $x^2 - 3x + 2 > 0$; $(x-1)(x-2) > 0$ (см. рис. 12). Следовательно, $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

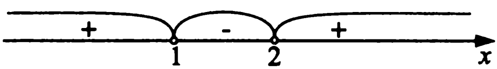

Рис. 12

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

198. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geqslant 0, \\ 14 - 3x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geqslant 0, \\ x \neq \dfrac{14}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{14}{3}.$$

Таким образом, область определения: $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

199. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 12 - x^2 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4) \leqslant 0, \\ x^2 \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \neq 2,\ x \neq -2. \end{cases}$$

(см. рис. 13). Таким образом, $x \in [-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

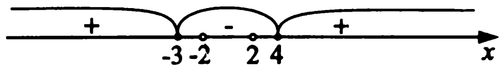

Рис. 13

Ответ: $[-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

200. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} x - 5 \geqslant 0, \\ x^2 - 36 \geqslant 0, \\ x^2 - 49 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -6, \\ x \geqslant 6, \end{array} \right. \\ x \neq 7,\ x \neq -7; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 \leqslant x < 7, \\ x > 7. \end{array} \right.$$

Ответ: $[6; 7) \cup (7; +\infty)$.

202. Выражение $\sqrt{2x^2 + 9x - 35}$ не имеет смысла, если $2x^2 + 9x - 35 < 0$; $2(x+7)(x-2{,}5) < 0$ (см. рис. 14); $-7 < x < 2{,}5$.

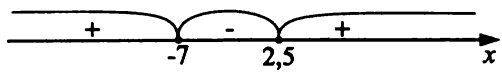

Рис. 14

Ответ: $(-7; 2{,}5)$.

203. Выражение $\sqrt{16-2x-3x^2}$ имеет смысл, если $16-2x-3x^2 \geqslant 0$; $3x^2+2x-16 \leqslant 0$; $3(x-2)\left(x+2\frac{2}{3}\right) \leqslant 0$; $-2\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (см. рис. 15).

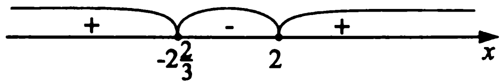

Рис. 15

Ответ: $\left[-2\frac{2}{3}; 2\right]$.

204. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию:

$\dfrac{20x-11x^2-3x^3}{x} \geqslant 0$; $\dfrac{3x\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+5)}{x} \leqslant 0$; $x \in [-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$ (см. рис. 16).

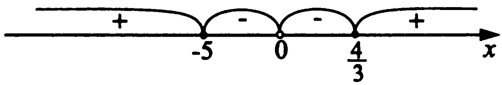

Рис. 16

Ответ: $[-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$.

206. Выражение не определено, если выполняются условия:

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ 2x^2-11x+12 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ 2(x-4)(x-1{,}5) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 4. \end{array}\right.$$

(см. рис. 17).

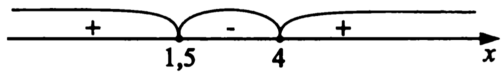

Рис. 17

Ответ: $\{-3\} \cup [1{,}5; 4]$.

209. $\begin{cases} y < 1, \\ y > x-5, \\ y > 3-3x. \end{cases}$

Построим графики функций $y = 1$, $y = x - 5$, $y = -3x + 3$ (см. рис. 18). Решением системы неравенств является внутренняя область $\triangle ABC$. Целочисленные решения отмечены точками. Это $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

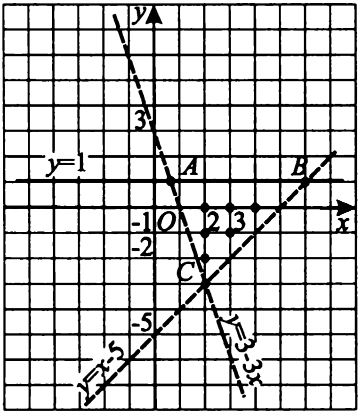

Рис. 18

Ответ: $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

210. $$\begin{cases} \dfrac{6-x}{2} - 4 < \dfrac{2+3x}{5} - 1, \\ x - \dfrac{6-x}{2} < \dfrac{x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 5x - 40 < 4 + 6x - 10, \\ 6x - 18 + 3x < 2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11x < 4, \\ 7x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{11}, \\ x < \dfrac{18}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{11} < x < 2\frac{4}{7}.$$

0, 1, 2 —целые числа, удовлетворяющие системе неравенств.

Ответ: 0; 1; 2.

211. $$\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3} - \dfrac{5x-1}{2} \leqslant \dfrac{10-x}{5}, \\ 3 - \dfrac{2x}{3} \geqslant 1 - \dfrac{x}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 10 - 75x + 15 \leqslant 60 - 6x, \\ 18 - 4x \geqslant 6 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x - 75x + 6x \leqslant 60 - 10 - 15, \\ -4x + x \geqslant 6 - 18; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x \leqslant 35, \\ -3x \geqslant -12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{35}{9}, \\ x \leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow -3\frac{8}{9} \leqslant x \leqslant 4.$$

Целые числа, удовлетворяющие системе неравенств $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

Ответ: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

212. $(x^2 - 3x + 2)^4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 2$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 2.

213. $(x^2 - 13x + 42)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является решением, а x_1 является решением.

Ответ: 6.

214. $(x^2 - 16x + 63)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 63 = 0$; $x_1 = 7, x_2 = 9$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является решением, а x_1 является решением.

Ответ: 7.

215. $(x^2 - 4x + 3)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 3$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является решением, а x_2 является решением.

Ответ: 3.

216. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$\frac{2}{x^2 - 2x - 1} + 2x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{2}{x^2 - 2x - 1} + 2(x^2 - 2x - 1) - 5 = 0$ и сделаем замену $t = x^2 - 2x - 1$, $t \neq 0$. Тогда уравнение примет вид: $\dfrac{2}{t} + 2t - 5 = 0$; $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = \dfrac{1}{2}, t_2 = 2$.

Если $t = \dfrac{1}{2}$, то $x^2 - 2x - 1 = \dfrac{1}{2}$; $x_1 = 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2 = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$.

Если $t = 2$, то $x^2 - 2x - 1 = 2$; $x_3 = -1$, $x_4 = 3$.

2) $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 3. \end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2 < \sqrt{10} < 3$, получаем, что $1 < \frac{1}{2}\sqrt{10} < 1{,}5$. Таким образом, $-1 < x_1 < 0$, $2 < x_2 < 3$, следовательно, $x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$ не являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы. Очевидно, что $x_3 = -1$, $x_4 = 3$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: $-1; 3$.

217. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению
$$2x^2 - 10x + 9 - \frac{2}{x^2 - 5x + 6} = 0.$$

Преобразуем уравнение к виду $2(x^2 - 5x + 6) - \frac{2}{x^2 - 5x + 6} - 3 = 0$ и сделаем замену $t = x^2 - 5x + 6$, $t \neq 0$. Тогда уравнение примет вид:
$2t - \frac{2}{t} - 3 = 0$; $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 2$.

Если $t = -\frac{1}{2}$, то $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{2}$, решений нет.

Если $t = 2$, то $x^2 - 5x + 6 = 2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

2) Решим неравенство $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 5$.

3) Очевидно, что $x_1 = 1$ не является решением второго неравенства, а значит, и решением системы; $x_2 = 4$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 4.

218. $\begin{cases} (x^2 + 5x)^2 - 12(x^2 + 5x) + 36 \leqslant 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x - 6)^2 \leqslant 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6, \end{array}\right. \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6, \\ (x^2 - 2x - 15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

219. $\begin{cases} (x^2 + 3x - 5)^2 - (10x^2 + 30x - 50) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2 - x - 4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-5)^2 - 10(x^2+3x-5) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-10)^2 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

220. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна. Значит, неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда $(x-2)^2(x^2+2x-1)^2=0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Таким образом, решением первого неравенства системы являются корни уравнений $x-2=0$ и $x^2+2x-1=0$: $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{2}$, $x_3=-1-\sqrt{2}$. Из них только $x_2=-1+\sqrt{2}$ удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1+\sqrt{2}$.

221. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна, так как $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$. Следовательно, x является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда

$$(2x-1)^2(x^2+2x-4)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0, \\ x^2+2x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-1+\sqrt{5}, \\ x=-1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Подстановкой убеждаемся, что из чисел 0,5; $-1+\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$ лишь последнее удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1-\sqrt{5}$.

222. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4-4x^3+4x^2 \geqslant 4;\ x^2(x^2-4x+4) \geqslant 4;\ x^2(x-2)^2 \geqslant 4.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x(x-2) \geqslant 2, \\ x(x-2) \leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2 \geqslant 0, \\ x^2-2x+2 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \big(x-(1-\sqrt{3})\big)\big(x-1-\sqrt{3}\big) \geqslant 0, \\ (x-1)^2+1 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1-\sqrt{3}, \\ x \geqslant 1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; 1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3}; +\infty\right)$.

223. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4 - 12x^3 + 36x^2 \geqslant 81;\ x^2(x^2 - 12x + 36) \geqslant 81;\ x^2(x-6)^2 \geqslant 81.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x(x-6) \geqslant 9, \\ x(x-6) \leqslant -9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x - 9 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 9 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 - 3\sqrt{2}, \\ x \geqslant 3 + 3\sqrt{2}, \\ (x-3)^2 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 - 3\sqrt{2}, \\ x \geqslant 3 + 3\sqrt{2}, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 3 - 3\sqrt{2}] \cup [3 + 3\sqrt{2}; +\infty) \cup \{3\}$.

224. $(2x^2 - x)^2 < 1 \Leftrightarrow |2x^2 - x| < 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - x < 1, \\ 2x^2 - x > -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - x - 1 < 0, \\ 2x^2 - x + 1 > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow -0{,}5 < x < 1.$$

Ответ: $(-0{,}5; 1)$.

225. $|x+1| \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$, поэтому равенство $|x+1| + |x| = 0$ невозможно ($|x+1|$ и $|x|$ не обращаются в нуль одновременно). Следовательно, $|x+1| + |x| > 0$ при всех x. Умножив обе части исходного неравенства на $|x+1|+|x|$, получим: $(|x+1|-|x|)^2(|x+1|+|x|)^2 < 1$; $\left(|x+1|^2-|x|^2\right)^2 < 1$; $\left((x+1)^2 - x^2\right)^2 < 1$; $(2x+1)^2 < 1 \Leftrightarrow |2x+1| < 1$; $\left\{\begin{array}{l} 2x+1 < 1, \\ 2x+1 > -1; \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} x < 0, \\ x > -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

226. $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 4x + 3} \geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2 - 5x + 5)^2} \leqslant 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 \geqslant 0, \\ |x^2 - 5x + 5| \leqslant 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x + 5 \geqslant -1, \\ x^2 - 5x + 5 \leqslant 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x + 4 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+1)(x+3) \geqslant 0, \\ (x-2)(x-3) \geqslant 0, \\ (x-1)(x-4) \leqslant 0; \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x \leqslant -3, \\ x \geqslant -1, \\ 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3 \leqslant x \leqslant 4; \end{array}\right.\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3 \leqslant x \leqslant 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 4]$.

227. $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{5x + 6 - x^2} \geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2 - 8x + 11)^2} \leqslant 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 6 - x^2 \geqslant 0, \\ |x^2 - 8x + 11| \leqslant 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6\leqslant 0,\\ x^2-8x+11\geqslant -4,\\ x^2-8x+11\leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+1)\leqslant 0,\\ (x-5)(x-3)\geqslant 0,\\ (x-1)(x-7)\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 6,\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 3,\\ x\geqslant 5, \end{array}\right.\\ 1\leqslant x\leqslant 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 6,\\ \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 3,\\ 5\leqslant x\leqslant 7; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 3,\\ 5\leqslant x\leqslant 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $[1;3]\cup[5;6]$.

228. $$\begin{cases} \sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5}\geqslant 0,\\ \sqrt{(x^2-7x+11)^2}\geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5}\geqslant 0,\\ |x^2-7x+11|\geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4{,}5)(x+1)\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} x^2-7x+11\leqslant -1,\\ x^2-7x+11\geqslant 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4{,}5)(x+1)\leqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} (x-4)(x-3)\leqslant 0,\\ (x-2)(x-5)\geqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 4{,}5,\\ \left[\begin{array}{l} 3\leqslant x\leqslant 4,\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 2,\\ x\geqslant 5; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 3\leqslant x\leqslant 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1;2]\cup[3;4]$.

229. $$\begin{cases} \sqrt{-x^2-4{,}5x+5{,}5}\geqslant 0,\\ \sqrt{(x^2+6x+6{,}5)^2}\geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-4{,}5x+5{,}5\geqslant 0,\\ |x^2+6x+6{,}5|\geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+5{,}5)(x-1)\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} x^2+6x+6{,}5\leqslant -1{,}5,\\ x^2+6x+6{,}5\geqslant 1{,}5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5{,}5)(x-1)\leqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} (x+4)(x+2)\leqslant 0,\\ (x+1)(x+5)\geqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5{,}5\leqslant x\leqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l} -4\leqslant x\leqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -5,\\ x\geqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5{,}5\leqslant x\leqslant -5\\ -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -4\leqslant x\leqslant -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-5{,}5;-5]\cup[-4;-2]\cup[-1;1]$.

230. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t=x^2-4x-3$, $t\neq 0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2-8+\frac{16}{t^2}\leqslant 0$; $\left(t-\frac{4}{t}\right)^2\leqslant 0$.

Следовательно, $t-\frac{4}{t}=0$; $t^2-4=0$; $t_1=-2$, $t_2=2$.

Если $t=-2$, то $x^2-4x-3=-2$; $x_1=2-\sqrt{5}$, $x_2=2+\sqrt{5}$.
Если $t=2$, то $x^2-4x-3=2$; $x_3=-1$, $x_4=5$.

2) $x^2-4x-5\geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5)\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -1, \\ x\geqslant 5. \end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2<\sqrt{5}<3$, получаем: $-1<x_1<x_2<5$, следовательно, $x_1=2-\sqrt{5}$, $x_2=2+\sqrt{5}$ не являются решениями системы. Очевидно, что $x_3=-1$, $x_4=5$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: -1; 5.

231. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t=x^2-3x+5$, $t\neq 0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2-18+\frac{81}{t^2}\leqslant 0$; $\left(t-\frac{9}{t}\right)^2\leqslant 0$.

Следовательно, $t-\dfrac{9}{t}=0$; $t^2-9=0$; $t_1=-3$, $t_2=3$.

Если $t=-3$, то $x^2-3x+5=-3$; решений нет.
Если $t=3$, то $x^2-3x+5=3$; $x_1=1$, $x_2=2$.

2) $x^2+x-2\leqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)\leqslant 0 \Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 1$.

3) Очевидно $x_2=2$ не является решением второго неравенства, а $x_1=1$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 1.

232. 1) При $x^2-4\neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-4>0, \\ x^2+2x-15\geqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-2)(x+2)>0, \\ (x-3)(x+5)\geqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -5, \\ x\geqslant 3; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -5, \\ x\geqslant 3. \end{array}\right.$$

2) При $x^2-4=0$ $x=\pm 2$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup\{-2;2\}\cup[3;+\infty)$.

233. 1) При $9-x^2\neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 9-x^2>0, \\ x^2+x-2\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3-x)(3+x)>0, \\ (x+2)(x-1)\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3<x<3, \\ -2\leqslant x\leqslant 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 1.$$

2) При $9-x^2=0$ $x=\pm 3$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $[-2;1]\cup\{-3;3\}$.

7 Зак. № 263

234. $\frac{x^2}{16} \leqslant \frac{3-2x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leqslant 48 - 32x \Leftrightarrow 3x^2 + 32x - 48 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 12) \leqslant 0 \Leftrightarrow -12 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$

Ответ: $\left[-12; \frac{4}{3}\right]$.

235. $\frac{x^2}{8} \leqslant \frac{2-x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leqslant 16 - 8x \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+4)\left(x - \frac{4}{3}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$

Ответ: $\left[-4; \frac{4}{3}\right]$.

236. $\frac{x^2}{3} \leqslant \frac{5x-3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 \leqslant 15x - 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x - 3) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3.$

Ответ: $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$.

237. $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{x+14}{12} \Leftrightarrow 12x^2 \geqslant 3x + 42 \Leftrightarrow 12x^2 - 3x - 42 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 14 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(x + 1{,}75)(x - 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1{,}75, \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -1{,}75] \cup [2; +\infty)$.

238. Условие, что разность дробей $\frac{58-5x}{3}$ и $\frac{2x+12}{2}$ неотрицательна, означает $\frac{58-5x}{3} - \frac{2x+12}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow 116 - 10x - 6x - 36 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 80 - 16x \geqslant 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 16 \leqslant 80 \Leftrightarrow x \leqslant 5$. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее исходному условию, равно 5.

Ответ: 5.

239. Условие, что разность дробей $\frac{23-2x}{5}$ и $\frac{3x-11}{4}$ неположительна, означает $\frac{23-2x}{5} - \frac{3x-11}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow 92 - 8x - 15x + 55 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 147 - 23x \leqslant 0 \Leftrightarrow 23x \geqslant 147 \Leftrightarrow x \geqslant 6\frac{9}{23}.$

Наименьшее целое значение x, удовлетворяющее условию, равно 7.

Ответ: 7.

248. По условию $a_n = 6n$, $a_n \leqslant 170$, следовательно, $6n \leqslant 170$; $n \leqslant \frac{170}{6}$; $n \leqslant 28\frac{1}{3}$.

Найдём сумму натуральных чисел, которые делятся на 6:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $a_1 = 6$; $a_{28} = 6 \cdot 28$, $n = 28$.

$S_{28} = \frac{6 + 6 \cdot 28}{2} \cdot 28 = (3 + 3 \cdot 28) \cdot 28 = 2436$.

Ответ: 2436.

250. Из условия следует, что за 1 мин скорость увеличивается на 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Следовательно, получаем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 40 + 15 = 55$, $d = 15$. Тогда $a_7 = a_1 + 6d = 55 + 6 \cdot 15 = 145$.

Ответ: 145.

251. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 2$. Найдём n, при котором $S_n = 140$.

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $\frac{10 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 140$; $n(4 + n) = 140$;

$n^2 + 4n - 140 = 0$; $n_1 = 10$, $n_2 = -14$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, $n = 10$.

Ответ: 10.

252. Согласно условию, имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 7$, $d = 7$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 370$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $7 + 7(n-1) \leqslant 370$; $7n \leqslant 370$; $n \leqslant \frac{370}{7}$; $n \leqslant 52\frac{6}{7}$. Так как $n \in N$, то $n = 52$. Тогда сумма искомых чисел

$S_{52} = \frac{2a_1 + d(52-1)}{2} \cdot 52 = (2 \cdot 7 + 7 \cdot 51) \cdot 26 = (14 + 357) \cdot 26 = 371 \cdot 26 =$
$= 9646$.

Ответ: 9646.

253. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 9$, $d = 9$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 400$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $9 + 9(n-1) \leqslant 400$; $9n \leqslant 400$; $n \leqslant \frac{400}{9}$; $n \leqslant 44\frac{4}{9}$. Так как $n \in N$, то $n = 44$. Следовательно, сумма искомых чисел

$$S_{44} = \frac{2a_1 + d(44-1)}{2} \cdot 44 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 43) \cdot 22 = 9 \cdot 45 \cdot 22 = 8910.$$

Ответ: 8910.

254. Числа, делящиеся на 2 и 3, то есть на 6, это: 6; 12; 18; 24; ... Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$; $d = 6$.

Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 170$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $6 + 6n - 6 \leqslant 170$; $n \leqslant 28\frac{1}{3}$. Так как $n \in N$, то

$n = 28$. Тогда сумма искомых чисел

$$S_{28} = \frac{2a_1 + d(28-1)}{2} \cdot 28 = (2 \cdot 6 + 6 \cdot 27) \cdot 14 = 2436.$$

Ответ: 2436.

256. Определим разность прогрессии: $d = 78{,}3 - 84{,}1 = -5{,}8$. По условию $a_1 = 84{,}1$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n > 0$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $84{,}1 - 5{,}8(n-1) > 0$; $84{,}1 - 5{,}8n + 5{,}8 > 0$; $5{,}8n < 89{,}9$; $n < 15{,}5$. Следовательно, искомое количество равно 15.

Ответ: 15.

257. Пусть a — первое из чисел, образующих данную арифметическую прогрессию. Тогда $a + d$, $a + 2d$ — второе и третье из этих чисел. По условию, числа a^2, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, знаменатель этой прогрессии $q = \dfrac{(a+d)^2}{a^2} = \dfrac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}$;

$\left((a+d)^2\right)^2 = a^2(a+2d)^2$; $(a+d)^2 = |a \cdot (a+2d)|$. Учитывая, что $a > 0$, $a + 2d > 0$, имеем:

$a^2 + 2ad + d^2 = a(a+2d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2ad$; $d^2 = 0$; $d = 0$.

Ответ: 0.

258. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 27$. Так как $a_1 - 1$; $a_2 - 3$, $a_3 - 2$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 3)^2 = (a_1 - 1)(a_3 - 2)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда числа $a_2 = a_1 + d$ и $a_3 = a_1 + 2d$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27, \\ (a_1 + d - 3)^2 = (a_1 - 1) \cdot (a_1 + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ (9 - d + d - 3)^2 = (8 - d)(9 - d + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ 36 = (8-d)(d+7); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 9 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -4, \\ d = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 13, \\ d = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 13, 9, 5 и 2) 4, 9, 14.

Ответ: 13, 9, 5; 4, 9, 14.

259. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1+a_2+a_3 = 12$. Так как a_1+1; a_2+2; a_3+11 — геометрическая прогрессия, то её знаменатель $q = \dfrac{a_2+2}{a_1+1} = \dfrac{a_3+11}{a_2+2}$; $(a_2+2)^2 = (a_1+1)(a_3+11)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12, \\ (a_1 + d + 2)^2 = (a_1 + 1)\cdot(a_1 + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ (4 - d + d + 2)^2 = (4 - d + 1)(4 - d + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ 36 = (5 - d)(15 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ d^2 + 10d - 39 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -13, \\ d = 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 17, \\ d = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 17, 4, −9 и 2) 1, 4, 7.

Ответ: 17, 4, −9; 1, 4, 7.

260. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1+a_2+a_3 = 15$. Так как a_1+1, a_2+1, a_3+4 — геометрическая прогрессия, то $(a_2+1)^2 = (a_1+1)(a_3+4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения a_1 и d найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = (a_1 + 1)(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ (5 - d + d + 1)^2 = (5 - d + 1)(5 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ 36 = (6 - d)(9 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ d^2 + 3d - 18 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -6, \\ d = 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a_1 = 11, \\ d = -6, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a_1 = 2, \\ d = 3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 11, 5, −1 и 2) 2, 5, 8.

Ответ: 11, 5, −1; 2, 5, 8.

261. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Так как a_1, $a_2 - 4$, $a_3 - 5$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2-4)^2 = a_1(a_3-5)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30, \\ (a_1 + d - 4)^2 = a_1(a_1 + 2d - 5); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 10 - d, \\ (10 - d + d - 4)^2 = (10 - d)(10 - d + 2d - 5); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 10 - d, \\ 36 = (10 - d)(d + 5); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 10 - d, \\ d^2 - 5d - 14 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 10 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -2, \\ d = 7; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a_1 = 12, \\ d = -2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a_1 = 3, \\ d = 7. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 3, 10, 17 и 2) 12, 10, 8.

Ответ: 3, 10, 17; 12, 10, 8.

262. Пусть a_1, a_2, a_3 – члены данной арифметической прогрессии, d – её разность, b – первый член геометрической прогрессии. Так как по условию знаменатель геометрической прогрессии совпадает с её первым членом, то она имеет вид: b, b^2, b^3.

Из условия имеем: $a_1 = b$, $a_2 = b^2 + 1$, $a_3 = b^3$. Поскольку $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$; $a_1 + a_3 = 2a_2$, то $b + b^3 = 2(b^2+1)$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$; $(b - 2)(b^2 + 1) = 0$; $b = 2$. Итак, $b = 2$, $a_1 = b = 2$, $a_2 = b^2 + 1 = 5$. Следовательно, $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Ответ: 3.

263. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии, b — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда, согласно условию, числа a_1, $a_2 - 1{,}5$, a_3 образуют геометрическую прогрессию и $a_1 = 1{,}5b$; $a_2 = 1{,}5b^2 + 1{,}5$; $a_3 = 1{,}5b^3$. По свойству арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$, то есть $2(1{,}5b^2 + 1{,}5) = 1{,}5b^3 + 1{,}5b$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$;

$(b-2)(b^2+1)=0$; $b=2$. Итак, $a_1=1{,}5b=3$; $a_2=1{,}5b^2+1{,}5=7{,}5$; $d=a_2-a_1=7{,}5-3=4{,}5$.

Ответ: 4,5.

264. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_5$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1=b$; $a_2=bq$; $a_5=bq^2$. Так как $a_2=a_1+d$, $a_5=a_1+4d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_5-a_1=4(a_2-a_1)$, то есть $bq^2-b=4(bq-b)$, $b(q-1)(q+1)=4b(q-1)$; $b(q-1)(q-3)=0$. Заметим, что $b\neq 0$; $q\neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q=3$. Итак, $a_1=b$; $a_2=bq=3b=3a_1$; $d=a_2-a_1=3a_1-a_1=2a_1$; $a_4=a_1+3d=a_1+6a_1=7a_1$; $\frac{a_4}{a_1}=\frac{7a_1}{a_1}=7$.

Ответ: 7.

265. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1=b$; $a_2=bq$; $a_7=bq^2$. Так как $a_2=a_1+d$; $a_7=a_1+6d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_7-a_1=6(a_2-a_1)$, то есть $bq^2-b=6(bq-b)$; $b(q-1)(q+1)=6b(q-1)$; $b(q-1)(q-5)=0$. Заметим, что $b\neq 0$, $q\neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q=5$. Итак, $q=5$; $a_2=bq=5b=5a_1$; $d=a_2-a_1=5a_1-a_1=4a_1$; $a_5=a_1+4d=a_1+16a_1=17a_1$; $\frac{a_5}{a_1}=\frac{17a_1}{a_1}=17$.

Ответ: 17.

266. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3=2d+a_1$; $a_6=5d+a_1$. Так как по условию $a_3=7$; $a_6=13$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d+a_1=7, \\ 5d+a_1=13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3d=6, \\ a_1=7-2d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2, \\ a=3. \end{cases}$$

Тогда $a_8=7d+a_1=7\cdot 2+3=17$, что соответствует условию. Следовательно, указанная в условии прогрессия существует.

Ответ: да.

267. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_4=3d+a_1$; $a_9=8d+a_1$. Так как по условию $a_4=8$; $a_9=-7$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 3d + a_1 = 8, \\ 8d + a_1 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -15, \\ a_1 = 8 - 3d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3, \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{12} = 11d + a_1 = 11 \cdot (-3) + 17 = -16$. По условию $a_{12} = -17$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

268. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_8 = 7d + a_1$. Так как по условию $a_3 = -5$; $a_8 = 5$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = -5, \\ 7d + a_1 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = 10, \\ a_1 = 5 - 7d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -9. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{11} = 10d + a_1 = 10 \cdot 2 - 9 = 11$. По условию $a_{11} = 12$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

269. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Так как a_1, $a_2 - 2$, $a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 2)^2 = a_1(a_3 + 4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24, \\ (a_1 + d - 2)^2 = a_1(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ (8 - d + d - 2)^2 = (8 - d)(8 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ 36 = (8 - d)(12 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ d^2 + 4d - 60 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -10, \\ d = 6; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 18, \\ d = -10, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_1 > 3$, то искомые числа: 18, 8, -2.

Ответ: $18; 8; -2$.

270. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. Так как $a_1 + 2$, a_2, $a_3 + 1$ — геометрическая прогрессия, то $a_2^2 = (a_1 + 2)(a_3 + 1)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 18, \\ (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2)(a_1 + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ (6 - d + d)^2 = (6 - d + 2)(6 - d + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ 36 = (8-d)(7+d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -4, \\ d = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 10, \\ d = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_3 < 3$, то искомые числа: 10; 6; 2.

Ответ: 10; 6; 2.

271. Предположим, что числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{8}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d > 0$).

Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{3}$; $a_n = 2$; $a_m = \sqrt{8}$ ($n, m \in N$; $n < m$; $n, m \neq 1$).

Тогда $2 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{3} + (n-1)d$; $d = \dfrac{2-\sqrt{3}}{n-1}$;

$\sqrt{8} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{3} + (m-1)d$; $d = \dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{2-\sqrt{3}}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = (\sqrt{8}-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3.$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\dfrac{m-1}{n-1} \in Q$, и, значит, число $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \in Q$. Покажем, что это неверно.

Если $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 \in Q$, то $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3 = \dfrac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in Z$, $q_1 \in N$. Следовательно, $2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1} + 3\right) \in Q$.

Обозначим $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1} + 3\right) = \dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Тогда $2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$;

$2\sqrt{2} + \sqrt{6} = \dfrac{p}{q} + \sqrt{3}$; $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = \left(\dfrac{p}{q} + \sqrt{3}\right)^2$; $8 + 2\sqrt{12} + 6 =$

$= \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{q} \cdot \sqrt{3} + 3$; $4\sqrt{3} + 11 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{q}\sqrt{3}$; $\sqrt{3}\left(4 - \frac{2p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2} - 11$;

$\sqrt{3} = \dfrac{\frac{p^2}{q^2} - 11}{4 - \frac{2p}{q}} \in Q$. Пусть $\sqrt{3} = \frac{r}{t}$ и $r \in Z, t \in N$. $\frac{r}{t}$ — несократимая дробь, тогда $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{t}\right)^2$; $3t^2 = r^2$. Следовательно, $r^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3 \Rightarrow r^2 \vdots 9 \Rightarrow t^2 \vdots 3 \Rightarrow t \vdots 3 \Rightarrow \frac{r}{t}$ — сократимая дробь. Пришли к противоречию.

Следовательно, число $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \notin Q$, а значит, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

272. Предположим, что числа $\sqrt{2}$, 3, $\sqrt{12}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{2} < 3 < \sqrt{12}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = 3$; $a_m = \sqrt{12}$ ($n, m \in N$; $n < m$; $n, m \neq 1$). Тогда

$3 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{2} + (n-1)d$; $d = \dfrac{3 - \sqrt{2}}{n-1}$.

$\sqrt{12} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{2} + (m-1)d$; $d = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{2}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{3 - \sqrt{2}}{n-1} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{2}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{12} - \sqrt{2}\right)\left(3 + \sqrt{2}\right)}{\left(3 - \sqrt{2}\right)\left(3 + \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{12} - 3\sqrt{2} + \sqrt{12 \cdot 2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{9 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2}{7}.$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\dfrac{m-1}{n-1} \in Q$, значит, число $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2}{7} \in Q$. Однако это неверно (покажите самостоятельно). Следовательно, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

273. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 4d = 13. \end{cases}$$

Отсюда $d = 3$, $a_1 = 1$. Следовательно, $a_2 = 4$; $a_6 = 16$. Легко увидеть, что числа 1, 4 и 16 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 4$.

Ответ: да.

274. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 8, \\ a_1 + 7d = 33. \end{cases}$$

Отсюда $5d = 25$; $d = 5$; $a_1 = -2$. Следовательно, $a_2 = 3$; $a_4 = 13$; $a_6 = 23$. Предположим, что эти числа образуют геометрическую прогрессию. Обозначим $b_1 = a_3 = 3$; $b_2 = a_4 = 13$; $b_3 = a_6 = 23$ — члены этой прогрессии. Тогда должно выполняться равенство $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1}$. Однако $\frac{23}{13} \neq \frac{13}{3}$. Следовательно, предположение о том, что второй, четвёртый и шестой члены заданной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, неверно.

Ответ: нет.

275. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_2 + a_4 + a_6 = 18$; $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$. Тогда $a_2 = d + a_1$; $a_4 = 3d + a_1$; $a_6 = 5d + a_1$. Значение чисел a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} (d + a_1) + (3d + a_1) + (5d + a_1) = 18, \\ (d + a_1)(3d + 6 - 3d)(5d + 6 - 3d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (d + 6 - 3d)(3d + 6 - 3d)(5d + 6 - 3d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 2d)(6 + 2d) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ 36 - 4d^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ \left[\begin{array}{l} d = 2, \\ d = -2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Следовательно, $a_1 = 0$ или $a_1 = 12$.

Ответ: 0; 12.

276. Пусть a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — члены заданной арифметической прогрессии. По условию $a_1 = -8$, $a_2 = -5$. Следовательно, разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = -5 + 8 = 3$.

Пусть найдётся такое натуральное число n, что $a_n = 4$ есть n -й член данной прогрессии. Так как $a_n = (n-1)d + a_1$, то должно выполняться, $4 = (n-1)\cdot 3 - 8$; $(n-1)\cdot 3 = 12$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. Следовательно, число 4 может быть пятым членом заданной прогрессии.

Ответ: да.

277. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $3\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$3(a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d) = a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d+a_1+8d+$ $+a_1+9d$; $3(5a_1+10d) = 35d+5a_1$; $d = 2a_1$. Так как по условию $a_7 = 26$, то $a_1 + 6d = 6(2a_1) + a_1 = 13a_1 = 26$; $a_1 = 2$; $d = 2a_1 = 4$.
Следовательно $a_3 = 2d + a_1 = 2\cdot 4 + 2 = 10$.

Ответ: 10..

278. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_5 + a_6 + a_7$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$2(a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1) = 4d+a_1+5d+a_1+6d+a_1$; $2(6d+4a_1) =$ $= 15d + 3a_1$; $d = \frac{5}{3}a_1$. Так как по условию $a_8 = 38$, то $7d + a_1 =$

$= 7\cdot\frac{5}{3}a_1 + a_1 = \frac{38}{3}a_1 = 38$; $a_1 = 3$; $d = \frac{5}{3}a_1 = 5$.

Следовательно, $a_2 = d + a_1 = 5 + 3 = 8$.

Ответ: 8.

288. Запишем сначала сумму первых 17 членов нашей арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью $3d$:

$$S_{17} = \frac{(2a_1 + 3d(17-1))\cdot 17}{2} = 17\cdot(a_1 + 24d) = 17a_1 + 408d.$$

Затем запишем сумму первых 23 членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d:

$$S_{23} = \frac{(2a_1 + d(23-1))\cdot 23}{2} = 23\cdot(a_1 + 11d) = 23a_1 + 253d.$$

Запишем сумму первых 6 членов:

$$S_6 = \frac{(2a_1 + d(6-1))\cdot 6}{2} = 6\cdot\left(a_1 + \frac{5}{2}d\right) = 6a_1 + 15d.$$

Запишем их разность, то есть сумму членов с 7 по 23:
$S_{7-23} = S_{23} - S_6 = 17a_1 + 238d$.

По условию задачи: $S_{17} - S_{7-23} = 153$. То есть $17a_1 + 408d - 17a_1 - 238d = 153$; $170d = 153$; $d = \frac{153}{170} = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

290. Найдём количество натуральных чисел, не превосходящих 130, которые делятся на 17: $\frac{130}{17} = 7{,}64$. Значит, таких чисел 7. Нечётными из них будут $17 \cdot 1,\ 17 \cdot 3,\ 17 \cdot 5,\ 17 \cdot 7$, то есть, 4 числа. Найдём их сумму: $17 \cdot (1+3+5+7) = 17 \cdot 16 = 272$.

Найдём количество нечётных чисел, не превосходящих 130: $\frac{130}{2} = 65$. Это числа $1, 3, 5, \ldots, 129$. Найдём их сумму: $S = \frac{(2 + 2 \cdot (65-1)) \cdot 65}{2} = 65^2 = 4225$.

Осталось отнять сумму тех нечётных чисел, которые делятся на 17: $4225 - 272 = 3953$.

Ответ: 3953.

292. После вычёркивания всех членов последовательности $b_n = 16 \cdot (-0{,}5)^n$, имеющих чётные номера, получилась бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_{2n-1} = 16(-0{,}5)^{2n-1}$. Её знаменатель
$q = \frac{b_{2(n+1)-1}}{b_{2n-1}} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \frac{16(-0{,}5)^{2n+1}}{16(-0{,}5)^{2n-1}} = (-0{,}5)^2 = \frac{1}{4}$,
а сумма $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{16(-0{,}5)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-8}{\frac{3}{4}} = \frac{-32}{3} = -10\frac{2}{3}$.

Ответ: $-10\frac{2}{3}$.

295. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_5$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_3 = b_2 + 6,\ b_5 = b_3 + 36,\ q > 1$.
Найдём значения b_1 и q из системы

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q + 6, \\ b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^2 + 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q \cdot (q-1) = 6, \\ b_1 \cdot q^2 \cdot \left(q^2 - 1\right) = 36. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое ($q \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ q \neq \pm 1$), получим:
$q \cdot (q+1) = 6,\ q^2 + q - 6 = 0,\ q_1 = 2,\ q_2 = -3$ — не удовлетворяет условию $q > 1$. Таким образом, $q = 2$.
$b_1 q(q-1) = 6;\ 2b_1 = 6;\ b_1 = 3$.

$$S_{10}=\frac{b_1\cdot(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{3\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=3\cdot 1023=3069.$$

Ответ: 3069.

298. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом x, то есть прогрессия имеет вид: x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, $2qx$, $3q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=2qx, \\ x+2b=3q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(2q-1)x, \\ b=\frac{1}{2}\cdot(3q^2-1)x; \end{cases} \Rightarrow 2q-1=\frac{1}{2}\cdot(3q^2-1);$$

$3q^2-4q+1=0$; $q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=1$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $q<1 \Rightarrow q=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

299. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом x, то есть прогрессия имеет вид: x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, $5qx$, $2q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=5qx, \\ x+2b=2q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(5q-1)x, \\ b=\frac{1}{2}\cdot(2q^2-1)x. \end{cases} \Rightarrow 5q-1=\frac{1}{2}\cdot(2q^2-1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2q^2-10q+1=0 \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0<q<1$ — этому условию удовлетворяет лишь значение $q=\frac{5-\sqrt{23}}{2}$.

Ответ: $\frac{5-\sqrt{23}}{2}$.

300. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом x, то есть прогрессия имеет вид: x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, qx, $\frac{q^2x}{3}$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=qx, \\ x+2b=\frac{q^2x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(q-1)x, \\ b=\left(\frac{q^2}{6}-\frac{1}{2}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q-1=\frac{q^2}{6}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q^2-6q+3=0 \Rightarrow q_{1,2}=3\pm\sqrt{6}$.

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 3 + \sqrt{6}$.

Ответ: $3 + \sqrt{6}$.

301. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом x, то есть прогрессия имеет вид: x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии $\frac{x}{3}$, qx, $\frac{q^2x}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + b = qx, \\ \frac{x}{3} + 2b = \frac{q^2x}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \left(q - \frac{1}{3}\right)x, \\ b = \left(\frac{q^2}{4} - \frac{1}{6}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q - \frac{1}{3} = \frac{q^2}{4} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 - 12q + 2 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Ответ: $2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

302. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 18$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 2$, $z + 7$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, $(x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z = 18, \\ x + z = 2y, \\ (x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 12, \\ (x + 1)(z + 7) = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 12 - x, \\ (x + 1)(19 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $(x + 1)(19 - x) = 64$, $x^2 - 18x + 45 = 0$, находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 12 - 3 = 9$, $z_2 = 12 - 15 = -3$. Итак, имеем два набора чисел:

1) $x = 3, y = 6, z = 9$, 2) $x = 15, y = 6, z = -3$.

Второй набор не удовлетворяет условию задачи, так как образует убывающую прогрессию.

Ответ: 3; 6; 9.

303. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 33$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа x, $y - 3$, $z - 2$ образуют геометрическую прогрессию, следовательно, $x(z-2) = (y-3)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} x + y + z = 33, \\ x + z = 2y, \\ x(z-2) = (y-3)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим, $y = 33 - 2y$, откуда $y = 11$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} y = 11, \\ x + z = 22, \\ x(z-2) = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11, \\ z = 22 - x, \\ x(20-x) = 64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x(20 - x) = 64$, $x^2 - 20x + 64 = 0$, находим: $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 22 - 4 = 18$, $z_2 = 22 - 16 = 6$.

Итак, имеем два набора чисел: 1) $x = 4, y = 11, z = 18$.
2) $x = 16, y = 11, z = 6$.

Первый набор не удовлетворяет условию, так как образует возрастающую прогрессию.

Ответ: 16; 11; 6.

304. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия, тогда $\frac{2}{3}a$, aq, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d такое, что $\frac{2}{3}a + d = aq$ и $\frac{2}{3}a + 2d = aq^2$. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + d = aq, \\ \frac{2}{3}a + 2d = aq^2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $-\frac{2}{3}a = -2aq + aq^2$; $q^2 - 2q + \frac{2}{3} = 0$; $q = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как по условию геометрическая прогрессия должна убывать, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

305. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия, тогда a, $\frac{3}{2}aq$, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d такое, что $\frac{3}{2}aq = a + d$ и $aq^2 = a + 2d$. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}aq = a + d, \\ aq^2 = a + 2d. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $aq^2 - 3aq = -a$; $q^2 - 3q + 1 = 0$; $q = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как по условию геометрическая прогрессия должна возрастать, то $q > 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

306. Числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Поэтому, если x удовлетворяет условию задачи, то $x(5x-2) = (x+2)^2$; $5x^2 - 2x = x^2 + 4x + 4$; $4x^2 - 6x - 4 = 0$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$; x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 2.

307. Так как числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, то $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Следовательно, искомое значение x удовлетворяет уравнению:
$-x(x-5) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$.

8 Зак. № 263

Значение x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 1.

308. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$; $a + b + d = b + c$; $b + c + d = c + a \Rightarrow a + d = c$; $b + d = a$. Имеем систему из двух уравнений: $\begin{cases} a + d = aq^2, \\ aq + d = a. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим: $a - aq = aq^2 - a$. Поскольку числа a, b, c — различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $q^2 + q - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -2$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -2$.

Ответ: -2.

309. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$; $c + a + d = a + b$; $a + b + d = b + c \Rightarrow c + d = b$; $a + d = c$.

Имеем систему из двух уравнений: $\begin{cases} aq^2 + d = aq, \\ a + d = aq^2. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим: $aq^2 - a = aq - aq^2$. Поскольку числа a, b, c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $2q^2 - q - 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -0{,}5$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

310. Пусть b — первое из чисел, образующих данную геометрическую прогрессию. Тогда bq, bq^2 — второе и третье из этих чисел. По условию, числа b^2, $(bq)^2$, $(bq^2)^2$ образуют арифметическую прогрессию, а значит, $2(bq)^2 = b^2 + (bq^2)^2$. Сокращая на b^2 (из условия положительности b следует, что $b \neq 0$), получаем уравнение: $2q^2 = 1 + q^4$; $(q^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 1 = 0$; $q_1 = -1$, $q_2 = 1$. Так как по условию все члены прогрессии положительны, то $q > 0$, поэтому $q = 1$ — единственное значение знаменателя прогрессии, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

Ответ: 1.

311. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a, $a + d$, $a + 3d$ образуют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической прогрессии имеем: $(a + d)^2 = a(a + 3d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 3ad$; $d^2 = ad$. Сократив на d $(d \neq 0)$, получим $d = a$.

То есть числа a, $a+d$ и $a+3d$ равны соответственно числам a, $2a$ и $4a$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Ответ: 2.

312. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a^2, $(a+d)^2$ и $(a+4d)^2$ образуют геометрическую прогрессию. Согласно свойству геометрической прогрессии имеем:
$(a+d)^4 = a^2(a+4d)^2$; $(a+d)^2 = |a(a+4d)|$. Так как $a > 0$, $d > 0$, то $(a+d)^2 = a(a+4d)$; $a^2+2ad+d^2 = a^2+4ad$; $d^2 = 2ad$ (сокращаем на $d \neq 0$), $d = 2a$. То есть числа a^2, $(a+d)^2$ и $(a+4d)^2$ равны соответственно числам a^2, $9a^2$ и $81a^2$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 9.

Ответ: 9.

313. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x+y+z=28$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz=y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x+1$, $y+2$, $z-1$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-1)=2(y+2)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=28, \\ x+z=2y+4, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y=24-2y$, откуда $y=8$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} y=8, \\ x+z=20, \\ xz=64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8, \\ z=20-x, \\ x(20-x)=64. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(20-x)=64$, находим $x_1=4$, $x_2=16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1=20-4=16$, $z_2=20-16=4$. Получаем два набора чисел: 1) $x=4$, $y=8$, $z=16$; 2) $x=16$, $y=8$, $z=4$.

Первый набор удовлетворяет условию, а второй — нет, так как числа $16+1=17$, $8+2=10$, $4-1=3$ образуют убывающую прогрессию.

Ответ: $4; 8; 16$.

314. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x+y+z=21$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz=y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x+1$, $y+1$, $z-2$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-2)=2(y+1)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=21, \\ x+z=2y+3, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} y=6, \\ x+z=15, \\ xz=36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6, \\ z=15-x, \\ x(15-x)=36. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(15-x) = 36$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 15 - 3 = 12$, $z_2 = 15 - 12 = 3$. Получаем два набора чисел: 1) $x = 3, y = 6, z = 12$; 2) $x = 12, y = 6, z = 3$.
Второй набор удовлетворяет условию, а первый — нет, так как числа $3 + 1 = 4$, $6 + 1 = 7$, $12 - 2 = 10$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: 12; 6; 3.

315. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1q$; $b_3 = b_1q^2$. По условию числа b_1, b_2, $\frac{b_3}{5}$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + \frac{b_3}{5}$; $2b_1q = b_1 + \frac{1}{5}b_1q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $q > 1$, иначе прогрессия b_1, b_2, b_3 не является возрастающей. Следовательно, $2q = 1 + \frac{1}{5}q^2$; $q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Значение $q = 5 - 2\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию $q > 1$, а значение $q = 5 + 2\sqrt{5}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $5 + 2\sqrt{5}$.

316. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$. По условию, числа b_1, b_2, $0{,}8b_3$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + 0{,}8b_3$; $2b_1q = b_1 + 0{,}8b_1q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $0 < q < 1$. Следовательно, $2q = 1 + 0{,}8q^2$; $4q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Значение $q = \dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$ не удовлетворяет условию $0 < q < 1$, а значение $q = \dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$.

317. Предположим, что такая прогрессия существует. Обозначим её знаменатель через q. Тогда $\dfrac{b_m}{b_n} = q^{m-n}$ $(m, n \in N, m > n)$. То есть

$\dfrac{b_5}{b_2} = \dfrac{12}{4} = 3 = q^3$; $\dfrac{b_8}{b_5} = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3} = q^3$. Отсюда $3 = \dfrac{8}{3}$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверно и геометрической прогрессии с указанными членами не существует.

Ответ: нет.

318. Покажем, что данная прогрессия существует. По данным задачи находим:

1) $\dfrac{b_6}{b_1} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{4(2-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{4(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -4\sqrt{2} =$
$= (-\sqrt{2})^5$;

2) $\dfrac{b_4}{b_1} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{2(2-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3$;

3) $\dfrac{b_6}{b_4} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{2(4-2\sqrt{2})}{4-2\sqrt{2}} = 2 = (-2)^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{2}$.

Ответ: да.

319. Покажем, что указанная прогрессия существует. По данным задачи находим:

1) $\dfrac{b_6}{b_1} = \dfrac{63\sqrt{3}}{-7} = -9\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^5$;

2) $\dfrac{b_4}{b_1} = \dfrac{21\sqrt{3}}{-7} = -3\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^3$;

3) $\dfrac{b_6}{b_4} = \dfrac{63\sqrt{3}}{21\sqrt{3}} = 3 = (-\sqrt{3})^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{3}$.

Ответ: да.

320. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию $\begin{cases} b_2 - b_4 = 3, \\ b_1 - b_3 = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} b_1q - b_1q^3 = 3, \\ b_1 - b_1q^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q(1-q^2) = 3; \\ b_1(1-q^2) = 6. \end{cases}$

Разделим первое равенство на второе ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 8$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$; $S = \frac{8}{1-0{,}5} = 16$.

Ответ: 16.

321. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию задачи
$\begin{cases} b_2 + b_4 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_3 = 20, \end{cases}$ то $\begin{cases} b_1q + b_1q^3 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_1q^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q(1+q^2) = \frac{20}{3}, \\ b_1(1+q^2) = 20. \end{cases}$

Разделим первое уравнение системы на второе ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{3}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 18$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$.

Ответ: 27.

322. Пусть b_1 — первый член прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = -18, \\ b_1 \cdot q^5 = 486; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = -27, \\ b_1 = -\frac{18}{q^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3, \\ b_1 = -2. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых трёх членов данной прогрессии
$S_3 = \frac{b_1\left(q^3 - 1\right)}{q-1} = \frac{-2 \cdot (-28)}{-4} = -14.$

Ответ: -14.

323. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию, $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1q^3 = -32, \\ b_1q^8 = 1024; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^5 = -32, \\ b_1 = -\frac{32}{q^3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 4. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых четырёх членов данной прогрессии
$S_4 = \dfrac{b_1(q^4-1)}{q-1} = \dfrac{4 \cdot 15}{-3} = -20.$

Ответ: -20.

324. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 3$; $q = \dfrac{1}{3}$. Так как $\dfrac{1}{81} =$ $= 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = b_1 q^5$, то число $\dfrac{1}{81}$ является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

325. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}5$; $q = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$. Так как $64 = 0{,}5 \cdot 2^7 = b_1 q^7$, то число 64 является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

327. Согласно условию, имеем систему уравнений: $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{8}; \end{cases}$
где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$.

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \dfrac{b_2}{q}$, $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 14, \\ \dfrac{q}{b_2} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_2 q} = \dfrac{7}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1+q+q^2) = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7b_2^2 q}{8} = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем: $b_2^2 = 16$; $b_2 = -4$ или $b_2 = 4$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 4$.

Тогда $b_1 b_2 b_3 = \dfrac{b_2}{q} \cdot b_2 \cdot qb_2 = b_2^3 = 64.$

Ответ: 64.

328. $y = -\dfrac{9x + x^3}{3x}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем:

$-\dfrac{x\cdot(9+x^2)}{3x}=-\dfrac{9+x^2}{3}=-\dfrac{1}{3}x^2-3.$

Графиком функции $y=-\dfrac{1}{3}x^2-3$ при $x\neq 0$ является парабола с вершиной $(0;-3)$, не принадлежащей ей, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-3	-1	1	3
y	-6	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	-6

.

График функции изображён на рисунке 19.

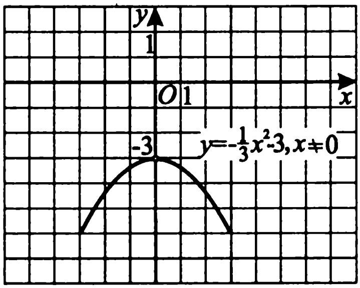

Рис. 19

329. $y=\dfrac{8x-x^3}{4x}.$

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. На $D(y)$ имеем:

$\dfrac{8x-x^3}{4x}=\dfrac{x\cdot(8-x^2)}{4x}=\dfrac{8-x^2}{4}=-\dfrac{1}{4}x^2+2.$

Графиком функции $y=-\dfrac{1}{4}x^2+2$ при $x\neq 0$ является парабола с вершиной $(0;2)$, не принадлежащей графику, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	1

.

График заданной функции изображён на рисунке 20.

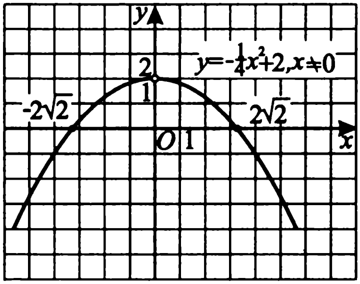

Рис. 20

330. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{2x + 6}$. Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. На $D(y)$ имеем:

$$y = \frac{x^2 \cdot (x+3) - 4 \cdot (x+3)}{2 \cdot (x+3)} = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x+3)}{2 \cdot (x+3)} = \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

Графиком функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ при $x \neq -3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(0; -2)$.

Так как $x \neq -3$, то точка с координатами $(-3; 2{,}5)$ не принадлежит графику.

Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	0	$-1{,}5$	$-1{,}5$	0

.

График заданной функции изображён на рисунке 21.

331. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

1) $y = \dfrac{1}{x}$, если $x \geqslant 1$. Составим таблицу:

x	1	2	4
y	1	$0{,}5$	$0{,}25$

.

2) $y = -(x-1)^2 + 1$, если $x < 1$. График есть ветвь параболы (ветви направлены вниз, вершина $(1; 1)$).

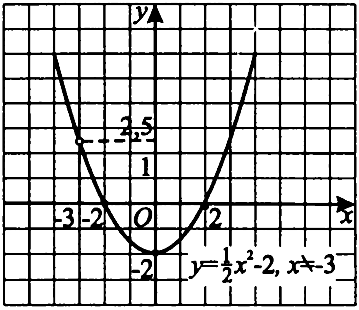

Рис. 21

Составим таблицу:

x	0	-1
y	0	-3

.

График заданной функции изображён на рисунке. 22.

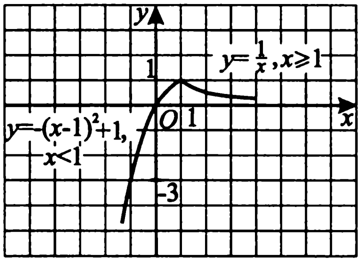

Рис. 22

332. График функции состоит из двух частей:
1) для неотрицательных x — это график функции $y = -(x-1)^2$ — парабола, ветви направлены вниз, вершина $(1;0)$;
2) для отрицательных x — это график функции $y = x^2 + 2x - 1$ — парабола, ветви направлены вверх, вершина $(-1;-2)$.
График заданной функции изображён на рис. 23.

333. 1) Графиком функции $y = (x-3)^2 - 2$, $x \geqslant 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(3;\ -2)$.

Дополнительные точки:

x	1	2	4	3
y	2	-1	-1	-2

.

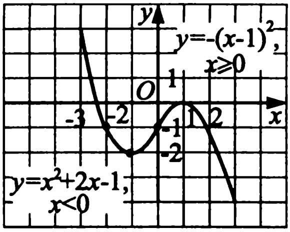

Рис. 23

2) Графиком функции $y = -2x^2+4$, $x < 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами (0; 4).

Дополнительные точки:

x	-1	-2
y	2	-4

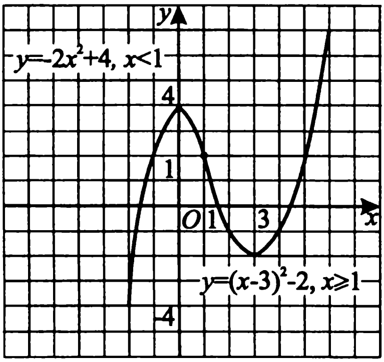

Рис. 24

График заданной функции изображён на рис. 24.

334. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

Разложим на множители числитель дроби: $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = x - 1$. Так как $x \neq 3$, то $y \neq 2$. Графиком функции является прямая без точки (3; 2).

Составим таблицу:

x	0	1
y	-1	0

График заданной функции изображён на рисунке 25.

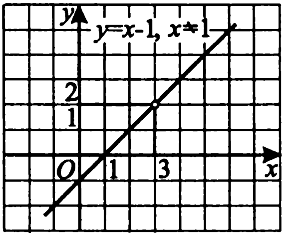

Рис. 25

335. $y = \dfrac{x-4}{x^2-4x}$.

Разложим на множители знаменатель дроби: $y = \dfrac{x-4}{x(x-4)}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель не равен нулю.
$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = \dfrac{1}{x}$. Так как

$x \neq 4$, то $y \neq \dfrac{1}{4}$.

Графиком функции является гипербола без точки $\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$.

Составим таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

.

График заданной функции изображён на рисунке 26.

336. $y = x + \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{9-12x+4x^2}$,
$y = x + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$, $y = x + |x-3| + |2x-3|$.
1) Найдём, при каких значениях x выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю.
$x - 3 = 0$, $x = 3$; $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 27):
а) $x < 1{,}5$. $y = x + 3 - x + 3 - 2x$, $y = -2x + 6$.

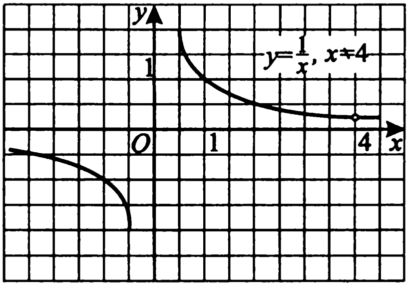

Рис. 26

x	0	1
y	6	4

б) $1{,}5 \leqslant x < 3$. $y = x + 3 - x + 2x - 3$, $y = 2x$.

x	1,5	2
y	3	4

в) $x \geqslant 3$. $x + x - 3 + 2x - 3$, $y = 4x - 6$.

x	3	4
y	6	10

Итак, $y = \begin{cases} -2x + 6, \text{ если } x < 1{,}5, \\ 2x, \text{ если } 1{,}5 \leqslant x < 3, \\ 4x - 6, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$

График заданной функции изображён на рисунке 28.

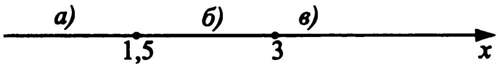

Рис. 27

337. $y = \sqrt{16x^2 + 56x + 49} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 5x$,
$y = \sqrt{(4x+7)^2} + \sqrt{(x-2)^2} - 5x$, $y = |4x + 7| + |x - 2| - 5x$.
1) Найдём нули выражений, стоящих в модульных скобках:
$4x + 7 = 0$, $x = -1{,}75$; $x - 2 = 0$, $x = 2$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 29):
а) $x < -1{,}75$. $y = -4x - 7 + 2 - x - 5x$, $y = -10x - 5$.

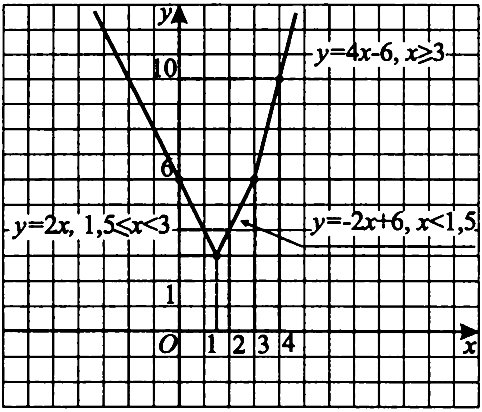

Рис. 28

x	-2	$-2{,}5$
y	15	20

б) $-1{,}75 \leqslant x < 2$. $y = 4x + 7 + 2 - x - 5x$, $y = -2x + 9$.

x	0	1
y	9	7

в) $x \geqslant 2$ $y = 4x + 7 + x - 2 - 5x$, $y = 5$.

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} -10x - 5, & \text{если } x < -1{,}75, \\ -2x + 9, & \text{если } -1{,}75 \leqslant x < 2, \\ 5, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График заданной функции изображён на рисунке 30.

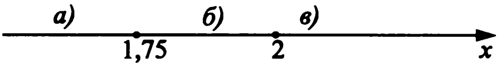

Рис. 29

338. $y = \dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4)}{(x - 4)(2 - x)}$.

Разложим на множители квадратные трёхчлены, стоящие в числителе:

$y = -\dfrac{(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)}{(x - 4) \cdot (x - 2)}$.

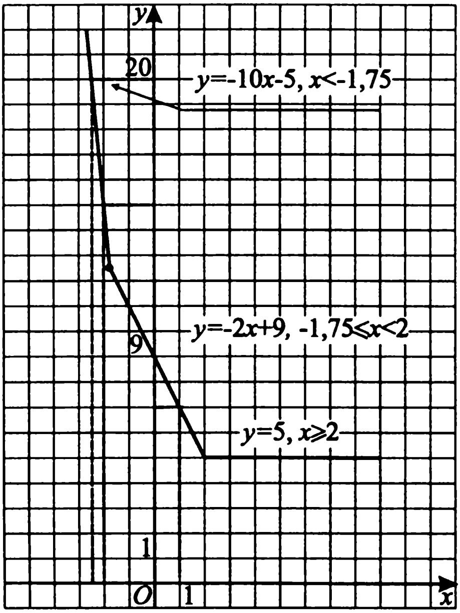

Рис. 30

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля:
$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.
На найденной области определения функция примет вид:
$y = -(x-3)\cdot(x-1)$ или $y = -x^2 + 4x - 3$. Так как $x \neq 2$ и $x \neq 4$, то $y \neq 1$ и $y \neq -3$.

Графиком функции является парабола с вершиной $(2; 1)$, ветви которой направлены вниз. $(2; 1)$ и $(4; -3)$ — не принадлежат параболе.

Дополнительные точки:

x	0	1	3
y	-3	0	0

График заданной функции изображён на рисунке 31.

339. Область определения $D(y) : x \neq 2, x \neq 3$.

$$y = -\frac{(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = -(x-1)(x-4).$$ Так как $x \neq 2$, $x \neq 3$, то $y \neq 2$.

$y = -(x^2 - 5x + 4) = -x^2 + 5x - 4$. Графиком функции является

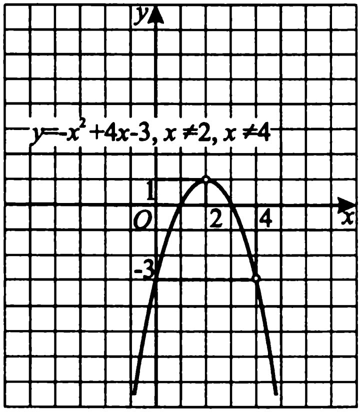

Рис. 31

парабола, ветви направлены вверх, вершина в точке с координатами (2,5; 2,25). Точки (2; 2) и (3; 2) не принадлежат параболе.

График заданной функции изображён на рисунке 32.

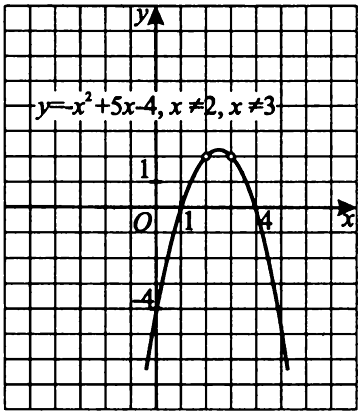

Рис. 32

341. По условию $a > 0$, поэтому данную функцию можно представить в виде $y = a\left|x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right|$. Из рисунка 33 следует, что квадратный трёхчлен $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Отсюда, согласно

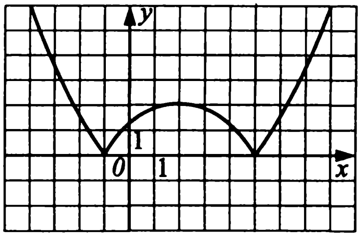

Рис. 33

теореме Виета, получаем: $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -4$, $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = -5$, то есть $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - 4x - 5$. Вершина параболы $y = x^2 - 4x - 5$ имеет абсциссу $x = \frac{-(-4)}{2} = 2$ и ординату $y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$. С другой стороны, из рисунка 33 следует, что вершина параболы $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ имеет ординату, равную -2. Следовательно, $a \cdot (-9) = -2$, $a = \frac{2}{9} \Rightarrow$ $b = \frac{b}{a} \cdot a = (-4) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{8}{9}$, $c = \frac{c}{a} \cdot a = (-5) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{10}{9}$.

Ответ: $a = \frac{2}{9}$, $b = -\frac{8}{9}$, $c = -\frac{10}{9}$.

342. Угловые коэффициенты k_1 и k_2, отличные от нуля, перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению $k_1 \cdot k_2 = -1$. Поэтому множество прямых, перпендикулярных прямой $y = 0{,}125x$, имеет вид $y = -8x + b$, где b — произвольное действительное число. Для того чтобы прямая $y = -8x + b$ касалась параболы $y = x^2 - 1$, уравнение $x^2 - 1 = -8x + b$ должно иметь единственное решение. Тогда трёхчлен $x^2 + 8x - 1 - b$ должен быть полным квадратом. Следовательно, абсцисса точки касания $x = -4$, тогда ордината $y = (-4)^2 - 1 = 15$.

Ответ: $(-4; 15)$.

343. Так как по условию прямая $y = 0{,}25x$ перпендикулярна прямой $y = kx + b$, то $k = -\frac{1}{0{,}25} = -4$, значит, $y = -4x + b$. Найдём b из условия, что эта прямая касается параболы $y = 4x^2 + 8x + 7$, то есть уравнение $4x^2 + 8x + 7 = -4x + b$ имеет один корень (два равных).

Имеем: $4x^2 + 12x + 7 - b = 0$, $D = 0$. $D = 144 - 112 + 16b = 0$, $b = -2$.
Уравнение прямой примет вид: $y = -4x - 2$.
Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = 4x^2 + 8x + 7, \\ y = -4x - 2, \end{cases}$ $4x^2 + 8x + 7 = -4x - 2$, $4x^2 + 12x + 9 = 0$,

$(2x+3)^2 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, $y = 4$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$.

344. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 3x - 2$, имеет вид: $y = 3x + b$.
б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 3x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 5$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 3x + b$ имело один корень (два равных).
$2x^2 - 6x + 5 - b = 0$, $D = 0$, $D = 36 - 8 \cdot 5 + 8b = 8b - 4$, $8b - 4 = 0$, $b = \frac{1}{2}$.

$y = 3x + \frac{1}{2}$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = 3x + \frac{1}{2}, \\ y = 2x^2 - 3x + 5, \end{cases}$ $2x^2 - 3x + 5 = 3x + \frac{1}{2}$, $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$,

$4x^2 - 12x + 9 = 0$, $(2x-3)^2 = 0$, $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $y = 3 \cdot 1{,}5 + 0{,}5 = 5$.
$(1{,}5;5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1{,}5; 5)$.

345. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = x + 3$, имеет вид: $y = x + b$.
б) Вычислим b, зная, что прямая $y = x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 6 = x + b$ имело один корень (два равных).
$2x^2 - 4x + 6 - b = 0$, $D = 0$, $D = 16 - 48 + 8b = -32 + 8b$, $-32 + 8b = 0$, $b = 4$.
$y = x + 4$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x + 4, \\ y = 2x^2 - 3x + 6; \end{cases}$ $2x^2 - 3x + 6 = x + 4, 2x^2 - 4x + 2 = 0, x^2 - 2x + 1 = 0,$
$(x-1)^2 = 0, x = 1, y = 5.$
$(1; 5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1; 5)$.

346. По условию прямая $y = 6x$ параллельна прямой $y = kx + b$. Тогда $k = 6$ и прямая имеет вид $y = 6x + b$. Она касается параболы $y = x^2 + 5$. Значит, уравнение $x^2 + 5 = 6x + b$ имеет один корень (два равных).
$x^2 - 6x + 5 - b = 0, D = 0, D = -4 \cdot (5 - b), 36 - 20 + 4b = 0, 4b = -16,$
$b = -4.$
Уравнение касательной: $y = 6x - 4$.
Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y = 6x - 4. \end{cases}$ $x^2 + 5 = 6x - 4, x^2 - 6x + 9 = 0, (x - 3)^2 = 0, x = 3,$
$y = 14.$

Ответ: $(3; 14)$.

347. 1) Так как касательная параллельна прямой $y = 14x$, то её уравнение $y = 14x + b$.
Вычислим b, зная, что прямая $y = 14x + b$ касается параболы $y = x^2 + 9$, то есть $x^2 + 9 = 14x + b$.
Уравнение $x^2 - 14x + 9 - b = 0$ имеет один корень (два равных), тогда $D = 0, D = 196 - 4 \cdot (9 - b), 196 - 36 + 4b = 0, 4b = -160, b = -40.$
Уравнение касательной: $y = 14x - 40$.
2) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 9, \\ y = 14x - 40. \end{cases}$ $x^2 + 9 = 14x - 40, x^2 - 14x + 49 = 0, (x - 7)^2 = 0, x = 7,$
$y = 58.$

Ответ: $(7; 58)$.

348. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 4x$, имеет вид: $y = 4x + b$.
б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 4x + b$ касается параболы $y = x^2 + 3$, то есть $x^2 + 3 = 4x + b$.
Уравнение $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ имеет один корень (два равных), тогда $D = 0$, $D = 16 - 4 \cdot (3 - b), 16 - 12 + 4b = 0, 4 + 4b = 0, b = -1.$
Уравнение касательной: $y = 4x - 1$.
в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:

$\begin{cases} y = x^2 + 3, \\ y = 4x - 1, \end{cases}$ $x^2+3 = 4x-1, x^2-4x+4 = 0, (x-2)^2 = 0, x = 2, y = 7.$

Ответ: $(2; 7)$.

349. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 2x$, имеет вид: $y = 2x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 2x+b$ касается параболы $y = x^2-14$, то есть $x^2 - 14 = 2x + b$.

Уравнение $x^2 - 2x - 14 - b = 0$ имеет один корень (два равных).

Тогда $D = 0$, $D = 4 + 4 \cdot (14 + b) = 60 + 4b$, $60 + 4b = 0$, $b = -15$.

Уравнение касательной: $y = 2x - 15$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:

$\begin{cases} y = x^2 - 14, \\ y = 2x - 15. \end{cases}$ $x^2 - 14 = 2x - 15, x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0, x = 1,$ $y = -13$.

Ответ: $(1; -13)$.

351. Найдём b и c, используя данные задачи. Так как парабола касается прямых $y = x+1$, $y = 5-3x$, то каждое из уравнений: $-x^2+bx+c = x+1$ и $-x^2 + bx + c = 5 - 3x$ имеет единственный корень (два равных). Следовательно, дискриминанты уравнений $x^2 + (1 - b)x + 1 - c = 0$, $x^2 - (3 + b)x + 5 - c = 0$ равны нулю. Таким образом, получаем систему уравнений: $\begin{cases} (1 - b)^2 - 4(1 - c) = 0, \\ (3 + b)^2 - 4(5 - c) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b + b^2 - 4 + 4c = 0, \\ 9 + 6b + b^2 - 20 + 4c = 0; \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 4c = 3, \\ b^2 + 6b + 4c = 11. \end{cases}$ Вычитая из нижнего уравнения верхнее, приходим к уравнению $8b = 8 \Rightarrow b = 1$. Подставляя найденное значение b в первое уравнение последней системы, находим $1 - 2 + 4c = 3 \Rightarrow c = 1$. Поэтому искомое уравнение параболы: $y = -x^2 + x + 1$.

Ответ: x.

352. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений:

$\begin{cases} y = 2|x| + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1. \end{cases}$

1) $x \geqslant 0$; $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1; \end{cases}$ $2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1$; $4x^2 - 2 = 0$;

$x^2 - \frac{1}{2} = 0$; $\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$

Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}+1\right)$.

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = -2x+1, \\ y = 4x^2+2x-1, \end{cases}$ $-2x+1 = 4x^2+2x-1$, $2x^2+2x-1=0$,

$D = 4+8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$,

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $x < 0$),

$x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (удовлетворяет условию $x < 0$), $y_3 = 1+\sqrt{3}+1 = 2+\sqrt{3}$,

$B\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; 2+\sqrt{3}\right)$.

2. Найдём координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-1-\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4},$$

$$y_0 = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{\sqrt{2}+1+2+\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}; \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$.

354. Запишем уравнение параболы $y = ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные числа и $a \neq 0$.

По условию известно, что точки с координатами $(-1;-5)$, $(0;-4)$ и $(1;1)$ лежат на этой параболе, значит, $y(-1) = -5$, $y(0) = -4$, $y(1) = 1$.

Найдём числа a, b, c, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} a-b+c=-5, \\ c=-4, \\ a+b+c=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b-4=-5, \\ c=-4, \\ a+b-4=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1, \\ c=-4, \\ a+b=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=3, \\ c=-4. \end{cases}$$

Уравнение параболы примет вид: $y = 2x^2+3x-4$.

Найдём координаты вершины.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{3}{2\cdot 2} = -\frac{3}{4}$,

$$y_0 = 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{9-18-32}{8} = -\frac{41}{8}.$$

$\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$ — искомые координаты вершины параболы.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$.

356. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2$.

1) С осью Ox:

$-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$; $-x^2(x+2) + (x+2) = 0$; $(x+2)(1-x^2) = 0$;

$x + 2 = 0, x_1 = -2$; $1 - x^2 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

$(-2; 0), (-1; 0), (1; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Ox.

2) С осью Oy:

$(0; 2)$ — координаты точки пересечения графика данной функции с осью Oy.

Ответ: $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 2)$.

357. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 16x^2 + 12x - 2$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Ox, имеет координаты $(x; -y)$ и лежит на прямой $y = 2x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = y, \\ 2x + 5 = -y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = -2x - 5, \\ y = -2x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 14x + 3 = 0, \\ y = -2x - 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$16x^2 + 14x + 3 = 0, D = 49 - 48 = 1$;

$$x_1 = \frac{-7+1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} = -0{,}375,\ x_2 = \frac{-7-1}{16} = -0{,}5;$$

$y_1 = -2\cdot(-0{,}375) - 5 = -4{,}25$ $y_2 = -2\cdot(-0{,}5) - 5 = -4$.

$(-0{,}375; -4{,}25)$ и $(-0{,}375; 4{,}25)$, $(-0{,}5; -4)$ и $(-0{,}5; 4)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $(-0{,}375; -4{,}25)$, $(-0{,}375; 4{,}25)$; 2) $(-0{,}5; -4)$, $(-0{,}5; 4)$.

358. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 18x^2 - 33x$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Oy, имеет координаты $(-x; y)$ и лежит на прямой $y = 6x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 18x^2 - 33x = y, \\ -6x + 5 = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 33x = -6x + 5, \\ y = -6x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 27x - 5 = 0, \ (1) \\ y = -6x + 5. \end{cases}$

Решим уравнение (1) системы:

$18x^2 - 27x - 5 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{27 \pm \sqrt{729 + 360}}{36}$; $x_{1,2} = \dfrac{27 \pm 33}{36}$; $x_1 = \dfrac{5}{3}$,

$x_2 = -\dfrac{1}{6}$; $y_1 = -6 \cdot \dfrac{5}{3} + 5 = -5$, $y_2 = -6 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) + 5 = 6$.

$\left(\frac{5}{3}; -5\right)$ и $\left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; $\left(-\frac{1}{6}; 6\right)$ и $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $\left(\frac{5}{3}; -5\right), \left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{6}; 6\right), \left(\frac{1}{6}; 6\right)$.

360. $y = \big||x + 1| - 2\big|$.
1. $y = x + 1$,
2. $y = |x + 1|$,
3. $y = |x + 1| - 2$,
4. $y = \big||x + 1| - 2\big|$.

График заданной функции изображён на рис. 34.

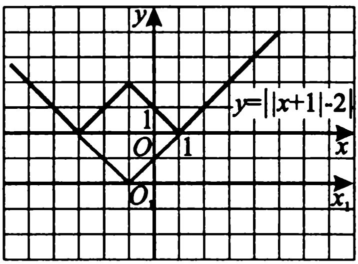

Рис. 34

361. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = 4$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 0$, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид: $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек, через которые проходит парабола, получим систему: $\begin{cases} c = 4, \\ 9a + c = -14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, \\ 9a = -14 - c; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = -18, \\ a = -2. \end{cases}$

Следовательно, $y = -2x^2 + 4$. Найдём теперь абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$.

362. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = -12$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 0$, следовательно, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид: $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек $(0; -12)$ и $(-1; -9)$, через которые проходит парабола, получим систему:
$\begin{cases} c = -12, \\ a + c = -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -12, \\ a = 3; \end{cases}$ следовательно, $y = 3x^2 - 12$.
Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $3x^2 - 12 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: $(2; 0)$, $(-2; 0)$.

363. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 4$, $y_0 = -28$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 4$; $b = -8a$. Итак, уравнение параболы имеет вид:
$y = ax^2 - 8ax + c$. Подставив координаты точек $(0; 4)$ и $(4; -28)$, через которые проходит парабола, получим: $-\dfrac{b}{2a} = 4$; $c = 4$; $16a + 4b + c = -28$;
$a = \dfrac{2 + c}{16} = 2$, следовательно, $y = 2x^2 - 16x + 4$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $2x^2 - 16x + 4 = 0$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$.

Ответ: $(4 + \sqrt{14}; 0)$, $(4 - \sqrt{14}; 0)$.

364. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 6$, $y_0 = 33$, то
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 6$; $b = -12a$. Итак, уравнение параболы имеет вид:
$y = ax^2 - 12ax + c$. Подставив координаты точек $(0; -3)$ и $(6; 3)$, через которые проходит парабола, получим: $c = -3$; $36a - 72a + c = 33$;
$a = \dfrac{c - 33}{36} = -1$, следовательно, $y = -x^2 + 12x - 3$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-x^2 + 12x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{33}$.

Ответ: $(6 + \sqrt{33}; 0)$, $(6 - \sqrt{33}; 0)$.

365. Ключевые идеи решения. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. 2. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

1. Парабола, указанная в условии, является графиком функции $y = a(x-2)(x+6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = 24$, таким образом, $a = -2$ и уравнение параболы имеет вид: $y = -2x^2 - 8x + 24$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{8}{-4} = -2$ и ординатой $y_0 = y(-2) = 32$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x, является прямая $y = 32$.

Ответ: $y = 32$.

366. Ключевые идеи решения те же, что и в решении предыдущей задачи.

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = -9$, таким образом, $a = 0{,}75$ и уравнение параболы имеет вид: $y = 0{,}75x^2 - 3x - 9$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{3}{1{,}5} = 2$ и ординатой $y_0 = y(2) = -12$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x, является прямая $y = -12$.

Ответ: $y = -12$.

367. Пусть прямая $y = kx + b$ касается кривой $x = y^2$ в точке с координатами $(1;1)$, тогда $k + b = 1$ и уравнение $y = ky^2 + b$ имеет один корень (два равных), то есть $D = 0$.

$ky^2 - y + b = 0$; $D = 1 - 4bk = 0$, $k = \dfrac{1}{4b}$.

Учитывая, что $k + b = 1$, имеем $4b^2 - 4b + 1 = 0$; $(2b-1)^2 = 0$; $b = \dfrac{1}{2}$,

$k = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ — уравнение искомой прямой.

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

368. Пусть прямая $x = ky + b$ касается параболы $x = y^2$ в точке с координатами $x = 1, y = -1$. Это означает, что $-k+b = 1$ и уравнение $y^2 = ky+b$ имеет ровно одно решение, то есть $D = 0$; $D = k^2 + 4b = 0$. Учитывая равенство $-k+b = 1$, получим: $D = k^2+4(1+k) = k^2+4k+4 = (k+2)^2 = 0$. Отсюда $k = -2, b = -1$, то есть $x = -2y - 1$ является искомой прямой.

Запишем уравнение этой прямой: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}(x+1)$.

369. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$OA = \sqrt{(8-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен 5, и она определяется уравнением: $(x-4)^2+(y-3)^2 = 25$.

Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-4)^2+9 = 25$. Решим последнее уравнение: $(x-4)^2 = 16$, $\left[\begin{array}{l} x-4=-4, \\ x-4=4; \end{array}\right.$ $x_1 = 0, x_2 = 8$. Аналогично ординаты точек пересечения окружности с осью Oy удовлетворяют уравнению $16+(y-3)^2 = 25$ (в уравнении окружности полагаем $x = 0$). Имеем: $(y-3)^2 = 9$, $\left[\begin{array}{l} y-3=-3, \\ y-3=3; \end{array}\right.$ $y_1 = 0, y_2 = 6$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(0;0)$ и $(8;0)$, а ось Oy в точках $(0;0)$ и $(0;6)$.

Ответ: $(0;0), (8;0), (0;6)$.

370. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$OA = \sqrt{(3-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен $\sqrt{5}$, и она определяется уравнением: $(x-2)^2+(y-2)^2 = 5$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-2)^2+4 = 5$. Решим последнее уравнение: $(x-2)^2 = 1$, $\left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=1; \end{array}\right.$ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(1;0)$ и $(3;0)$. Поскольку уравнение данной окружности симметрично относительно x и y, то точками пересечения этой окружности с осью Oy являются точки $(0;1)$ и $(0;3)$.

Ответ: $(1;0), (3;0), (0;1), (0;3)$.

371. $y = \frac{x^2-25}{10-2x}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $10-2x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty;5) \cup (5;+\infty)$. При $x \neq 5$ имеем: $\frac{x^2-25}{10-2x} = \frac{(x-5)(x+5)}{2(5-x)} = -0{,}5\cdot(x+5)$.

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что $y \neq -0{,}5(5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

372. $y = \dfrac{25 - x^2}{2x - 10}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 10 \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При $x \neq 5$ имеем: $\dfrac{25 - x^2}{2x - 10} = \dfrac{(5 - x)(5 + x)}{2(x - 5)} = -0{,}5 \cdot (x + 5)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что $y \neq -0{,}5 \cdot (5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

373. Ключевые идеи решения. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. 2. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-4) = ax^2 - 2ax - 8a$, где $a \neq 0$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_в = \dfrac{2a}{2a} = 1$ и ординатой $y_в = y(1) = -9a$. Значит, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -9a$. По условию, парабола касается прямой $y = -18$, следовательно, $-9a = -18$, $a = 2$, и уравнение параболы имеет вид: $y = 2x^2 - 4x - 16$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = -16$.

Ответ: $(0; -16)$.

374. Ключевые идеи решения те же, что и в решении соответствующего задания предыдущего варианта.

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$, является графиком функции $y = a(x+5)(x-3) = ax^2 + 2ax - 15a$, где $a \neq 0$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \frac{-2a}{2a} = -1$ и ординатой $y_0 = y(-1) = -16a$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -16a$. По условию, парабола касается прямой $y = 32$, значит, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид: $y = -2x^2 - 4x + 30$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = 30$.

Ответ: $(0; 30)$.

375. Графиком функции $y = 6 - 3x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	0	2
y	6	0

Построим прямую (см. рис. 35).

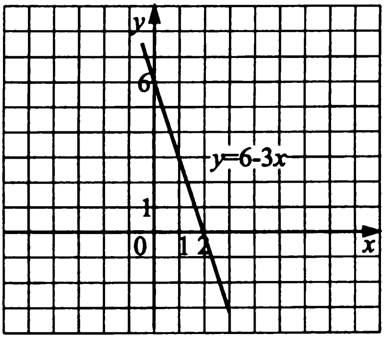

Рис. 35

Решим неравенство: $1{,}5 \leqslant y \leqslant 9 \Leftrightarrow 1{,}5 \leqslant 6 - 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4{,}5 \leqslant -3x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1{,}5 \geqslant x \geqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

376. Графиком функции $y = \frac{3x-2}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	2	4
y	2	5

Построим прямую (см. рис. 36).

Решим неравенство: $-1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{3x-2}{2} \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

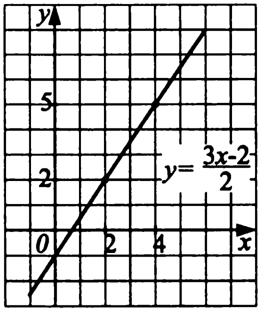

Рис. 36

377. Для построения графика функции $y = \left|\frac{2-x}{4}\right|$ рассмотрим отдельно случаи, когда $2 - x \geqslant 0$ и $2 - x < 0$.

1) Если $2 - x \geqslant 0$ ($x \leqslant 2$), то $y = \frac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами (0; 0,5) и (2; 0).

2) Если $2 - x < 0$ ($x > 2$), то $y = -\frac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами (2; 0) и (4; 0,5). График заданной функции изображён на рисунке 37.

Решим неравенство $0 \leqslant y < 1$. Получаем: $0 \leqslant \left|\frac{2-x}{4}\right| < 1$; $0 \leqslant |2-x| < 4$.

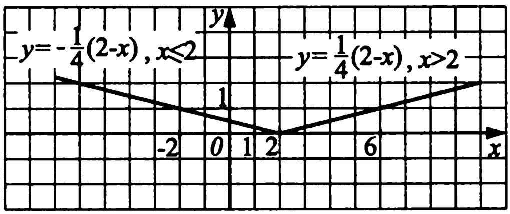

Рис. 37

Так как неравенство $|2 - x| \geqslant 0$ выполняется для всех x, то остаётся решить неравенство $|2 - x| < 4$; $-4 < 2 - x < 4$; $-6 < -x < 2$; $-2 < x < 6$.

Ответ: $-2 < x < 6$.

378. Построим график функции $y = \left|\frac{3+x}{6}\right|$. Отдельно рассмотрим случаи:

1) $3 + x \geqslant 0$, тогда $y = \frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0{,}5)$, $(9; 2)$ (рис. 38).

2) $3 + x < 0$, тогда $y = -\frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(-3; 0)$, $(-6; 0{,}5)$.

График заданной функции изображён на рисунке 38.

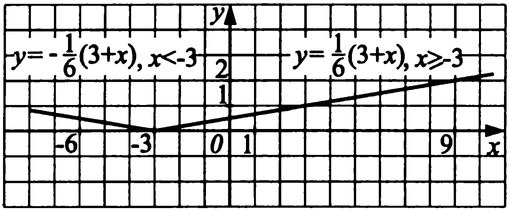

Рис. 38

Решим неравенство $1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \left|\frac{3+x}{6}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -6 \leqslant |3 + x| \leqslant 12$.

Так как неравенство $|3 + x| \geqslant -6$ выполняется для всех x, то остаётся неравенство $|3 + x| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant 3 + x \leqslant 12 \Leftrightarrow -15 \leqslant x \leqslant 9$.

Ответ: $-15 \leqslant x \leqslant 9$.

379. Графиком функции $y = 3 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	1	-1

.

Построим прямую (см. рис. 39).

Так как функция $y = 3 - 2x$ — непрерывная и убывающая, то $y(5) < y < y(-2) \Leftrightarrow -7 < y < 7$.

Ответ: $-7 < y < 7$.

380. Графиком функции $y = 5 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	3
y	3	-1

.

Построим прямую (см. рис. 40).

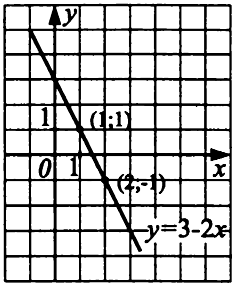

Рис. 39

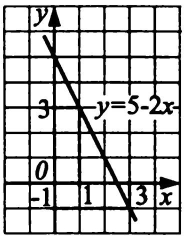

Рис. 40

Так как $y(x)$ — непрерывная и убывающая функция, то из $-1 < x < 3$ следует: $y(3) < y(x) < y(-1)$. Значит, $-1 < y < 7$.

Ответ: $-1 < y < 7$.

381. Графиком функции $y = \frac{5-x}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	5	0
y	0	1,25

.

Построим прямую (см. рис. 41).

Так как $0 \leqslant y \leqslant 0{,}25 = \frac{1}{4}$, то $0 \leqslant \frac{5-x}{4} \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant 5 - x \leqslant 1$, $-5 \leqslant -x \leqslant -4$; $4 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $4 \leqslant x \leqslant 5$.

382. Графиком функции $y = \frac{3x-2}{2}$ является прямая, изображённая на рис. 42. По рисунку определяем, что неравенство $-1 < y < 2$ выполняется при $0 < x < 2$.

Ответ: $0 < x < 2$.

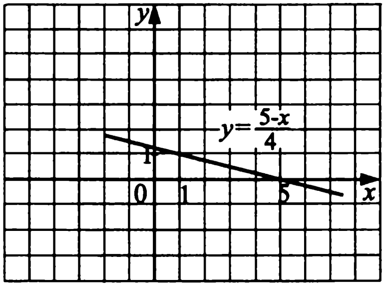

Рис. 41

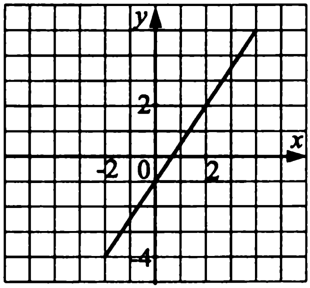

Рис. 42

383. Графиком функции $y = \dfrac{x+2}{2}$ является прямая (см. рис. 43). По графику определяем, что неравенство $1{,}5 \leqslant y \leqslant 3$ выполняется при $1 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 4$.

384. Графиком функции $y = \dfrac{x+5}{2}$ является прямая (см. рис. 44).

Решим неравенство $-4<y<-1{,}5$. Получаем: $-4 < \dfrac{x+5}{2} < -1{,}5$; $-8 < x+5 < -3$; $-13 < x < -8$.

Ответ: $-13 < x < 8$.

385. Графиком функции $y = 2x+3-x^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(1; 4)$ (см. рис. 45). По графику определяем, что $3 \leqslant y \leqslant 4$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

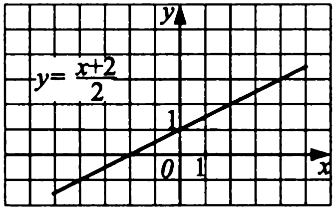

Рис. 43

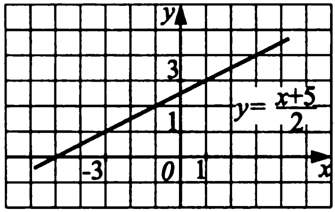

Рис. 44

386. Чтобы построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, найдём координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$; $y_0 = (-2)^2 + 4\cdot(-2) - 5 = -9$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх и не подвержены сжатию или растяжению (рис. 46). По графику функции определяем, что $-9 \leqslant y \leqslant -5$ при $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

387. 1. Функцию $y = \frac{5-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Графиком функции $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(1; 1)$ и $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ (см. рис. 47).

2. Найдём аналитически, при каких значениях y выполняется неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$.

10 Зак № 263

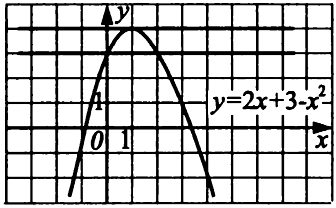

Рис. 45

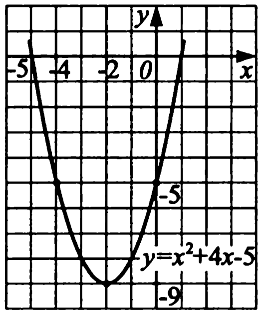

Рис. 46

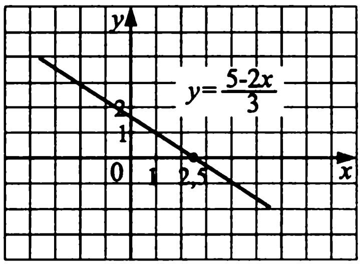

Рис. 47

В силу того, что заданная функция непрерывная и убывающая на всей числовой прямой, неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$ выполняется при

$y\left(3\frac{2}{3}\right) < y < y(2)$, то есть $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

388. Функцию $y = 3x^{-1}$ запишем в виде $y = \frac{3}{x}$. $D(y)$: $x \neq 0$. Графиком функции $y = \frac{3}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.

x	$-0{,}5$	1	1,5	2	3	6
y	-6	3	2	1,5	1	0,5

График функции изображён на рисунке 48.

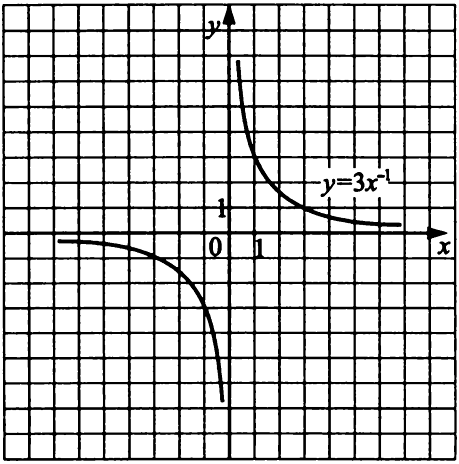

Рис. 48

2. Найдём, при каких значениях x выполняется неравенство $y \geqslant 3{,}3$, решив неравенство $\frac{3}{x} \geqslant 3{,}3$, $\frac{3{,}3x - 3}{x} \leqslant 0$, $\frac{x - \frac{10}{11}}{x} \leqslant 0$, $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$ (см. рис. 49).

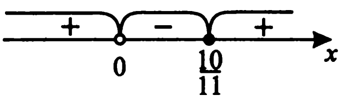

Рис. 49

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$.

389. Графиком функции $y = 7x - 5$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	2	9

.

Построим прямую (см. рис. 50).

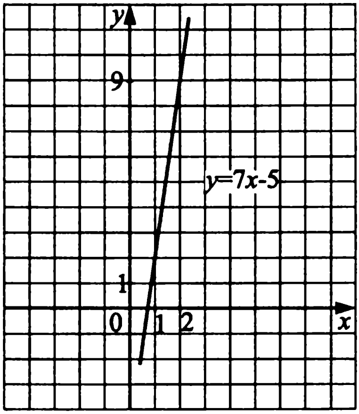

Рис. 50

Так как по условию $y \geqslant -40$, то $7x - 5 \geqslant -40$; $x \geqslant -5$.

Ответ: $x \geqslant -5$.

390. Графиком функции $y = 6x - 7$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	-1	5

.

Построим прямую (см. рис. 51).

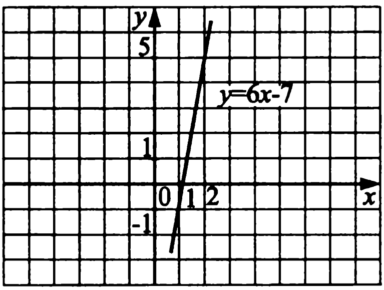

Рис. 51

Так как по условию $y \geqslant -49$, то $6x - 7 \geqslant -49$, $x \geqslant -7$.

Ответ: $x \geqslant -7$.

391. Графиком функции $y = \frac{5+x}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	−1
y	3	2

Построим прямую (см. рис. 52).

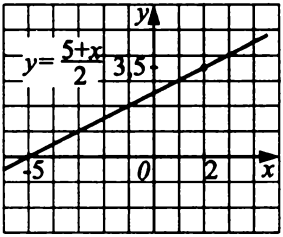

Рис. 52

По графику определяем, что неравенство $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ выполняется при $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

392. Функцию $y = \frac{6-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Графиком функции $y = 2 - \frac{2}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(3; 0)$ (см. рис. 53). По графику видно, что $-2 \leqslant y \leqslant 4$ при $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

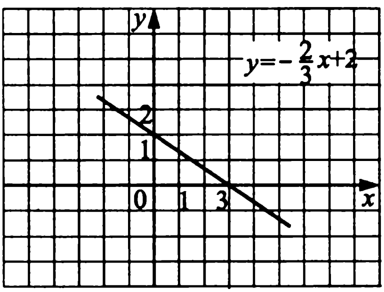

Рис. 53

Ответ: $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

393. Графиком функции $y = 3{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 3{,}5)$ и $(7; 0)$ (см. рис. 54). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 7$.

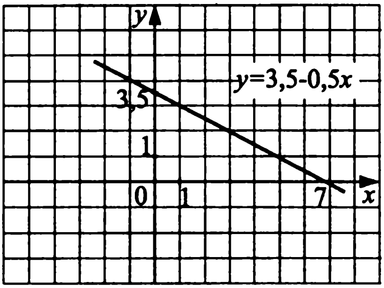

Рис. 54

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 7$.

394. Графиком функции $y = 2{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2{,}5)$ и $(5; 0)$ (см. рис. 55). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 2{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$ (см. рис. 55).

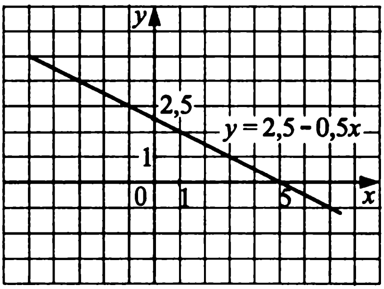

Рис. 55

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 5$.

395. $y = -\frac{x+3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; $-5 \leqslant x \leqslant 4$ (см. рис. 56). Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ — непрерывная и убывающая. $y(-5) = -\frac{1}{4}(-5) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $y(4) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$. Если $-5 \leqslant x \leqslant 4$, то $-\frac{7}{4} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

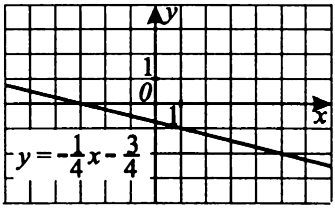

Рис. 56

Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ принимает на промежутке $\left[-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right]$ два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

Ответ: 2.

396. Графиком функции $y = \frac{7-x}{3}$; $y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2\frac{1}{3})$ и $(7; 0)$ (см. рис. 57). По графику видно, что на промежутке $-4 \leqslant x \leqslant 6$ функция принимает три целых значения: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

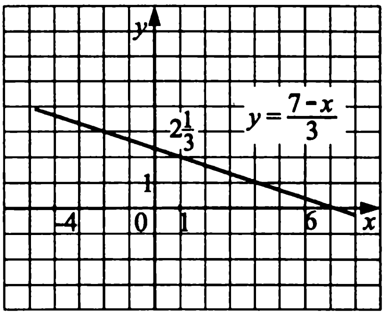

Рис. 57

Ответ: 3.

397. Функция $y = \frac{\sqrt{2x - x^3}}{x^4 - 3x^2 + 1}$ определена при x, удовлетворяющих условию: $\begin{cases} 2x - x^3 \geqslant 0, \\ x^4 - 3x^2 + 1 \neq 0. \end{cases}$

1) $x(x^2 - 2) \leqslant 0$; $x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \leqslant 0$; $x \leqslant -\sqrt{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ (см. рис. 58).

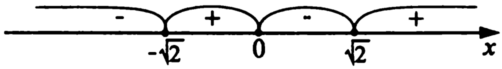

Рис. 58

2) $x^4 - 3x^2 + 1 \neq 0$. Обозначим $x^2 = t$; $t \geqslant 0$, тогда $t^2 - 3t + 1 \neq 0$; $t_1 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $t_2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $x^2 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, $x^2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$; $x_1 \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Имеем (см. рис. 59):

$$\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right].$$

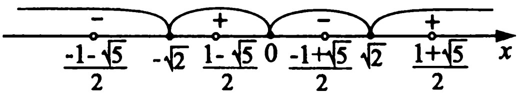

Рис. 59

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

398. Функция $y = \frac{\sqrt{x^3 - 7x}}{x^4 - 5x^2 + 4}$ определена при x, удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} x^3 - 7x \geqslant 0, \\ x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \geqslant 0, \\ (x^2-4)(x^2-1) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \geqslant 0, \\ (x-2)(x+2)(x-1)(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

$[-\sqrt{7}; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$ (см. рис. 60).

Ответ: $[-\sqrt{7}; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

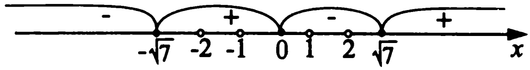

Рис. 60

399. $y = \sqrt{x^2 - 9x - 22} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Найдём область определения функции, решив систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 9x - 22 \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-11)(x+2) \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 11, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 11$.

Ответ: $[11; +\infty)$.

400. Функция $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{x}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

401. Функция $y = \sqrt{7x - x^2 - 10} + \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 20x + 25}}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 10 \geqslant 0, \\ 4x^2 - 20x + 25 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \leqslant 0, \\ (2x-5)^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 5, \\ x \neq 2{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $[2; 2{,}5) \cup (2{,}5; 5]$.

402. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Обозначим $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$, тогда $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $\left(-\frac{1}{5}; 1\frac{3}{5}\right)$.

При $t \geqslant -\frac{1}{5}$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = y(0) = 2$.

Ответ: 2.

403. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = t^2 + 2t + 1$; $y(t) = (t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y(t) = (t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$.

При $t \geqslant -1$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = y(0) = 1$.

Ответ: 1.

404. Функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ определена при $x \leqslant 0$.

Функция $y = 3x + 5$ — монотонно возрастающая, функция $-3\sqrt[4]{-x}$ также монотонно возрастающая, поэтому функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ — монотонно возрастающая. Наибольшее значение функция примет при $x = 0$, то есть $y = 5$ — наибольшее значение.

Ответ: 5.

405. Функция $y = x - 2\sqrt{-x} - 1$ определена при $x \leqslant 0$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = -t^2 - 2t - 1$; $y(t) = -(t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y = -(t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$. При $t \geqslant -1$ функция убывает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наибольшее значение функции $y_{\text{наиб}} = y(0) = -1$.

Ответ: -1.

406. Областью определения данной функции являются все x, при которых $6 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем:

$$\frac{x^2 - 9}{6 - 2x} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(3-x)} = -0{,}5 \cdot (x+3).$$

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x+3)$ за исключением значения $y(3) = -0{,}5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

407. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 6 \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем:

$\dfrac{9 - x^2}{2x - 6} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{2(x-3)} = -0{,}5 \cdot (x+3)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 3)$, за исключением значения $y(3) = -0{,}5 \cdot (3 + 3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

408. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции $x_0 = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

$y_0 = (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 10 = 2{,}25 - 4{,}5 - 10 = -12{,}25$.

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	-10	-6	0

.

Построим график (см. рис. 61).

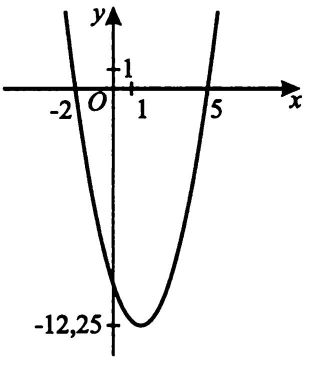

Рис. 61

Ответ: $-12{,}25$.

409. $y = \frac{4x - 2x^2}{3} + 2$; $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

График функции $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ — парабола, ветви которой направлены вниз.

Найдём координаты вершины:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot (-2)} = 1$, $y_0 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}$.

$\left(1; 2\frac{2}{3}\right)$ — координаты вершины параболы.

Найдём нули функции, решив уравнение: $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 3$. $(-1; 0)$ и $(3; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox.

Дополнительные точки:

x	0	2	4	-2
y	2	2	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$

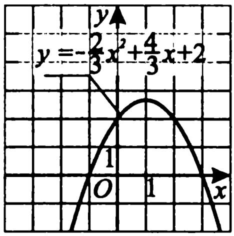

Рис. 62

Наибольшее значение функции $y = \frac{4x - 2x^2}{3} + 2$ достигается в вершине параболы и равно $2\frac{2}{3}$ (см. рис. 62).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

410. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{x \cdot \frac{4}{9}} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$y_0 = \frac{4}{9}(0{,}75)^2 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}75 + 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Так как $D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{4-16}{9} < 0$, то график лежит всюду выше оси Ox. Для построения графика, найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	1	$2\frac{1}{9}$	$4\frac{1}{9}$

Построим график (см. рис. 63).

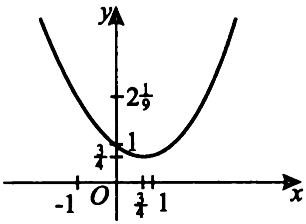

Рис. 63

Ответ: $\frac{3}{4}$.

412. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём нули этой функции, то есть точки, где $-0{,}5x^2 - x + 4 = 0$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. То есть у нас есть ответ на второй вопрос задачи: $-4 \leqslant x \leqslant 2$. Для построения графика найдём наибольшее значение этой функции: $x_0 = \frac{+1}{-1} = -1$, $y_0 = -0{,}5 + 1 + 4 = 4{,}5$.

Для построения графика, найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	1	2	4
y	4	2,5	0	-8

Построим график (см. рис. 64).

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

414. Пусть первоначально у кролика было x кг мёда. Винни-Пух за первые 3 часа съел $0{,}4x$ кг, а Пятачок и кролик съели 300 г мёда. У кролика осталось $x - 0{,}4x - 0{,}3 = 0{,}6x - 0{,}3$ (кг).

За следующие 3 часа Винни-Пух съел $\frac{2}{3} \cdot (0{,}6x - 0{,}3) = 0{,}4x - 0{,}2$ (кг), а Пятачок и кролик —100 г. У кролика осталось
$0{,}6x - 0{,}3 - 0{,}4x + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}2x - 0{,}2$ (кг).

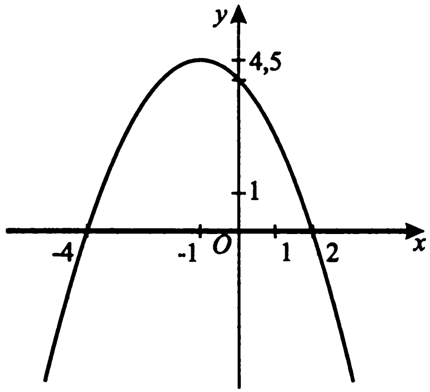

Рис. 64

Зная, что осталось 1,6 кг, составим уравнение: $0{,}2x - 0{,}2 = 1{,}6$; $x - 1 = 8$; $x = 9$ (кг). Первоначально у кролика было 9 кг мёда.

Ответ: 9.

418. Пусть скорость движения первой черепахи x м/ч, а второй — y м/ч. Если бы первая ползла на 40 м/ч быстрее, то через t_1 часов они бы встретились на полпути.

Получаем: $(x + 40) \cdot t_1 = y \cdot t_1$ или $x + 40 = y$.

Если бы вторая ползла на 50 м/ч быстрее, она бы проползла до встречи за t_2 часов в два раза большее расстояние, чем первая.

Получаем: $2xt_2 = (y + 50) \cdot t_2$ или $2x = y + 50$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 40 = y, \\ 2x = y + 50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 40, \\ 2x = x + 40 + 50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 40, \\ x = 90; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90, \\ y = 130. \end{cases}$$

90 м/ч — скорость первой черепахи, 130 м/ч — скорость второй черепахи.

Ответ: 90; 130.

419. Пусть производительность третьего токаря — x деталей в час, а догоняет третий токарь второго по числу деталей через y часов. Тогда второй работал $(1 + y)$ часов и сделал $5 \cdot (1 + y)$ деталей, а третий сделал xy деталей. Первое уравнение: $5 \cdot (1 + y) = xy$.

Третий токарь, чтобы догнать первого, работал $(2 + y)$ часов и сделал $x(2+y)$ деталей, а первый работал $(4+y)$ часов и сделал $6\cdot(4+y)$ деталей.

Второе уравнение:
$6 \cdot (4+y) = x \cdot (2+y)$.
Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 5\cdot(1+y) = xy, \\ 6\cdot(4+y) = x\cdot(2+y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+5y = xy, \\ 24+6y-2x = xy; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y) = xy, \\ 5+5y = 24+6y-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y) = xy, \\ y = 2x-19. \end{cases}$$
Подставим $y = 2x - 19$ в первое уравнение системы:
$5\cdot(1+2x-19) = x(2x-19)$; $2x^2 - 29x + 90 = 0$;
$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841-720}}{4} = \frac{29 \pm 11}{4};\ x_1 = 10,\ x_2 = 4{,}5.$$
Учитывая, что производительность третьего токаря больше, чем первого и второго, производительность третьего токаря равна 10 деталей в час.

Ответ: 10.

420. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а t ч — время после выезда первого велосипедиста до встречи второго велосипедиста с мотоциклистом. Расстояние, которое проехал второй велосипедист до встречи с мотоциклистом, равно $20(t-2)$ км, а мотоциклист проехал $x(t-4)$ км. К моменту встречи мотоциклиста с первым велосипедистом мотоциклист проехал $x(t-1)$ км, а первый велосипедист — $30(t+3)$ км. По условию $20(t-2) = x(t-4)$ и $x(t-1) = 30(t+3)$.
Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} 20(t-2) = x(t-4), \\ x(t-1) = 30(t+3); \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{20(t-2)}{t-4}, \\ x = \dfrac{30(t+3)}{t-1}; \end{cases}$$
$$\frac{20(t-2)}{t-4} = \frac{30(t+3)}{t-1},\quad 2(t-2)(t-1) = 3(t+3)(t-4),$$
$$2(t^2-3t+2) = 3(t^2-t-12),\quad 2t^2-6t+4 = 3t^2-3t-36,$$
$$t^2+3t-40 = 0,\ t = -8 \text{ или } t = 5.$$
Время не может быть отрицательно, поэтому подходит только $t = 5$. Отсюда $x = \dfrac{20\cdot(5-2)}{5-4} = 20\cdot 3 = 60$; скорость мотоциклиста равна 60 км/ч.

Ответ: 60.

423. Пусть v — первоначальный ежесуточный объём переработки, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а $\widetilde{v}, \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2$ — те же величины после произошедших изменений. Тогда первоначально прибыль завода составляла $s = v(c_2 - c_1)$ у.е./сут., а прибыль завода после произошедших изменений равна $\widetilde{s} = \widetilde{v} \cdot (\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1)$ у.е./сут.

По условию, $\widetilde{v} = 1{,}3v$; $\widetilde{c}_2 = 1{,}25c_2$; $\widetilde{c}_1 = c_1 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{4}{3}c_1$; $\widetilde{c}_1 = 0{,}8\widetilde{c}_2$. Отсюда имеем: $\widetilde{c}_1 = 0{,}8\widetilde{c}_2 = 0{,}8(1{,}25c_2) = c_2 \Rightarrow \widetilde{s} = 1{,}3v(1{,}25c_2 - c_2) = \frac{1{,}3v \cdot c_2}{4}$. Далее, $c_1 = \frac{3}{4}\widetilde{c}_1 = \frac{3}{4}c_2 \Rightarrow s = v\left(c_2 - \frac{3}{4}c_2\right) = \frac{v \cdot c_2}{4}$. Следовательно, $\frac{\widetilde{s}}{s} = \frac{(1{,}3v \cdot c_2)/4}{(v \cdot c_2)/4} = 1{,}3$, то есть прибыль завода увеличилась на 30%.

Ответ: 30.

424. Примем весь объём работ за 1. Пусть v_1, v_2, v_3 и v_4 — объём работы, выполняемой за час первой, второй, третьей и четвёртой бригадой соответственно. Тогда из первого условия задачи получаем: $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{1}{8}$, из второго — $v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{20}$, из третьего — $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{1}{5}$. Умножим обе части третьего уравнения на 2 и вычтем из него первое и второе уравнения. В результате получим $v_1 + v_4 = \frac{1}{8}$, следовательно, первая и четвёртая бригады вместе справятся с работой за 8 часов.

Ответ: 8.

427. Примем весь объём работ за 1. Пусть производительность комбайнов: I — a, II — b, III — c, IV — d.

Необходимо найти, за какое время будет выполнена работа, если будут работать все четыре комбайна, то есть $\frac{1}{a+b+c+d}$.

По условию: $a + b + c = \frac{1}{1\frac{1}{3}}$; $a + b + d = \frac{1}{2}$; $c + d = \frac{1}{1\frac{1}{3}}$.

Получаем: $2a + 2b + 2c + 2d = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; $a + b + c + d = 1$; $\frac{1}{a+b+c+d} = 1$.

Ответ: 1.

428. Пусть производительность первого студента — x, производительность второго студента — y, производительность первого школьника — z, производительность второго школьника — t.

Необходимо найти $\frac{10}{x+y+z+t}$.

По условию: $\begin{cases} x+z+t=\dfrac{10}{7}, \\ y+z+t=\dfrac{10}{10}, \\ x+y=\dfrac{10}{12}. \end{cases}$

Тогда $2(x+y)+2(z+t)=\dfrac{10}{7}+\dfrac{10}{10}+\dfrac{10}{12}$, $x+y+z+t=\dfrac{1370}{840}$;

$\dfrac{10}{x+y+z+t}=\dfrac{840}{137}$.

Тогда все вместе они решат 10 задач за $\dfrac{840}{137}$ минут.

Ответ: $\dfrac{840}{137}$.

431. Пусть расстояние AB равно x км, тогда на этот путь затрачено $\dfrac{x}{80}$ часов, а на обратный — $\dfrac{30}{40}+\dfrac{x-30}{90}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{x-30}{90}$ часа. Зная, что на обратный путь водитель затратил на $\dfrac{5}{18}$ часа меньше, составим уравнение:

$\dfrac{x}{80}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{x-30}{90}=\dfrac{5}{18}$; $\dfrac{x}{80}-\dfrac{x-30}{90}=\dfrac{5}{18}+\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{x}{80}-\dfrac{x-30}{90}=\dfrac{37}{36}$;

$\dfrac{9x-8x+240}{720}=\dfrac{37}{36}$; $x+240=37\cdot 20$; $x=500$.

Расстояние между пунктами — 500 км.

Ответ: 500.

432. Обозначим через D место встречи автомобилей. Пусть расстояние $AD=x$ км, а $BD=y$ км (см. рис. 65), тогда $v_I=\dfrac{y}{50}\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$, а $v_{II}=\dfrac{x}{8}\,\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Первый автомобиль прошёл путь AD за $\dfrac{50x}{y}$ часов, второй автомобиль прошёл путь BD за $\dfrac{8y}{x}$ часов. Зная, что до встречи они шли одно и то же время, составим уравнение: $\dfrac{50x}{y}=\dfrac{8y}{x}$.

Обозначим $\frac{x}{y} = u$; $50u = \frac{8}{u}$; $50u^2 = 8$; $u^2 = \frac{8}{50}$, $u > 0$; $u = \frac{2}{5}$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ или $\frac{y}{x} = 2{,}5$.

Рис. 65

Первый автомобиль прошёл до встречи в 2,5 раза меньший путь, значит, он потратил на него в 2,5 раза меньше времени, то есть $50 : 2{,}5 = 20$ часов.

Ответ: 20.

434. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда, согласно условию, следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 8 - 2 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 4 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 6 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 8 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 10 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 12 = x + 6$; $x + 10 + 8 - 12 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 14 = x$; $x + 8 - 16 = x - 8$. Так как, по условию, на последней остановке было 25 человек, то $x - 8 = 25$; $x = 33$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 12 = 33 + 12 = 45$ (чел.).

Ответ: 45.

435. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда, согласно условию, следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 10 - 6 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 8 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 10 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 12 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 14 = x$; $x + 10 - 16 = x - 6$; $x - 6 + 10 - 18 = x - 14$; $x - 14 + 10 - 20 = x - 24$. Так как, по условию, на последней остановке было 10 человек, то $x - 24 = 10$; $x = 34$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 6 = 34 + 6 = 40$ (чел.).

Ответ: 40.

436. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 1:

1) 10 раз, обозначая десятки часов, 2 раза, обозначая единицы часов, всего в течение 12 часов;

2) 10 раз, обозначая десятки минут, 5 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 12 часов:

15 мин $\cdot$ 12 = 180 мин = 3 часа.

Итого: 12ч + 3ч = 15 ч.

Ответ: 15.

437. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 3:

1) 3 раза, обозначая единицы часов в течение 3-х часов;

2) 9 раз, обозначая десятки минут;

3) 6 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 21 час:

15 мин $\cdot$ 21 = 315 мин = 5,25 часа.

Итого: 3ч + 5,25 ч = 8,25 ч.

Ответ: 8,25.

441. Пусть x г — масса серебра в сплаве, тогда $(x+80)$ г — первоначальная масса сплава, $\frac{80}{x+80}\cdot 100\%$ — процентное содержание золота в первоначальном сплаве, $(x+180)$ г — масса сплава после добавления 100 г золота, тогда $\frac{180}{x+180}\cdot 100\%$ — процентное содержание золота в новом сплаве. По условию, содержание золота в сплаве по сравнению с первоначальным повысилось на 20%. Составим и решим уравнение:

$\frac{180}{x+180}\cdot 100 - \frac{80}{x+80}\cdot 100 = 20$, $\frac{900}{x+180} - \frac{400}{x+80} = 1$,

$900x + 72000 - 400x - 72000 = x^2 + 260x + 14400$, $x^2 - 240x + 14400 = 0$, $(x-120)^2 = 0$, $x = 120$. 120 г серебра было в сплаве.

Ответ: 120.

443. Пусть x часов до начала матча

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
пешком	5	$x+1$	$5(x+1)$
на велосипеде	10	$x-\frac{1}{2}$	$10\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Зная, что путь от дома болельщика до стадиона один и тот же, составим и решим уравнение:

$5(x+1)=10\left(x-\frac{1}{2}\right)$; $x+1=2x-1$; $x=2$.

2 часа до начала матча.

Ответ: 2.

444. Пусть x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста.

1. Велосипедист отправился в путь на 1 час раньше пешехода, и они встретятся через 2 часа после выезда велосипедиста. Отсюда следует, что пешеход прошёл x км, а велосипедист проехал $2y$ км, значит, $x+2y=28$.
2. Пешеход выйдет на 1 час раньше велосипедиста, и через 2 часа после выхода пешехода расстояние между ними сократится в 3,5 раза. Отсюда следует, что пешеход прошёл $2x$ км, а велосипедист проехал y км, значит, $2x+y=28-\frac{28}{3{,}5}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y=28, & \mid -2 \\ 2x+y=20. \end{cases}$$

Сложим $-2x-4y=-56$ и $2x+y=20$. Получим: $-3y=-36$; $y=12$.
Подставим $y=12$ во второе уравнение системы и найдём x:
$2x+12=20$; $2x=8$; $x=4$.
4 км/ч — скорость пешехода, 12 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 12; 4.

445. Пусть x г — масса первого раствора, y г — масса второго раствора, тогда $0{,}3x$ г — масса кислоты в первом растворе, $0{,}5y$ г — масса кислоты во втором растворе, $(0{,}3x+0{,}5y)$ г — масса кислоты в смеси, что по условию задачи составляет 45% массы раствора. Составим уравнение:
$0{,}3x+0{,}5y=0{,}45(x+y)$; $0{,}5y-0{,}45y=0{,}45x-0{,}3x$; $0{,}05y=0{,}15x$; $y=3x$; $x:y=1:3$.

Ответ: 1 : 3.

446. Пусть x г — масса первого сплава, y г — масса второго сплава, тогда $0{,}4x$ г — масса меди в первом сплаве, $0{,}6y$ г — масса меди во втором сплаве, $(0{,}4x+0{,}6y)$ г — масса меди после того, как соединили два сплава, что по условию задачи составляет 45% массы вновь полученного сплава:
$0{,}4x+0{,}6y=0{,}45\cdot(x+y)$; $0{,}6y-0{,}45y=0{,}45x-0{,}4x$; $0{,}15y=0{,}05x$; $3y=x$; $x:y=3:1$.

Ответ: 3 : 1.

447. Пусть первоначальная скорость катера — x км/ч. Тогда за 3 часа катер прошёл $3x$ км. Оставшееся расстояние $(87{,}5 - 3x)$ км он прошёл за

$$\frac{87{,}5-3x}{x+2}$$

часа. Так как 87,5 км катер должен был проплыть за $\frac{87{,}5}{x}$ часа, то получаем уравнение: $3+\frac{1}{3}+\frac{87{,}5-3x}{x+2}=\frac{87{,}5}{x}$; $x>0$; $\frac{87{,}5-3x}{x+2}=\frac{87{,}5\cdot 3-10x}{3x}$; $(87{,}5-3x)\cdot 3x=(87{,}5\cdot 3-10x)(x+2)$; $87{,}5\cdot 3x-9x^2=$ $=87{,}5\cdot 3x-10x^2+2\cdot 87{,}5\cdot 3-20x$; $x^2+20x-525=0$; $x_1=15$; $x_2=-35$. Так как $x>0$, то первоначальная скорость катера 15 км/ч.

Ответ: 15.

448. Пусть t минут — время до встречи пешеходов; v_A, v_B — скорости пешеходов, вышедших из пунктов A и B соответственно (см. рис. 66), тогда

$$\begin{cases} v_A\cdot t=12v_B, \\ v_B\cdot t=27v_A; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B}=\dfrac{12}{t}, \\ \dfrac{v_A}{v_B}=\dfrac{t}{27}; \end{cases}$$

$t^2=27\cdot 12$; $t>0$; $t=\sqrt{27\cdot 12}=\sqrt{3^4\cdot 4}=2\cdot 9=18$.

Через 18 минут после выхода пешеходы встретились.

1) $18+12=30$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта B.

2) $18+27=45$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта A.

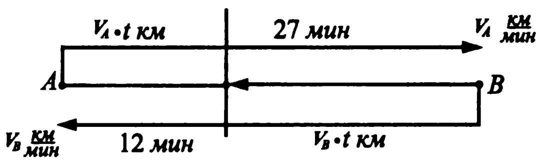

Рис. 66

Ответ: 30, 45.

449. Пусть x г меди и y г цинка находятся в прямоугольном куске сплава, тогда $(x+y)$ г — масса сплава. После увеличения количества меди на 40% масса меди в новом сплаве составила $1{,}4x$ г, а после уменьшения количества цинка в новом сплаве масса цинка — $0{,}6y$ г; $(1{,}4x+0{,}6y)$ г — масса нового сплава.

По условию масса куска сплава увеличилась на 20%, значит, стала равна $1{,}2(x+y)$ г. Составим уравнение:
$1{,}2(x+y) = 1{,}4x + 0{,}6y$; $1{,}2y - 0{,}6y = 1{,}4x - 1{,}2x$; $0{,}6y = 0{,}2x$; $3y = x$.

Отсюда следует, что $\frac{x}{y} = 3:1$, значит, меди было 75%, а цинка — 25% в первоначальном куске сплава.

Ответ: 75; 25.

450. Пусть n абонементов продали в прошлом сезоне, $8000n$ рублей составила выручка. В настоящем сезоне продали $0{,}75n$ абонементов, стоимость одного абонемента увеличили на x рублей, значит, $(8000+x)\cdot 0{,}75n$ рублей — выручка в настоящем сезоне. По условию выручка уменьшилась на 2, 5% по сравнению с прошлым сезоном, значит, стала $8000n\cdot 0{,}975$ рублей. Составим и решим уравнение:
$(8000+x)\cdot 0{,}75n = 8000n\cdot 0{,}975$, $0{,}75x = 8000\cdot 0{,}225$, $x = 2400$.
На 2400 рублей увеличили стоимость абонемента.

Ответ: 2400.

451. Обозначим через $S_{\text{неч}}$ сумму членов, стоящих на нечётных местах среди первых 12-ти членов арифметической прогрессии, а через $S_{\text{чёт}}$ сумму членов, стоящих на чётных местах среди первых 12-ти членов арифметической прогрессии. Тогда условие задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} S_{\text{неч}} + S_{\text{чёт}} = 354, \\ \dfrac{S_{\text{чёт}}}{S_{\text{неч}}} = \dfrac{32}{27}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{\text{чёт}} = \dfrac{32}{27}S_{\text{неч}}, \\ S_{\text{неч}} + \dfrac{32}{27}S_{\text{неч}} = 354 \end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{59}{27}S_{\text{неч}} = 354 \Rightarrow S_{\text{неч}} = \frac{354\cdot 27}{59} = 162$. Тогда $S_{\text{чёт}} = 354 - S_{\text{неч}} = 354 - 162 = 192$.

Если a_k — k-й член арифметической прогрессии, а d — её разность, то $S_{\text{неч}} = \frac{a_1 + a_1 + 2d\cdot 5}{2}\cdot 6 = 6a_1 + 30d$, так как числа, стоящие на нечётных местах арифметической прогрессии $\{a_k\}$, также составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $2d$. Аналогично получим, что
$S_{\text{чёт}} = \frac{a_2 + a_2 + 2d\cdot 5}{2}\cdot 6 = 6a_2 + 30d$.

Поэтому $S_{\text{чёт}} - S_{\text{неч}} = (6a_2 + 30d) - (6a_1 + 30d) = 6(a_2 - a_1) = 6d$.
Так как $S_{\text{чёт}} - S_{\text{неч}} = 30$, то $6d = 30 \Rightarrow d = 5$.

Ответ: 5.

452. Пусть v_A км/ч ($v_A > 0$) и v_B км/ч ($v_B > 0$) — скорости поездов, которые одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно (см. рис. 67).

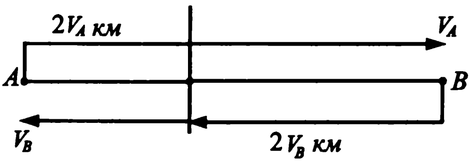

Рис. 67

1) $(v_A + v_B)$ км/ч — скорость сближения, $2(v_A + v_B)$ км — расстояние между пунктами. По условию расстояние составляет 180 км.
$2(v_A + v_B) = 180$.

2) $\dfrac{2v_A}{v_B}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта B.

$\dfrac{2v_B}{v_A}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта A.

По условию второй поезд прибыл в пункт A на 54 мин раньше, чем первый в пункт B.

$\dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{54}{60}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдём отношение $\dfrac{v_B}{v_A}$.

Обозначим $\dfrac{v_B}{v_A} = t, t > 0$.

$2t - \dfrac{2}{t} = \dfrac{9}{10}$; $2t^2 - \dfrac{9}{10}t - 2 = 0$; $20t^2 - 9t - 20 = 0$; $t_1 = \dfrac{5}{4}$; $t_2 = -\dfrac{4}{5}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}$.

Вернёмся к исходной системе:

$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B; \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}8v_B + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B, \end{cases}$

$v_B = 50$, $v_A = 40$. 40 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта A, 50 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта B.

Ответ: 40; 50.

453. v_A км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта A (первый); v_B км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта B (второй).

3 часа 45 минут $= 3\frac{45}{60}$ часа $= 3\frac{3}{4}$ часа $= 3{,}75$ часа — время до встречи пешеходов. Пусть t часов ($t > 0$) — время в пути второго пешехода; $(t + 4)$ — время в пути первого пешехода (см. рис. 68), тогда:

$$\begin{cases} 3{,}75v_A = v_B(t - 3{,}75), \\ 3{,}75v_B = v_A(t + 4 - 3{,}75); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{t - 3{,}75}{3{,}75}, \\ \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{3{,}75}{t + 0{,}25}; \end{cases}$$

$\dfrac{t - 3{,}75}{3{,}75} = \dfrac{3{,}75}{t + 0{,}25}$, $t > 0$. $t^2 + 0{,}25t - 3{,}75t - 0{,}9375 = 14{,}0625$;

$t^2 - 3{,}5t - 15 = 0$; $2t^2 - 7t - 30 = 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -\frac{5}{2}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

6 часов был в пути второй пешеход, 10 часов был в пути первый пешеход.

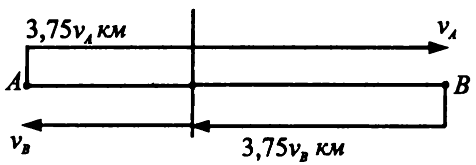

Рис. 68

Ответ: 10; 6.

454. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда после остановки, тогда $(x - 10)$ км/ч — скорость поезда до остановки. Так как 420 км составляет 60% всего пути, то весь путь AB равен $\dfrac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\dfrac{280}{x - 10}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\frac{280}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение: $\frac{280}{x-10} - \frac{280}{x} = 0{,}5$; $x_1 = -70$ и $x_2 = 80$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 80.

455. Пусть первая швея может выполнить всю работу за x дней ($x > 0$), а вторая — за y дней ($y > 0$). Тогда их производительность $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ всей работы в день. Можно составить следующие уравнения, обозначив всю работу за 1:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{10}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{6}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$\frac{4}{y} - \frac{1}{10} = 0$; $\frac{4}{y} = \frac{1}{10}$; $y = 40$.

Подставим это значение в первое уравнение системы:

$\frac{6}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{6}{x} = \frac{1}{4}$; $x = 24$.

Итак, первая швея может сделать всю работу за 24 дня, а вторая — за 40 дней.

Ответ: 24, 40.

456. Примем объём работы за 1.

Пусть за x дней ($x > 0$) первая машинистка сможет перепечатать рукопись, за y дней ($y > 0$) — вторая машинистка, $\frac{1}{x}$ — производительность первой машинистки, а $\frac{1}{y}$ — производительность второй. По условию задачи, работая вместе, они могут перепечатать рукопись за 6 часов; $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Если машинистки будут работать вместе 5 часов, то они напечатают $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть работы, а если вторая машинистка будет работать 3 часа, она напечатает $\frac{3}{y}$ часть работы. По условию задачи работа при этом будет завершена.

$5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}=1.$

Учитывая, что $x>0$, $y>0$, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ \frac{5}{6}+\frac{3}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{y}, \\ \frac{3}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}, \\ y=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=18. \end{cases}$$

За 9 часов первая машинистка может перепечатать рукопись, за 18 часов перепечатает рукопись вторая машинистка.

Ответ: 9; 18.

457. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого мотоциклиста. Второй мотоциклист был в пути на 6 минут меньше, поэтому $\left(t-\frac{1}{10}\right)$ часов — время поездки второго мотоциклиста. Скорость второго мотоциклиста — 1,25 v км/ч. Учитывая, что $t>0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt=30, \\ 1{,}25v\left(t-\frac{1}{10}\right)=30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{30}{t}, \\ 1{,}25\cdot\frac{30}{t}\cdot\left(t-\frac{1}{10}\right)=30. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы имеем:

$1{,}25-\frac{0{,}125}{t}=1$; $\frac{0{,}125}{t}=0{,}25$; $t=\frac{0{,}125}{0{,}25}=\frac{1}{2}\Rightarrow v=60$ км/ч. Таким образом, 60 км/ч — скорость первого мотоциклиста, а скорость второго равна $v\cdot 1{,}25=75$ км/ч.

Ответ: 60; 75.

458. Пусть v км/мин — скорость первого пешехода, а t мин — потраченное им на дорогу время. Тогда для второго пешехода время, потраченное им на дорогу, составляет $(t-20)$ мин, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/мин. Учитывая, что $t>0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt = 40, \\ \frac{6}{5}v(t-20) = 40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{40}{t}, \\ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{t} \cdot (t-20) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right)t = 24 \Rightarrow$$

$t = 120.$

Ответ: 120.

459. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого грузовика соответственно. Тогда время поездки второго грузовика $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ч, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/ч. Имеем систему:

$$\begin{cases} vt = 150, \\ \frac{6}{5}v(t-0{,}5) = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{150}{t}, \\ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{t} \cdot (t-0{,}5) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right)t = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$t = 3.$

Ответ: 3.

460. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки второго автомобиля соответственно. Тогда время поездки первого автомобиля $\left(t - \frac{5}{6}\right)$ ч, а его скорость — $1{,}5v$ км/ч. Имеем систему:

$$\begin{cases} vt = 250, \\ 1{,}5v\left(t - \frac{5}{6}\right) = 250; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{250}{t}, \\ 1{,}5 \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(t - \frac{5}{6}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}5 - 1)t = \frac{5}{6} \cdot 1{,}5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

461. Пусть x км/ч ($x > 12$) — скорость мотоциклиста после остановки, тогда $(x - 12)$ км/ч — скорость мотоциклиста до остановки. После остановки мотоциклисту осталось проехать 36% пути, то есть $0{,}36 \cdot 300 = 108$ км. Следовательно, остаток пути мотоциклист должен был проехать за $\frac{108}{x-12}$ ч, но, потеряв 18 мин (= 0,3 ч), он проехал его за $\frac{108}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{108}{x-12} - \frac{108}{x} = 0{,}3; \quad \frac{36}{x-12} - \frac{36}{x} = 0{,}1; \quad \frac{432}{x^2 - 12x} = 0{,}1;$$

$x^2 - 12x - 4320 = 0$; $x_1 = -60$ и $x_2 = 72$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 12$.

Ответ: 72.

462. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда до остановки, тогда ($x + 10$) км/ч — скорость поезда после остановки. Так как 420 км составляет 60% всего пути, то весь путь AB равен $\frac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\frac{280}{x}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\frac{280}{x+10}$ ч. Таким образом, получаем уравнение: $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+10} = 0{,}5$; $\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1$; $\frac{5600}{x^2+10x} = 1$; $x_1 = -80$ и $x_2 = 70$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 70.

463. 1) Автомобиль двигался на $30 + 25 + 25 = 80$ (мин) $= 1\frac{1}{3}$ часа меньше, чем автобус. Пусть t — время движения автомобиля, тогда автобус двигался $t + 1\frac{1}{3}$ часов.

2) Если скорость автомобиля v км/ч, то скорость автобуса $0{,}6v$ км/ч. Так как автомобиль и автобус проехали одно и то же расстояние, то выполнено уравнение $\left(t + \frac{4}{3}\right) \cdot 0{,}6v = vt$.

Сокращая на v ($v \neq 0$), получаем: $(3t + 4) \cdot 0{,}2 = t$; $3t + 4 = 5t$; $t = 2$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и автобуса:

$v_{\text{автом}} = \frac{200}{2} = 100$ км/ч, $v_{\text{автоб}} = \dfrac{200}{2 + \frac{4}{3}} = 60$ км/ч.

Ответ: 100; 60.

464. 1) Автомобиль двигался на $25 + 26 - 3 = 48$ (мин) $= \frac{4}{5}$ часа меньше, чем велосипедист. Пусть t — время движения автомобиля, тогда велосипедист двигался $t + \frac{4}{5}$ часов.

2) Если скорость велосипедиста v км/ч, то скорость автомобиля $2{,}5v$ км/ч. Так как автомобиль и велосипедист проехали одно и то же расстояние, то выполнено уравнение $\left(t+\frac{4}{5}\right)\cdot v = 2{,}5vt$. Сокращая на v ($v \neq 0$), получаем: $t + \frac{4}{5} = 2{,}5t$; $t = \frac{8}{15}$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и велосипедиста:

$$v_{\text{автом}} = \frac{64}{\frac{8}{15}} = 120\,(\text{км/ч}),\quad v_{\text{вел}} = \frac{64}{\frac{8}{15}+\frac{4}{5}} = 48\,(\text{км/ч}).$$

Ответ: 120; 48.

465. Обозначим через x расстояние между городами A и B, а через v ($v > 0$) — скорость велосипедиста. Тогда скорость мотоциклиста — $3v$. Время, которое затратит велосипедист на преодоление половины пути, будет равно $\frac{x}{2v}$, а время, которое затратит мотоциклист на преодоление того же расстояния, соответственно равно $\frac{x}{2\cdot 3v}$. Имеем первое уравнение системы: $\frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3$. Во втором случае, время велосипедиста, затраченное на преодоление расстояния $\left(\frac{x}{2} - 15\right)$, равно $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v}$, а время мотоциклиста, затраченное на преодоление расстояния $\frac{x}{2} + 15$ км, равно $\frac{x}{2\cdot 3v} + \frac{15}{3v}$.

Составляем второе уравнение системы: $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2$.

Учитывая, что $v > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 18v, \\ 3x - 90 = x + 30 + 12v; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 18v, \\ 2x = 12v + 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ x = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 9v = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 3v = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180, \\ v = 20. \end{cases}$$

Ответ: 180.

466. Обозначим скорость первого поезда через v_1 км/ч, скорость второго — через v_2 км/ч. Первый поезд проходит расстояние между станциями за $\frac{96}{v_1}$ часов, второй — за $\frac{96}{v_2}$ часов. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{v_1} + \frac{2}{3} = \frac{96}{v_2}, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(96 + \frac{2v_1}{3}\right) \cdot v_2 = 96v_1, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48v_2 + \frac{1}{3}(v_2 + 12)v_2 = 48(v_2 + 12), \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}v_2^2 + 4v_2 - 576 = 0, \\ v_1 = v_2 + 12. \end{cases}$$

Корнями уравнения $v_2^2 + 12v_2 - 1728 = 0$ являются числа 36 и -48. Второе из них, очевидно, не подходит по смыслу задачи. Итак, имеем: $v_2 = 36$ км/ч, $v_1 = 48$ км/ч.

Ответ: 36; 48.

467. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго равна v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 720 км, составляет $\frac{720}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{720}{v_2}$ ч. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ \frac{60}{v_1} = \frac{50}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{864}{v_1} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{144}{v_1} = 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 72, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 72; 60.

468. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго — равна v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 450 км, составляет $\frac{450}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{450}{v_2}$ ч.

Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ \dfrac{250}{v_1} = \dfrac{200}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{562{,}5}{v_1} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{112{,}5}{v_1} = 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 75, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 75; 60.

469. Пусть x кг — количество варенья, которое было у малыша первоначально, а y кг — количество варенья, которое Малыш с Карлсоном взяли с собой на крышу. Тогда в доме Малыша Карлсон съел $0{,}3x$ кг варенья, и из условия задачи имеем уравнение: $0{,}3x + 0{,}2 + y + 1{,}7 = x$, (1). Поскольку из взятого на крышу варенья, Малыш съел 0,3 кг, то Карлсон съел $(y - 0{,}3)$ кг варенья. Тогда $0{,}3x + y - 0{,}3$ (кг) — общее количество съеденного Карлсоном варенья, и, по условию, $y - 0{,}3 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}3x + y - 0{,}3)$ (2). Из уравнения (2) выразим y через x: $y - 0{,}3 = 0{,}1x + \frac{1}{3}y - 0{,}1$; $\frac{2}{3}y = 0{,}1x + 0{,}2$; $y = \frac{3}{2} \cdot (0{,}1x + 0{,}2) = 0{,}15x + 0{,}3$. Подставим найденное для y выражение в уравнение (1) и решим полученное уравнение: $0{,}3x + 0{,}2 + 0{,}15x + 0{,}3 + 1{,}7 = x$; $0{,}45x + 2{,}2 = x$; $0{,}55x = 2{,}2$; $x = 4$. Таким образом, у Малыша первоначально было 4 кг варенья.

Ответ: 4.

470. Пусть x км — протяжённость всего выбранного туристами маршрута, а y км — протяжённость части маршрута, оставшейся после четырёх дней похода. Тогда из условия задачи имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 20 + 0{,}3(x - 20) + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{5}x + y = x, \\ y = 0{,}8y + 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим: $0{,}2y = 2$, $y = 10$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получаем:

$20 + \dfrac{3x}{10} - 6 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} + 10 = x$; $\dfrac{12x + 10x + 8x}{40} + 24 = x$; $x - \dfrac{3}{4}x = 24$; $x = 96$.

Итак, протяжённость всего выбранного туристами маршрута составляет 96 км.

Ответ: 96.

471. Пусть x литров — объём первого ведра, а y литров — объём второго. Время, необходимое для того, чтобы набрать оба ведра из первого крана, равно $\frac{x+y}{5}$ минут. А время, необходимое для того, чтобы набрать первое ведро из второго крана, равно $\frac{x}{7}$ минут. Отсюда получаем: $\frac{x+y}{5} = 2 \cdot \frac{x}{7}$; $7(x+y) = 10x$; $7y = 3x$.

Таким образом, $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

472. Пусть скорость лодки x км/ч ($x > 0$), тогда скорость катера $4x$ км/ч. Тогда время, затрачиваемое катером на прохождение 16 километров, равно $\frac{16}{4x}$ часов, а время, затрачиваемое лодкой, — $\frac{16}{x}$ часов. Отсюда получаем: $\frac{16}{4x} + 3 = \frac{16}{x}$; $\frac{19}{x} = 3$; $x = 4$.

Ответ: 4.

473. Пусть первый рабочий может наклеить обои в комнате за x часов ($x > 0$), тогда второй рабочий наклеит обои за $x + 5$ часов. Всю работу по наклеиванию обоев примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего, $\frac{1}{x+5}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они наклеят обои за 6 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{6}$. Таким образом, имеем: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $\frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{6}$; $x(x+5) = 6(2x+5)$; $x^2 - 7x - 30 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 10$. $x_1 = -3$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 10$; первый рабочий может выполнить работу за 10 ч, второй — за 15 ч.

Ответ: 10, 15.

474. Пусть первая бригада может вспахать поле за x часов ($x > 0$), тогда вторая бригада может вспахать поле за $x + 12$ часов. Примем всю работу за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады, а $\frac{1}{x+12}$ — производительность второй. Так как, работая вместе, они вспахали поле за 8 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{8}$. Таким образом, имеем: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$; $\frac{2x+12}{x(x+12)} = \frac{1}{8}$; $x(x+12) = 8(2x+12)$; $x^2 - 4x - 96 = 0$; $x_1 = -8$, $x_2 = 12$. $x_1 = -8$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 12$; первая бригада может вспахать поле за 12 ч, вторая — за 24 ч.

Ответ: 12; 24.

475. Пусть первый токарь может выполнить задание за x часов ($x > 0$), тогда второй токарь может выполнить задание за $x + 7$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого токаря, $\frac{1}{x+7}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они выполнили задание за 12 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$. Таким образом, имеем:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7} = \frac{1}{12}$; $\frac{2x+7}{x(x+7)} = \frac{1}{12}$; $x(x+7) = 12(2x+7)$; $x^2-17x-84 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 21$. $x_1 = -4$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 21$; первый токарь может выполнить задание за 21 ч, второй — за 28 ч.

Ответ: 21; 28.

476. Пусть x страниц в час печатала первая машинистка, тогда вторая в час печатала $(x - 2)$ страницы. Так как вторая машинистка работала на 1 час дольше, то получаем уравнение: $\frac{60}{x-2} - \frac{60}{x} = 1$, $(x > 2)$. Отсюда имеем: $\frac{60x - 60(x-2)}{(x-2)x} = 1$; $120 = (x-2)x$; $x^2 - 2x - 120 = 0$; $x_1 = -10$, $x_2 = 12$. $x_1 = -10$ не удовлетворяет условию $x > 2$, значит, первая машинистка печатала $x = 12$ страниц в час.

Ответ: 12.

12 Зак № 263

477. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Петя до того момента, когда его догонит Вася. Тогда Вася до того, как догонит Петю, будет находиться в пути $\left(t-\frac{1}{3}\right)$ часов. Всего Петя пройдёт $4{,}5t$ км, а Вася проедет $12\left(t-\frac{1}{3}\right)$ км. Решим уравнение:

$4{,}5t = 12\left(t-\frac{1}{3}\right)$; $4{,}5t = 12t - 4$; $7{,}5t = 4$; $t = \frac{8}{15}$. Следовательно, Вася догонит Петю на расстоянии $\frac{4{,}5 \cdot 8}{15} = 0{,}3 \cdot 8 = 2{,}4$ км от школы.

Ответ: 2,4.

478. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Нина до того момента, когда её догонит брат. Тогда брат до того, как догонит Нину, будет находиться в пути $(t - 0{,}1)$ часов. Следовательно, Нина проедет $15t$ км, а брат проедет $40(t - 0{,}1)$ км. Решим уравнение: $15t = 40(t - 0{,}1)$; $15t = 40t - 4$; $25t = 4$; $t = \frac{4}{25}$. Итак, брат догонит Нину на расстоянии $15t = 15 \cdot \frac{4}{25} = 2{,}4$ км от дома.

Ответ: 2,4.

479. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, а S км — расстояние между городами, тогда $S = 8x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 10)$ км/ч (через 5 ч после начала движения) автобус проехал оставшуюся часть пути за $\left(3+\frac{1}{3}\right)$ часа. Таким образом, имеем:

$S = 5x + \frac{10}{3}(x - 10)$; $5x + \frac{10}{3}x - \frac{100}{3} = 8x$; $\frac{x}{3} = \frac{100}{3}$; $x = 100$; то есть первоначальная скорость автобуса равна 100 км/ч.

Ответ: 100.

480. Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста, а S км — расстояние, проезжаемое велосипедистом, тогда $S = 2x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 3)$ км/ч (через 1,5 ч после начала движения) велосипедист проехал оставшуюся часть пути за 40 мин$= \frac{2}{3}$ часа. Таким образом, имеем:

$S = 1{,}5x + \frac{2}{3}(x-3)$; $1{,}5x + \frac{2}{3}x - 2 = 2x$; $\frac{x}{6} = 2$; $x = 12$, то есть первоначальная скорость велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

481. Пусть x км/ч ($x > 0$) — первоначальная скорость поезда, тогда $x+6$ км/ч — скорость поезда после задержки. Так как весь путь AB равен 78 км, а до задержки поезд проехал на 12 км больше, чем после задержки, то длина пути, пройденного до задержки, равна $\frac{78+12}{2} = 45$ км. Тогда после задержки поезду осталось проехать $78-45 = 33$ км. Следовательно, первую часть пути поезд проехал за $\frac{45}{x}$ ч, а вторую часть — за $\frac{33}{x+6}$ ч. По условию, первый отрезок времени больше второго на 15 мин ($= 0{,}25$ ч). Таким образом, получаем уравнение:

$\frac{45}{x} - \frac{33}{x+6} = 0{,}25$; $\frac{180}{x} - \frac{132}{x+6} = 1$; $\frac{48x+1080}{x^2+6x} = 1$; $x^2 - 42x - 1080 = 0$.

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = -18$ и $x_2 = 60$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 60.

482. Пусть x км/ч ($x > 75$) — скорость третьего мотоциклиста, тогда его скорость сближения с первым мотоциклистом равна $(x - 75)$ км/ч, а со вторым — $(x - 60)$ км/ч. За 20 мин ($=\frac{1}{3}$ ч), к моменту, когда третий мотоциклист выехал из пункта A, первый мотоциклист проехал $\frac{1}{3}\cdot 75 = 25$ (км), а второй — $\frac{1}{3}\cdot 60 = 20$ (км). Следовательно, третий мотоциклист догонит первого за $\frac{25}{x-75}$ ч, а второго за $\frac{20}{x-60}$ ч. По условию, первый отрезок времени больше второго на 1 ч. Таким образом, получаем уравнение:

$\frac{25}{x-75} - \frac{20}{x-60} = 1$; $\frac{5x}{(x-75)(x-60)} = 1$; $x^2 - 140x + 4500 = 0$.

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = 50$ и $x_2 = 90$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 75$.

Ответ: 90.

483. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{5}$ — скорость движения парохода по течению (собственная скорость парохода плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{7}$ — скорость движения парохода против течения (собственная скорость парохода минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{5} - \frac{s}{7}\right) : 2 = \frac{s}{35}$. Следовательно, плоты от A до B плывут $s : \frac{s}{35} = 35$ суток.

Ответ: 35.

484. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{4}$ — скорость движения моторной лодки по течению (собственная скорость моторной лодки плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{5}$ — скорость движения моторной лодки против течения (собственная скорость моторной лодки минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{4} - \frac{s}{5}\right) : 2 = \frac{s}{40}$. Следовательно, скорость движения моторной лодки по течению больше скорости течения в $\frac{s}{4} : \frac{s}{40} = 10$ раз.

Ответ: 10.

485. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 10$), тогда он работал $\frac{480}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x - 10)$ м^3 в час, и, значит, он работал $\frac{360}{x-10}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос работал дольше, чем второй, на 2 часа, то есть имеем уравнение: $\frac{360}{x-10} - \frac{480}{x} = 2$; $\frac{360x - 480(x-10)}{(x-10)x} = 2$; $2x^2 - 20x = 4800 - 120x$; $x^2 + 50x - 2400 = 0$; $x_1 = -80$, $x_2 = 30$. $x_1 = -80$ не удовлетворяет условию $x > 10$, то есть второй насос перекачивает за час $x = 30$ м^3; при этом первый насос перекачивает 20 м^3.

Ответ: 20; 30.

486. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 0$), тогда 100 м^3 он перекачивает за $\frac{100}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x+5)$ м^3/ч, значит, 90 м^3 он перекачивает за $\dfrac{90}{x+5}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос перекачивает 90 м^3 на 1 час быстрее, чем второй 100 м^3, значит, имеем уравнение: $\dfrac{90}{x+5}+1=\dfrac{100}{x}$;

$\dfrac{100(x+5)-90x}{x(x+5)}=1$; $x^2+5x=10x+500$; $x^2-5x-500=0$; $x_1=-20$, $x=25$. $x_1=-20$ не удовлетворяет условию $x>0$, то есть второй насос перекачивает $x=25$ м^3/ч; при этом первый насос перекачивает 30 м^3.

Ответ: 30; 25.

487. Обозначим через x и y количество первого и второго растворов соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда, из условия следует уравнение:

$\dfrac{0{,}4x+0{,}7y}{x+y}=0{,}6$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 1 : 2.

488. Обозначим через x и y количество первого и второго сплавов соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда из условия следует уравнение

$\dfrac{0{,}25x+0{,}45y}{x+y}=0{,}3$; $\dfrac{x}{y}=3$.

Ответ: 3 : 1.

489. Пусть x и y — количество первого и второго сплава соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда концентрация железа в новом сплаве будет:

$\dfrac{0{,}75x+0{,}25y}{x+y}=0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}35x=0{,}15y$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{7}$.

Ответ: 3 : 7.

490. Пусть x и y — количество первого и второго растворов соли соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда концентрация соли в новом растворе будет

$\dfrac{0{,}64x+0{,}36y}{x+y}=0{,}48 \Leftrightarrow 0{,}16x=0{,}12y$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: 3 : 4.

491. Пусть скорость автомобиля x км/ч, а скорость автобуса y км/ч. C — точка встречи. Так как автобус приехал в пункт A через 9 часов после встречи, а автомобиль в пункт B — через 4 часа, то расстояние $AC=9y$, а $BC=4x$. Тогда автомобиль до встречи с автобусом находился в пути $\dfrac{9y}{x}$ ч, а автобус — $\dfrac{4x}{y}$ ч. Так как автомобиль и автобус выехали из своих пунктов одновременно, то до встречи они находились одно и то же время в пути.

Получим уравнение: $\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y}$; $\frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{4}$; $\frac{x}{y} > 0$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Средняя скорость автомобиля в 1,5 раза больше скорости автобуса.

Ответ: 1,5.

492. Пусть x — скорость грузовика при движении с горы, y — скорость при движении в гору. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$ $(k > 1)$. Обозначим, согласно условию задачи, A и B — конечные точки движения и C — нижняя точка (см. рис. 69).

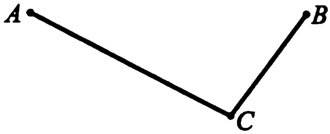

Рис. 69

Тогда имеем: $\frac{AC}{x} = 3$; $\frac{CB}{y} = 7$; $\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} = 22$. Откуда $\frac{7y}{x} + \frac{3x}{y} = 22$; $\frac{7}{k} + 3k = 22$; $3k^2 - 22k + 7 = 0$. Корни: $k_1 = 7$, $k_2 = \frac{1}{3}$. Так как $k > 1$, то $k = 7$. Значит, скорость грузовика при движении с горы в семь раз больше скорости грузовика при движении в гору.

Ответ: 7.

493. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса; C — место их встречи. Тогда $\frac{AC}{x}$ (ч) и $\frac{CB}{y}$ (ч) — время в пути до встречи автомобиля и автобуса соответственно; $\frac{AC}{y}$ (ч) и $\frac{CB}{x}$ (ч) — время в пути после встречи автомобиля и автобуса соответственно. По условию $\frac{AC}{y} = 9$; $\frac{CB}{x} = 4$; $\frac{AC}{x} = \frac{CB}{y}$; $x > 0$; $y > 0$. Отсюда $\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y}$; $4x^2 = 9y^2$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Так как $x > 0$; $y > 0$, то $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

494. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса, C — место их встречи (см. рис. 70).

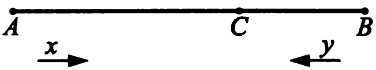

Рис. 70

Требуется найти $\frac{AB}{y}$ — время в пути автобуса. Так как они выехали из пунктов A и B одновременно, то до места встречи в пути они были одинаковое время: $\frac{AC}{x} = \frac{BC}{y}$. Из условия задачи следует, что $\frac{AC}{y} = 16$ и $\frac{BC}{x} = 4$, отсюда $AC = 16y$; $BC = 4x$. Следовательно, $\frac{16y}{x} = \frac{4x}{y}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4, (x > 0, y > 0)$; $\frac{x}{y} = 2$. Так как $AB = AC + BC$, то

$$\frac{AB}{y} = \frac{AC + BC}{y} = \frac{16y + 4x}{y} = 16 + 4 \cdot \frac{x}{y} = 16 + 4 \cdot 2 = 24 \text{ (часа)}.$$

Ответ: 24.

495. Пусть x, y, z — производительности первого, второго и третьего рабочих (объём работ/день) соответственно ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Весь объём работ примем равным 1. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 3, \\ \dfrac{1}{x+z} = 3, \\ \dfrac{1}{y+z} = 6. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения системы:

$2(x + y + z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $x + y + z = \frac{5}{12}$. Поэтому, работая втроём, рабочие выполнят всю работу за время $\frac{1}{x + y + z} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ ч.

Ответ: 2,4.

496. Обозначим x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих соответственно. Весь объём работ примем равным 1. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 18, \\ \dfrac{1}{x+z} = 12, \\ \dfrac{1}{y+z} = 9. \end{cases}$$

Требуется найти $\dfrac{1}{x+y+z}$. Сложим все три уравнения полученной системы: $2(x+y+z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$. Значит, $x+y+z = \frac{1}{8}$. А искомое значение $\dfrac{1}{x+y+z} = 8$ (ч).

Ответ: 8.

497. Обозначим через x и y стоимость 1 кг первого и второго продуктов соответственно. Тогда из условия задачи $x + 10y = 200$. Первый продукт подорожал на 15%, то есть его стоимость стала равна $x + \frac{15}{100}x = 1{,}15x$. Второй продукт подешевел на 25%, то есть его стоимость стала равна $y - \frac{25}{100}y = 0{,}75y$. Поэтому $1{,}15x + 10 \cdot 0{,}75y = 182$. Эти два условия должны выполняться одновременно: $\begin{cases} x + 10y = 200; \\ 1{,}15x + 7{,}5y = 182; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 - 10y; \\ 1{,}15(200 - 10y) + 7{,}5y = 182. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $230 - 11{,}5y + 7{,}5y = 182$; $y = 12$. Тогда из первого уравнения: $x = 200 - 120 = 80$. Итак, $x = 80$, $y = 12$.

Ответ: 80 и 12.

498. Пусть в 100 г первого раствора было x г соли (x%-ный раствор), а в 100 г второго раствора — y г соли (y%-ный раствор). Тогда до испарения в 1000 г первого раствора содержалось $10x$ г соли, а в 1000 г второго раствора — $10y$ г соли. После испарения такое же количество соли стало содержаться соответственно в 800 г каждого раствора, то есть концентрация соли в каждом растворе увеличилась в $\frac{1000}{800} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ раза. Пусть также до испарения мы брали a г второго раствора (и $2a$ г первого), а после испарения b г второго раствора (и $4b$ г первого). Составим и решим систему уравнений, учитывая, что концентрация соли в смеси будет 10%:

$$\begin{cases} \dfrac{2a\cdot(x/100)+a\cdot(y/100)}{3a}=0{,}1, \\ \dfrac{4b\cdot(1{,}25x/100)+b\cdot(1{,}25y/100)}{5b}=0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=30, \\ 5x+1{,}25y=50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=5, \\ y=20. \end{cases}$$

Ответ: 5; 20.

499. Пусть первый поезд проходит путь от A до B за t_1 ч ($t_1>0$), а второй поезд путь от B до A — за t_2 ч ($t_2>0$). Если обозначить расстояние от A до B (или от B до A) через s км, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{2}-2=\dfrac{t_2}{2}, \\ \left(\dfrac{s}{t_1}+\dfrac{s}{t_2}\right)\cdot 2=s-\dfrac{s}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=t_2+4, \\ 8(t_1+t_2)=3t_1t_2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=t_2+4, \\ 3t_2^2-4t_2-32=0. \end{cases}$$

Корнями последнего уравнения являются $t_2=4$ и $t_2=-\frac{8}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t_2=4$ ч. Отсюда, $t_1=8$ ч.

Ответ: 8; 4.

500. Пусть скорость велосипедиста равна v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста — v_2 км/ч. По условию велосипедист проезжает каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист. Это соответствует тому, что его скорость на $\dfrac{\frac{1}{2}\text{ км}}{\frac{1}{60}\text{ ч}}=30$ км/ч меньше скорости мотоциклиста. Тогда имеем систему уравнений: $\begin{cases} v_1+30=v_2, \\ \dfrac{120}{v_1}-2=\dfrac{120}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2=v_1+30, \\ v_1^2+30v_1-1800=0. \end{cases}$

Корнями последнего уравнения являются $v_1=30$ и $v_1=-60$. Второй корень очевидно не удовлетворяет условию задачи. Значит, $v_1=30$. Из первого уравнения $v_2=60$.

Ответ: 30; 60.

501. Имеется 200 граммов 30%-го раствора. Значит, кислоты в них $\dfrac{200\cdot 30}{100}=60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно долить, чтобы получился 6%-ный раствор. Тогда $\frac{60}{200+x} = \frac{6}{100}$. Отсюда $x = 800$ (г).

Ответ: 800.

502. Имеется 300 граммов 20%-го раствора кислоты с водой. Значит, кислоты в этом растворе $300 \cdot \frac{20}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество (в граммах) воды, которое нужно добавить в имеющийся раствор, чтобы получился 16%-ный. Тогда $\frac{60}{300+x} = \frac{16}{100}$. Отсюда $x = 75$ (г).

Ответ: 75.

503. Пусть первый экскаватор, работая один, вырыл яму за x часов, тогда второй — вырыл бы её за $3x$ часов. $\frac{49}{x}$м^3/ч — производительность первого экскаватора, а $\frac{49}{3x}$м^3/ч — производительность второго экскаватора. Так как их совместная производительность равна $49 : 1{,}5 = \frac{98}{3}$(м^3/ч), получим уравнение: $\frac{49}{x} + \frac{49}{3x} = \frac{98}{3}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{2}{3}$; $x = 2$.

Первый экскаватор вырыл бы яму за 2 часа, а половину ямы за 1 час, тогда второй вырыл бы яму за 6 часов, а половину — за 3 часа. Если бы каждый по очереди вырыл бы половину ямы, то они вырыли бы яму за $1 + 3 = 4$(ч).

Ответ: 4.

504. Пусть скорость второго грузовика — x, тогда скорость первого — $2{,}5x$. Имеем: $(2{,}5x+x)\cdot 3 = 31{,}5$, откуда $x = 3$. Первый грузовик привёз бы 21 т зерна за $\frac{21}{7{,}5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ (ч), а второй — 10,5 т за $\frac{10{,}5}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ (ч). Общее время равно $3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{5} = 6\frac{3}{10} = 6{,}3$ (ч).

Ответ: 6,3.

505. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость первого поезда, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго поезда. За $\frac{840}{x}$ часов пройдёт 840 км первый поезд, а за $\frac{840}{y}$ часов пройдёт это же расстояние второй поезд.

По условию задачи первый поезд затратит времени на 2 часа меньше, чем второй, значит, $\frac{840}{y} - \frac{840}{x} = 2$. За $\frac{63}{x}$ часов пройдёт 63 км первый поезд, за $\frac{54}{y}$ часов пройдёт 54 км второй поезд.

По условию, время, затраченное поездами, одинаково, значит, $\frac{63}{x} = \frac{54}{y}$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 63 \cdot \frac{1}{x} = 54 \cdot \frac{1}{y}, \\ 840 \cdot \frac{1}{y} - 840 \cdot \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$$

Замена $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 7a = 6b, \\ 420b - 420a = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{7}b, \\ 60b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{70}, \\ b = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем: $x = 70; y = 60$.

Тогда 70 км/ч — скорость первого поезда; 60 км/ч — скорость второго поезда, $70 - 60 = 10$ (км/ч).

Ответ: 10 км/ч.

506. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость лодки по течению, y км/ч ($y > 0$) — скорость лодки против течения. Так как 12 мин $= \frac{1}{5}$ ч, 40 мин $= \frac{2}{3}$ ч, 52 мин $= \frac{13}{15}$ ч, то $\frac{1}{5} \cdot x$ км — путь, пройденный одной лодкой по течению; $\frac{2}{3} \cdot y$ км — путь, пройденный другой лодкой против течения; $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y}$ ч — время, затраченное одной лодкой на обратный путь против течения; $\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x}$ ч — время, затраченное другой лодкой на обратный путь по течению.

Зная, что время на обратный путь лодок в сумме заняло $\frac{13}{15}$ часа, составим и решим уравнение: $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{13}{15}$. Обозначим искомое отношение скорости лодки по течению к скорости лодки против течения через t, имеем: $\frac{x}{y} = t, t > 1$, тогда уравнение примет вид: $\frac{1}{5}t + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{13}{15}$;

$3t^2 - 13t + 10 = 0$; $t_1 = \frac{10}{3}$, $t_2 = 1$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

507. Обозначим x — концентрация первого раствора в процентах, y — второго. Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} 2\frac{x}{100} + 6\frac{y}{100} = \frac{36}{100} \cdot (2+6), \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{32}{100} \cdot (1+1). \end{cases}$$

Во втором уравнении считаем (не нарушая общности) что первого и второго раствора берут по одному килограмму.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 36 \cdot 8, \\ x + y = 32 \cdot 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6(64 - x) = 288, \\ y = 64 - x. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 24$. Зная x, из второго уравнения получаем $y = 40$.

Ответ: 24 и 40.

508. Пусть для получения 30%-го раствора нужно взять x кг 28%-го раствора и y кг 36%-го раствора. Тогда $0{,}28x + 0{,}36y = 0{,}3(x + y)$; $0{,}02x = 0{,}06y$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$. То есть для получения раствора нужной концентрации нужно взять три части 28%-го раствора и одну часть 36%-го раствора. Так как первого раствора имеется всего 2 кг, то, чтобы получить наибольший объём 30%-го раствора, нужно взять 2 кг 28%-го раствора и $y = \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$ (кг) 36%-го раствора. Тогда общее количество раствора будет равно $x + y = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ (кг).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

509. Пусть К — красный грузовик, а С — синий, x ч — время, за которое синий вывозит груз с первого склада ($x > 0$). Составим таблицу:

	1-й склад	2-й склад
К	3	$x - 7$
С	x	6

.

Имеем теперь пропорцию:

$\frac{3}{x} = \frac{x-7}{6}$; $x^2 - 7x - 18 = 0$; $x_1 = 9$, $x_2 = -2$. Так как по условию задачи x — число положительное, то $x = 9$. Таким образом, синий грузовик может вывезти груз с первого склада быстрее, чем это сделает красный, в $\frac{9}{3} = 3$ раза.

Ответ: 3.

510. Пусть x — время, за которое второй кран разгрузит баржу ($x > 0$).

Рассмотрим таблицу:

	баржа	сухогруз
I кран	3	$x - 10$
II кран	x	8

.

Составим пропорцию: $\frac{3}{x} = \frac{x-10}{8}$; $x^2 - 10x - 24 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 12$. Так как x не может быть меньше нуля, то $x = 12$.

Примем всю работу по разгрузке баржи за единицу. Тогда $p_1 = \frac{1}{3}$ — производительность I-го крана, $p_2 = \frac{1}{12}$ — производительность II-го крана. Искомая величина $\frac{p_1}{p_2} = 4$.

Ответ: 4.

511. Пусть V — собственная скорость лодки, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему:

$$\begin{cases} \frac{6}{V+V_T} + \frac{6}{V-V_T} = \frac{35}{60}, \\ \frac{18}{V-V_T} - \frac{18}{V+V_T} = \frac{15}{60}. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{1}{V+V_T} = a$ и $\frac{1}{V-V_T} = b$.

Тогда $\begin{cases} a + b = \frac{7}{72}, \\ b - a = \frac{1}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{72}, \\ b = \frac{4}{72}. \end{cases}$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V+V_T}=\dfrac{3}{72}, \\ \dfrac{1}{V-V_T}=\dfrac{4}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V+V_T=24, \\ V-V_T=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V_T=6, \\ V=18+V_T; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T=3, \\ V=21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

512. Пусть V — собственная скорость катера, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{36}{V-V_T}+\dfrac{36}{V+V_T}=3\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{12}{V-V_T}-\dfrac{12}{V+V_T}=\dfrac{10}{60}. \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{1}{V-V_T}=a$ и $\dfrac{1}{V+V_T}=b$.

Тогда $\begin{cases} 36a+36b=\dfrac{7}{2}, \\ 12a-12b=\dfrac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{18}, \\ b=\dfrac{1}{24}. \end{cases}$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V-V_T}=\dfrac{1}{18}, \\ \dfrac{1}{V+V_T}=\dfrac{1}{24}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V-V_T=18, \\ V+V_T=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_T=V-18, \\ 2V=42; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T=3, \\ V=21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

513. Пусть x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго туриста. Расстояние, пройденное первым туристом до встречи, равно $3x$ км, а расстояние, пройденное вторым туристом до встречи, равно $2y$ км, ($AC=3x$; $BC=2y$) (см. рис. 71).

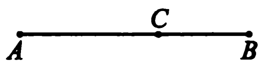

Рис. 71

$\dfrac{2y}{x}$ ч —время движения первого туриста на участке BC.

$\frac{3x}{y}$ ч —время движения второго туриста на участке AC.

Так как первый турист пришёл в пункт B на 5 часов раньше, чем второй пришёл в пункт A, получим уравнение $\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x} = 5$. Пусть $\frac{x}{y} = t$, $t > 0$, тогда $3t - \frac{2}{t} = 5$; $3t^2 - 5t - 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

Скорость первого туриста в два раза больше скорости второго туриста.

Ответ: 2.

514. Пусть x — время, которое затратил автомобиль на путь от места встречи до пункта А. Этот же участок пути велосипедист проехал за 6 часов. Кроме того, участок пути от места встречи до пункта B автомобиль проехал за 2 часа, а велосипедист — за $(x + 11)$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{6} = \frac{2}{x+11}$; $x^2 + 11x - 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -12$, которое имеет положительный корень $x = 1$. Значит, скорость автомобиля в $\frac{6}{1}$ раз больше скорости велосипедиста.

Ответ: 6.

515. Пусть p_i — производительность i -ой группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему:

$$\begin{cases} 4(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_2 = 3p_3, \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2 + p_3} = 6. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $p_1 = \frac{1 - 4p_2 - 4p_3}{4}$. Подставляя в третье уравнение системы выражения для p_1 и p_2, получим уравнение: $\frac{4}{1 - 16p_3} - \frac{1}{4p_3} = 6 \Leftrightarrow \frac{384p_3^2 + 8p_3 - 1}{4p_3(1 - 16p_3)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 384p_3^2 + 8p_3 - 1 = 0, \\ p_3 \neq 0, \\ p_3 \neq \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что по смыслу задачи $p_3 > 0$, получим $p_3 = \frac{1}{24}$. Тогда

$$p_2 = 3 \cdot p_3 = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{24}}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 12; 8; 24.

521. Пусть за x дней может вспахать всё поле первый трактор. Тогда за $(x+2)$ дня может вспахать всё поле второй трактор; $\frac{1}{x}$ — производительность первого трактора (часть поля, которую он вспахивает за один день), $\frac{1}{x+2}$ — производительность второго трактора.

По условию за 4 дня совместной работы было вспахано 0,9 поля. Следовательно, $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) = 0{,}9$, где $x > 0$;

$\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{9}{40}$; $(2x+2)40 = 9\left(x^2+2x\right)$; $9x^2 - 62x - 80 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{10}{9}$. $x_2 = -\frac{10}{9}$ — не удовлетворяет условию $x > 0$. Следовательно, первый трактор вспашет поле за 8 дней, второй — за 10 дней.

Ответ: 8; 10.

523. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ $(a > 0)$ и график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x - 3$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_в = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$, а ордината равна $y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -7$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x - 3$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$, эскиз которого изображён на рисунке 72. Таким образом, при $0 < a < 7$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x - 3|$ в четырёх точках, при $a = 7$ — в трёх точках, и при $a > 7$ в двух.

Ответ: 4 при $0 < a < 7$; 3 при $a = 7$; 2 при $a > 7$.

524. Построим графики функций $y = \left|2x^2+4x-7\right|$; $y = a$ $(a > 0)$ и найдём количество точек их пересечения.

1) Построим график $y = 2x^2 + 4x - 7$ (см. рис. 73).

а) Вершина: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$, $y_0 = 2 - 4 - 7 = -9$. $(-1; -9)$ — координаты вершины параболы.

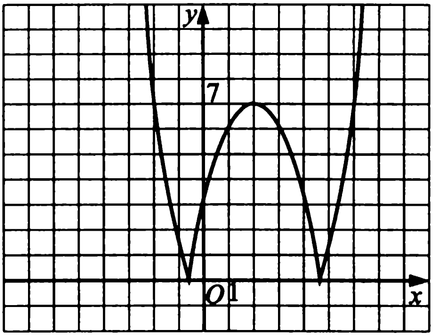

Рис. 72

б) Дополнительные точки:

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	9	-1	-7	-7	-1	9

2) Построим график $y = |2x^2 + 4x - 7|$ (см. рис. 73).

Получаем, что графики данных функций пересекаются в 4-х точках при $0 < a < 9$, в 3-х точках при $a = 9$, в 2-х точках при $a > 9$.

Ответ: 4 корня при $0 < a < 9$; 3 корня при $a = 9$; 2 корня при $a > 9$.

525. Построим ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x < -2, \\ 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases} \quad \text{(см. рис. 74)}$$

Проводим прямую MB, проходящую через точки с координатами $(0; 1)$ и $(2; 2)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Проведём прямую ME, проходящую через точку с координатами $(0; 1)$, параллельно прямой $y = 3x - 4$. Очевидно, угловой коэффициент этой прямой $k_2 = 3$. При положительном k прямая $y = kx + 1$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла BME. Следовательно, $k_1 < k < k_2$; $\frac{1}{2} < k < 3$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

13 Зак № 263

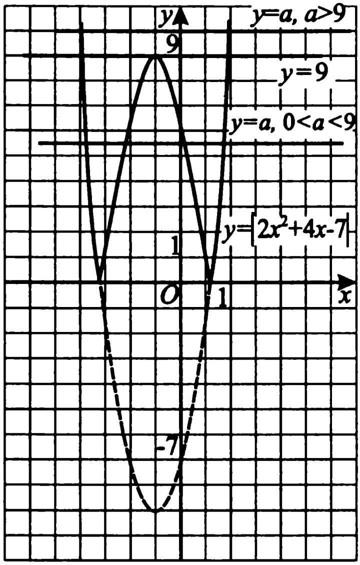

Рис. 73

526. Построим ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x < -2, \\ -1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \quad \text{(см. рис. 75)} \\ -x+1 \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Проводим прямую OA, проходящую через начало координат и точку с координатами $(2; -1)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = -\frac{1}{2}x$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = -\frac{1}{2}$. Проведём прямую OB, проходящую через начало координат и параллельно прямой $y = -x + 1$. Угловой коэффициент этой прямой $k_2 = -1$. При отрицательном значении k прямая $y = kx$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла AOB. Следовательно, $k_2 < k < k_1$; $-1 < k < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

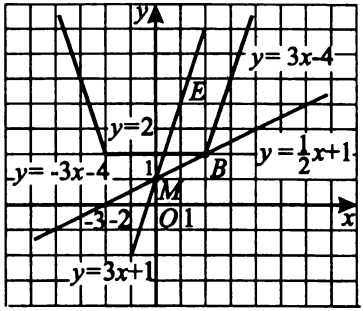

Рис. 74

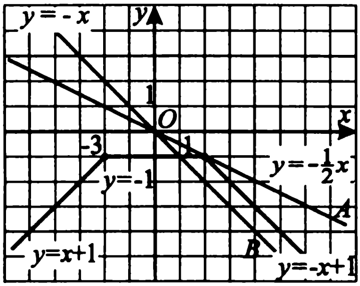

Рис. 75

527. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 0{,}3x + p$ с осями координат.

1) С осью Ox: $y = 0$; $0{,}3x + p = 0$; $x = -\frac{10p}{3}$; $\left(-\frac{10p}{3}; 0\right)$.

2) С осью Oy: $x = 0$; $y = p$; $(0; p)$.

3) Прямая $y = 0{,}3x + p$ образует с осями координат прямоугольный треугольник (см. рис. 76) с катетами $\left|-\frac{10p}{3}\right|$ и $|p|$. По условию площадь треугольника равна 60; $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}|p| \cdot |p| = \frac{5}{3}p^2$. Из уравнения $\frac{5}{3}p^2 = 60$ находим $p = \pm 6$.

Ответ: ± 6.

529. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = -1{,}5x + n$ с осями координат.

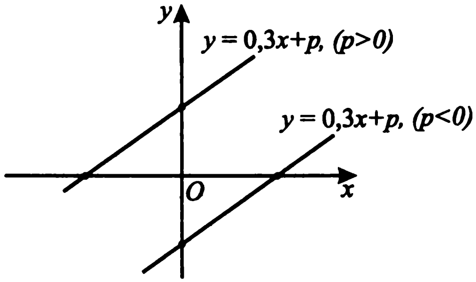

Рис. 76

С осью Ox: $\left(\frac{2}{3}n; 0\right)$, с осью Oy: $(0; n)$.

Прямая $y = -1{,}5 + n$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{3}n\right|$ и $|n|$.

По условию площадь треугольника равна 75.

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot |n| \cdot |n| = \frac{1}{3} \cdot n^2$. Решим уравнение:

$\frac{1}{3}n^2 = 75$, $n^2 = 225$, $n_{1,2} = \pm 15$.

Ответ: ± 15.

530. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 7x - 2m$ с осями координат.

С осью Ox: $\left(\frac{2}{7}m; 0\right)$, с осью Oy: $(0; -2m)$.

Прямая $y = 7x - 2m$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{7}m\right|$ и $|-2m|$.

По условию площадь треугольника равна 14.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot |m| \cdot 2 \cdot |m| = 14$; $m^2 = \frac{14 \cdot 7}{2}$; $m^2 = 49$; $m_{1,2} = \pm 7$.

Ответ: ± 7.

531. $2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0$. $x_1 < 2 < x_2$, где x_1 и x_2 — корни.

1) Найдём корни уравнения:

$4x^2 - x + 2(k-3)(k+5) = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 32(k-3)(k+5)}}{8}$.

2) Тогда по условию

$$\frac{1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8}<2<\frac{1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}<16<1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}<16,\\1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}>16;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{1-32(k-3)-(k+5)}<15,\\\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}>15;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}>-15,\\\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}>15;\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}>15\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-32(k-3)(k+5)>225\Leftrightarrow 32(k-3)(k+5)<-224\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2+2k-15<-7\Leftrightarrow k^2+2k-8<0\Leftrightarrow -4<k<2.$$

Ответ: $(-4;2)$.

533. $9x^2-6x-(l-2)(l+2)-3=0$.

Введём обозначение: $f(x)=9x^2-6x-(l-2)(l+2)-3$, $f(x)=9x^2-6x-l^2+1$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, можно сделать вывод, что число 2 находится между корнями уравнения $f(x)=0$ тогда и только тогда, когда $f(2)<0$ (см. рис. 77). Решим неравенство $f(2)<0$. $9\cdot4-6\cdot2-l^2+1<0$; $25-l^2<0$; $(l-5)(l+5)>0$; $l<-5$, $l>5$ (см. рис. 78).

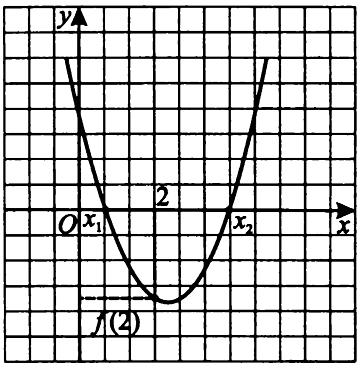

Рис. 77

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

Рис. 78

534. Обозначим $y = kx^2 - (k-3)x + k$ (1) и

$y = (2k-1)\cdot x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4}$ (2).

1) Так как по условию прямая $y = kx + 1$ и парабола (1) имеют ровно две общие точки, то уравнение $kx^2 - (k-3)x + k = kx + 1$ имеет 2 различных действительных корня, значит, $D > 0$.

$kx^2 - 2kx + 3x + k - 1 = 0$; $kx^2 + (3-2k)x + (k-1) = 0$.

$D = (3-2k)^2 - 4k(k-1)$; $9 - 12k + 4k^2 - 4k^2 + 4k > 0$; $-8k + 9 > 0$;

$k < \frac{9}{8}$.

2) Так как прямая $y = kx + 1$ не пересекает параболу (2), уравнение

$(2k-1)x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4} = kx + 1$ не имеет действительных корней, значит, $D < 0$.

$(2k-1)x^2 - 3kx + k + \frac{5}{4} = 0$.

$D = 9k^2 - 4(2k-1)\left(k + \frac{5}{4}\right) = 9k^2 - 8k^2 - 10k + 4k + 5 = k^2 - 6k + 5$.

Решим неравенство $k^2 - 6k + 5 < 0$; $(k-5)(k-1) < 0$; $1 < k < 5$ (см. рис. 79).

3) Таким образом, $\begin{cases} k < \frac{9}{8}, \\ 1 < k < 5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k < \frac{9}{8}$.

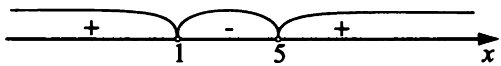

Рис. 79

Ответ: $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

535. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:

$3\left(4x^2 - 12x + 9 + 2\right)\left(x^2 + 22x + 121 + 4\right) = 24 - a^2$;

$3\left((2x-3)^2 + 2\right)\left((x+11)^2 + 4\right) = 24 - a^2$;

$3\left((2x-3)^2(x+11)^2 + 4(2x-3)^2 + 2(x+11)^2 + 8\right) = 24 - a^2$;

$3(2x-3)^2(x+11)^2+12(2x-3)^2+6(x+11)^2+24=24-a^2$;
$3(2x-3)^2(x+11)^2+12(2x-3)^2+6(x+11)^2=-a^2$.
Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней ни при каких значениях параметра a.

536. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:
$(49x^2-112x+64+1)(x^2+26x+169+2)=2-x^2$;
$((7x-8)^2+1)((x+13)^2+2)=2-x^2$;
$(7x-8)^2(x+13)^2+2(7x-8)^2+(x+13)^2+2=2-x^2$;
$(7x-8)^2(x+13)^2+2(7x-8)^2+(x+13)^2=-x^2$.
Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

537. Касание прямой и параболы означает, что они имеют лишь одну общую точку (для графиков других функций, отличных от квадратичной, это может быть и не так). То есть нужно определить, при каких значениях параметров k и a уравнение $ax^2=k(x-a)$ имеет единственный корень. $ax^2-kx+ka=0$, $D=k^2-4ka^2$, квадратное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $D=0$, то есть $k(k-4a^2)=0$. В случае $k=0$ прямой, данной в условии, является прямая $y=0$, ордината точки касания никак не может быть равна 4, то есть $k\neq 0$. Тогда из уравнения $k(k-4a^2)=0$ получаем, что $k=4a^2$. Пусть $(x_0;y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки касания является корнем уравнения $ax^2-kx+ka=0$, и так как $D=0$, то $x_0=\dfrac{k}{2a}=\dfrac{4a^2}{2a}=2a$. Подставляя x_0 в уравнение прямой, получаем ординату точки касания $y_0=k(x_0-a)=4a^2(2a-a)=4a^3$. По условию $y_0=4$, то есть $4a^3=4$; $a=1$; $k=4a^2=4$.

Ответ: $k=4$; $a=1$.

539. $x^2-(a+4)x+2a+5=0$, так как уравнение имеет два корня, то $D>0$, $D=(a+4)^2-4(2a+5)$; $a^2+8a+16-8a-20>0$; $a^2-4>0$, кроме того:
$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\geqslant -2$; $\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geqslant -2$; $\dfrac{a+4}{2a+5}\geqslant -2$; $\dfrac{a+4+4a+10}{2a+5}\geqslant 0$;
$\dfrac{5a+14}{2a+5}\geqslant 0$, таким образом,

$$\begin{cases} a^2-4>0, \\ \dfrac{5a+14}{2a+5} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-2)(a+2)>0, \\ \dfrac{5a+14}{2a+5} \geqslant 0. \end{cases}$$

$(-\infty; -2{,}8] \cup (-2{,}5; -2) \cup (2; +\infty)$ (см. рис. 80).

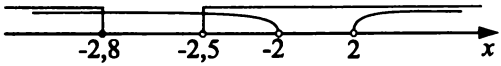

Рис. 80

Ответ: $(-\infty; -2{,}8] \cup (-2{,}5; -2) \cup (2; +\infty)$.

540. Данное уравнение может иметь два различных корня лишь тогда, когда оно квадратное (то есть $a \neq 0$) и его дискриминант положителен.

$D = (2a+3)^2 - 4a(a+2) = 4a+9 > 0 \Rightarrow$ при $a > -\frac{9}{4}$, $a \neq 0$ данное уравнение имеет два различных корня — x_1, x_2. По условию, нужно выбрать те значения параметра a, при которых $x_1^2 + x_2^2 > 3$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через коэффициенты данного уравнения, воспользовавшись теоремой Виета и тождеством

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Имеем: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{(2a+3)^2}{a^2} - \dfrac{2(a+2)}{a} =$

$= \dfrac{2a^2+8a+9}{a^2}$. Решим неравенство $\dfrac{2a^2+8a+9}{a^2} > 3$. С учётом условия $a \neq 0$ оно равносильно неравенству $2a^2 + 8a + 9 > 3a^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 < 0$; $a \in (-1; 9)$. Остаётся вспомнить, что условие $a > -\frac{9}{4}$ при $a \in (-1; 9)$ выполнено. Учитывая, что $a \neq 0$, получаем: $a \in (-1; 0) \cup (0; 9)$.

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (0; 9)$.

543. Наименьшее трёхзначное число, кратное 14, это 112, наибольшее — 994.

Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 112$, $a_n = 994$, $d = 14$.

Найдём число элементов этой прогрессии, применив формулу общего члена. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $112 + 14(n-1) = 994$; $8 + n - 1 = 71$; $n = 64$.

Сумму членов найдём по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

$$S_{64} = \frac{112+994}{2} \cdot 64 = 35392.$$

Ответ: 35392.

544. Пусть t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 — заданные числа.
По условию $\sqrt{t_1 \cdot t_2} = 243$, тогда $t_1 \cdot t_2 = 243^2 = 3^{10}$, а $\sqrt[3]{t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = 32$, тогда $t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 32^3 = 2^{15}$. Имеем: $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 3^{10} \cdot 2^{15}$, среднее геометрическое всех пяти чисел равно:
$\sqrt[5]{t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = \sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}} = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72.$

Ответ: 72.

545. Графиком функции $y = x^2 - (2a-1)x + 3a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.
Найдём координаты вершины параболы:
$x_0 = \dfrac{2a-1}{2} = a - 0{,}5,$
$y_0 = (a-0{,}5)^2-(2a-1)(a-0{,}5)+3a = a^2-a+0{,}25-2a^2+2a-0{,}5+3a =$
$= -a^2 + 4a - 0{,}25.$
$(a - 0{,}5; -a^2 + 4a - 0{,}25)$ — искомые координаты. $E(y) = [y_0; +\infty)$.
По условию задачи необходимо, чтобы $E(y) = [1{,}5; +\infty)$, значит,
$y_0 = 1{,}5.$
$-a^2 + 4a - 0{,}25 = 1{,}5;\ a^2 - 4a + 1{,}75 = 0;\ a_1 = 0{,}5,\ a_2 = 3{,}5.$

Ответ: 0,5; 3,5.

547. Найдём координаты вершины параболы $y = 2x^2 + ax + 1$.
$x_0 = -\dfrac{a}{2 \cdot 2} = -\dfrac{a}{4};$
$y_0 = 2 \cdot \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + a \cdot \left(-\dfrac{a}{4}\right) + 1 = \dfrac{a^2}{8} - \dfrac{a^2}{4} + 1 = \dfrac{a^2 - 2a^2 + 8}{8} = \dfrac{8 - a^2}{8};$
$\left(-\dfrac{a}{4}; \dfrac{8-a^2}{8}\right)$ — координаты вершины.
Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = x$,
$y_1 = -\dfrac{a}{4}.$
Поскольку вершина параболы лежит выше прямой, ордината y должна быть больше ординаты y_1. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству:
$\dfrac{8-a^2}{8} > -\dfrac{a}{4};\ \dfrac{8-a^2}{8} > -\dfrac{2a}{8};\ 8 - a^2 > -2a;\ a^2 - 2a - 8 < 0;$
$(a+2)(a-4) < 0;\ -2 < a < 4.$
Целые искомые значения параметра a: $-1; 0; 1; 2; 3.$

Ответ: -1; 0; 1; 2; 3.

548. Найдём координаты вершины параболы $y = x^2 + ax - 2$.
$x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 = -\frac{a^2}{4} - 2.$
Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = 2x$:
$y_1 = 2\left(-\frac{a}{2}\right) = -a.$

Поскольку вершина параболы лежит ниже прямой, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству:
$-\frac{a^2}{4} - 2 < -a$; $a^2 - 4a + 8 > 0$; $(a-2)^2 + 4 > 0$. Это неравенство верно при любом действительном значении a. В задаче необходимо найти все целые значения a, следовательно, $a \in Z$.

Ответ: $a \in Z$.

550. 1. Отметим, что если $m = 0$, то прямая $-x - 1 = 0$ имеет с параболой одну единственную общую точку.
2. $m \neq 0$. Система
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ my - x - 1 = 0; \end{cases}$$
должна иметь единственное решение.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ x = my - 1; \end{cases}$$
Подставив значение x из второго уравнения системы в первое уравнение, получим:
$y = (my - 1)^2 + (my - 1) + 1$; $y = m^2y^2 - my + 1$;
$m^2y^2 - (m + 1)y + 1 = 0.$
Уравнение должно иметь один корень, следовательно, $D = 0$.
$(m + 1)^2 - 4m^2 = 0$; $m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0$; $3m^2 - 2m - 1 = 0$;
$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3}}{3}$; $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $0; 1; -\frac{1}{3}$.

551. Найдём абсциссу вершины параболы $y = x^2 - 2ax + 43$:
$x_0 = \frac{2a}{2} = a.$

1) Пусть $x_0 < -2$, тогда $a < -2$. Так как ветви параболы направлены вверх, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция возрастает (см. рис. 81).
$y_{\text{наим}} = y(-2) = 4 - 2a \cdot (-2) + 43 = 7$; $4a = -40$; $a = -10$. $a = -10$

удовлетворяет условию $a < -2$.

2) Пусть $x_0 \geqslant -2$, тогда $a \geqslant -2$. Наименьшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 82).

$y_{\text{наим}} = y(x_0) = y(a) = a^2 - 2a^2 + 43 = 7$; $a^2 = 36$; $a_1 = 6$; $a_2 = -6$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -2$.

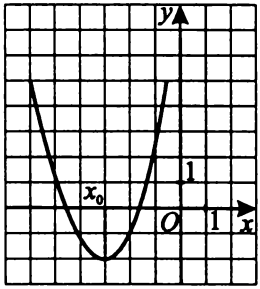

Рис. 81

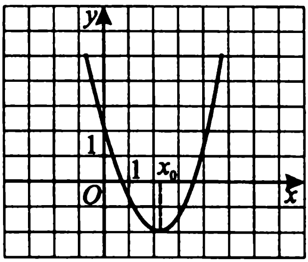

Рис. 82

Ответ: -10; 6.

552. Найдём абсциссу вершины параболы $y = -x^2+2ax-71$ на $[-3; +\infty)$:
$x_0 = \dfrac{-2a}{-2} = a$.

1) Пусть $x_0 < -3$, тогда $a < -3$. Так как ветви параболы направлены вниз, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция убывает (см. рис. 83).

$y_{\text{наиб}} = y(-3) = -9 + 2a \cdot (-3) - 71 = 10$; $-6a = 90$; $a = -15$ — удовлетворяет условию $a < -3$.

2) Пусть $x_0 \geqslant -3$, тогда $a \geqslant -3$. Наибольшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 84).
$y_{\text{наиб}} = y(x_0) = y(a) = -a^2 + 2a^2 - 71 = 10$; $a^2 = 81$; $a_1 = 9$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -3$.

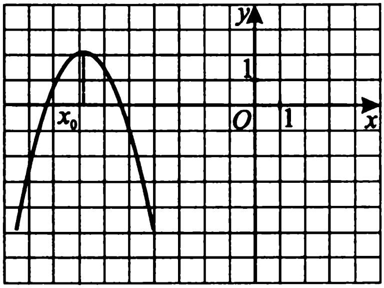

Рис. 83

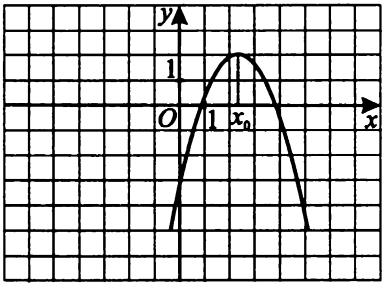

Рис. 84

Ответ: -15; -3.

553. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$.
$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + 1}$; $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$.
По условию задачи число 3 заключено между корнями уравнения, то есть
$a - 1 < 3 < a + 1$; $\begin{cases} a - 1 < 3, \\ a + 1 > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 4, \\ a > 2; \end{cases}$ $2 < a < 4$.

Ответ: $2 < a < 4$.

554. $x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$.
1) Найдём допустимые значения параметра a. Уравнение имеет действительные корни, если $D \geqslant 0$.

$D = (6a)^2 - 4(9a^2 - 2a + 2) = 36a^2 - 36a^2 + 8a - 8 = 8a - 8; 8a - 8 > 0;$ $a > 1.$

2) Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, значит, на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, где $x_2 \geqslant x_1$, функция принимает положительные значения. Из условия следует: $3 \in (-\infty; x_1)$ (см. рис. 85), значит, $y(3) > 0$.

3) Найдём значения параметра a, решив систему неравенств:

$$\begin{cases} 3^2 - 6a \cdot 3 + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9 - 18a + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9(a-1)\left(a - \frac{11}{9}\right) > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > \frac{11}{9}, \end{array}\right. \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad a > \frac{11}{9} \text{ (см. рис. 86).}$$

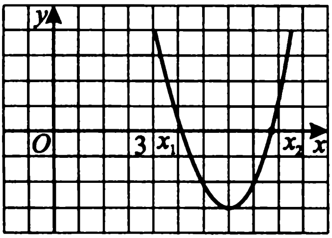

Рис. 85

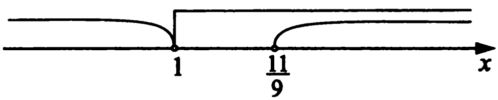

Рис. 86

Ответ: $a > \frac{11}{9}$.

555. Пусть (x_0, y_0) — координаты вершины данной параболы, тогда $x_0 = -\frac{b}{2a}$, где $b = -7$, $a = m$, то есть $x_0 = \frac{7}{2m}$ $(m \neq 0)$.

Так как вершина параболы должна лежать во II-ой четверти, то $x_0 < 0$; $\frac{7}{2m} < 0$; $m < 0$. Ветви параболы направлены вниз. Так как вершина находится во II-ой четверти, то квадратный трёхчлен имеет 2 различных действительных корня.

$D > 0$; $49 - 16m^2 > 0$; $-\frac{7}{4} < m < \frac{7}{4}$; учитывая, что $m < 0$, получаем:

$-\frac{7}{4} < m < 0$.

Ответ: $(-1{,}75; 0)$.

556. ОДЗ: $x \in [2; 7]$.
Левая часть уравнения $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} = c$ есть сумма двух неотрицательных чисел, следовательно, $c \geqslant 0$.
Тогда $\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}\right)^2 = c^2$; $x - 2 + 7 - x + 2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2$; $2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2 - 5$. Отсюда $c^2 \geqslant 5$. Так как $c \geqslant 0$, то $c \geqslant \sqrt{5}$. $4\left(7x - x^2 + 2x - 14\right) = c^4 - 10c^2 + 25$; $4x^2 - 36x + c^4 - 10c^2 + 81 = 0$.
Так как заданное уравнение должно иметь хотя бы один корень, то и полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь хотя бы один корень. Следовательно, $D = 36^2 - 4 \cdot 4\left(c^4 - 10c^2 + 81\right) \geqslant 0$; $c^4 - 10c^2 \leqslant 0$; $c^2\left(c^2 - 10\right) \leqslant 0$. Учитывая, что $c \geqslant \sqrt{5}$, получаем: $c^2 - 10 \leqslant 0$, $c \leqslant \sqrt{10}$.
Таким образом, $\sqrt{5} \leqslant c \leqslant \sqrt{10}$. Отрезок $\left[\sqrt{5}; \sqrt{10}\right]$ содержит единственное целое число 3.
Подставляя $c = 3$ в заданное уравнение, получаем два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$. Следовательно, $c = 3$ — искомое значение.

Ответ: 3.

557. $2\sqrt{x+3} + \sqrt{11-4x} = c$. (1)
Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных чисел, значит, $c \geqslant 0$. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ 11 - 4x \geqslant 0, \\ c \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{x+3} + \sqrt{11-4x}\right)^2 = c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ 4x + 12 + 4\sqrt{(x+3)(11-4x)} + 11 - 4x = c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ 4\sqrt{11x - 4x^2 + 33 - 12x} = c^2 - 23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ c^2 - 23 \geqslant 0, \\ 16\left(33 - x - 4x^2\right) = \left(c^2 - 23\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ |c| \geqslant \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + \left(c^2 - 23\right)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + \left(c^2 - 23\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $64x^2 + 16x - \left(528 - \left(c^2 - 23\right)^2\right) = 0$. (2)

По условию уравнение (1) должно иметь хотя бы один корень, значит, дискриминант уравнения (2) должен быть неотрицательным числом.

$D \geqslant 0$; $16^2 + 4 \cdot 64 \cdot \left(528 - \left(c^2 - 23\right)^2\right) \geqslant 0$; $529 - \left(c^2 - 23\right)^2 \geqslant 0$; $\left(c^2 - 23\right)^2 \leqslant 529$; $\left|c^2 - 23\right| \leqslant 23$; $-23 \leqslant c^2 - 23 \leqslant 23$; $0 \leqslant c^2 \leqslant 46$; $|c| \leqslant \sqrt{46}$.

Учитывая, что $c \geqslant \sqrt{23}$, имеем:

$$\begin{cases} c \geqslant \sqrt{23}, \\ -\sqrt{46} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}; \end{cases} \quad \sqrt{23} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}.$$

Отрезок $\left[\sqrt{23}; \sqrt{46}\right]$ содержит два целых числа: 5 и 6.

Проверка показала, что при $c = 5$ уравнение (1) имеет один корень, при $c = 6$ два корня (выполните самостоятельно).

Ответ: 5; 6.

558. Найдём координаты точки пересечения прямых $3x + ay + 1 = 0$ и $2x - 3y - 4 = 0$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + ay = -1, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на -3, а затем сложим полученные уравнения: $(2a+9)y = -14$; $y = -\frac{14}{2a+9}$; $a \neq -4{,}5$.

б) Умножим первое уравнение системы на 3, второе — на a, получим:

$9x + 3ay = -3$ и $2ax - 3ay = 4a$, сложим: $(9+2a)x = 4a - 3$, $x = \frac{4a-3}{9+2a}$,

$a \neq -4{,}5$.

$\left(\frac{4a-3}{9+2a}; -\frac{14}{2a+9}\right)$ — искомые координаты. При $a = -4{,}5$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи точка находится в третьей координатной четверти, значит, и абсцисса, и ордината — отрицательные числа. Найдём значения параметра a ($a \neq -4{,}5$), решив систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{4a-3}{9+2a} < 0, \\ -\frac{14}{2a+9} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4a-3}{2a+9} < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a-3 < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < \frac{3}{4}, \\ a > -\frac{9}{2}; \end{cases}$$

$-4{,}5 < a < 0{,}75$.

Ответ: $(-4{,}5; 0{,}75)$.

559. Найдём координаты точки пересечения прямых $x + 5y - 3 = 0$ и $ax - 2y - 1 = 0$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ ax - 2y = 1. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на $-a$ и сложим со вторым уравнением; получим: $(-5a-2)y = -3a+1$; $y = \frac{3a-1}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

б) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на 5, и сложим полученные уравнения; получим:

$(2+5a)x = 11$; $x = \frac{11}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

$\left(\frac{11}{5a+2}; \frac{3a-1}{5a+2}\right)$ — координаты точки пересечения заданных прямых.

При $a = -0{,}4$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи, точка находится в четвёртой координатной четверти, значит, её абсцисса положительная, а ордината отрицательная.

Найдём значения параметра a ($a \neq -0{,}4$), решив систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{11}{5a+2} > 0, \\ \dfrac{3a-1}{5a+2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+2 > 0, \\ a - \frac{1}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -0{,}4, \\ a < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$-0{,}4 < a < \dfrac{1}{3}$ — решение системы неравенств.

Ответ: $\left(-0{,}4; \frac{1}{3}\right)$.

560. По определению корнем уравнения является число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. Так как число $2 + \sqrt{5}$ является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$, то $(2+\sqrt{5})^3 - 5(2+\sqrt{5})^2 + 3(2+\sqrt{5}) + b = 0$ — верное числовое равенство, из которого находим, что

$$b = -(2+\sqrt{5})^3 + 5(2+\sqrt{5})^2 - 3(2+\sqrt{5}) =$$
$$= -8 - 12\sqrt{5} - 30 - 5\sqrt{5} + 20 + 20\sqrt{5} + 25 - 6 - 3\sqrt{5} = 1.$$

Итак, $b = 1$.

Ответ: $b = 1$.

561. Точка $M(3; 1)$ лежит вне заданной окружности, следовательно, через неё можно провести две касательные к этой окружности. Подставляя координаты этой точки в общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, получим $1 = 3k + b$; $b = 1 - 3k$. Следовательно, уравнения прямых, проходящих через точку M, имеют вид $y = kx + 1 - 3k$.

Каждая из прямых должна иметь с данной окружностью одну общую точку. Следовательно, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = kx + 1 - 3k \end{cases}$ должна иметь относительно x и y единственное решение.

Подставляя значение y из второго уравнения системы в первое, получим: $x^2 + (kx + 1 - 3k)^2 = 5$; $\left(1 + k^2\right)x^2 + 2\left(k - 3k^2\right)x + 9k^2 - 6k - 4 = 0$.

Это уравнение имеет один корень, если

$D = 4\left(k-3k^2\right)^2 - 4\left(1+k^2\right)\left(9k^2-6k-4\right) = 0$; $2k^2 - 3k - 2 = 0$; $k_1 = -0{,}5$, $k_2 = 2$. Тогда $b_1 = 1 - 3k_1 = 2{,}5$, $b_2 = 1 - 3k_2 = -5$.

14 Зак № 263

Таким образом, искомые уравнения касательных имеют вид:
$y = -0{,}5x + 2{,}5$ и $y = 2x - 5$.

Ответ: $y = -0{,}5x + 2{,}5$, $y = 2x - 5$.

562. 1) Пусть $a = 0$, тогда $y = 2x + 2$; графиком этой функции является прямая, пересекающая ось Ox в одной точке, что удовлетворяет условию задачи.
2) Пусть $a \neq 0$, тогда графиком функции $y = ax^2 + 2x - a + 2$ является парабола.
Для того чтобы она пересекала ось Ox только в одной точке, необходимо равенство нулю дискриминанта уравнения $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$.
$D = 4 - 4a(2 - a) = 0$; $4a^2 - 8a + 4 = 0$; $a^2 - 2a + 1 = 0$; $(a - 1)^2 = 0$; $a = 1$.

Ответ: 0; 1.

563. Найдём координаты точки пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = 2a - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 2a - 3x, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a - 3}{5}, \\ y = \dfrac{4a + 9}{5}. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{2a - 3}{5}; \dfrac{4a + 9}{5}\right)$ — искомые координаты.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой $x = \dfrac{2a - 3}{5}$, лежащей на прямой $y = x$: $y_1 = \dfrac{2a - 3}{5}$.

Поскольку точка пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$ лежит выше прямой $y = x$, то ордината $y_1 = \dfrac{2a - 3}{5} < \dfrac{4a + 9}{5}$.

Найдём значения параметра a, решив неравенство:
$\dfrac{4a + 9}{5} > \dfrac{2a - 3}{5}$; $4a + 9 > 2a - 3$; $2a > -12$; $a > -6$.

Ответ: $a \in (-6; +\infty)$.

564. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$.
Точки $A(1; 2)$, $B(3; a + 1)$, $C(a; 4)$ лежат на прямой, значит, $y(1) = 2$, $y(3) = a + 1$, $y(a) = 4$ и имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} k+b=2, \\ 3k+b=a+1, \\ ak+b=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ 3k+2-k=a+1, \\ ak+2-k=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\dfrac{a-1}{2}, \\ \dfrac{(a-1)^2}{2}=2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\dfrac{a-1}{2}, \\ |a-1|=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a-1=2, \\ a-1=-2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-k, \\ k=\dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $a=-1$, $k=-1$, $b=3$, $y=-x+3$, при $a=3$, $k=1$, $b=1$, $y=x+1$.

Ответ: -1, 3.

565. Найдём абсциссу x_0 точки пересечения прямых $y=5x-3$ и $y=a+1-2x$, приравняв ординаты y. Получаем: $5x_0-3=a+1-2x_0$, откуда $x_0=\dfrac{a+4}{7}$. Тогда ордината точки пересечения прямых $y_0=\dfrac{5a-1}{7}$. Далее находим ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y=-x$: $y_1=-\dfrac{a+4}{7}$. Поскольку точка пересечения прямых $y=5x-3$ и $y=a+1-2x$ лежит ниже прямой $y=-x$, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, условие задачи выполняется при всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству: $-\dfrac{a+4}{7}>\dfrac{5a-1}{7}$; $a<-0{,}5$.

Ответ: $a\in(-\infty;-0{,}5)$.

566. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y=a$ и график функции $y=|x^2-6x+4|$. Графиком функции $y=x^2-6x+4$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_0=\dfrac{-(-6)}{2}=3$, а ордината равна $y_0=3^2-6\cdot3+4=-5$. Отражая часть графика $y=x^2-6x+4$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y=|x^2-6x+4|$, эскиз которого изображён на рисунке 87.

Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 6x + 4|$ в двух точках, при $0 < a < 5$ — в четырёх точках, при $a = 5$ — в трёх точках и при $a > 5$ в двух точках.

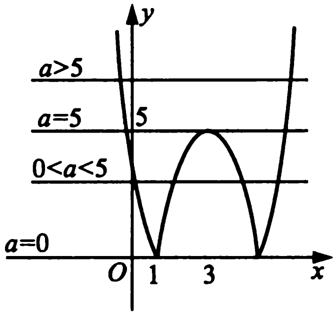

Рис. 87

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 5$; 3 при $a = 5$; 2 при $a > 5$.

567. Определим, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 4x|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, абсцисса вершины которой равна $x_0 = \frac{-(-4)}{2} = 2$, а ордината равна $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, эскиз которого изображён на рисунке 88. Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x|$ в двух точках, при $0 < a < 4$ — в четырёх точках, при $a = 4$ — в трёх точках и при $a > 4$ — в двух точках.

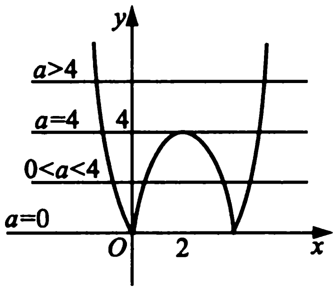

Рис. 88

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.

568. Выразим y из первого уравнения системы $y = nx - 5$ и подставим во второе: $2x + 3n(nx - 5) = 7$. Выразим теперь x через n:

$2x + 3n(nx - 5) = 7 \Leftrightarrow (3n^2 + 2)x - 15n = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{15n + 7}{3n^2 + 2}$. Тогда

$y = nx - 5 = \dfrac{n(15n + 7)}{3n^2 + 2} - 5 = \dfrac{7n - 10}{3n^2 + 2}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{15n + 7}{3n^2 + 2}$, $y = \dfrac{7n - 10}{3n^2 + 2}$. Так как $3n^2 + 2 > 0$, то для того чтобы было $x > 0$, $y < 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств: $\begin{cases} 15n + 7 > 0, \\ 7n - 10 < 0. \end{cases}$ Решением системы является интервал: $-\dfrac{7}{15} < n < \dfrac{10}{7}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0; 1$.

Ответ: $0; 1$.

569. Выразим y из первого уравнения системы: $y = 4 - 2nx$ и подставим во второе: $3x - 2n(4 - 2nx) = 5$. Выразим из этого уравнения x:

$3x - 2n(4 - 2nx) = 5 \Leftrightarrow (4n^2 + 3)x - 8n = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{8n + 5}{4n^2 + 3}$. Тогда

$y = 4 - 2nx = 4 - \dfrac{2n(8n + 5)}{4n^2 + 3} = \dfrac{12 - 10n}{4n^2 + 3}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{8n + 5}{4n^2 + 3}$, $y = \dfrac{12 - 10n}{4n^2 + 3}$. Так как $4n^2 + 3 > 0$, то для того чтобы было $x > 0$, $y > 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств: $\begin{cases} 8n + 5 > 0, \\ 12 - 10n > 0. \end{cases}$

Решением системы является интервал: $-\dfrac{5}{8} < n < \dfrac{6}{5}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0; 1$.

Ответ: $n = 0; 1$.

570. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения условий для соответствующего квадратного уравнения: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 6x + a = 0$ имеем: $D = 36 - 4a^2$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ 36 - 4a^2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 9 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -3)$ (см. рис. 89).

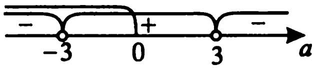

Рис. 89

Ответ: $(-\infty; -3)$.

571. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно для соответствующего квадратного уравнения выполнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 2ax + 3 = 0$ имеем: $D = 4a^2 - 12a$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 12a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3)$.

572. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 4x + a = 0$ имеем: $D = 16 - 4a^2$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 16 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4(2-a)(2+a) < 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство последней системы методом интервалов и пересекая полученное множество значений параметра a с множеством $a > 0$, находим, что $a \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

573. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 8x + a = 0$ имеем: $D = 64 - 4a^2$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ 64 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 16 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -4)$ (см. рис. 90).

Ответ: $(-\infty; -4)$.

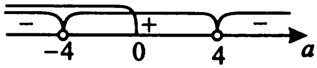

Рис. 90

574. Так как первая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 2$, то $x = 2$ является корнем уравнения $y_1(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_1(x) = 0$, тогда $y_1 = (x-a)(x-2) = x^2 - x(a+2) + 2a$; значит, $b = -(a+2)$, $c = 2a$.

Поскольку $A(1;2)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система:

$$\begin{cases} y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-(a+2)+2a = 2, \\ -1+k+l = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ k+l = 3. \end{cases}$$

Проекция вершины второй параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = \frac{k}{2}$. Аналогично проекция вершины первой параболы — точка $x = \frac{a+2}{2}$. Из условия следует, что $\frac{k}{2} = \frac{a+2}{2} + 1$. Так как $a = 3$, то $\frac{k}{2} = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5$; $k = 7$. Подставив $k = 7$ во второе уравнение последней системы, получим: $l = 3 - k = -4$. Таким образом, $k = 7$, $l = -4$.

Ответ: $k = 7$, $l = -4$

575. Так как вторая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 3$, то $x = 3$ является корнем уравнения $y_2(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_2(x) = 0$, тогда $y_2 = -(x-a)(x-3) = -x^2 + x(a+3) - 3a$; значит, $d = a+3$; $f = -3a$. Поскольку $A(2;3)$ – точка пересечения данных парабол, то справедлива система:

$$\begin{cases} y_1(2) = 3, \\ y_2(2) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 4+2b+c = 3, \\ -4+2(a+3)-3a = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b+c = -1, \ (1) \\ a = -1. \end{cases}$$

Проекция вершины первой параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = -\frac{b}{2}$. Аналогично проекция вершины второй параболы на ось Ox — точка $x = \frac{a+3}{2}$. Из условия следует, что $\frac{a+3}{2} = -\frac{b}{2} + 2$. Так как $a = -1$, то $\frac{b}{2} = 2 - \frac{a+3}{2} = 1$; $b = 2$. Подставив $b = 2$ в уравнение (1), получим: $c = -1 - 4 = -5$. Таким образом, $b = 2$, $c = -5$.

Ответ: $b = 2$, $c = -5$.

576. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = -2$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = -2$; $b = 4$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x + 3$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x + 3$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - 2)x + c - 3 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c-3) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c-3)$. Подставив $b = 4$, получим: $4 = 4(c - 3)$; $c = 4$.

Ответ: $b = 4$; $c = 4$.

577. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = 3$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = 3$; $b = -6$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x - 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x - 5$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - 2)x + c + 5 = 0$ равен нулю: $D = (b - 2)^2 - 4(c + 5) = 0$; $(b - 2)^2 = 4(c + 5)$. Подставив $b = -6$, получим: $64 = 4(c + 5)$; $c + 5 = 16$; $c = 11$.

Ответ: $b = -6$; $c = 11$.

578. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 отрицательны, то, согласно теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b < 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -6 < b < 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in (-6; -2]$.

Ответ: $(-6; -2]$.

579. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 положительны, то, согласно теореме Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow b > 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in [3, +\infty)$.

Ответ: $[3, +\infty)$.

580. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 91), совпадающая при $x < -2$ с графиком гиперболы $y = \frac{4}{x}$, при $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с графиком прямой $y = \frac{x}{2} - 1$ и при $x > 2$ с графиком параболы $y = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Вершина параболы находится в точке $(3; -1)$, ветви направлены вверх. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две общие точки при $-2 < m < -1$ и при $m = 0$.

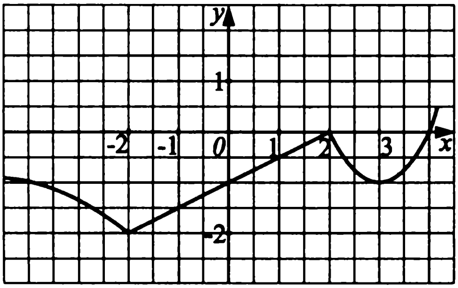

Рис. 91

Ответ: $m \in (-2; -1) \cup \{0\}$.

581. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 92), совпадающая при $x < -1$ с графиком параболы $y = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$, вершина которой находится в точке $(-2; 0)$, а ветви направлены вверх; при $-1 \leqslant x < 0$ с графиком прямой $y = -x + 1$; при $0 \leqslant x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$; при $x > 3$ с графиком гиперболы $y = \frac{12}{x}$. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $0 < m < 1$ и при $2 < m < 4$.

Ответ: $m \in (0; 1) \cup (2; 4)$.

582. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 93), совпадающая при $x \leqslant -3$ с графиком гиперболы $y = \frac{6}{x}$, при $-3 < x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$ и при $x > 3$ с графиком параболы $y = 4x^2 - 32x + 64 = (2x-8)^2$.

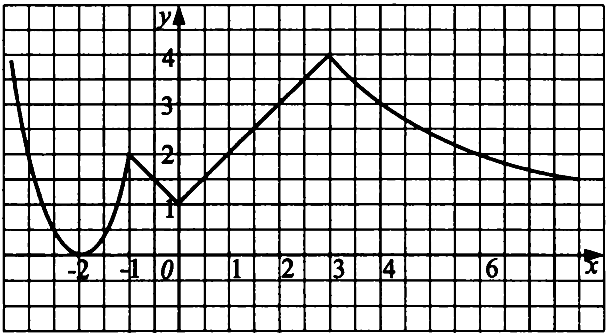

Рис. 92

Вершина параболы находится в точке $(4; 0)$, ветви направлены вверх. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ только одну общую точку при $m = -2$ и при $m > 4$.

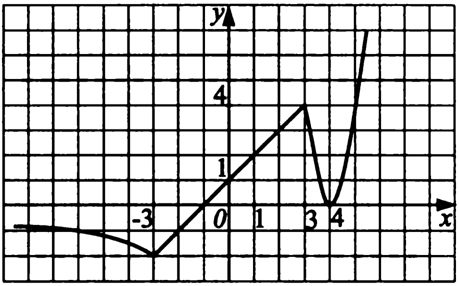

Рис. 93

Ответ: $\{-2\} \cup (4; +\infty)$.

583. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 94), совпадающая при $x \leqslant -1$ с графиком гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$, при $-1 < x \leqslant 1$ с графиком прямой $y = -x$ и при $x > 1$ с графиком параболы $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$. Вершина параболы находится в точке $(2; 0)$, ветви направлены вниз. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $-1 < m < 0$.

Ответ: $(-1; 0)$.

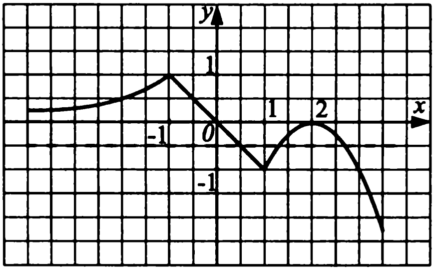

Рис. 94

584. Прямая $y = kx + 4$ не пересекает параболу $y = 3 - 2x - x^2$ тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $3 - 2x - x^2 = kx + 4$ отрицателен.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 = k^2 + 4k + 4 - 4 = k^2 + 4k = k(k+4) < 0$.

Последнее неравенство имеет решение: $-4 < k < 0$. Наибольшее целое значение из этого промежутка $k = -1$.

Ответ: -1.

585. Прямая $y = kx - 3$ имеет с параболой $y = 3 - 2x - x^2$ одну общую точку тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 - 2x + 1 = kx - 3$; $x^2 - (2+k)x + 4 = 0$ равен нулю.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 + 4k - 12 = 0$. Корни: $k_1 = -6$; $k_2 = 2$. При этих значениях k прямая $y = kx - 3$ и парабола $y = x^2 - 2x + 1$ имеют одну общую точку.

Ответ: $-6; 2$.

586. Прямая $y = kx - 2$ не пересекает параболу $y = x^2 - x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x - 1 = kx - 2$; $x^2 - (1+k)x + 1 = 0$ не имеет решений.
То есть $D = (k+1)^2 - 4 < 0$; $k^2 - 2k - 3 < 0$; $-3 < k < 1$.
Так как по условию $k \geqslant 0$, то получаем $0 \leqslant k < 1$.

Ответ: $0 \leqslant k < 1$.

587. Прямая $y = kx - \frac{41}{4}$ и парабола $y = x^2 + 3x - 4$ имеют не более одной точки пересечения тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 + 3x - 4 = kx - \frac{41}{4}$; $x^2 + (3-k)x + 6{,}25$ $D = (3-k)^2 - 25 = k^2 - 6k - 16 \leqslant 0$.

Решениями этого неравенства будут $-2 \leqslant k \leqslant 8$. Но так как k — число отрицательное, то $-2 \leqslant k < 0$.

Ответ: $-2 \leqslant k < 0$.

588. Прямая $y = kx+5$ имеет с параболой $y = x^2-4x+14$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 4x + 14 = kx + 5$ имеет один корень.
То есть $D = (k+4)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 + 8k - 20 = 0$. Корни: $k_1 = -10$, $k_2 = 2$. Но так как по условию k — число отрицательное, то $k = -10$.

Ответ: -10.

589. Прямая $y = kx - 1$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x + 3$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 2x + 3 = kx - 1$; $x^2 + (2 - k) + 4 = 0$ имеет один корень.
То есть $D = (2 - k)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 - 4k - 12 = 0$. Решая полученное уравнение, найдём: $k_1 = 6$, $k_2 = -2$. Но так как по условию $k < 0$, то выбираем ответ $k = -2$.

Ответ: -2.

590. Прямая $y = kx - 13$ пересекает параболу $y = x^2 + 3x - 4$ в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 4 = kx - 13$; $x^2 + (3 - k)x + 9 = 0$ имеет два различных решения.
То есть $D = (3 - k)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 - 6k - 27 > 0$. Это неравенство имеет решения: $k < -3$ или $k > 9$. Так как по условию $k > 0$, то получаем ответ $k > 9$.

Ответ: $k > 9$.

591. Графики функций $y = kx - 5$ и $y = x^2 - 2x - 1$ пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x - 1 = kx - 5$; $x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ имеет два различных корня.
То есть $D = (k + 2)^2 - 16 > 0$; $k^2 + 4k - 12 > 0$; $(k + 6)(k - 2) > 0$; $k \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. Так как по условию $k > 0$, то искомые значения $k \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

592. Графики функций $y = kx - 8$ и $y = x^2 + 5x + 1$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x + 1$; $x^2 + (5 - k)x + 9 = 0$ не имеет действительных корней.
То есть $D = (5-k)^2 - 36 = k^2 - 10k - 11 = (k+1)(k-11) < 0$. Решением последнего неравенства является интервал $-1 < k < 11$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 11$.

Ответ: $0 < k < 11$.

593. Графики функций $y = kx - 11$ и $y = x^2 + 6x + 25$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 11 = x^2 + 6x + 25$; $x^2 + (6 - k)x + 36 = 0$ не имеет действительных корней.

То есть $D = (6 - k)^2 - 144 = k^2 - 12k - 108 = (k + 6)(k - 18) < 0$.

Решением последнего неравенства является интервал $-6 < k < 18$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 18$.

Ответ: $0 < k < 18$.

594. $\begin{cases} 8 - 6x > 4x - 12, \\ 3x + 16 < 5x + 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x < 20, \\ 2x > 16 - 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 8 - 2a. \end{cases}$

Отметим на числовых осях области, на которых выполняется каждое из неравенств (см. рис. 95). Так как по условию задачи система имеет толь-

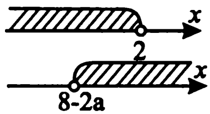

Рис. 95

ко одно целое решение, то $x = 1$, следовательно, $0 \leqslant 8 - 2a < 1$; $-8 \leqslant -2a < -7$; $4 \geqslant a > \frac{7}{2}$; $3{,}5 < a \leqslant 4$.

Ответ: $3{,}5 < a \leqslant 4$.

595. $\begin{cases} 12 + 7x < 9x - 6, \\ x - 9 < 6a - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 < 2x, \\ 3x < 6a + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x < 2a + 3. \end{cases}$

Так как по условию задачи система имеет ровно два целых решения, то $11 < 2a + 3 \leqslant 12$ (см. рис. 96). Из этого неравенства получим: $8 < 2a \leqslant 9$;

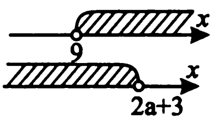

Рис. 96

$4 < a \leqslant \frac{9}{2}$; $4 < a \leqslant 4{,}5$.

Ответ: $4 < a \leqslant 4{,}5$.

596. Заданная парабола имеет с осью Ox не менее одной общей точки тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 + 3x - 2c = 0$ неотрицателен. Учитывая, что $c < 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 9 + 8c \geqslant 0, \\ c < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geqslant -\frac{9}{8}, \\ c < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{9}{8} \leqslant c < 0$.

597. Для того чтобы парабола $y = px^2 - 4x + 3 = 0$ не имела с осью Ox ни одной общей точки, дискриминант уравнения $px^2 - 4x + 3 = 0$ должен быть меньше нуля.

$D = 16 - 12p < 0$; $p > \frac{4}{3}$.

Ответ: $p > \frac{4}{3}$.

598. Графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках, если уравнение $px^2 - 24x + 1 = 12x^2 - 2px - 1$ имеет два различных действительных корня. Выполнив преобразования, получаем: $(12 - p)x^2 - 2(p - 12)x - 2 = 0$. Уравнение $ax^2 + 2mx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $\begin{cases} a \neq 0; \\ \frac{D}{4} > 0. \end{cases}$

В данном случае имеем:

$$\begin{cases} 12 - p \neq 0, \\ (p - 12)^2 + 2(12 - p) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 12, \\ (p - 12)(p - 14) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p < 12, \\ p > 14. \end{array} \right.$$

Ответ: $p \in (-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$.

599. Прямая $y = kx + 10$ и парабола $y = -x^2 - 3x + 6$ не имеют общих точек, если уравнение $kx + 10 = -x^2 - 3x + 6$ не имеет действительных корней, то есть $D < 0$. Получим: $x^2 + (3 + k)x + 4 = 0$; $D = (3 + k)^2 - 16 < 0$; $9 + 6k + k^2 - 16 < 0$; $k^2 + 6k - 7 < 0$; $(k - 1)(k + 7) < 0$; $-7 < k < 1$. По условию $k < 0$, следовательно, $-7 < k < 0$.

Ответ: $-7 < k < 0$.

600. Если уравнение $ax^2 - 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня, то $a \neq 0$ и дискриминант $D > 0$. По теореме Виета произведение корней x_1x_2 приведённого квадратного уравнения есть его свободный член. Обозначим корни уравнения $x^2 - \frac{4}{a}x + \frac{2}{a} = 0$ через x_1 и x_2. Тогда $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{a}$, и так как корни имеют разные знаки, то $\frac{2}{a} < 0$, $a < 0$. В этом случае

$D = \frac{16}{a^2} - \frac{8}{a} > 0$.

Наибольшее целое значение a, удовлетворяющее неравенству $a < 0$, есть $a = -1$.

Ответ: -1.

601. По условию абсцисса вершины данной параболы $x_0 = -\frac{b}{2} = -4$.

Отсюда $b = 8$. Итак, уравнение параболы $y = x^2 + 8x + c$. Так как вершина параболы находится в точке $K(-4; 7)$, то $7 = (-4)^2 + 8(-4) + c$; $7 = 16 - 32 + c$. Отсюда $c = 23$.

Ответ: $b = 8; c = 23$.

602. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 2, \\ y = kx + 2. \end{cases}$

Подставив значение y из второго уравнения системы в первое, получим: $x^2 + (kx-2)^2 = 2$; $(k^2+1)x^2 - 4kx + 2 = 0$. Для того чтобы прямая пересекла окружность в двух точках, дискриминант последнего уравнения должен быть больше нуля: $D = 16k^2 - 8k^2 - 8 > 0$; $k^2 > 1$; $|k| > 1$. Так как k — число отрицательное, то $k < -1$.

Ответ: $k < -1$.

603. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} y = x + k + 1, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{cases}$

Подставив значение y из первого уравнения системы во второе, получим: $(x+1)^2 + (x+k+1-1)^2 = 2$; $2x^2 + 2(1+k)x - 1 + k^2 = 0$.

Прямая пересечёт окружность в двух точках, если дискриминант полученного уравнения будет больше нуля: $\frac{D}{4} = (1+k)^2 + 2 - 2k^2 > 0$; $k^2 - 2k - 3 < 0$; $-1 < k < 3$. Нам нужны неположительные значения k, значит, $-1 < k \leqslant 0$.

Ответ: $-1 < k \leqslant 0$.

604. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $3x^2 - 2ax + 4 = a - 2$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ должен быть меньше нуля. $\frac{D}{4} = a^2 - 18 + 3a$; $a^2 + 3a - 18 < 0$; $-6 < a < 3$.

Ответ: $-6 < a < 3$.

605. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $2x^2 + 2kx + 6 = -k - 6$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $2x^2 + 2kx + 12 + k = 0$ должен быть меньше нуля. $\frac{D}{4} = k^2 - 24 - 2k$; $k^2 - 2k - 24 < 0$; $-4 < k < 6$.

Ответ: $-4 < k < 6$.

606. Прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 3x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 1 = kx - 2$;
$x^2 + (3 - k)x + 1 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (3 - k)^2 - 4 < 0$.
Прямая не имеет общих точек с параболой $y = x^2 - x + 2$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x + 2 = kx - 2$; $x^2 - (1 + k)x + 4 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (1 + k)^2 - 16 < 0$. Следовательно, данная прямая не имеет общих точек с обеими параболами, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (3-k)^2 - 4 < 0, \\ (1+k)^2 - 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 5 < 0, \\ k^2 + 2k - 15 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < 5, \\ -5 < k < 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < k < 3.$$

Ответ: $1 < k < 3$.

607. Прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек с параболами, если уравнения $kx + 5 = -2x^2 - 2x + 3$ и $kx + 5 = x^2 + 5x + 21$ не имеют решений. В этом случае их дискриминанты отрицательны:

$$\begin{cases} (k+2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0, \\ (5-k)^2 - 4 \cdot 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4k - 12 < 0, \\ k^2 - 10k - 39 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < k < 2, \\ -3 < k < 13; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < k < 2.$$

Ответ: $-3 < k < 2$.

612. Данное неравенство эквивалентно неравенству $x^2 + (4a - 3)x + 1{,}75 - 3a \leqslant 0$. Это неравенство не имеет решений, когда дискриминант D соответствующего квадратного уравнения меньше нуля. Вычислим
$D = (4a - 3)^2 - 4(1{,}75 - 3a) = 16a^2 - 12a + 2 = 2(8a^2 - 6a + 1)$. Решим неравенство $8a^2 - 6a + 1 < 0$. Для этого решим уравнение $8a^2 - 6a + 1 = 0$.
Его корни $a_1 = \frac{1}{4}$ и $a_2 = \frac{1}{2}$, а решение неравенства есть $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

613. Неравенство $ax^2 + (a - 3)x + a > 0$ выполняется при любых x, если $a > 0$ и дискриминант уравнения $ax^2 + (a - 3)x + a = 0$
$D = (a - 3)^2 - 4a \cdot a < 0$. Получаем:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 9 - 4a^2 < 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 > 0, \\ a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+3) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решая методом интервалов последнюю систему (см. рис. 97), получим $a > 1$.

Ответ: $a > 1$.

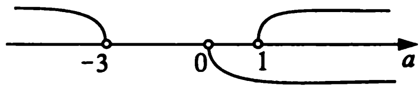

Рис. 97

617. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = y(x)$, имея в виду, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат, а параметр k есть угловой коэффициент этой прямой. Для различных значений k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения (см. рис. 98).

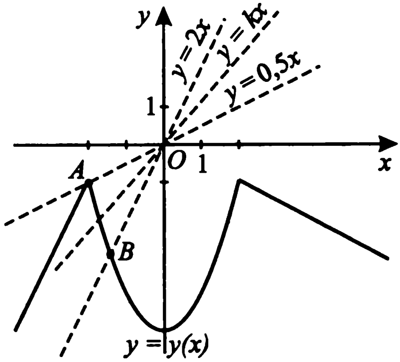

Рис. 98

Прямая $y = kx$ пересекает кривую $y = y(x)$ в двух различных точках тогда и только тогда, когда прямая $y = kx$ будет проходить внутри угла AOB, где прямая OB задана уравнением $y = 2x$, а прямая OA уравнением $y = 0{,}5x$.

При любом другом k прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = y(x)$ либо не более, чем в одной точке, либо в бесконечном числе точек при $k = -0{,}5$.

Таким образом, $0{,}5 < k < 2$.

Ответ: $0{,}5 < k < 2$.

15 Зак. № 263

619. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = \begin{cases} 3x + 3, \ x < 0, \\ x - 2, \ 0 \leqslant x < 1, \\ -2x + 1, \ x \geqslant 1. \end{cases}$

Для различных значений k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения.

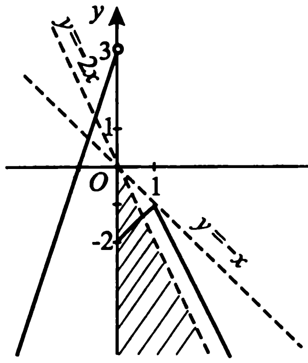

Рис. 99

Из рисунка следует, что $k \in (-\infty; -2]$ или $k = -1$, так как для всех других k прямая $y = kx$ будет иметь с кривой или одну общую точку, или три общие точки, или ни одной.

Ответ: $k \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

621. Построим в одной системе координат данный прямоугольник (с его диагоналями) и прямую $y = kx$ (см. рис. 100).

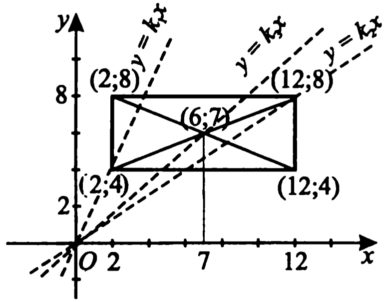

Рис. 100

Пусть $y = k_1x$ — прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(2; 4)$; $y = k_2x$ — прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(12; 8)$; $y = k_3x$ —

прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(6; 7)$. Тогда прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с множеством точек, принадлежащих диагоналям этого прямоугольника, тогда и только тогда, когда $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ и $k \neq k_3$. Легко видеть, что $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{2}{3}$, $k_3 = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{3} \leqslant k < \frac{6}{7}$; $\frac{6}{7} < k \leqslant 2$.

Литература

1. Обязательный минимум содержания основного общего образования по математике (Приказ МО РФ от 19.05.98 №1276).
2. Обязательный минимум содержания среднего (полного) общего образования по математике (Приказ МО РФ от 30.06.99 №56).
3. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование: 2004 г. (Приказ МО РФ от 05.03.04 №1089).
4. *Дорофеев В. Г. и др.* Оценка качества подготовки выпускников основной школы по математике. — М.: Дрофа, 2000.
5. *Лысенко Ф. Ф. и др.* Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2011. Учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2010. — 224 с.
6. Спецификация экзаменационной работы для проведения государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений в 2010 году (в новой форме) по МАТЕМАТИКЕ (АЛГЕБРЕ) [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
7. Кодификаторы элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников IX классов общеобразовательных учреждений для проведения государственной (итоговой) аттестации в 2010 году (в новой форме) по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
8. Экзаменационная работа для проведения государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений в 2010 году (в новой форме) по МАТЕМАТИКЕ (АЛГЕБРЕ). Демонстрационный вариант 1. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
9. Экзаменационная работа для проведения государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений в 2010 году (в новой форме) по МАТЕМАТИКЕ (АЛГЕБРЕ). Демонстрационный вариант 2. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

ГИА-9

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК. 9-й КЛАСС. ПОДГОТОВКА К ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ-2011

Учебно-методическое пособие

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Художественное оформление,
разработка серии *И. Лойкова*
Компьютерная верстка *Л. Шверида*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать 29.07.2010.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,4.
Тираж 20 000 экз. Заказ № **263.**

ООО «ЛЕГИОН-М»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ЗАО «Полиграфобъединение». 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.

ДМИТРОВГРАД

ООО «Учебник»
(8423) 57-48-48

ЕЙСК

ООО «Телеком»
(86132) 69-069

ЕКАТЕРИНБУРГ

ООО «Алис-Альянс»
(343) 355-33-86, 355-43-92
ИП Евтюгина Н.С.
(343) 228-10-91, 228-10-79

ИВАНОВО

ООО «Новая мысль»
(4932) 41-64-16
ИП Ракова О.В.
(4932) 30-04-28

ИЖЕВСК

ООО «Инвис»
(3412) 78-16-24
ООО «Свиток»
(3412) 78-22-24,51-05-37
ООО «Учебно-методическая книга»
(3412) 78-35-04

ЙОШКАР-ОЛА

ИП Бессолицын В.С.
(8362) 42-88-55
ИП Кошкин Н.Ю.
(8362) 63-41-55, 63-44-04
ИП Удальцова З.И.
(8362) 46-24-69

КАЗАНЬ

ИП Крамень И.Н.
(843) 292-46-51
ИП Микашкин В. Н.
8-903-344-90-63
ООО «Пегас»
(843) 272-34-55, 272-34-55, 295-12-71
ООО Торговый дом «Аист-Пресс»
(843) 525-55-40, 525-52-14

КАЛИНИНГРАД

ООО «Лабор»
(4012) 75-87-46

КАЛУГА

ИП Безбородова Т. И.
8-906-643-37-17
ИП Калуженский Г.В.
8-910-910-41-76
ИП Махонина А. А.
(4842) 56-10-10
ИП Настенко Т. Н.
8-910-913-08-49, (4842) 54-71-95

КИРОВ

ИП Кокорин Ю. П.
(8332) 29-40-40, 29-44-08

КОСТРОМА

ИП Аббакумова Э. О.
(4942) 31-53-76, 37-05-21, 37-04-21
ООО «Филлипок»
(4942) 41-50-91, 36-00-72
МУП города Костромы «Школьник»
(4942) 51-42-55, 31-25-58

КРАСНОДАР

ООО «Когорта»
(861) 279-54-21, 279-54-20
ООО «Ремикс»
(861) 267-24-49

КРАСНОЯРСК

ООО фирма «Градъ»
(391) 212-39-94; 226-91-45; 227-82-65;
ООО «Мила-В»
(3912) 40-04-80

КУРГАН

ООО «Алис-К»
(3522) 24-61-04; 24-61-05
ООО «Кристалл»
(3522) 49-23-01

КУРСК

ООО «Аистенок»
(4712) 52-86-10
ИП Захаров С.Ю.
(4712) 35-16-51
ООО «Интеллект Образование XXI»
(4712) 52-97-03

КЫЗЫЛ

ИП Тунева Е. Г.
(39422) 2-29-27, 2-42-86, 2-42-86

ЛЕНИНОГОРСК

ИП Исхакова Ф.Г.
(85595) 5-08-74

ЛИПЕЦК

ООО «ЛКТФ Книжный клуб 36,6»
(4742) 77-40-64, 48-79-32, 22-19-61, 22-19-50

МОСКВА
ООО «Абрис Д»
(495) 229-67-59
ООО ТД «БИБЛИО-ГЛОБУС»
(495) 621-78-39, 781-19-08, 621-19-47
ООО «Учебно-методический Центр «Глобус»
(495) 988-72-83, 721-17-13

НЕВИННОМЫСК
ИП Гагарин Н. В.
(86554) 6-74-94

НЕФТЕКАМСК
ИП Киямова Г. Ф.
(34783) 4-88-83, 9-07-34

НЕФТЕЮГАНСК
ИП Пугачева М.В.
(3463) 25-47-42

НИЖНИЙ НОВГОРОД
ИП Кулемина Л. М.
(8312) 41-92-27, 41-95-57, 41-95-74
ИП Чернышев В. В.
(831) 436-58-14

НОВОРОССИЙСК
ООО «Центр социальных инициатив»
(8617) 63-17-04

НОВОСИБИРСК
ИП Березкина Е. В.
(8383) 223-47-71
ИП Камалетдинов Р.Р.
(383) 28-999-06, 224-63-48
ООО «СибВерк»
(383) 212-50-90

ОМСК
ООО «Принт ТФ»
(3812) 53-52-73, 53-42-73
ООО «Сфера»
8-960-989-48-65
ООО «Форсаж»
(3812) 23-35-71, 57-88-56, 53-89-67

ОРЕЛ
ЗАО «Орловский учебный коллектор»
(4862) 74-48-34, 75-29-11

ОРЕНБУРГ
ООО «Фирма «Фолиант»
(3532) 77-46-92, 77-40-33

ПЕРМЬ
ИП Жмыхова Г.И.
(342), 226-66-91, 226-44-10
ИП Габзалилов М.Х.
(342) 245-24-37

ПЕТРОЗАВОДСК
ООО «Азбука»
(8142) 78-55-03
ООО Книжный магазин «Экслибрис»
(8142) 76-33-76, 76-75-51

ПЛАВСК
ИП Дедук Л. В.
(848752) 6-53-11

Пос. ЛАЗАРЕВСКАЯ Краснодарского края
ИП Зайцев А. А.
8-918-916-71-66, (8622)70-74-13

ПСКОВ
ИП Васильева А. В.
(8112) 66-25-04
ОАО «Псковский областной учебный коллектор»
(8112) 56-93-63, 58-58-36

ПЯТИГОРСК
ПБОЮЛ Бердникова Л.А.
(8793) 33-88-80, 39-47-17
ИП Борисковский В.А.
(88793) 39-02-54, 39-02-53

РОСТОВ-НА-ДОНУ
ООО «Алтай»
(863) 262-37-95
ООО «Донская школа»
(863) 267-56-11
ИП Евдокимов И.А.
(863) 279-39-11, 26-35-331
ОАО «Ростовкнига»
(863) 295-89-32, 278-36-23
ИП Рудницкий А.В.
(863) 291-03-53, 234-82-96

САМАРА
Магазин «Учебная книга»
(846) 995-58-68
ООО «МЕТИДА-ОПТ»
(846) 269-17-17
ООО «Чакона»
(846) 331-22-33

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ООО «Век развития»
(812)924-04-58

ООО «Коллибри»
(812) 703-59-94; 703-59-95; 703-59-75
ООО «Санкт-Петербургский Дом Книги»
(812) 448-23-57

САРАНСК

ГУП РМ «Мордовское книжное издательство»
(8342) 47-05-91

САРАТОВ

ИП Вавилов О.Ю.
(8452) 222-404
ООО «Гемера-Плюс»
(8452) 64-37-37, 64-78-24
ООО «Стрелец и К»
(8452) 52-25-24

СМОЛЕНСК

ИП Воронцов С.В.
(4812) 65-62-94,32-75-21
ИП Кормильцева И. В.
(4812) 38-93-52
ИП Кудашова Н.Н.
(4812)65-86-65

СОЧИ

ООО «Анис»
(8622) 92-33-51,64-83-56
МУП г. Сочи «Книги»
(8622) 64-14-61, 64-69-28

СТАВРОПОЛЬ

ИП Апурин А.И.
(8652) 28-07-30, 28-23-81
ООО «Ставрополь-Сервис-Школа»
(8652) 57-47-27, 72-87-40

СЫКТЫВКАР

ИП Коврижных Д.Г.
(8212) 66-37-35

ТАГАНРОГ

ИП Боринский И.Г.
(8634) 61-03-57

ТАМБОВСКАЯ обл.

ГОУ ДПО «Тамбовский областной ИПК работников образования»
(8-4752) 63-05-08

ТВЕРЬ

ООО «ВООК-СЕРВИС»
(4822) 34-52-11
ООО «Кириллица»
(4822) 32-05-68

ТИХОРЕЦК

ООО «Астрея»
(86196) 7-36-42, 7-36-53

ТОМСК

Книжный магазин-музей «Петр Макушин»
(3822) 51-58-33

ТУЛА

ООО «Система плюс»
(4872) 31-29-23, 70-02-48, 32-60-94

ТЮМЕНЬ

ООО «Книжник»
(3452) 35-72-12
ИП Нестеров В.А.
(3452) 20-56-10

УЛАН-УДЕ

ИП Шашина О. К.
(3012) 22-01-05

УЛЬЯНОВСК

ИП Селезнев Ю. И.
(8422) 94-23-83

УФА

ГУП Башучколлектор РБ
(3472) 63-37-78, 83-95-66
ООО «Мир книги»
(3472) 82-56-30,82-83-92, 82-89-65

ЧЕБОКСАРЫ

Чувашский учколлектор
(8352) 56-08-55, 61-45-76,62-85-57
Чувашский бибколлектор
(8352) 62-15-67,62-03-70, 62-28-46

ЧЕЛЯБИНСК

ООО «ИнтерСервис ЛТД»
(351) 247-74-14, 247-74-13
ООО ПК «Урал-пресс»
(351) 772-69-57, 773-48-37, 771-44-03

ЭЛИСТА

ИП Борлыкова Л.А.
(84722) 2-86-42
ООО «Фирма МСП магазин «Санан»
8-917-681-77-77

ЯРОСЛАВЛЬ

ИП Зелинская Т.В.
(4852) 73-40-07
ГОУ «Институт развития образования»
(4852) 73-93-00,21-06-83

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-9 ПО МАТЕМАТИКЕ

под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА-2011

Предлагаемое пособие включает **28 авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по последнему плану государственной итоговой аттестации за курс основной школы (14 вариантов включают задания, относящиеся к разделу **«Элементы теории вероятностей и статистики»**) и **сборник, содержащий более 600 задач**, которые иллюстрируют основные идеи тестов итоговой аттестации прошлых лет. К двум вариантам тестов и ко многим задачам из сборника приведены **решения**, ко всем тестам и задачам – **ответы**.

Вместе с этим пособием выходит в свет **«Решебник»**, куда включены решения всех заданий повышенного уровня сложности тестов ГИА-9 и всех заданий сборника задач.

ТМ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

ISBN 978-5-91724-048-0