А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса
общеобразовательных учебных заведений

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2009

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Издано за счет государственных средств
Продажа запрещена

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(Приказ от 02.02.2009 г. № 56)

Ответственные за подготовку к изданию:

Главный специалист Министерства образования и науки Украины
Н. С. Прокопенко
Методист высшей категории Института инновационных технологий
и содержания образования *О. А. Литвиненко*

Эксперты, которые провели экспертизу
и рекомендовали учебник к изданию:

И. В. Горобец, заместитель директора лицея «Перспектива» г. Запорожье
О. В. Горбачик, учитель Кузнецовской гимназии Ровенской области
Л. М. Кастранец, методист Чертковского районного методического кабинета Тернопольской области
Е. Н. Бончук, методист по математике методического кабинета Новоодесской РГА Николаевской области
И. Г. Величко, доцент кафедры алгебры и геометрии Запорожского национального университета, кандидат физико-математических наук
Ю. А. Дрозд, заведующий отделом алгебры Института математики НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор
А. И. Глобин, старший научный сотрудник лаборатории математического и физического образования АПН Украины, кандидат педагогических наук

ISBN 978-966-474-061-3

От авторов

ДОРОГИЕ ДЕВЯТИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на четыре параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным *шрифтом***. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены «звездочкой» (*)). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверь себя».

Если после выполнения домашних заданий остается свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет необходимости. Вместе с тем намного удобнее работать, когда есть значительный запас задач. Это дает возможность реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Красным цветом отмечены номера задач, которые рекомендуются для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса на усмотрение учителя можно решать устно.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

Условные обозначения

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

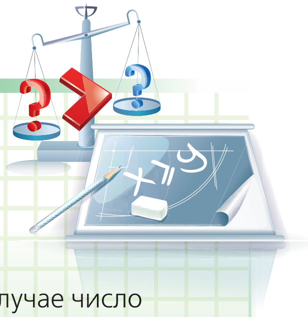
n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

⊙ доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;

▲ окончание доказательства теоремы;

рубрика «Когда сделаны уроки».

§1. НЕРАВЕНСТВА



- В этом параграфе вы узнаете, в каком случае число a считают больше (меньше) числа b, каковы свойства числовых неравенств, в каких случаях можно складывать и умножать числовые неравенства, что называют решением неравенства с одной переменной, решением системы неравенств с одной переменной.
- Вы научитесь оценивать значения выражений, доказывать неравенства, решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной.

1. Числовые неравенства

На практике вам часто приходится сравнивать величины. Например, площадь Украины (603,7 тыс. км^2) больше площади Франции (551 тыс. км^2), высота горы Роман-Кош (1545 м) меньше высоты горы Говерлы (2061 м), расстояние от Киева до Харькова (450 км) равно 0,011 длины экватора.

Когда мы сравниваем величины, нам приходится сравнивать числа. Результаты этих сравнений записывают в виде числовых равенств и неравенств, используя знаки $=$, $>$, $<$.

Если число a больше числа b, то пишут $a > b$; если число a меньше числа b, то пишут $a < b$.

Очевидно, что $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливость этих неравенств следует из правил сравнения действительных чисел, которые вы изучили в предыдущих классах.

Однако числа можно сравнивать не только с помощью изученных ранее правил. Другой способ, более универсальный, основан на таких очевидных соображениях: если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого, если же разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.

Эти соображения подсказывают, что удобно принять такое определение.

Определение. Число a считают больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом. Число a считают меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Это определение позволяет задачу о сравнении двух чисел свести к задаче о сравнении их разности с нулем. Например, чтобы сравнить значения выражений $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$, рассмотрим их разность:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3}) = \frac{2-(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\frac{1}{2+\sqrt{3}} > 0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}} > 2-\sqrt{3}$.

Заметим, что разность чисел a и b может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю, поэтому *для любых чисел a и b справедливо одно и только одно из таких соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

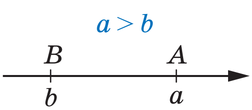


Рис. 1

Если $a > b$, то точка, изображающая число a на координатной прямой, лежит правее точки, изображающей число b (рис. 1).

Рис. 2

Часто в повседневной жизни мы пользуемся высказываниями «не больше», «не меньше». Например, в соответствии с санитарными нормами количество учеников в 9 классе должно быть не больше чем 35. Дорожный знак, изображенный на рисунке 2, означает, что скорость движения автомобиля должна быть не меньше 30 км/ч.

В математике для высказывания «не больше» используют знак $\leqslant$ (читают: «меньше или равно»), а для выражения «не меньше» — знак $\geqslant$ (читают: «больше или равно»).

Если $a < b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \leqslant b$.

Если $a > b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \geqslant b$.

Например, неравенства $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ верны. Заметим, что, например, неравенство $7 \leqslant 5$ неверно.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками **строгого** неравенства, а знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — знаками **нестрогого** неравенства.

ПРИМЕР 1

Докажите, что при любых значениях a верно неравенство

$$(a + 1)(a + 2) > a(a + 3).$$

Решение

Для решения достаточно показать, что при любом a разность левой и правой частей данного неравенства положительна. Имеем:

$$(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2.$$

В таких случаях говорят, что **доказано неравенство** $(a + 1)(a + 2) > a(a + 3)$.

ПРИМЕР 2

Докажите неравенство $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, где a — любое действительное число.

Решение

Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства:

$$(a - 3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 =$$
$$= -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

При любом значении a имеем: $-a^2 \leqslant 0$. Сумма неположительного и отрицательного чисел является числом отрицательным. Значит, $-a^2 + (-1) < 0$. Отсюда следует, что $(a - 3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ при любом значении a.

ПРИМЕР 3

Докажите неравенство $\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Решение

Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Выражение $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ принимает неотрицательные значения при любых неотрицательных значениях переменных a и b. Следовательно, доказываемое неравенство верно.

Заметим, что выражение $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b.

ПРИМЕР 4

Докажите, что $a^2-ab+b^2 \geqslant 0$ при любых значениях a и b.

Решение

Имеем:

$$a^2-ab+b^2=a^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2.$$

Поскольку $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 \geqslant 0$ и $\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ при любых значениях a и b, то $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ при любых значениях a и b.

Следовательно, $a^2-ab+b^2 \geqslant 0$ при любых значениях a и b.

1. В каком случае число a считают больше числа b?
2. В каком случае число a считают меньше числа b?
3. Сколько различных соотношений и каких именно может быть при сравнении чисел a и b?
4. Как расположена на координатной прямой точка, изображающая число a, относительно точки, изображающей число b, если $a > b$?
5. Какой символ используют для выражения «не больше» и как этот символ читают?
6. Какой символ используют для выражения «не меньше» и как этот символ читают?
7. В каком случае верно неравенство $a \leqslant b$?
8. В каком случае верно неравенство $a \geqslant b$?
9. Поясните, какие знаки называют знаками строгого, а какие — нестрогого неравенства.

1.$^\circ$ Сравните числа a и b, если:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

2.$^\circ$ Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равной числу: 1) 4,6; 2) −5,2; 3) 0?

3.$^\circ$ Какое из чисел x и y больше, если:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

4.$^\circ$ Как расположена на координатной прямой точка $A(a)$ относительно точки $B(b)$, если:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

5.$^\circ$ Могут ли одновременно выполняться неравенства:
1) $a > b$ и $a < b$; 2) $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$?

6.$^\circ$ Сравните значения выражений $(a - 2)^2$ и $a(a - 4)$ при значении a, равном: 1) 6; 2) −3; 3) 2. Можно ли по результатам выполненных сравнений утверждать, что при любом действительном значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения? Докажите, что при любом действительном значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения.

7.$^\circ$ Сравните значения выражений $4(b + 1)$ и $b - 2$ при значении b, равном: 1) −1; 2) 0; 3) 3. Верно ли утверждение, что при любом действительном значении b значение выражения $4(b + 1)$ больше соответствующего значения выражения $b - 2$?

8.$^\circ$ Докажите, что при любом действительном значении переменной верно неравенство:
1) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$;
2) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$;
3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$;
4) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$;
5) $(y + 5)(y - 2) \geqslant 3y - 10$;
6) $8m^2 - 6m + 1 \leqslant (3m - 1)^2$;
7) $a(a - 2) \geqslant -1$;
8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$.

9.$^\circ$ Докажите, что при любом действительном значении переменной верно неравенство:
1) $(p - 3)(p + 4) < p(p + 1)$;
2) $(x + 1)^2 > x(x + 2)$;
3) $(a - 5)(a + 2) > (a + 5)(a - 8)$;
4) $y(y + 8) < (y + 4)^2$;
5) $(2a - 5)^2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$;
6) $a^2 + 4 \geqslant 4a$.

10.• Верно ли утверждение:

1) если $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$;
2) если $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$;
3) если $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
4) если $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
5) если $a^2 > 1$, то $a > 1$?

11.• Докажите неравенство:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;
5) $a(a - 3) > 5(a - 4)$;
6) $(a - b)(a + 5b) \leqslant (2a + b)(a + 4b) + ab$.

12.• Докажите неравенство:

1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b - 1) < b(b + 1)$;
4) $(4p - 1)(p + 1) - (p - 3)(p + 3) > 3(p^2 + p)$.

13.• Докажите, что:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$, если $a \geqslant 6$;
2) $ab + 1 > a + b$, если $a > 1$ и $b > 1$;
3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, если $a < -6$.

14.• Докажите, что:

1) $ab(b - a) \leqslant a^3 - b^3$, если $a \geqslant b$;
2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, если $a > 2$.

15.• Сравните:

1) сумму квадратов двух произвольных действительных чисел и их удвоенное произведение;
2) сумму квадратов двух положительных чисел и квадрат их суммы.

16.• Даны три последовательных натуральных числа. Сравните:

1) квадрат среднего из этих чисел и произведение двух других;
2) удвоенный квадрат среднего из этих чисел и сумму квадратов двух других.

17.• Сравните сумму квадратов двух отрицательных чисел и квадрат их суммы.

18.• Как изменится — увеличится или уменьшится — правильная дробь $\frac{a}{b}$, если ее числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

19.• Как изменится — увеличится или уменьшится — неправильная дробь $\frac{a}{b}$, если ее числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

20.• Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных положительных чисел не меньше чем 2.

21.• Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных отрицательных чисел не превышает −2.

22.• Выполняется ли данное неравенство при всех действительных значениях a и b:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1;$ 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

23.• Докажите, что при всех действительных значениях переменной верно неравенство:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2};$ 2) $\frac{(5a + 1)^2}{5} \geqslant 4a.$

24.• Докажите, что если $a < b$, то $a < \frac{a + b}{2} < b.$

25.•• Докажите, что если $a < b < c$, то $a < \frac{a + b + c}{3} < c.$

26.•• Выполняется ли неравенство $\frac{a^2 + 4}{2} \geqslant \sqrt{a^2 + 3}$ при всех действительных значениях a?

27.•• Докажите, что при всех действительных значениях переменной верно неравенство $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2.$

28.•• Докажите неравенство:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0;$
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0;$
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0;$
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a + b + c);$
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab.$

29.•• Докажите неравенство:
1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

30. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$. Сравните с нулем значение выражения:
1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;
2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$.

31. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если:
1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;
2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

32. Поясните, почему при любых действительных значениях переменной (или переменных) верно неравенство:
1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$;
3) $(a + 1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$;
5) $a^2 + b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
7) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2 + 3} > 0$.

33. Сравните с нулем значение выражения, где a — произвольное действительное число:
1) $4 + a^2$;
2) $(4 - a)^2$;
3) $-4 - a^2$;
4) $-4 - (a - 4)^2$;
5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

34. Упростите выражение:
1) $2a(5a - 7) - 5a(3 - 2a)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$;
4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

2. Основные свойства числовых неравенств

В этом пункте рассмотрим свойства числовых неравенств, часто используемые при решении задач. Их называют **основными свойствами числовых неравенств.**

Теорема 2.1. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.***

Доказательство. ⊙ Поскольку по условию $a > b$ и $b > c$, то разности $a - b$ и $b - c$ являются положительными числами. Тогда положительной будет их сумма $(a - b) + (b - c)$. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, разность $a - c$ является положительным числом, а поэтому $a > c$. ▲

Аналогично доказывают свойство: ***если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.***

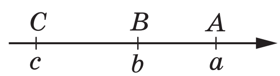


Рис. 3

Теорему 2.1 можно проиллюстрировать геометрически: если на координатной прямой точка A (a) лежит правее точки B (b), а точка B (b) — правее точки C (c), то точка A (a) лежит правее точки C (c) (рис. 3).

Теорема 2.2. ***Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Имеем: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Поскольку по условию $a > b$, то разность $a - b$ является положительным числом. Следовательно, $a + c > b + c$. ▲

Аналогично доказывают свойство: ***если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.***

Поскольку вычитание можно заменить сложением ($a - c = a + (-c)$), то, учитывая теорему 2.2, можно сделать такой вывод.

Если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей правильного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.

Следствие. ***Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.***

Доказательство. ⊙ Пусть неравенство $a > b + c$ верно. Вычтем из обеих его частей число c. Получим:

$a - c > b + c - c$, то есть $a - c > b$. ▲

Теорема 2.3. ***Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$. Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем: $ac - bc = c\,(a - b)$.

По условию $a > b$, следовательно, разность $a - b$ является положительным числом.

Если $c > 0$, то произведение $c\,(a - b)$ является положительным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является положительной, то есть $ac > bc$.

Если $c < 0$, то произведение $c\,(a - b)$ является отрицательным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является отрицательной, то есть $ac < bc$. ▲

Аналогично доказывают свойство: ***если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.***

Поскольку деление можно заменить умножением $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то, учитывая теорему 2.3, можно сделать такой вывод.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Следствие. ***Если $ab > 0$ и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.***

Доказательство. ⊙ Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число ab. Получим правильное неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, то есть $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Отсюда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Обратим внимание: требование, чтобы числа a и b были одного знака ($ab > 0$), является существенным. Действительно, неравенство $5 > -3$ верно, однако неравенство $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ неверно.

В теоремах этого пункта шла речь о строгих неравенствах. Нестрогие неравенства также обладают аналогичными свойствами. Например, если $a \geqslant b$ и c — любое число, то $a + c \geqslant b + c$.

1. Какое из чисел a и c больше, если известно, что $a > b$ и $b > c$?
2. Сформулируйте теорему о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.
3. Сформулируйте следствие из теоремы о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.
4. Сформулируйте теорему об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число.

35.° Известно, что $a > 6$. Верно ли неравенство:
1) $a > 4$; 2) $a \geqslant 5{,}9$; 3) $a > 7$?

36.° Известно, что $a < b$ и $b < c$. Какое из утверждений верно:
1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

37.° Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям неравенства $-3 < 4$ прибавим число 5; число -2;
2) из обеих частей неравенства $-10 < -6$ вычтем число 3; число -4;
3) обе части неравенства $7 > -2$ умножим на число 5; на число -1;
4) обе части неравенства $12 < 18$ разделим на число 6; на число -2.

38.° Известно, что $a > b$. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям данного неравенства прибавим число 8;
2) из обеих частей данного неравенства вычтем число -6;
3) обе части данного неравенства умножим на число 12;
4) обе части данного неравенства умножим на число $-\frac{1}{3}$;

5) обе части данного неравенства разделим на число $\frac{2}{7}$;

6) обе части данного неравенства разделим на число -4.

39.• Известно, что $b > a$, $c < a$ и $d > b$. Сравните числа:

1) a и d;
2) b и c.

40.• Расположите в порядке возрастания числа a, b, c и 0, если $a > b$, $c < b$, $0 < b$ и $0 > c$.

41.• Известно, что $a > 4$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $a - 3$;
2) $2 - a$;
3) $(a - 3)(a - 2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1 - a)^2(4 - a)$.

42.• Известно, что $-2 < b < 1$. Сравните с нулем значение выражения:

1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

43.• Дано: $a > b$. Сравните:

1) $a + 9$ и $b + 9$;
2) $b - 6$ и $a - 6$;
3) $1{,}8a$ и $1{,}8b$;
4) $-a$ и $-b$;
5) $-40b$ и $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ и $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ и $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ и $5 - 8b$.

44.• Известно, что $1 \leqslant m < 2$. Какие из приведенных неравенств верны:

1) $-1 \leqslant -m < -2$;
2) $-2 < -m \leqslant -1$;
3) $-1 \geqslant -m > -2$;
4) $-2 > -m \geqslant -1$?

45.• Дано: $-3a > -3b$. Сравните:

1) a и b;
2) $\frac{2}{7}a$ и $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ и $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ и $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ и $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ и $-5b + 10$.

46.• Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

47.• Дано: $a < b$. Сравните:
1) $a - 5$ и b; 2) a и $b + 6$; 3) $a + 3$ и $b - 2$.

48.• Сравните числа a и b, если известно, что:
1) $a > c$ и $c > b + 3$; 2) $a > c$ и $c - 1 > b + d^2$,
где c и d — некоторые действительные числа.

49.• Сравните числа a и 0, если:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

50.• Дано: $a > -2$. Докажите, что:
1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$.

51.• Дано: $b \leqslant 10$. Докажите, что:
1) $5b - 9 \leqslant 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

52.• Верно ли утверждение:
1) если $a > b$, то $a > -b$;
2) если $a > b$, то $2a > b$;
3) если $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
4) если $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;
5) если $a > b + 2$ и $b - 3 > 4$, то $a > 9$;
6) если $a > b$, то $ab > b^2$;
7) поскольку $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
8) поскольку $5 > 3$, то $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

53.•• Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части неравенства $a > 2$ умножим на a;
2) обе части неравенства $b < -1$ умножим на b;
3) обе части неравенства $m < -3$ умножим на $-m$;
4) обе части неравенства $c > -4$ умножим на c.

54.•• Запишите неравенство, которое получим, если:
1) обе части неравенства $a < -a^2$ разделим на a;
2) обе части неравенства $a > 2a^2$ разделим на a;
3) обе части неравенства $a^3 > a^2$ разделим на $-a$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

55. Известно, что $a^2 + b^2 = 18$ и $(a + b)^2 = 20$. Чему равно значение выражения ab?

56. У Дмитрия в 2 раза больше марок, чем у Петра, а у Петра в 2 раза больше марок, чем у Михаила. Какому из данных чисел может быть равным количество марок, имеющихся у Дмитрия?

1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

57. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab} + \dfrac{b}{a + b}$;

2) $\dfrac{a^2 + 9}{a^2 - 9} - \dfrac{a}{a + 3}$;

3) $\dfrac{c + 1}{3c} : \dfrac{c^2 - 1}{6c^2}$;

4) $\dfrac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} : (m + n)$.

58. Моторная лодка за одно и то же время может проплыть 48 км по течению реки или 36 км против течения. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения составляет 2 км/ч?

3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения

Рассмотрим примеры.

1) Если с одного поля собрали не менее 40 т пшеницы, а со второго поля — не менее 45 т, то очевидно, что с двух полей вместе собрали не менее 85 т пшеницы.

2) Если длина прямоугольника не больше, чем 70 см, а ширина — не больше, чем 40 см, то очевидно, что его площадь не больше, чем 2800 см^2.

Выводы из этих примеров интуитивно очевидны. Их справедливость подтверждают следующие теоремы.

Теорема 3.1 (о почленном сложении неравенств). ***Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$. Имеем:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Так как $a > b$ и $c > d$, то разности $a - b$ и $c - d$ являются положительными числами. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной, т. е. $a + c > b + d$. ▲

Аналогично доказывается свойство: ***если** $a < b$ **и** $c < d$, **то** $a + c < b + d$.*

Неравенства $a > b$ и $c > d$ (или $a < b$ и $c < d$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ (или $a < b$ и $c > d$) — **неравенствами противоположных знаков.**

Говорят, что неравенство $a + c > b + d$ получено из неравенств $a > b$ и $c > d$ путем почленного сложения.

Теорема 3.1 означает, что ***при почленном сложении верных неравенств одного знака результатом является верное неравенство того же знака.***

Отметим, что теорема 3.1 справедлива и в случае почленного сложения трех и более неравенств. Например, если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 3.2 (о почленном умножении неравенств). ***Если** $a > b$, $c > d$ **и** a, b, c, d **— положительные числа, то** $ac > bd$.*

Доказательство. ⊙ Рассмотрим разность $ac - bd$. Имеем:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c\,(a - b) + b\,(c - d).$$

По условию $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Следовательно, рассматриваемая разность является положительной. Из этого следует, что $ac > bd$. ▲

Аналогично доказывается свойство: ***если** $a < b$, $c < d$ **и** a, b, c, d **— положительные числа, то** $ac < bd$.*

Говорят, что неравенство $ac > bd$ получено из неравенств $a > b$ и $c > d$ путем почленного умножения.

Теорема 3.2 означает, что ***при почленном умножении верных неравенств одного знака, у которых левые и правые части — положительные числа, результатом является верное неравенство того же самого знака.***

Обратим внимание: требование, чтобы обе части умножаемых неравенств были положительными, является существенным. Действительно, рассмотрим два верных неравенства $-2 > -3$ и $4 > 1$. Умножив почленно эти неравенства, получим верное неравенство $-8 > -3$.

Заметим, что теорема 3.2 справедлива и в случае почленного умножения трех и более неравенств. Например, если a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – положительные числа, причем $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Следствие. ***Если a > b и a, b — положительные числа, то $a^n > b^n$, где n — натуральное число.***

Доказательство. Запишем n верных неравенств $a > b$:

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{matrix}\right\} n \text{ неравенств}$$

Так как a и b — положительные числа, то можем перемножить почленно n записанных неравенств. Получим $a^n > b^n$. ▲

Заметим, что все рассмотренные свойства неравенств справедливы и в случае нестрогих неравенств:

если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$;

если $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac \geqslant bd$;

если $a \geqslant b$ и a, b — положительные числа, то $a^n \geqslant b^n$, где n — натуральное число.

Часто значения величин, являющихся результатами измерений, не точны. Измерительные приборы, как правило, позволяют лишь установить **границы**, между которыми находится точное значение.

Пусть, например, в результате измерения ширины x и длины y прямоугольника было установлено, что $2{,}5$ см $<$ $< x < 2{,}7$ см и $4{,}1$ см $< y < 4{,}3$ см. Тогда с помощью теоремы 3.2 можно оценить площадь прямоугольника. Имеем:

$$\times\begin{array}{c} 2{,}5 \text{ см} < x < 2{,}7 \text{ см} \\ 4{,}1 \text{ см} < y < 4{,}3 \text{ см} \\ \hline 10{,}25 \text{ см}^2 < xy < 11{,}61 \text{ см}^2. \end{array}$$

Вообще, если известны значения границ величин, то, используя свойства числовых неравенств, можно найти границы значения выражения, содержащего эти величины, т. е. **оценить** его значение.

ПРИМЕР 1

Дано: $6 < a < 8$ и $10 < b < 12$. Оцените значение выражения:
1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Решение

1) Применив теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Умножив каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на -1, получим: $-10 > -b > -12$ или $-12 < -b < -10$. Учитывая, что $a - b = a + (-b)$, далее имеем:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \\ \hline -6 < a - b < -2. \end{array}$$

3) Так как $a > 6$ и $b > 10$, то a и b принимают положительные значения. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 60 < ab < 96. \end{array}$$

4) Так как $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ или $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Учитывая, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, имеем:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Умножим каждую часть неравенства $6 < a < 8$ на 3, а каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$:

$6 < a < 8 \,\Big|\cdot 3;$ $\qquad$ $10 < b < 12 \,\Big|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$

$18 < 3a < 24;$ $\qquad$ $-5 > -\frac{1}{2}b > -6;$

$-6 < -\frac{1}{2}b < -5.$

Сложим полученные неравенства:

$$+\begin{array}{r} 18 < 3a < 24 \\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Ответ: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$.

ПРИМЕР 2

Докажите, что $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 12$.

Решение

Так как $\sqrt{24} < 5$ и $\sqrt{47} < 7$, то $\sqrt{24} + \sqrt{47} < 5 + 7 = 12$.

1. Сформулируйте теорему о почленном сложении неравенств.

2. Поясните, какие неравенства называют неравенствами одного знака, а какие – неравенствами противоположных знаков.

3. Что является результатом почленного сложения неравенств одного знака?

4. Сформулируйте теорему о почленном умножении неравенств.

5. Что является результатом почленного умножения неравенств одного знака?

6. Сформулируйте следствие из теоремы о почленном умножении неравенств.

59.° Запишите неравенство, которое получим, если:

1) сложим почленно неравенства $10 > -6$ и $8 > 5$;

2) перемножим почленно неравенства $2 < 7$ и $3 < 4$;

3) перемножим почленно неравенства $1{,}2 > 0{,}9$ и $5 > \frac{1}{3}$.

60.° Запишите неравенство, которое получим, если:

1) сложим почленно неравенства $-9 < -4$ и $-6 < 4$;

2) перемножим почленно неравенства $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$ и $24 < 27$.

61.° Дано: $-3 < a < 4$. Оцените значение выражения:

1) $2a$;	3) $a + 2$;	5) $3a + 1$;	7) $-4a$;
2) $\frac{a}{3}$;	4) $a - 1$;	6) $-a$;	8) $-5a + 3$.

62.° Дано: $2 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

63.° Известно, что $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. Оцените значение выражения:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7} + 1,3$; 4) $0,1\sqrt{7} + 0,3$.

64.° Дано: $5 < a < 6$ и $4 < b < 7$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) ab; 3) $a - b$.

65.° Известно, что $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Оцените значение выражения:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

66.° Дано: $2 < x < 4$. Оцените значение выражения $\frac{1}{x}$.

67.° Оцените среднее арифметическое значений a и b, если известно, что $2,5 < a < 2,6$ и $3,1 < b < 3,2$.

68.° Оцените периметр равнобедренного треугольника с основанием a см и боковой стороной b см, если $10 < a < 14$ и $12 < b < 18$.

69.° Оцените периметр параллелограмма со сторонами a см и b см, если $15 \leqslant a \leqslant 19$ и $6 \leqslant b \leqslant 11$.

70.• Верно ли утверждение:

1) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a + b > 9,2$;
4) если $a > 2$ и $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) если $a > 2$ и $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) если $a > 2$ и $b > 7$, то $ab > 13$;
7) если $a > 2$ и $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) если $a > 2$ и $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) если $a < 2$ и $b < 7$, то $ab < 14$;
10) если $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) если $a < 2$, то $a^2 < 4$;
12) если $a > 2$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) если $a < 2$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) если $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

71.• Дано: $a > 2{,}4$ и $b > 1{,}6$. Сравните:

1) $a+\frac{3}{4}b$ и 3,6;
2) $(a + b)^2$ и 16;
3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ и 6.

72.• Известно, что $a > 3$ и $b > -2$. Докажите, что $5a + 4b > 7$.

73.• Известно, что $a > 5$ и $b < 2$. Докажите, что $6a - 7b > 16$.

74.• Дано: $5 < a < 8$ и $3 < b < 6$. Оцените значение выражения:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

75.• Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцените значение выражения:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

76.• Сравните значения выражений:

1) 2^{24} и 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ и $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ и $0{,}2^{40}$.

77.• Докажите, что периметр четырехугольника больше суммы его диагоналей.

78.• Докажите, что каждая диагональ выпуклого четырехугольника меньше его полупериметра.

79.• Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы его диагоналей.

80.• Докажите утверждение:

1) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;
2) если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

81.• Докажите, что если $a < b < 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

82.• Известно, что $b > 0$ и $a > b$. Является ли верным при всех указанных значениях a и b неравенство:

1) $a^2 + a > b^2 + b$;
2) $a^2 - a > b^2 - b$;
3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;
4) $a+\frac{1}{a} > b+\frac{1}{b}$?

83.•• Докажите, что:

1) $\sqrt{27}+\sqrt{65} > 13$;
2) $\sqrt{14}+\sqrt{15} < 8$;
3) $\sqrt{65}-\sqrt{35} > 2$;
4) $\sqrt{99}-\sqrt{82} < 1$.

84.•• Докажите, что:

1) $\sqrt{55}+\sqrt{35} > \sqrt{120}$;
2) $\sqrt{119}-\sqrt{67} < 3$.

85.•• Сравните:

1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ и $\sqrt{11}+\sqrt{5}$;
2) $2+\sqrt{11}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{10}$;
3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$;
4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}$ и 9.

86.•• Сравните:

1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{14}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

87. Упростите выражение:

1) $\frac{x-3}{x+3}\cdot\left(x+\frac{x^2}{3-x}\right)$;
2) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

88. Упростите выражение:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;
2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

89. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{x^2}{x+4}$; 2) $\frac{x-4}{x^2-4}$; 3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$; 4) $\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x}$?

90. В саду растут яблони и вишни, причем вишни составляют 20 % всех деревьев. Сколько процентов составляет количество яблонь от количества вишен?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

91. Равносильны ли уравнения:

1) $4x+6=2x-3$ и $4x+3=2x-6$;
2) $8x-4=0$ и $2x-1=0$;
3) $x^2+2x-3=0$ и $x^2+x=3-x$;
4) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x^2-1=0$;
5) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x-1=0$;
6) $x^2+1=0$ и $0x=5$?

Повторите содержание пунктов 22; 23 на с. 227, 228.

О некоторых способах доказательства неравенств

В п. 1 было доказано несколько неравенств. Мы использовали такой прием: рассматривали разность левой и правой частей неравенства и сравнивали ее с нулем.

Однако существует и ряд других способов доказательства неравенств. Ознакомимся с некоторыми из них.

Рассуждения «от противного». Само название этого метода отображает его суть.

ПРИМЕР 1

Для любых значений a_1, a_2, b_1, b_2 докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

Решение

Пусть доказываемое неравенство неверно. Тогда найдутся такие числа a_1, a_2, b_1, b_2, что будет верным неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Огюстен Луи Коши (1789–1857)

Выдающийся французский математик, автор более 800 научных трудов.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)

Выдающийся математик XIX в. Родился в г. Баре (ныне Винницкой обл.). В течение многих лет был вице-президентом Петербургской академии наук.

Отсюда:

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$

$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$

$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Последнее неравенство неверно. Полученное противоречие означает, что неравенство (*) верно.

Неравенство (*) является частным случаем более общего неравенства

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \quad (**)$$

Неравенство (**) называют *неравенством Коши–Буняковского*. С его доказательством вы можете ознакомиться на занятиях математического кружка.

Метод использования очевидных неравенств

ПРИМЕР 2

Докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Решение

Очевидно, что при любых значениях a, b, c выполняется такое неравенство:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда: $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geqslant 0;$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ac;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Метод применения ранее доказанного неравенства

В п. 1 мы доказали, что для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Его называют *неравенством Коши для двух чисел*.

Рассмотрим на примере, как можно использовать неравенство Коши при доказательстве других неравенств.

ПРИМЕР 3

Докажите, что для положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

Решение

Применим неравенство Коши для положительных чисел a и $\frac{1}{b}$. Имеем:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Отсюда $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогично доказываем, что $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4$.

Метод геометрической интерпретации

ПРИМЕР 4

Докажите неравенство:

$$\sqrt{99 \cdot 101}+\sqrt{98 \cdot 102}+\ldots+\sqrt{2 \cdot 198}+\sqrt{1 \cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Решение

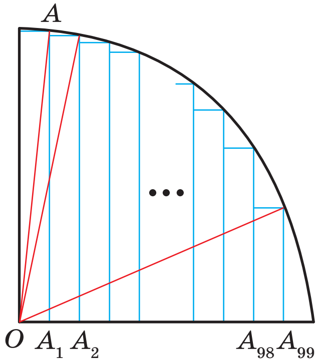


Рис. 4

Рассмотрим четверть окружности с центром O радиуса 1. Впишем в нее ступенчатую фигуру, составленную из 99 прямоугольников, так, как показано на рисунке 4, $OA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{98}A_{99} = \frac{1}{100}$.

Площадь первого прямоугольника $S_1 = OA_1 \cdot AA_1 = OA_1 \cdot \sqrt{1-OA_1^2} =$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}.$$

Для второго прямоугольника имеем:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} \text{ и т. д.}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}.$$

Площадь ступенчатой фигуры меньше площади четверти круга, т. е.

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} + \ldots + \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} < \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите неравенство:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$, если $a > 0$ и $b > 0$;

2) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$;

3) $(a^3 + b)(a + b^3) \geqslant 4a^2b^2$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

4) $(ab + 1)(a + b) \geqslant 4ab$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

7) $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно единице.

4. Неравенства с одной переменной

Рассмотрим такую задачу. Одна из сторон параллелограмма равна 7 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр параллелограмма был больше 44 см?

Пусть искомая сторона равна x см. Тогда периметр параллелограмма равен $(14 + 2x)$ см. Неравенство $14 + 2x > 44$ является математической моделью задачи о периметре параллелограмма.

Если в это неравенство вместо переменной x подставить, например, число 16, то получим верное числовое неравенство $14 + 32 > 44$. В таком случае говорят, что число 16 является **решением неравенства** $14 + 2x > 44$.

Определение. Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Так, каждое из чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ является решением неравенства $14 + 2x > 44$, а число 10, например, не является его решением.

Замечание. Определение решения неравенства аналогично определению корня уравнения. Однако не принято говорить «корень неравенства».

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.

Все решения неравенства образуют **множество решений неравенства**. Если неравенство решений не имеет, то говорят, что множеством его решений является **пустое множество**. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$.

Например, в задаче «решите неравенство $x^2 > 0$» ответ будет таким: «все действительные числа, кроме числа 0».

Очевидно, что неравенство $|x| < 0$ решений не имеет, т. е. множеством его решений является пустое множество.

Определение. Неравенства называют равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Приведем несколько примеров.

Неравенства $x^2 \leqslant 0$ и $|x| \leqslant 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x = 0$.

Неравенства $x^2 > -1$ и $|x| > -2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество действительных чисел.

Так как каждое из неравенств $\sqrt{x} < -1$ и $0x < -3$ решений не имеет, то они также являются равносильными.

1. Что называют решением неравенства с одной переменной?
2. Что означает решить неравенство?
3. Что образуют все решения неравенства?
4. Когда множеством решений неравенства является пустое множество?
5. Какие неравенства называют равносильными?

92.° Какие из чисел -4; $-0{,}5$; 0; $\frac{1}{3}$; 2 являются решениями неравенства:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x > x - 1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \leqslant 5$; 4) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

93.° Какое из данных чисел является решением неравенства $(x-2)^2(x-5) > 0$:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) -1?

94.° Является ли решением неравенства $6x + 1 \leqslant 2 + 7x$ число:

1) $-0{,}1$; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 5) 2?

95.° Назовите любые два решения неравенства $x + 5 > 2x + 3$.

96.° Является ли число 1,99 решением неравенства $x < 2$? Существуют ли решения данного неравенства, которые больше 1,99? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

97.° Является ли число 4,001 решением неравенства $x > 4$? Существуют ли решения данного неравенства, меньшие, чем 4,001? В случае утвердительного ответа приведите пример такого решения.

98.° Множеством решений какого из данных неравенств является пустое множество:

1) $(x-3)^2 > 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$;

2) $(x-3)^2 \geqslant 0$; 4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

99.° Какие из данных неравенств не имеют решений:

1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

100.° Множеством решений какого из данных неравенств является множество действительных чисел:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

101.° Решением какого из данных неравенств является любое действительное число:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x} \geqslant 0$?

102.• Среди данных неравенств укажите неравенство, решением которого является любое действительное число, и неравенство, не имеющее решений:

1) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

103.• Решите неравенство:

1) $\frac{2}{x^2} + 2 > 0$; 5) $\frac{x+2}{x+2} > \frac{2}{3}$; 9) $|x| \geqslant -x^2$;

2) $(x+2)^2 > 0$; 6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$; 10) $|x| > -x^2$;

3) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 7) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$; 11) $|x| > x$;

4) $\frac{x+2}{x+2} > 0$; 8) $x + \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2} + 2$; 12) $|x| \geqslant -x$.

104.• Найдите множество решений неравенства:

1) $|x| > 0$; 3) $|x| < 0$; 5) $|x| > -3$;

2) $|x| \leqslant 0$; 4) $|x| \leqslant -1$; 6) $\left|\frac{1}{x}\right| > -3$.

105.• Равносильны ли неравенства:

1) $\frac{1}{x} < 1$ и $x > 1$; 3) $(x+5)^2 < 0$ и $|x-4| < 0$;

2) $x^2 \geqslant x$ и $x \geqslant 1$; 4) $\sqrt{x} \leqslant 0 \leqslant 0$ и $x^4 \leqslant 0$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

106. Решите уравнение:

1) $9 - 7(x+3) = 5 - 6x$;

2) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-4}{7} = 1$;

3) $(x+7)^2 - (x-2)^2 = 15$;

4) $5x - 2 = 3(3x-1) - 4x - 4$;

5) $6x + (x-2)(x+2) = (x+3)^2 - 13$;

6) $(x+6)(x-1) - (x+3)(x-4) = 5x$.

107. Велосипедист проехал от села к озеру и вернулся обратно, потратив на весь путь 1 ч. Из села к озеру он ехал со скоростью 15 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите расстояние от села до озера.

5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения. Точно так же свойства числовых неравенств помогут решать неравенства.

Решая уравнение, мы заменяли его другим, более простым уравнением, но равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства.

При замене уравнения на равносильное ему уравнение используют теоремы о перенесении слагаемых из одной части уравнения в другую и об умножении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

Аналогичные правила применяют и при решении неравенств.

- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.
- Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

С помощью этих правил решим неравенство, полученное в задаче о периметре параллелограмма (см. п. 4).

Имеем: $14 + 2x > 44$.

Переносим слагаемое 14 в правую часть неравенства:

$$2x > 44 - 14.$$

Отсюда $2x > 30$.

Разделим обе части неравенства на 2:

$$x > 15.$$

Заметим, что полученное неравенство равносильно исходному неравенству. Множество его решений состоит из всех чисел, которые больше 15. Это множество называют **числовым промежутком** и обозначают $(15; +\infty)$ (читают: «промежуток от 15 до плюс бесконечности»).

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x > 15$, расположены справа от точки, изображающей число 15, и образуют луч, у которого «выколото» начало (рис. 5).

Рис. 5

Ответ может быть записан одним из способов: $(15; +\infty)$ либо $x > 15$.

Заметим, что для изображения на рисунке числового промежутка используют два способа: с помощью либо штриховки (рис. 5, *а*), либо дуги (рис. 5, *б*). Мы будем использовать второй способ.

ПРИМЕР 1

Решите неравенство $3 + \frac{x}{2} \leqslant 7 + x$.

Решение

Перенесем слагаемое x из правой части неравенства в левую, а слагаемое 3 — из левой части в правую и приведем подобные члены:

$$-x + \frac{x}{2} \leqslant 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leqslant 4.$$

Умножим обе части неравенства на -2:

$$x \geqslant -8.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток, который обозначают $[-8; +\infty)$ (читают: «промежуток от -8 до плюс бесконечности, включая -8»).

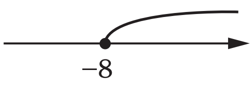


Рис. 6

Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x \geqslant -8$, образуют луч (рис. 6).

Ответ можно записать одним из способов: $[-8; +\infty)$ либо $x \geqslant -8$.

ПРИМЕР 2

Решите неравенство $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Решение

Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$
$$4 - 6x > 3x + 13;$$
$$-3x - 6x > -4 + 13;$$
$$-9x > 9;$$
$$x < -1.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают $(-\infty; -1)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до -1»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x < -1$, расположены слева от точки -1 (рис. 7) и образуют луч, у которого «выколото» начало.

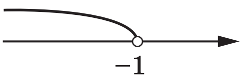


Рис. 7

Ответ можно записать одним из способов: $(-\infty; -1)$ либо $x < -1$.

ПРИМЕР 3

Решите неравенство $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{6}$.

Решение

Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leqslant 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leqslant 1;$$
$$5x \leqslant 4;$$
$$x \leqslant \frac{4}{5}.$$

Множеством решений последнего неравенства является числовой промежуток, который обозначают $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до $\frac{4}{5}$, включая $\frac{4}{5}$»). Точки координатной прямой, изображающие решения неравенства $x \leqslant \frac{4}{5}$, образуют луч (рис. 8).

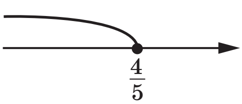


Рис. 8

Ответ можно записать одним из способов: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ либо $x \leqslant \frac{4}{5}$.

ПРИМЕР 4

Решите неравенство $3(2x - 1) + 7 \geqslant 2(3x + 1)$.

Решение

Имеем:

$$6x - 3 + 7 \geqslant 6x + 2;$$
$$6x - 6x \geqslant 2 - 4;$$
$$0x \geqslant -2.$$

Последнее неравенство при любом значении x превращается в верное числовое неравенство $0 \geqslant -2$. Следовательно, искомое множество решений совпадает с множеством всех чисел.

Ответ: x — любое число.

Этот ответ можно записать иначе: $(-\infty; +\infty)$ (читают: «промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности»). Этот числовой промежуток называют **числовой прямой**.

ПРИМЕР 5

Решите неравенство $4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9)$.

Решение

Имеем:

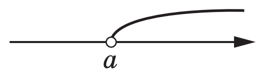
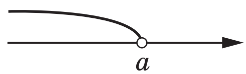
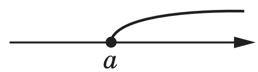
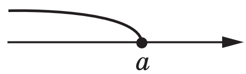
$$4x - 8 - 1 < 4x - 18;$$
$$4x - 4x < 9 - 18;$$
$$0x < -9.$$

Полученное неравенство при любом значении x превращается в неверное числовое неравенство $0 < -9$.

Ответ можно записать одним из способов: решений нет либо $\varnothing$.

Каждое из неравенств, рассмотренных в примерах 1 – 5, сводилось к равносильному неравенству одного из четырех видов: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа. Такие неравенства называют **линейными неравенствами с одной переменной**.

Приведем таблицу обозначений и изображений изученных числовых промежутков:

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

1. Сформулируйте правила, с помощью которых можно получить неравенство, равносильное данному.
2. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?
3. Как записывают, читают, называют и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $x > a$? $x < a$? $x \geqslant a$? $x \leqslant a$?
4. Решением неравенства является любое число. Как в таком случае записывают, читают и называют промежуток, являющийся множеством решений неравенства?

108.° Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$.

109.° Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:
1) $x < 8$; 2) $x \leqslant -4$; 3) $x \geqslant -1$; 4) $x > 0$.

110.° Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:
1) $x \leqslant 0$; 2) $x \geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x > -1{,}4$; 4) $x < 16$.

111.° Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:
1) $(6;\ +\infty)$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-3{,}4;\ +\infty)$; 4) $[-0{,}9;\ +\infty)$.

112.° Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:
1) $(-\infty;\ -4)$; 2) $(-\infty;\ -6{,}2]$; 3) $(-\infty;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -1{,}8)$.

113.° Каким из данных промежутков принадлежит число -7:
1) $(-\infty;\ -7)$; 2) $[-7;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $(-\infty;\ -6)$?

114.° Какому из данных промежутков не принадлежит число 9:
1) $(8{,}99;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 10)$; 3) $(-\infty;\ 8{,}99]$; 4) $[9;\ +\infty)$?

115.° Решите неравенство:
1) $6x > 18$; 6) $-10x < 0$; 11) $4 - x < 5$;
2) $-2x \geqslant 10$; 7) $2\frac{1}{4}x \leqslant -1\frac{4}{5}$; 12) $5 - 8x \geqslant 6$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$; 8) $-7x > \frac{14}{15}$; 13) $12 + 4x \geqslant 6x$;
4) $0{,}1x \geqslant 0$; 9) $7x - 2 > 19$; 14) $36 - 2x < 4x$;
5) $\frac{3}{4}x > 24$; 10) $5x + 16 \leqslant 6$; 15) $\frac{x+2}{5} < 2$.

116.° Решите неравенство:
1) $5x < 30$; 5) $-3x < \frac{6}{7}$; 9) $13 - 6x \geqslant -23$;
2) $-4x \leqslant -16$; 6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$; 10) $5 - 9x > 16$;
3) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$; 7) $4x + 5 > -7$; 11) $3x + 2 \leqslant -7x$;
4) $-12x \geqslant 0$; 8) $9 - x \geqslant 2x$; 12) $\frac{x-3}{4} > -1$.

117.° Решите неравенство:
1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geqslant 1$; 7) $0x \leqslant 0$;
2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leqslant 2$; 8) $0x > 0$.

118.° Найдите наименьшее целое решение неравенства:
1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

119.° Найдите наибольшее целое решение неравенства:
1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

120.° При каких значениях a выражение $6a + 1$ принимает отрицательные значения?

121.° При каких значениях b выражение $7 - 2b$ принимает положительные значения?

122.° При каких значениях m значения выражения $2 - 4m$ не меньше -22?

123.° При каких значениях n значения выражения $12n - 5$ не больше -53?

124.° При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

125.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{13-2x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x-1}}$.

126.° Решите неравенство:

1) $8x + 2 < 9x - 3$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$;
3) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$;
4) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
6) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

127.° Решите неравенство:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$;
3) $3x - 10 < 6x + 2$;
4) $6x - 3 \geqslant 2x - 25$.

128.° При каких значениях c значения двучлена $9c - 2$ не больше, чем соответствующие значения двучлена $4c + 4$?

129.° При каких значениях k значения двучлена $11k - 3$ не меньше, чем соответствующие значения двучлена $15k - 13$?

130.° Решите неравенство:

1) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{x}{2} < 11$;
2) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{6}$;
3) $\dfrac{5x}{7} - x > -4$;
4) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4} \leqslant x$.

131.° Решите неравенство:

1) $\dfrac{y}{6} - \dfrac{5y}{4} < 1$; 2) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{x}{5} > -2$.

132.• Решите неравенство:

1) $3 - 5(2x + 4) \geqslant 7 - 2x$;
2) $6x - 3(x - 1) \leqslant 2 + 5x$;
3) $x - 2(x - 1) \geqslant 10 + 3(x + 4)$;
4) $2(2x - 3{,}5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
5) $(x + 1)(x - 2) \leqslant (x - 3)(x + 3)$;
6) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geqslant (5x + 1)^2$;

7) $\frac{2x-1}{4} \geqslant \frac{3x-5}{5}$;

8) $\frac{3x+7}{4} - \frac{5x-2}{2} < x$;

9) $(x - 5)(x + 1) \leqslant 3 + (x - 2)^2$;

10) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} > 2 + \frac{x}{6}$;

11) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leqslant 1$;

12) $\frac{x-3}{9} - \frac{x+4}{4} > \frac{x-8}{6}$.

133.• Найдите множество решений неравенства:

1) $3(4x + 9) + 5 > 7(8 - x)$;

2) $(2 - y)(3 + y) \leqslant (4 + y)(6 - y)$;

3) $(y + 3)(y - 5) - (y - 1)^2 > -16$;

4) $\frac{3x-7}{5} - 1 \geqslant \frac{2x-6}{3}$;

5) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{2} < 0$;

6) $\frac{y-1}{2} - \frac{2y+1}{8} - y < 2$.

134.• Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $7(x + 2) - 3(x - 8) < 10$;

2) $(x - 4)(x + 4) - 5x > (x - 1)^2 - 17$.

135.• Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\frac{4x+13}{10} - \frac{5+2x}{4} > \frac{6-7x}{20} - 2$;

2) $(x - 1)(x + 1) - (x - 4)(x + 2) \geqslant 0$.

136.• Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство $x - \frac{x+7}{4} - \frac{11x+30}{12} < \frac{x-5}{3}$?

137.• Сколько натуральных решений имеет неравенство $\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}$?

138.• При каких значениях x верно равенство:

1) $|x - 5| = x - 5$;   2) $|2x + 14| = -2x - 14$?

139.• При каких значениях y верно равенство:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$;   2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

140.$^\bullet$ При каких значениях a уравнение:
1) $x^2 + 3x - a = 0$ не имеет корней;
2) $2x^2 - 8x + 5a = 0$ имеет хотя бы один действительный корень?

141.$^\bullet$ При каких значениях b уравнение:
1) $3x^2 - 6x + b = 0$ имеет два различных действительных корня;
2) $x^2 - x - 2b = 0$ не имеет корней?

142.$^\bullet$ Турист проплыл на лодке некоторое расстояние по течению реки, а потом вернулся обратно, потратив на все путешествие не более пяти часов. Скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч, а скорость течения — 1 км/ч. Какое наибольшее расстояние мог проплыть турист по течению реки?

143.$^\bullet$ Взяв четыре последовательных целых числа, рассмотрели разность произведений крайних и средних чисел. Найдите четыре таких числа, для которых эта разность больше нуля.

144.$^\bullet$ В коробке находятся синие и желтые шарики. Количество синих шариков относится к количеству желтых как 3 : 4. Какое наибольшее количество синих шариков может быть в коробке, если всего шариков не больше 44?

145.$^\bullet$ В саду растут яблони, вишни и сливы, количества которых относятся как 5 : 4 : 2 соответственно. Каким может быть наименьшее количество вишен, если всего деревьев в саду не менее 120?

146.$^\bullet$ Стороны треугольника равны 8 см, 14 см и a см, где a — натуральное число. Какое наибольшее значение может принимать a?

147.$^\bullet$ Сумма трех последовательных натуральных четных чисел не меньше, чем 85. Найдите наименьшие три числа, удовлетворяющие этому условию.

148.$^\bullet$ Сумма трех последовательных натуральных чисел, кратных 5, не превышает 100. Какие наибольшие три числа удовлетворяют этому условию?

149.$^\bullet$ При каких значениях x определена функция:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{x-2}$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+9}} - \frac{8}{|x|-2}$;
2) $f(x) = \sqrt{24-8x} + \frac{6}{x^2-16}$;
4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{4}{x^2-1}$?

150.• При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{9 - x} + \frac{10}{x + 3}$;

2) $\frac{6}{\sqrt{3x - 21}} + \frac{9}{x^2 - 64}$?

151.•• Решите уравнение:

1) $|x - 3| + x = 15$;

2) $|x + 1| - 4x = 14$;

3) $|3x - 12| - 2x = 1$;

4) $|x + 2| - x = 1$.

152.•• Решите уравнение:

1) $|x + 5| + 2x = 7$;

2) $|3 - 2x| - x = 9$.

153.•• Постройте график функции:

1) $y = |x - 2|$;

2) $y = |x + 3| - 1$;

3) $y = |x - 1| + x$.

154.•• Постройте график функции:

1) $y = |x + 4|$;

2) $y = |x - 5| + 2$;

3) $y = |2x - 6| - x$.

155.•• При каких значениях a уравнение:

1) $4x + a = 2$ имеет положительный корень;

2) $(a + 6)x = 3$ имеет отрицательный корень;

3) $(a - 1)x = a^2 - 1$ имеет единственный положительный корень?

156.•• При каких значениях m уравнение:

1) $2 + 4x = m - 6$ имеет неотрицательный корень;

2) $mx = m^2 - 7m$ имеет единственный отрицательный корень?

157.* Найдите все значения a, при которых имеет два различных действительных корня уравнение:

1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$;

2) $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$;

3) $(a - 3)x^2 - 2(a - 5)x + a - 2 = 0$.

158.* Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение $(a - 2)x^2 + (2a + 1)x + a = 0$.

159.* Существует ли такое значение a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > 3x + 4$;

2) $(a^2 - a - 2)x \leqslant a - 2$?

160.* Существует ли такое значение a, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > -1 - 7x$;

2) $(a^2 - 16)x \geqslant a + 4$?

161.* Для каждого значения a решите неравенство:
1) $ax > 0$;
2) $ax < 1$;
3) $ax \geqslant a$;
4) $2(x - a) < ax - 4$;
5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$.

162.* Для каждого значения a решите неравенство:
1) $a^2x \leqslant 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a + 4)x > 1$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

163. Решите уравнение:
1) $6x - 5x^2 = 0$;
2) $25x^2 = 81$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$;
4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

164. Известно, что m и n — последовательные целые числа. Какое из следующих утверждений всегда является правильным:
1) произведение mn больше, чем m;
2) произведение mn больше, чем n;
3) произведение mn является четным числом;
4) произведение mn является нечетным числом?

165. Сравните значения выражений:
1) $3\sqrt{98}$ и $4\sqrt{72}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ и $\frac{4}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ и $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.

166. Чтобы наполнить бассейн водой через одну трубу, требуется в 1,5 раза больше времени, чем через вторую. Если же открыть одновременно обе трубы, то бассейн наполнится за 6 ч. За сколько часов можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

6. Системы линейных неравенств с одной переменной

Рассмотрим выражение $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Найдем множество допустимых значений переменной x, то есть все значения переменной x, при которых данное выражение имеет смысл. Это множество называют **областью определения выражения**.

Так как подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, то должны *одновременно* выполняться два неравенства $2x - 1 \geqslant 0$ и $5 - x \geqslant 0$. То есть искомые значения переменной x — это все общие решения указанных неравенств.

Если требуется найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо **решить систему неравенств.**

Как и систему уравнений, систему неравенств записывают с помощью фигурной скобки. Так, для нахождения области определения выражения $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 5 - x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Определение. Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, превращающее каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Например, числа 2, 3, 4, 5 являются решениями системы (*), а число 7 не является ее решением.

Решить систему неравенств — это означает найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Все решения системы неравенств образуют **множество решений системы неравенств.** Если система решений не имеет, то говорят, что множеством ее решений является пустое множество.

Например, в задаче «Решите систему неравенств $\begin{cases} 0x \geqslant -1, \\ |x| \geqslant 0 \end{cases}$» ответ будет таким: «множество действительных чисел».

Очевидно, что множество решений системы $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$ состоит из единственного числа 5.

Система $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ решений не имеет, т. е. множеством ее решений является пустое множество.

Решим систему (*). Преобразовав каждое неравенство системы в равносильное ему, получим: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Множество решений последней системы состоит из всех чисел, которые не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 5, т. е. из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читают: «промежуток от $\frac{1}{2}$ до 5, включая $\frac{1}{2}$ и 5»).

Точки, изображающие решения системы (*), расположены между точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ и $B\ (5)$, включая точки A и B (рис. 9). Они образуют отрезок.

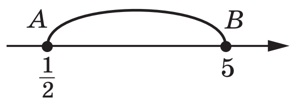


Рис. 9

Ответ к задаче о нахождении области определения выражения $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ может быть записан одним из способов: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ либо $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Заметим, что все общие точки промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ образуют промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 10). В таком случае говорят, что промежуток $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ является **пересечением** промежутков $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$.

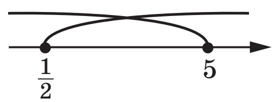


Рис. 10

Записывают: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Промежутки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 5]$ являются множествами решений соответственно неравенств $x \geqslant \frac{1}{2}$ и $x \leqslant 5$. Тогда можно сказать, что *множество решений системы* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *является пересечением множеств решений каждого из неравенств, составляющих систему.*

Следовательно, ***чтобы решить систему неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему.***

ПРИМЕР 1

Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Решение

Имеем: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдем пересечение множеств решений неравенств данной системы, т. е. пересечение промежутков $(-\infty;\ 3)$ и $(-2;\ +\infty)$ (рис. 11). Искомое пересечение состоит из чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 < x < 3$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают $(-2;\ 3)$ и читают: «промежуток от -2 до 3».

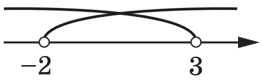


Рис. 11

Ответ можно записать одним из способов: $(-2;\ 3)$ либо $-2 < x < 3$.

ПРИМЕР 2

Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Решение

Имеем: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

С помощью координатной прямой найдем пересечение промежутков $(-\infty;\ 1)$ и $[-2;\ +\infty)$, являющихся множествами решений неравенств данной системы (рис. 12). Искомое пересечение состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 \leqslant x < 1$. Это множество является числовым промежутком, который обозначают $[-2;\ 1)$ и читают: «промежуток от -2 до 1, включая -2».

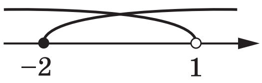


Рис. 12

Ответ можно записать одним из способов: $[-2;\ 1)$ либо $-2 \leqslant x < 1$.

ПРИМЕР 3

Решите систему неравенств $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множеством решений данной системы является пересечение промежутков $(-\infty; 1]$ и $(-2; +\infty)$. Это пересечение — числовой промежуток, который обозначают $(-2; 1]$ и читают: «промежуток от -2 до 1, включая 1».

ПРИМЕР 4

Найдите область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

Решение

Искомая область определения — это множество решений системы $\begin{cases} x-1>0, \\ x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x>1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой пересечение промежутков $(1; +\infty)$ и $[-5; +\infty)$. Этим пересечением является промежуток $(1; +\infty)$ (рис. 13).

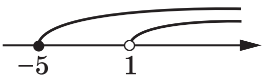
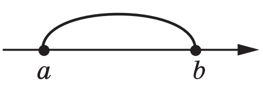
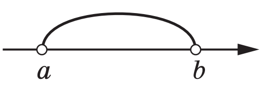
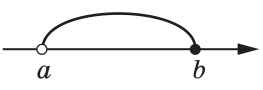
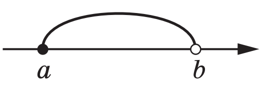


Рис. 13

Ответ: $(1; +\infty)$.

Приведем таблицу обозначений и изображений числовых промежутков, изученных в этом пункте:

Неравенство	Промежуток	Изображение
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

1. Что называют областью определения выражения?
2. В каких случаях говорят, что надо решить систему неравенств?
3. С помощью какого символа записывают систему неравенств?
4. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
5. Что означает решить систему неравенств?
6. Объясните, что называют пересечением двух промежутков.
7. Каким символом обозначают пересечение промежутков?
8. Опишите алгоритм решения системы неравенств.
9. Как записывают, читают и изображают промежуток, являющийся множеством решений неравенства вида: $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?

167.° Какие из чисел -6; -5; 0; 2; 4 являются решениями системы неравенств:
$$\begin{cases} x-2<0, \\ -2x \leqslant 10 ? \end{cases}$$

168.° Решением какой из систем неравенств является число -3:
1) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+1 > -1, \\ x-2 < 0 ? \end{cases}$

169.° Изобразите на координатной прямой промежуток:
1) $(-3;\ 4)$; 2) $[-3;\ 4]$; 3) $[-3;\ 4)$; 4) $(-3;\ 4]$.

170.° Изобразите на координатной прямой и запишите промежуток, который задается неравенством:
1) $0 < x < 5$; 3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$; 4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$.

171.° Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[3;\ 7]$; 2) $(2{,}9;\ 6]$; 3) $[-5{,}2;\ 1)$; 4) $(-2;\ 2)$.

172.° Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:
1) $[-12;\ -6]$; 3) $(-10{,}8;\ 1{,}6]$;
2) $(5;\ 11]$; 4) $[-7{,}8;\ -2{,}9]$.

173.° Изобразите на координатной прямой и запишите пересечение промежутков:

1) $[-1; 7]$ и $[4; 9]$;
2) $[3; 6]$ и $(3; 8)$;
3) $(-\infty; 3{,}4)$ и $(2{,}5; +\infty)$;
4) $(-\infty; 2{,}6)$ и $(2{,}8; +\infty)$;
5) $[9; +\infty)$ и $[11{,}5; +\infty)$;
6) $(-\infty; -4{,}2]$ и $(-\infty; -1{,}3)$.

174.° Укажите на рисунке 14 изображение множества решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

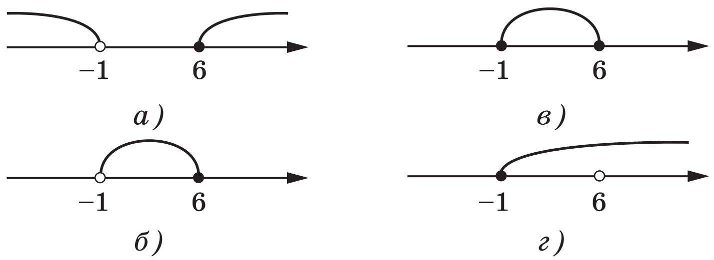


Рис. 14

175.° Укажите на рисунке 15 изображение множества решений двойного неравенства $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

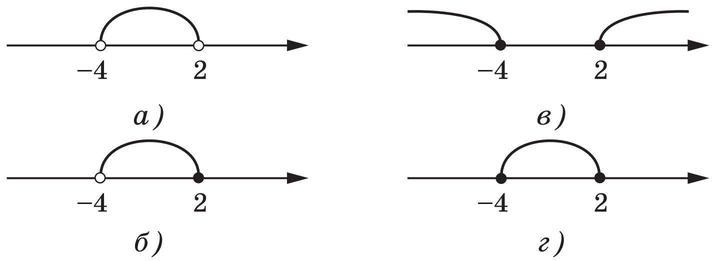


Рис. 15

176.° Какой из данных промежутков является множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

177.° Известно, что $a < b < c < d$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(a; c)$ и $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

178.° Известно, что $m < n < k < p$. Какой из данных промежутков является пересечением промежутков $(m; p)$ и $(n; k)$:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

179.° Изобразите на координатной прямой и запишите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

180.° Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1,5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

181.° Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x + 1}{3} < 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

182.° Найдите множество решений неравенства:

1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0,8 \leqslant 6 - 2x < 1,4$;

2) $-2,4 \leqslant 3x + 0,6 \leqslant 3$; 4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

183.° Решите неравенство:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$; 3) $-1,8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \leqslant \dfrac{x + 1}{4} < 1,5$.

184.° Сколько целых решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10\,? \end{cases}$$

185.° Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 4, \\ 5x + 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

186.° Сколько целых решений имеет неравенство

$$-3 \leqslant 7x - 5 < 16?$$

187.° Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$

188.° Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$

189.• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2)+4x < (x-7)(x+7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x+8)-3(x+2) < 5-x. \end{cases}$

190.• Найдите множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} - \dfrac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1)+7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+12}{6}, \\ 0,3x-19 \leqslant 1,7x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1)-8 < 34-3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

191.• Найдите целые решения системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-1 < 1,7-x, \\ 3x-2 \geqslant x-8; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < 1, \\ 2x - \dfrac{x}{2} \geqslant 10. \end{cases}$

192.• Сколько целых решений имеет система неравенств:

1) $\begin{cases} 4x+3 \geqslant 6x-7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$
2) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} < 2, \\ \dfrac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

193.• Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$;
3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;
2) $\sqrt{3x+5} - \dfrac{1}{\sqrt{15-5x}}$;
4) $\sqrt{12-3x} - \dfrac{5}{x-4}$.

194.• При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{8-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
2) $\sqrt{7x-35} + \dfrac{1}{x^2-5x}$?

195.• Решите неравенство:

1) $-3 < \frac{2x-5}{2} < 4$; 2) $-4 \leqslant 1 - \frac{x-2}{3} \leqslant -3$.

196.• Решите неравенство:

1) $-2 \leqslant \frac{6x+1}{4} < 4$; 2) $1,2 < \frac{7-3x}{5} \leqslant 1,4$.

197.• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3,6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,4 - 8x \geqslant 3,6, \\ 1,5x - 2 < 4, \\ 4,1x + 10 < 1,6x + 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

198.• Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

199.• Одна сторона треугольника равна 4 см, а сумма двух других — 8 см. Найдите неизвестные стороны треугольника, если длина каждой из них равна целому числу сантиметров.

200.•• Решите неравенство:

1) $(x - 3)(x + 4) \leqslant 0$; 4) $\frac{3x+6}{x-9} < 0$;

2) $(x + 1)(2x - 7) > 0$; 5) $\frac{2x-1}{x+2} \leqslant 0$;

3) $\frac{x-8}{x-1} > 0;$; 6) $\frac{5x+4}{x-6} \geqslant 0$.

201.•• Решите неравенство:

1) $(14 - 7x)(x + 3) > 0$; 3) $\frac{5x-6}{x+9} \geqslant 0$;

2) $\frac{x-8}{3x-12} > 0$; 4) $\frac{4x+1}{x-10} \leqslant 0$.

202.•• Решите неравенство:

1) $|x - 2| \leqslant 3{,}6$;
2) $|2x + 3| < 5$;
3) $|x + 3| > 9$;
4) $|7 - 3x| \geqslant 1$;
5) $|x + 3| + 2x \geqslant 6$;
6) $|x - 4| - 6x < 15$.

203.•• Решите неравенство:

1) $|x - 6| \geqslant 2{,}4$;
2) $|5x + 8| \leqslant 2$;
3) $|x + 5| - 3x > 4$;
4) $|x - 1| + x \leqslant 3$.

204.* При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

205.* При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

206.* При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ является промежуток:

1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $[1;\ +\infty)$?

207.* Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

208.* Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

209.* При каких значениях a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно четыре целых решения?

210.* При каких значениях b множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ содержит ровно три целых решения?

211.* При каких значениях a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?

212.* При каких значениях b наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -6?

213.* При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ меньше числа 5?

214.* При каких значениях a корни уравнения $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 8]$?

215.* При каких значениях a один из корней уравнения $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ меньше -2, а другой — больше 3?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

216. Решите уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{x^2 - 16} = \dfrac{3x + 4}{x^2 - 16}$; 2) $\dfrac{5}{x - 3} - \dfrac{8}{x} = 3$.

217. Упростите выражение:

1) $0,5\sqrt{24} - 4\sqrt{40} - \sqrt{150} + \sqrt{54} + \sqrt{1000};$;

2) $\sqrt{8b} + 0,3\sqrt{50b} - 3\sqrt{2b};$;

3) $1,5\sqrt{72} - \sqrt{216} - 0,6\sqrt{450} + 0,5\sqrt{96}.$.

218. Выразите из данного равенства переменную x через другие переменные:

1) $2x - \dfrac{m}{n} = 2$; 2) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{n}$.

219. Известно, что a — четное число, b — нечетное, $a > b$. Значение какого из данных выражений может быть целым числом:

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$; 2) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$; 3) $\dfrac{a}{b}$; 4) $\dfrac{b}{a}$?

220. Сколько килограммов соли содержится в 40 кг 9-процентного раствора?

221. Руда содержит 8 % олова. Сколько надо килограммов руды, чтобы получить 72 кг олова?

222. Каково процентное содержание соли в растворе, если в 350 г раствора содержится 21 г соли?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 1

1. Сравните числа a и b, если $a - b = -3{,}6$.

А) $a > b$; В) $a = b$;
Б) $a < b$; Г) сравнить невозможно.

2. Известно, что $m > n$. Какое из данных утверждений ошибочно?

А) $m - 2 > n - 2$; В) $m + 2 > n + 2$;
Б) $2m > 2n$; Г) $-2m > -2n$.

3. Оцените периметр P равностороннего треугольника со стороной a см, если $0{,}8 < a < 1{,}2$.

А) 1,6 см $< P <$ 2,4 см; В) 3,2 см $< P <$ 4,8 см;
Б) 2,4 см $< P <$ 3,6 см; Г) 1,2 см $< P <$ 1,8 см.

4. Известно, что $2 < x < 3$ и $1 < y < 4$. Оцените значение выражения xy.

А) $4 < xy < 8$; В) $2 < xy < 12$;
Б) $3 < xy < 7$; Г) $6 < xy < 14$.

5. Известно, что $-18 < y < 12$. Оцените значение выражения $\frac{1}{6}y + 2$.

А) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$; В) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$;

Б) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$; Г) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$.

6. Дано: $a > 0$, $b < 0$. Какое из данных неравенств может быть правильным?

А) $a^2 < b^2$; Б) $\frac{a}{b} > 1; > 1$; В) $a - b < 0$; Г) $a^2b^3 > 0$.

7. Множеством решений какого из данных неравенств является множество действительных чисел?

А) $2x > -2$; Б) $2x > 0$; В) $0x > -2$; Г) $0x > 0$.

8. Множеством решений какого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$?

А) $x \geqslant 3$; Б) $x \leqslant 3$; В) $x > 3$; Г) $x < 3$.

9. Найдите решения неравенства $\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{5}$.

А) $x \geqslant \frac{4}{5}$; Б) $x \geqslant \frac{1}{20}$; В) $x \leqslant \frac{4}{5}$; Г) $x \leqslant \frac{1}{20}$.

10. Решите неравенство $-3x + 8 \geqslant 5$.

А) $x \leqslant 1$; Б) $x \geqslant 1$; В) $x \leqslant -1$; Г) $x \geqslant -1$.

11. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}.$$

А) 2; В) 4;
Б) 3; Г) определить невозможно.

12. Чему равно произведение натуральных чисел, принадлежащих области определения выражения $\sqrt{14-3x}$?

А) 4; Б) 10; В) 18; Г) 24.

13. Какая из данных систем неравенств не имеет решений?

А) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant -3. \end{cases}$

14. Найдите множество решений системы неравенств

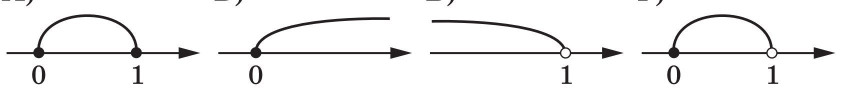
$$\begin{cases} x-1 > 2x-3, \\ 4x+5 > x+17. \end{cases}$$

А) (2; 4); Б) (2; +∞); В) (−∞; 4); Г) ∅.

15. Какой из изображенных числовых промежутков соответствует множеству решений системы неравенств

$$\begin{cases} 8-7x > 3x-2, \\ -2(3x-2{,}6) \leqslant -2\cdot(-2{,}6)? \end{cases}$$

А) Б) В) Г)



16. Сколько целых решений имеет система неравенств

$$\begin{cases} x - \dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4} - \dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0{,}5x > x-4? \end{cases}$$

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

17. Решите неравенство $-3 < \frac{1-2x}{5} - 2 < 1$.

А) (−3; 7); Б) (−7; 3); В) (−7; −3); Г) (3; 7).

18. При каких значениях a уравнение $2x^2 + 6x + a = 0$ не имеет корней?

А) $a < 4{,}5$; Б) $a > 4{,}5$; В) $a > -4{,}5$; Г) $a < -4{,}5$.

Итоги

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - строгие и нестрогие неравенства;
  - неравенство с одной переменной;
  - решение неравенства с одной переменной;
  - множество решений неравенства с одной переменной;
  - равносильные неравенства;
  - линейное неравенство с одной переменной;
  - числовые промежутки;
  - система неравенств с одной переменной;
  - решение системы неравенств с одной переменной;
  - множество решений системы неравенств с одной переменной;
- вы изучили:
  - основные свойства числовых неравенств;
  - правила сложения и умножения числовых неравенств;
- вы научились:
  - доказывать неравенства;
  - оценивать значения выражений;
  - решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной.

§ 2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

- В этом параграфе вы повторите и расширите свои знания о функции и ее свойствах.
- Научитесь, используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.
- Узнаете, какую функцию называют квадратичной, какая фигура является ее графиком, изучите свойства квадратичной функции.
- Научитесь применять свойства квадратичной функции при решении неравенств.
- Расширите свои знания о системах уравнений с двумя переменными, методах их решения, приобретете новые навыки решения систем уравнений.

7. Функция

Перед изучением этого пункта рекомендуем повторить содержание пунктов 31–37 на с. 291–294.

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечет за собой изменение другой величины (зависимой переменной). Изучение этих процессов требует создания их математических моделей. Одной из таких важнейших моделей является **функция.**

С этим понятием вы ознакомились в 7 классе. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть X — множество значений независимой переменной. **Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной.**

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую — буквой y, функцию (правило) — буквой f. Говорят, что переменная y **функционально зависит** от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную еще называют **аргументом функции**.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Так, областью определения обратной пропорциональности $y = \frac{2}{x}$ является множество действительных чисел, кроме 0.

В функциональной зависимости каждому значению аргумента x соответствует определенное значение зависимой переменной y. Значение зависимой переменной еще называют **значением функции** и для функции f обозначают $f(x)$. Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$. Так, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$.

Функцию считают заданной, если указана ее область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Такой способ задания функции называют **аналитическим**. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является область определения выражения, входящего в формулу. Например, если функция задана формулой $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то ее областью определения является область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, т. е. промежуток $(1; +\infty)$.

В таблице приведены функции, которые вы изучали в 7 и 8 классах.

Функция	Область определения	Область значений	График
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Если $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$, если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа b	Прямая
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	Множество, состоящее из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	Множество, состоящее из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	Гипербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ветвь параболы

1. Что такое функция?
2. Как обозначают тот факт, что переменная y функционально зависит от переменной x?
3. Что называют аргументом функции?
4. Что называют областью определения функции?
5. Что называют значением функции?
6. Что называют областью значений функции?
7. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?
8. Какие способы задания функции вы знаете?
9. Что считают областью определения функции, если она задана формулой и при этом не указана область определения?
10. Что называют графиком функции?
11. Какую функцию называют линейной?
12. Что является областью определения и областью значений линейной функции?
13. Что является графиком линейной функции?
14. Какую функцию называют прямой пропорциональностью?
15. Что является графиком функции прямая пропорциональность?

16. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
17. Что является областью определения и областью значений функции обратная пропорциональность?
18. Что является графиком функции обратная пропорциональность?
19. Укажите, что является областью определения, областью значений, графиком функции $y = x^2$.
20. Укажите, что является областью определения, областью значений, графиком функции $y = \sqrt{x}$.

223.° Функция задана формулой $f(x) = -2x^2 + 5x$.
1) Найдите: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
2) Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: 0; 2; −3.
3) Верно ли равенство: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$?

224.° Функция задана формулой $f(x) = 3x - 2$.
1) Найдите $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.
2) Найдите значение x, при котором: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

225.° Каждому натуральному числу, которое больше 10, но меньше 20, поставили в соответствие остаток от деления этого числа на 5.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию таблично.

226.° Функция задана формулой $y = 0{,}4x - 2$. Заполните таблицу соответствующих значений x и y:

x	2		−2,5	
y		−2		0,8

227.° Дана функция $y = -\frac{16}{x}$. Заполните таблицу соответствующих значений x и y:

x	2		−0,4	
y		0,8		−32

228.° На рисунке 16 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-4;\ 5]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значения x, при которых $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значений функции.

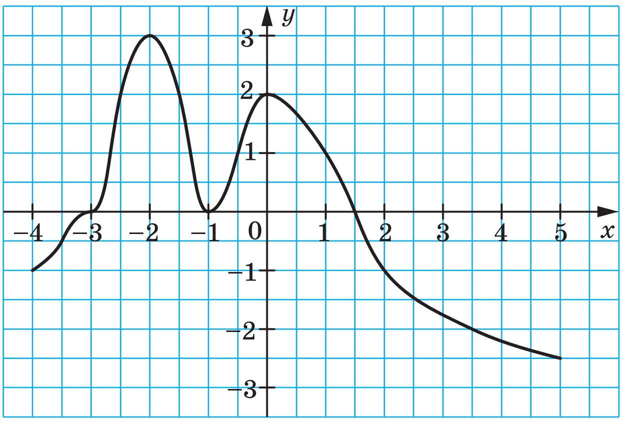


Рис. 16

229.° На рисунке 17 изображен график функции $y = g(x)$, определенной на промежутке $[-4;\ 4]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значения x, при которых $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значений функции.

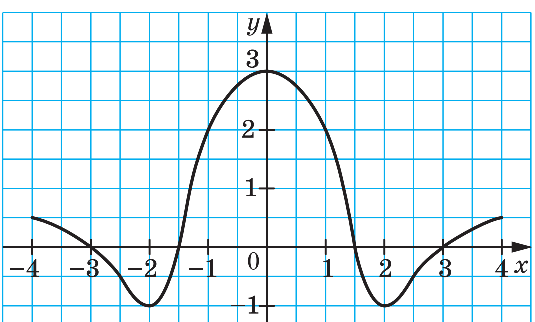


Рис. 17

230.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = 7x - 15$;
2) $f(x) = \frac{8}{x+5}$;
3) $f(x) = \frac{x-10}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x) = \frac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x) = \frac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

231.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x) = \frac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

232.° Постройте график функции:

1) $f(x) = -2x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{4}x$;
3) $f(x) = 3$;
4) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

233.° Постройте график функции:

1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;
2) $f(x) = \frac{8}{x}$.

234.° Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

235.° Найдите, не выполняя построения, точки пересечения с осями координат графика функции:

1) $h(x) = 9 - 10x$;
2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;
3) $s(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

236.• Дана функция $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, & \text{если } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{если } x \geqslant 4. \end{cases}$

Найдите: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

237.• Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} 6, & \text{если } x \leqslant -3, \\ x^2, & \text{если } -3 < x < 1, \\ x, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

238.• Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ -x, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

239.• Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{x+2}{x-5}$; 3) $f(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9}$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-7}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

240.• Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{2}{x+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{4}{x^2-8x}$.

241.• Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 4) $f(x) = |x| + 2$;

2) $f(x) = 5 - x^2$; 5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $f(x) = -7$; 6) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

242.• Найдите область значений функции:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

243.• Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

1) множество действительных чисел, кроме чисел 1 и 2;
2) множество всех чисел, которые не меньше 5;
3) множество всех чисел, которые не больше 10, кроме числа −1;
4) множество, состоящее из одного числа −4.

244.•• Найдите область определения и постройте график функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$; 2) $f(x) = \dfrac{12x-72}{x^2-6x}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

245.•• Найдите область определения и постройте график функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

246. Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $6x^2 + 11x - 2$;

2) $-x^2 + 2x + 35$; 4) $\dfrac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

247. Вычислите значение выражения:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$; 3) $\dfrac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;

2) $\dfrac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$; 4) $\dfrac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

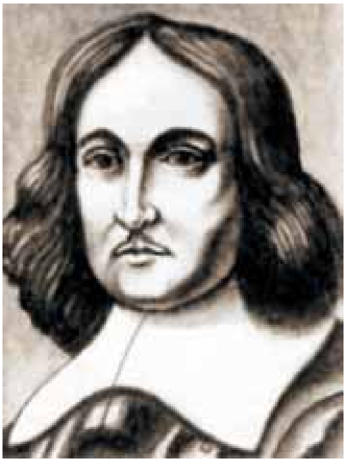
248. Цена двух шкафов была одинаковой. Цену первого шкафа сначала повысили на 20 %, а потом снизили на 10 %. Цену второго шкафа, наоборот, сначала снизили на 10 %, а потом повысили на 20 %. Цена какого шкафа стала больше?

249. Расстояние между городами A и B составляет 120 км. Через 2 ч после выезда из города A мотоциклист задержался у железнодорожного переезда на 6 мин. Чтобы прибыть в город B в запланированное время, он увеличил скорость на 12 км/ч. С какой скоростью двигался мотоциклист после задержки?

Из истории развития понятия функции

Определение функции, которым вы пользуетесь на данном этапе изучения математики, появилось сравнительно недавно — в первой половине XIX века. Оно формировалось более 200 лет под влиянием бурных споров выдающихся математиков нескольких поколений.

Исследованием функциональных зависимостей между величинами начали заниматься еще ученые древности. Этот



Пьер Ферма

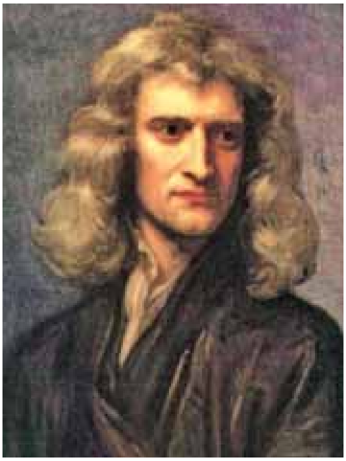
Рене Декарт

поиск нашел отражение в открытии формул для вычисления площадей и объемов некоторых фигур. Примерами табличного задания функций могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и арабов.

Однако лишь в первой половине XVII века своим открытием метода координат выдающиеся французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт (1596–1650) заложили основы для возникновения понятия функции. В своих работах они исследовали изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы.

Важную роль в формировании понятия функции сыграли работы великого английского ученого Исаака Ньютона (1643–1727). Под функцией он понимал величину, которая изменяет свое значение с течением времени.

Термин «функция» (от латинского *functio* — совершение, выполнение) ввел немецкий математик Георг Лейбниц (1646–1716).



Исаак Ньютон

Георг Лейбниц

Иоганн Бернулли

Он и его ученик, швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667–1748) под функцией понимали формулу, связывающую одну переменную с другой, то есть отождествляли функцию с одним из способов ее задания.

Дальнейшему развитию понятия функции во многом способствовало выяснение истины в многолетнем споре выдающихся математиков Леонарда Эйлера (1707–1783) и Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783), одним из пред-

Леонард Эйлер

Жан Лерон Д'Аламбер

Николай Лобачевский

Петер Дирихле

метов которого было выяснение сути этого понятия. В результате был сформирован более общий взгляд на функцию как зависимость одной переменной величины от другой, в котором это понятие жестко не связывалось со способом задания функции.

В 30-х годах XIX века идеи Эйлера получили дальнейшее развитие в работах выдающихся ученых: русского математика Николая Лобачевского (1792–1856) и немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805–1859). Именно тогда появилось такое определение: переменную величину y называют функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное значение величины y.

Такое определение функции можно и сегодня встретить в школьных учебниках. Однако более современный подход — это трактовка функции как *правила, с помощью которого по значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*.

Когда на рубеже XIX и XX веков возникла теория множеств и стало ясно, что элементами области определения и области значений совсем не обязательно должны быть числа, то под функцией стали понимать *правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y*.

8. Свойства функции

Часто о свойствах объекта можно судить по его изображению: фотографии, рентгеновскому снимку, рисунку и т. п.

«Изображением» функции может служить ее график. Покажем, как график функции позволяет определить некоторые ее свойства.

На рисунке 18 изображен график некоторой функции $y = f(x)$.

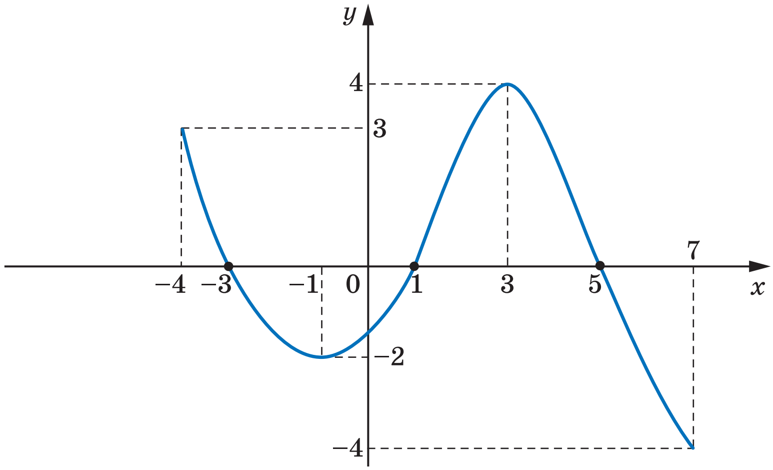


Рис. 18

Ее областью определения является промежуток $[-4; 7]$, а областью значений — промежуток $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значение функции равно нулю.

Определение. **Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют *нулем функции*.**

Так, числа -3, 1, 5 являются нулями данной функции.

Заметим, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ график функции f расположен над осью абсцисс, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ — под осью абсцисс. Это означает, что на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ функция принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ — отрицательные.

Каждый из указанных промежутков называют **промежутком знакопостоянства** функции f.

Определение. Каждый из промежутков, на котором функция принимает значения одного и того же знака, называют промежутком знакопостоянства функции f.

Отметим, что, например, промежуток (0; 5) не является промежутком знакопостоянства данной функции.

Замечание. При поиске промежутков знакопостоянства функции принято указывать промежутки максимальной длины. Например, промежуток (–2; –1) является промежутком знакопостоянства функции f (рис. 18), но в ответ следует включить промежуток (–3; 1), содержащий промежуток (–2; –1).

Если перемещаться по оси абсцисс от –4 до –1, то можно заметить, что график функции идет вниз, то есть значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке [–4; –1] **функция убывает.** С увеличением x от –1 до 3 график функции идет вверх, т.е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке [–1; 3] **функция возрастает.**

Определение. Функцию f называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функцию f называют убывающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Часто используют более короткую формулировку.

Определение. Функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. Функцию называют убывающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей.** Если функция убывает на всей области определения, то ее называют **убывающей.**

Например, на рисунке 19 изображен график функции $y = \sqrt{x}$. Эта функция является возрастающей. На рисунке 20 изображен график убывающей функции $y = -x$. На рисунке 18 изображен график функции, не являющейся ни возрастающей, ни убывающей.

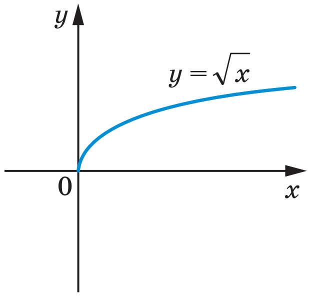


Рис. 19

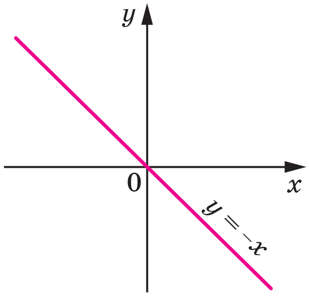


Рис. 20

ПРИМЕР 1

Докажите, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(-\infty; 0]$, причем $x_1 < x_2$. Покажем, что $x_1^2 > x_2^2$, то есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Имеем: $x_1 < x_2$; $-x_1 > -x_2$. Обе части последнего неравенства являются неотрицательными числами. Тогда по свойству числовых неравенств можно записать, что $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, то есть $x_1^2 > x_2^2$.

Заметим, что в подобных случаях говорят, что промежуток $(-\infty; 0]$ является **промежутком убывания** функции $y = x^2$. Аналогично можно доказать, что промежуток $[0; +\infty)$ является **промежутком возрастания** функции $y = x^2$.

В задачах на поиск промежутков возрастания и убывания функции принято указывать промежутки максимальной длины.

ПРИМЕР 2

Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $(0; +\infty)$, причем $x_1 < x_2$. Тогда по свойству числовых неравенств $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Следовательно, данная функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогично доказывают, что функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

Заметим, что нельзя утверждать, что данная функция убывает на всей области определения, то есть является убывающей. Действительно, если, например, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то из неравенства $x_1 < x_2$ не следует, что $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

ПРИМЕР 3

Докажите, что линейная функция $f(x) = kx + b$ является возрастающей при $k > 0$ и убывающей при $k < 0$.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $x_1 < x_2$.

Имеем:

$$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2).$$

Так как $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Если $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, то есть $f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, при $k > 0$ данная функция является возрастающей.

Если $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, то есть $f(x_1) > f(x_2)$. Следовательно, при $k < 0$ данная функция является убывающей.

1. Какое значение аргумента называют нулем функции?
2. Поясните, что называют промежутком знакопостоянства функции.
3. Какую функцию называют возрастающей на некотором промежутке?
4. Какую функцию называют убывающей на некотором промежутке?
5. Какую функцию называют возрастающей?
6. Какую функцию называют убывающей?

250.° На рисунке 21 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

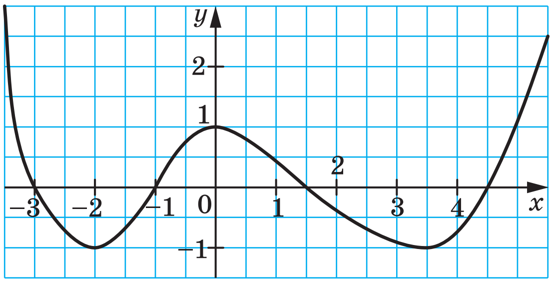


Рис. 21

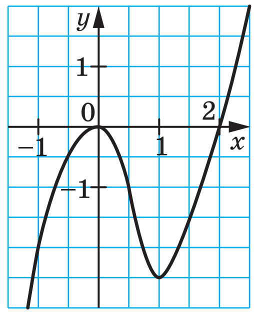


Рис. 22

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента значения функции положительные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

251.° На рисунке 22 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:
1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента значения функции отрицательные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

252.° На рисунке 23 изображен график функции, определенной на промежутке $[-1; 4]$. Используя график, найдите:
1) нули функции;
2) при каких значениях x значения функции отрицательные;
3) промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

253.° На рисунке 24 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Какие из данных утверждений верны:
1) функция убывает на промежутке $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ и при $x = 1$;
5) функция на области определения принимает наименьшее значение при $x = -2$?

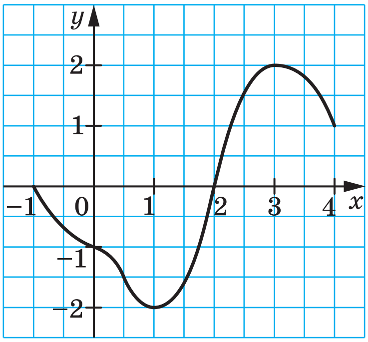


Рис. 23

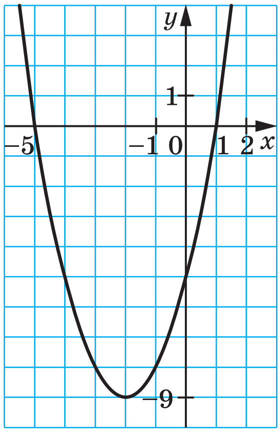


Рис. 24

254.° На рисунке 25 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Используя график, найдите:

1) нули функции;
2) значения x, при которых $y < 0$;
3) промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

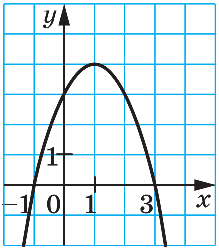


Рис. 25

255.° Возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$; 5) $y = \frac{1}{6}x$;

2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$; 6) $y = 1 - 0{,}3x$?

256.° Найдите нули функции:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$; 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;

2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$; 5) $f(x) = x^3 - 4x$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $f(x) = x^2 + 1$.

257.° Найдите нули функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$; 4) $f(x) = -5$;

2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$; 5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 6) $f(x) = x^2 - x$.

258.° Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = 5x - 15$;
3) $y = x^2 - 2x + 1$;
2) $y = -7x - 28$;
4) $y = \dfrac{9}{3 - x}$.

259.° Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$.

260.• Начертите график какой-либо функции, определенной на множестве действительных чисел, нулями которой являются числа: 1) -2 и 5; 2) -4, -1, 0 и 4.

261.• Начертите график какой-либо функции, определенной на промежутке $[-5; 5]$, нулями которой являются числа -3, 0 и 3.

262.• Начертите график какой-либо функции, определенной на промежутке $[-4; 3]$, такой, что:

1) функция возрастает на промежутке $[-4; -1]$ и убывает на промежутке $[-1; 3]$;
2) функция убывает на промежутках $[-4; -2]$ и $[0; 3]$ и возрастает на промежутке $[-2; 0]$.

263.• Начертите график какой-либо функции, определенной на множестве действительных чисел, которая возрастает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $[1; 4]$.

264.• Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Используя построенный график, укажите нули данной функции, ее промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

265.• Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{если } x < -1, \\ \dfrac{x}{4}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Используя построенный график, укажите нули данной функции, ее промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

266.• При каких значениях a функция $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + a$ имеет два нуля?

267.• При каких значениях a функция $y = x^2 + 6x + a$ не имеет нулей?

268.• При каком наибольшем целом значении n функция $y = (8 - 3n)x - 7$ является возрастающей?

269.• При каких значениях m функция $y = mx - m - 3 + 2x$ является убывающей?

270.• Функция $y = f(x)$ является убывающей. Возрастающей или убывающей является функция (ответ обоснуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

271.• Функция $y = f(x)$ возрастает на некотором промежутке. Возрастает или убывает на этом промежутке функция (ответ обоснуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

272.•• Докажите, что функция:

1) $y = \frac{6}{3 - x}$ возрастает на промежутке $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

273.•• Докажите, что функция:

1) $y = \frac{7}{x + 5}$ убывает на промежутке $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.

274.•• Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ при $k > 0$ и возрастает на каждом из этих промежутков при $k < 0$.

275.* При каких значениях a функция $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + 6 - a$ имеет единственный нуль?

276.* Постройте график функции $f(x) = x^2$, определенной на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$. Для каждого значения a найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

277. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$; 3) $\frac{m^2 - 16m + 63}{m^2 - 81}$;

2) $\frac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$; 4) $\frac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$.

278. Выполните умножение:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})(\sqrt{11} - \sqrt{6})$; 3) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$;

2) $(\sqrt{32} - 5)(\sqrt{32} + 5)$; 4) $(\sqrt{10} + 8)^2$.

279. Два экскаватора разных моделей вырыли котлован за 8 ч. Первый экскаватор может вырыть, работая самостоятельно, такой котлован в 4 раза быстрее, чем второй. За сколько часов может вырыть такой котлован каждый экскаватор, работая самостоятельно?

280. В раствор массой 200 г, содержащий 12 % соли, добавили 20 г соли. Каким стало процентное содержание соли в новом растворе?

9. Как построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$

В 8 классе вы ознакомились с функцией $y = x^2$ и узнали, что ее графиком является фигура, которую называют параболой (рис. 26).

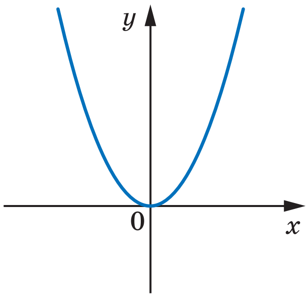


Рис. 26

Покажем, как с помощью графика функции $y = x^2$ можно построить график функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

Построим, например, график функции $y = 2x^2$.

Составим таблицу значений функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$ при одних и тех же значениях аргумента:

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0; 2y_0)$ графика функции $y = 2x^2$. Иными словами, при любом $x \neq 0$ значение функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше соответствующего значения функции $y = x^2$. Следовательно, все точки графика функции $y = 2x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, умноженной на 2 (рис. 27).

Используя график функции $y = x^2$, построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

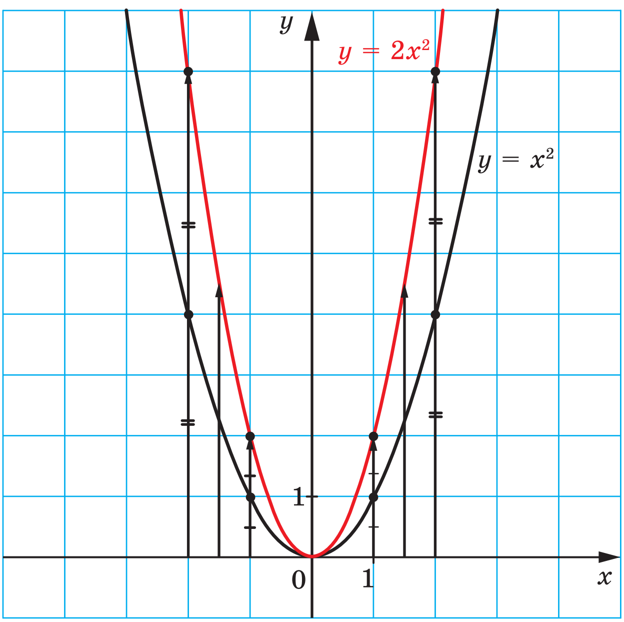


Рис. 27

Очевидно, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует единственная точка $\left(x_0;\ \frac{1}{2}y_0\right)$ графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. Следовательно, все точки графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на $\frac{1}{2}$ (рис. 28).

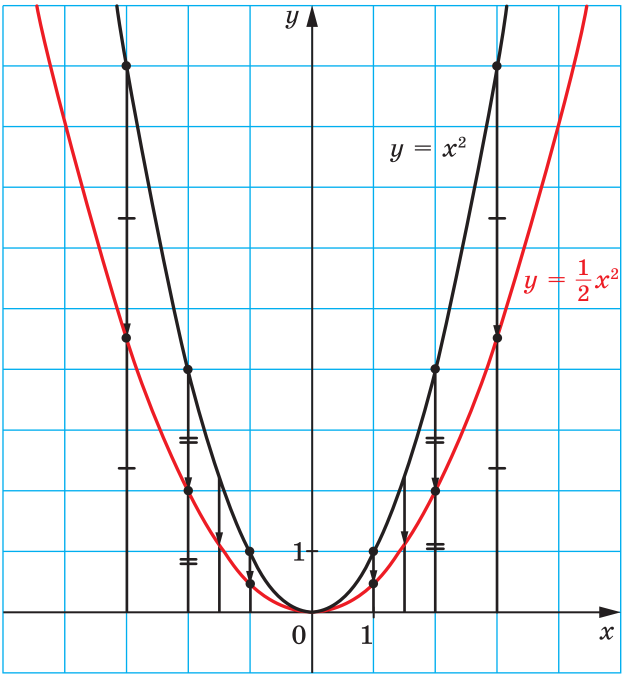


Рис. 28

Рассмотренные примеры подсказывают, как, используя график функции $y = f\,(x)$, можно построить график функции $y = kf\,(x)$, где $k > 0$.

График функции $y = kf\,(x)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f\,(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

На рисунках 29, 30 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ и $y = \frac{3}{x}$.

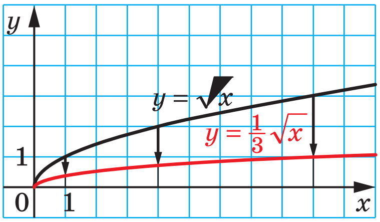


Рис. 29

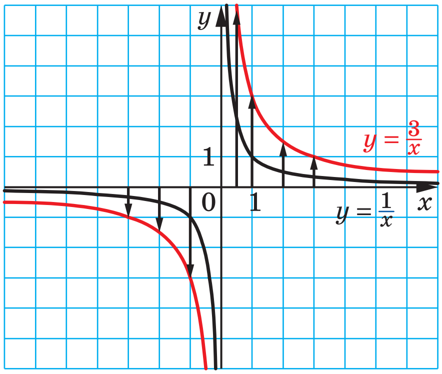


Рис. 30

Говорят, что график функции $y = kf(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ в результате **растяжения в k раз от оси абсцисс**, если $k > 1$, или в результате **сжатия в $\frac{1}{k}$ раз к оси абсцисс**, если $0 < k < 1$.

Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. Каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0; -y_0)$ графика функции $y = -x^2$. Иными словами, при любом $x \neq 0$ значения функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ являются противоположными числами. Следовательно, все точки графика функции $y = -x^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на -1 (рис. 31).

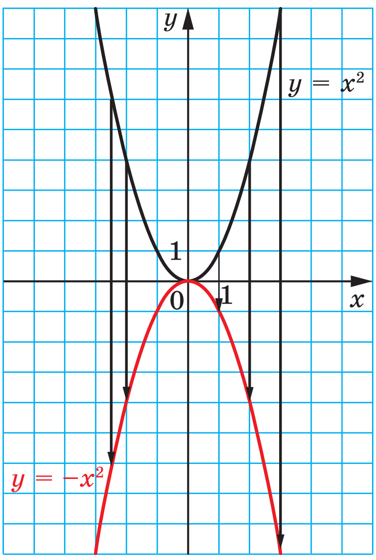


Рис. 31

Теперь понятно, что правило построения графика функции $y = kf(x)$, где $k < 0$, такое же, как и для случая, когда $k > 0$.

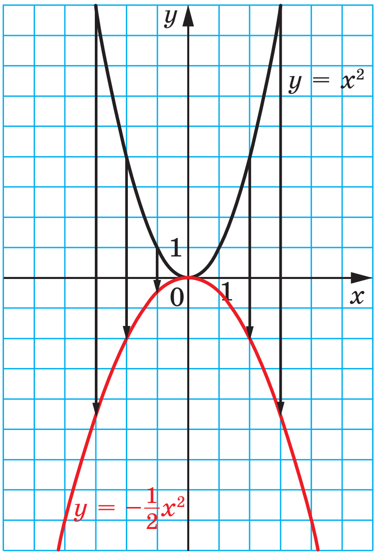


Рис. 32

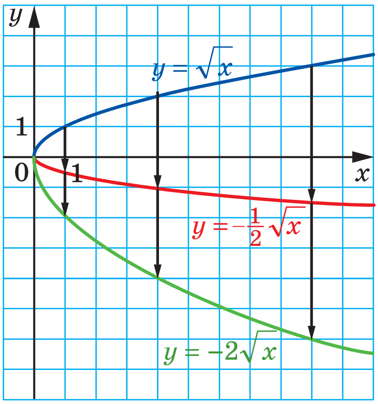


Рис. 33

Например, на рисунке 32 показано, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$.

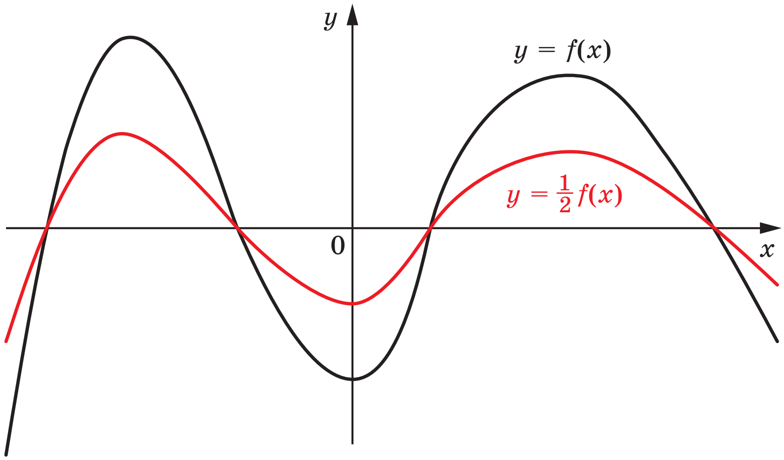
Рисунок 33 иллюстрирует, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ можно построить графики функций $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и $y = -2\sqrt{x}$.

Заметим, что при $k \neq 0$ нули функций $y = f(x)$ и $y = kf(x)$ совпадают. Следовательно, графики этих функций пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках (рис. 34).

На рисунке 35 изображены графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях a. Каждый из этих графиков, как и график функции $y = x^2$, называют **параболой**. Точка (0; 0) является вершиной каждой из этих парабол.

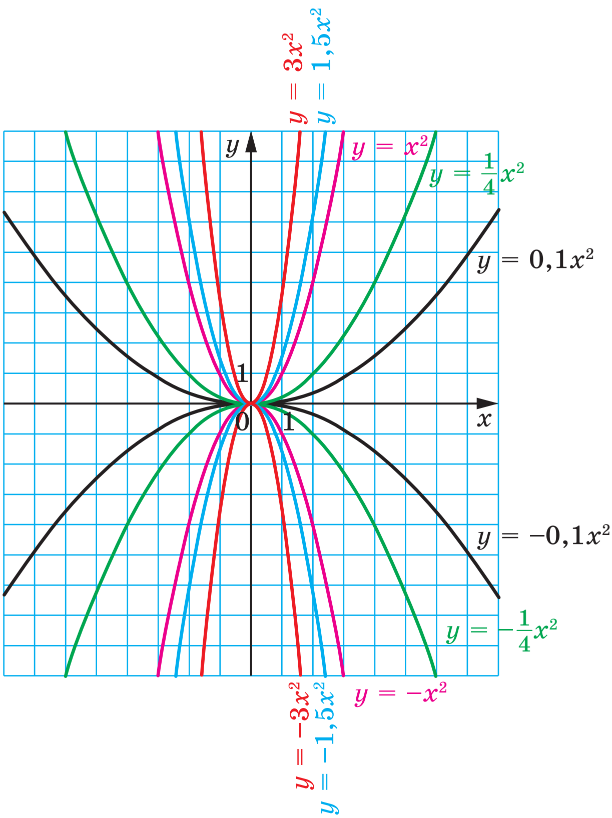
Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Часто вместо высказывания «Дана функция $y = ax^2$» употребляют «Дана парабола $y = ax^2$».



y
$y = f(x)$
$y = \frac{1}{2}f(x)$
0
x

Рис. 34



$y = 3x^2$
$y = 1,5x^2$
y
$y = x^2$
$y = \frac{1}{4}x^2$
$y = 0,1x^2$
1
0
1
x
$y = -0,1x^2$
$y = -\frac{1}{4}x^2$
$y = -3x^2$
$y = -1,5x^2$
$y = -x^2$

Рис. 35

В таблице приведены свойства функции $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Свойство	$a > 0$	$a < 0$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значений	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
Возрастает на промежутке	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Убывает на промежутке	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

1. Как можно получить график функции $y = kf(x)$, где $k \neq 0$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
3. Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
4. Как направлены ветви параболы $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
5. Какова область определения функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$?
6. Какова область значений функции $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
7. На каком промежутке возрастает и на каком промежутке убывает функция $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
8. В каких координатных четвертях находится график функции $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?

281.° Принадлежит ли графику функции $y = -25x^2$ точка:

1) $A(2; -100)$;
2) $B(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D(-1; 25)$?

282.° Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения параболы $y = 3x^2$ и прямой:

1) $y = 300$; 2) $y = 42x$; 3) $y = -150x$; 4) $y = 6 - 3x$.

283.° Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x + 4$.

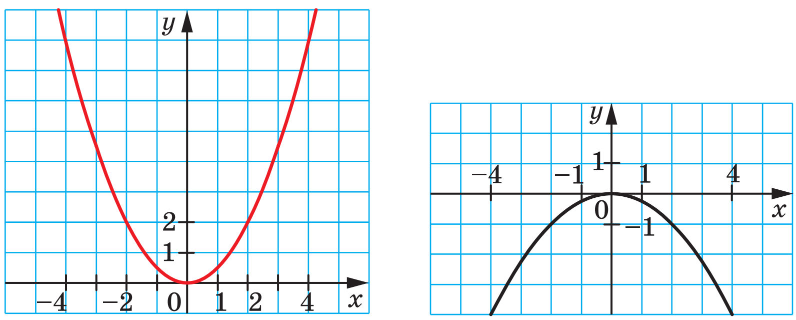
284.° При каких значениях a точка $A\ (a;\ 16)$ принадлежит графику функции $y = 4x^2$?

285.° При каких значениях b точка $B\ (-2;\ b)$ принадлежит графику функции $y = -0{,}2x^2$?

286.° Известно, что точка $M\ (3;\ -6)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

287.° Известно, что точка $K\ (-5;\ 10)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

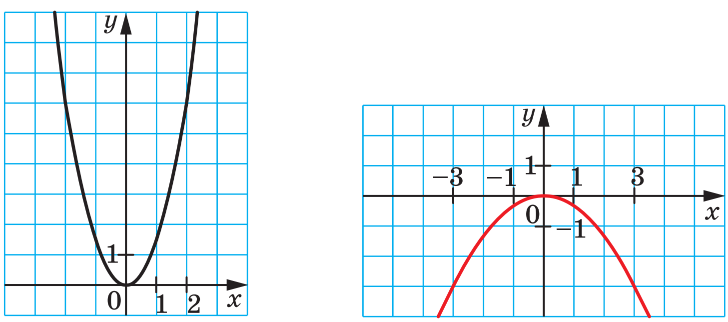
288.• На рисунке 36 изображен график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.



а) б)

Рис. 36

289.• На рисунке 37 изображен график функции $y = ax^2$. Найдите значение a.



а) б)

Рис. 37

290.• На рисунке 38 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

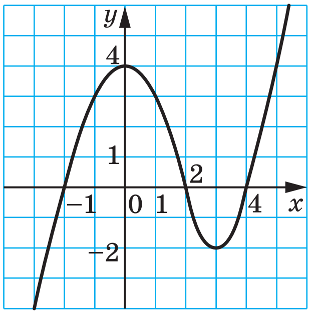


Рис. 38

291.• На рисунке 39 изображен график функции $y = g(x)$. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.

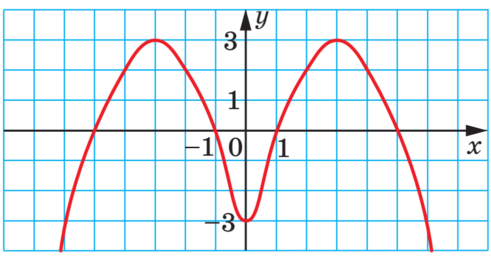


Рис. 39

292.• Постройте график функции $y = x^2$. Используя построенный график, постройте график функции:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4} x^2$.

293.• Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя построенный график, постройте график функции:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$.

294.$^{\bullet}$ Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a > 0$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

295.$^{\bullet}$ Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a < 0$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

296.$^{\bullet}$ Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant -2, \\ -2x, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -x^2, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

297.$^{\bullet}$ Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -2, & \text{если } x < -1, \\ -2x^2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Используя построенный график, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

298. Докажите тождество:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn} - \frac{m}{mn+n^2}\right) : \left(\frac{n^2}{m^3-mn^2} + \frac{1}{m+n}\right) = \frac{n-m}{n}.$$

299. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $b \geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, если $c \geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$, если $m < 5$.

300. Для перевозки 45 т груза планировали взять машину некоторой грузоподъемности. Однако из-за ее неисправности пришлось взять другую машину, грузоподъемность которой на 2 т меньше, чем первой. Из-за этого потребовалось сделать на 6 рейсов больше, чем было запланировано. Найдите грузоподъемность машины, которая перевезла груз.

301. Какое наименьшее значение может принимать данное выражение и при каком значении переменной:

1) $(x-6)^2+3$;
2) $(x+4)^2-5$;
3) x^2+2x-6;
4) $x^2-10x+18$?

10. Как построить графики функций $y=f(x)+b$ и $y=f(x+a)$, если известен график функции $y=f(x)$

Покажем, как, используя график функции $y=x^2$, построить график функции $y=x^2+2$.

Составим таблицу значений этих функций при одних и тех же значениях аргумента.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y=x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y=x^2+2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Эта таблица подсказывает, что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y=x^2$ соответствует точка $(x_0; y_0+2)$ графика функции $y=x^2+2$. Иными словами, при любом x значение функции $y=x^2+2$ на 2 больше соответствующего значения функции $y=x^2$. Следовательно, все точки графика функции $y=x^2+2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y=x^2$ на точку с той же абсциссой и с ординатой, увеличенной на 2 (рис. 40).

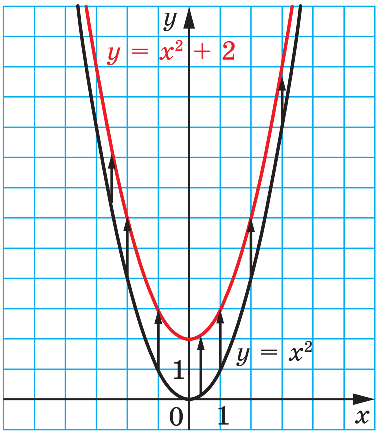


Рис. 40

Говорят, что график функции $y=x^2+2$ получен в результате **параллельного переноса**[1]

[1] Позднее на уроках геометрии вы более подробно ознакомитесь с параллельным переносом.

графика функции $y = x^2$ на две единицы вверх.

Аналогично график функции $y = x^2 - 4$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на 4 единицы вниз (рис. 41).

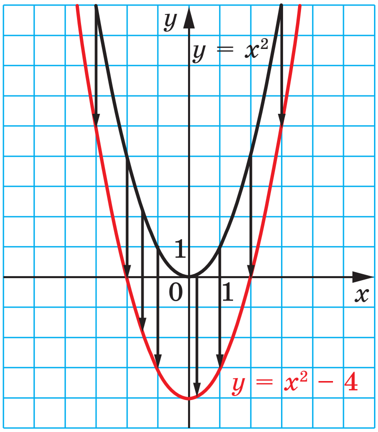


Рис. 41

Очевидно, что в результате параллельного переноса получаем фигуру, равную фигуре, являющейся графиком исходной функции. Например, графиками функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 4$ являются параболы, равные параболе $y = x^2$.

Рассмотренные примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x) + b$.

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

На рисунках 42, 43 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x} + 3$ и $y = \frac{1}{x} - 1$.

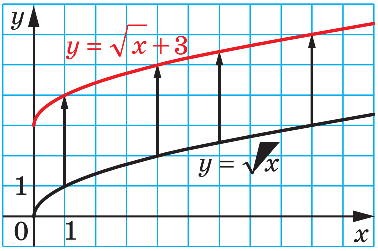


Рис. 42

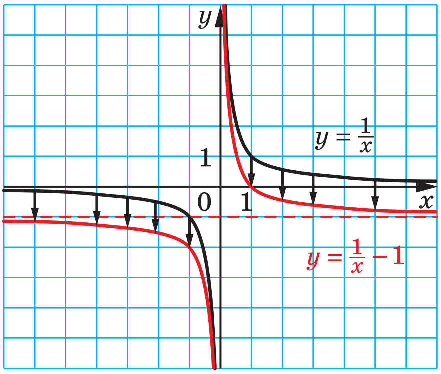


Рис. 43

Покажем, как можно с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x + 2)^2$.

Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, то есть $x_0^{\ 2} = y_0$. Докажем, что точка $(x_0 - 2; y_0)$ принадлежит графику функции $y = (x + 2)^2$. Найдем значение этой функции в точке с абсциссой $x_0 - 2$. Имеем: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^{\ 2} = y_0$.

Следовательно, все точки графика функции $y = (x + 2)^2$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же ординатой и абсциссой, уменьшенной на 2 (рис. 44).

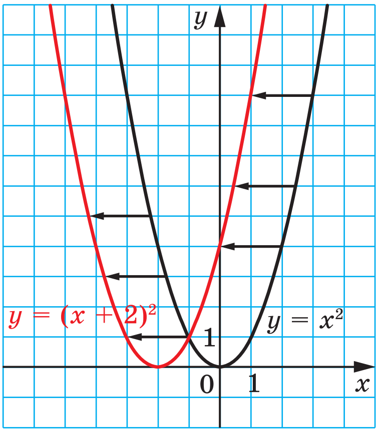


Рис. 44

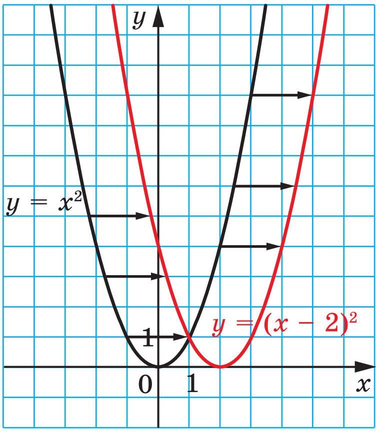


Рис. 45

Также говорят, что график функции $y = (x + 2)^2$ получен в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на две единицы влево.

Рассмотрим еще один пример. Построим график функции $y = (x - 2)^2$. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2$ соответствует точка $(x_0 + 2; y_0)$ графика функции $y = (x - 2)^2$. Следовательно, график функции $y = (x - 2)^2$ получают в результате параллельного переноса графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вправо (рис. 45).

Ясно, что в результате описанного параллельного переноса получаем фигуру, равную фигуре, являющейся графиком исходной функции. Например, графиками функций $y = (x + 2)^2$ и $y = (x - 2)^2$ являются параболы, равные параболе $y = x^2$.

Эти примеры подсказывают, как можно, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a)$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

На рисунках 46, 47 показано, как «работает» это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = \dfrac{1}{x-1}$.

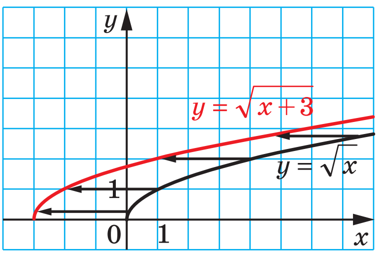


Рис. 46

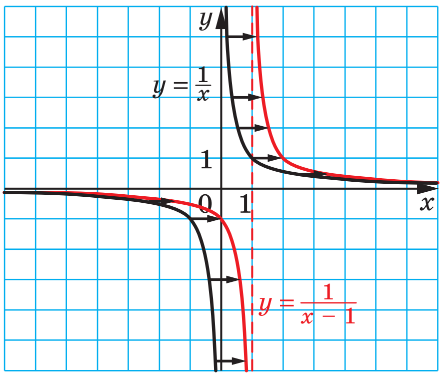


Рис. 47

ПРИМЕР 1

Постройте график функции $y = (x - 1)^2 + 3$.

Решение

1) Построим график функции $y = x^2$.

2) Параллельно перенесем график функции $y = x^2$ на 1 единицу вправо. Получим график функции $y = (x - 1)^2$ (рис. 48).

3) Параллельно перенесем график функции $y = (x - 1)^2$ на 3 единицы вверх. Получим график функции $y = (x - 1)^2 + 3$ (рис. 48).

Описанный алгоритм построения представим в виде такой схемы:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{на 1 ед.}]{\text{вправо}} y = (x-1)^2 \xrightarrow[\text{на 3 ед.}]{\text{вверх}} y = (x-1)^2 + 3$$

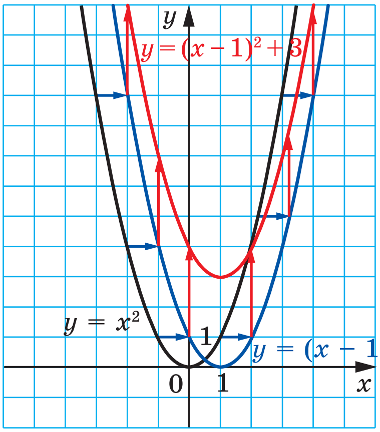


Рис. 48

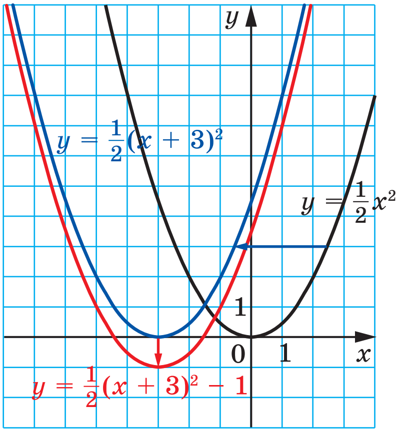


Рис. 49

ПРИМЕР 2

Постройте график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Решение

1) Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 49).

2) Параллельно перенесем график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы влево. Получим график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ (рис. 49).

3) Параллельно перенесем график функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ на 1 единицу вниз. Получим искомый график.

Схема построения имеет такой вид:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{влево на 3 ед.}} y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 \xrightarrow{\text{вниз на 1 ед.}} y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$$

Из описанных преобразований следует, что графиком функции $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$ является парабола с вершиной в точке $(-3; -1)$, равная параболе $y = \frac{1}{2}x^2$.

Из этого примера становится понятным алгоритм построения графика функции $y = kf(x + a) + b$, в частности $y = k(x + a)^2 + b$.

Графиком функции $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$, является парабола, равная параболе $y = kx^2$, вершина которой находится в точке $(-a; b)$.

ПРИМЕР 3

Постройте график функции $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Решение

Имеем:

$$-2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3.$$

Мы представили формулу, задающую данную функцию, в виде $y = kf(x + a) + b$, где $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема построения имеет такой вид:

$$y = -2x^2 \xrightarrow{\text{влево на 5 ед.}} y = -2(x + 5)^2 \xrightarrow{\text{вверх на 3 ед.}} y = -2(x + 5)^2 + 3$$

Построенный график является параболой с вершиной в точке $(-5; 3)$, которая равна параболе $y = -2x^2$ (рис. 50).

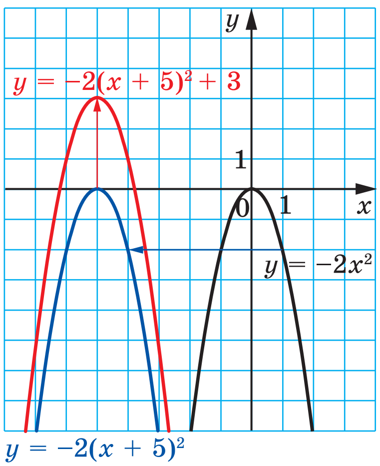


Рис. 50

1. Как можно получить график функции $y = f(x) + b$, используя график функции $y = f(x)$?
2. Какая фигура является графиком функции $y = x^2 + b$?
3. Каковы координаты вершины параболы $y = x^2 + b$?
4. Как можно получить график функции $y = f(x + a)$, используя график функции $y = f(x)$?
5. Какая фигура является графиком функции $y = (x + a)^2$?
6. Каковы координаты вершины параболы $y = (x + a)^2$?
7. Какая фигура является графиком функции $y = k(x + a)^2 + b$, где $k \neq 0$?

302.° График какой функции получим, если график функции $y = x^2$ параллельно перенесем:
1) на 6 единиц вверх;
2) на 9 единиц вправо;
3) на 12 единиц вниз;
4) на 7 единиц влево;
5) на 2 единицы вправо и на 3 единицы вниз;
6) на 1 единицу влево и на 1 единицу вверх?

303.° График какой из данных функций получим, если параллельно перенесем график функции $y = x^2$ на 4 единицы вправо:
1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

304.° График какой из данных функций получим, если параллельно перенесем график функции $y = x^2$ на 5 единиц вверх:
1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

305.° Каковы координаты вершины параболы:
1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

306.° В какой координатной четверти находится вершина параболы:

1) $y = (x + 10)^2 - 16$; 3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$; 4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

307.° Как надо параллельно перенести график функции $y = \frac{5}{x}$, чтобы получить график функции $y = \frac{5}{x - 8}$:

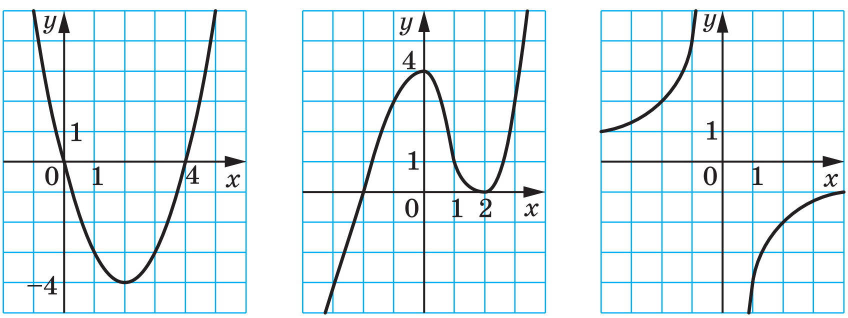
1) на 8 единиц вверх; 3) на 8 единиц вправо;
2) на 8 единиц вниз; 4) на 8 единиц влево?

308.° Как надо параллельно перенести график функции $y = \sqrt{x}$, чтобы получить график функции $y = \sqrt{x + 3}$:

1) на 3 единицы вверх; 3) на 3 единицы вправо;
2) на 3 единицы вниз; 4) на 3 единицы влево?

309.• На рисунке 51 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(x) - 2$; 3) $y = f(x - 3)$; 5) $y = -f(x)$;
2) $y = f(x) + 4$; 4) $y = f(x + 1)$; 6) $y = 3 - f(x)$.



а) *б)* *в)*

Рис. 51

310.• На рисунке 52 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график функции:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

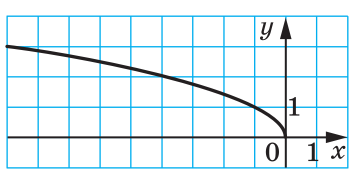


Рис. 52

311.[•] Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$; 5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$; 6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

312.[•] Постройте график функции $y = -x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = -(x - 2)^2$; 5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
2) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = -(x + 4)^2$; 6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

313.[•] Постройте график функции $y = -\frac{6}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$; 2) $y = -\frac{6}{x - 2}$; 3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

314.[•] Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x + 1}$; 3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

315.[•] Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x - 4}$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

316.[•] Постройте график функции $y = (x + 5)^2 - 9$. Используя график, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения;
3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

317.[•] Постройте график функции $y = (x - 4)^2 + 4$. Используя график, найдите:

1) нули функции;
2) при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения;
3) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;
4) область значений функции.

318.$^{\bullet}$ Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 53.

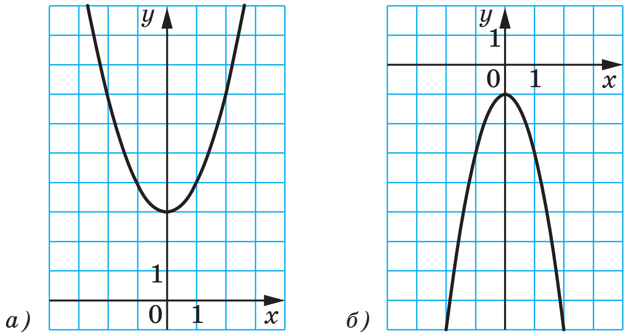


Рис. 53

319.$^{\bullet}$ Задайте формулой вида $y = ax^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 54.

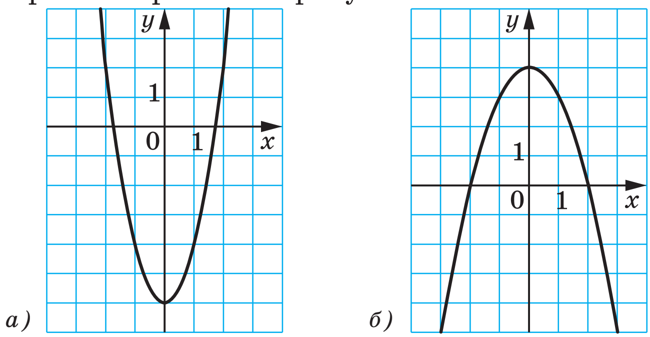


Рис. 54

320.$^{\bullet}$ Задайте формулой вида $y = a(x + m)^2$ функцию, график которой изображен на рисунке 55.

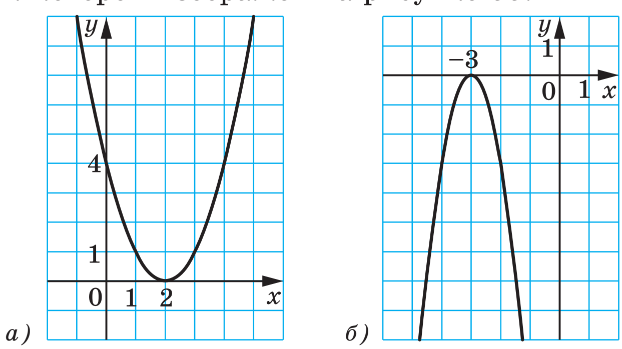


Рис. 55

321.• Задайте формулой вида $y = a\,(x + m)^2$ функцию, график которой изображен на рисунке 56.

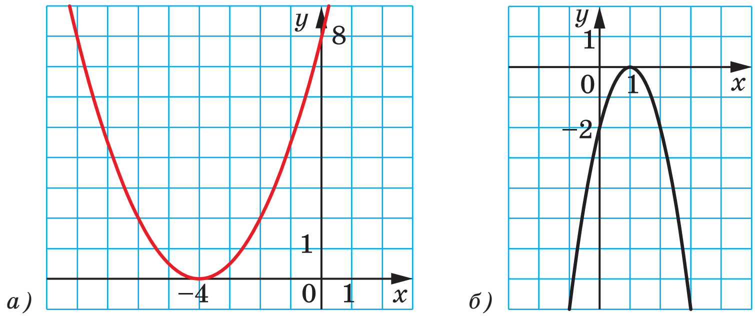


Рис. 56

322.• Задайте формулой вида $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 57.

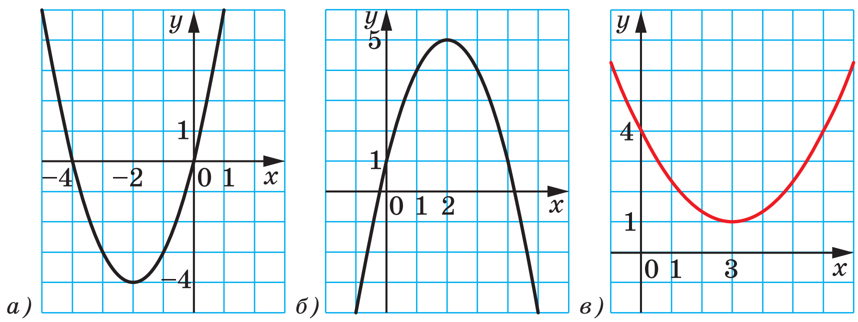


Рис. 57

323.• Задайте формулой вида $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцию, график которой изображен на рисунке 58.

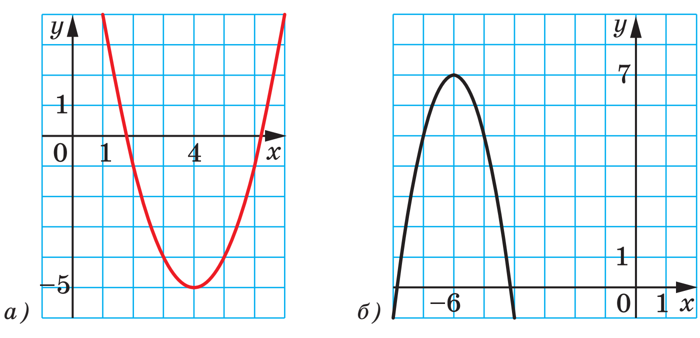


Рис. 58

324.• Решите графически уравнение:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$;   2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

325.• Решите графически уравнение $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

326.• Прямые m и n, изображенные на рисунке 59, параллельны, причем прямая n является графиком функции $y = f(x)$. Какое из утверждений верно:

1) прямая m является графиком функции $y = f(x) + b$;
2) прямая m является графиком функции $y = f(x - a)$?

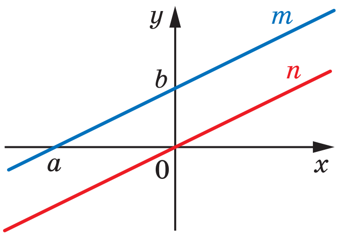


Рис. 59

327.•• Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x-m)^2 + n$ и постройте ее график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;   3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;   4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

328.•• Задайте данную функцию формулой вида $y = a(x-m)^2 + n$ и постройте ее график, используя график функции $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$;   2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

329.•• Задайте данную функцию формулой вида $y = \frac{k}{x+a} + b$ и постройте ее график, используя график функции $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$;   2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$;   3) $y = \frac{-2x}{x-1}$.

330.•• Задайте данную функцию формулой вида $y = \frac{k}{x+a} + b$ и постройте ее график, используя график функции $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{4x+14}{x+1}$;   2) $y = \frac{7-x}{x-2}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

331. Упростите выражение:

1) $\frac{5a-3}{8a}+\frac{a+9}{4a}$;

2) $\frac{5a-6b}{ab}+\frac{5b-5c}{bc}$;

3) $\frac{8a+5b}{5ab^2}-\frac{2a-7b}{2a^2b}$;

4) $\frac{m^2+4n^2}{8m^4n^4}-\frac{3m+4n}{6m^5n^2}$.

332. Сократите дробь:

1) $\frac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;

2) $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;

3) $\frac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;

4) $\frac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$.

333. Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если числитель и знаменатель дроби уменьшить на 1, то ее значение уменьшится на $\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

334. Докажите, что при положительных значениях a и b выполняется неравенство $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

11. Квадратичная функция, ее график и свойства

Определение. **Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратичной.**

Квадратичная функция не является для вас новой. Так, в 8 классе вы изучали ее частный случай, а именно, функцию $y = x^2$. Функциональная зависимость площади S круга от его радиуса r определяет квадратичную функцию $S(r) = \pi r^2$, которая, в свою очередь, является частным видом функции $y = ax^2$.

На уроках физики вы ознакомились с формулой $h = v_0t-\frac{gt^2}{2}$, которая задает зависимость высоты h тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Эта формула задает квадратичную функцию $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Покажем, как график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$.

Вы уже строили графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$, выделяя квадрат двучлена (см. пример 3 пункта 10). Используем этот прием в общем виде. Имеем:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введем обозначения $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Тогда формулу $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Следовательно, схема построения искомого графика такова:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ ед.}]{\text{вправо или влево}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ ед.}]{\text{вверх или вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, равная параболе $y = ax^2$.

Понятно, что ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены так же, как и ветви параболы $y = ax^2$: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление ее ветвей. Это представление будет тем полнее, чем больше точек, принадлежащих графику, мы будем знать. Поэтому, не используя параллельных переносов, можно построить график квадратичной функции по такой схеме:

1) найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) найти ординату вершины параболы по формуле[1] $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$, где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, и отметить на координатной плоскости вершину параболы;

3) определить направление ветвей параболы;

4) найти координаты еще нескольких точек, принадлежащих искомому графику (в частности, координаты точки пересечения параболы с осью y и нули функции, если они существуют);

5) отметить на координатной плоскости найденные точки и соединить их плавной линией.

ПРИМЕР

Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Используя график функции, найдите область ее значений, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наименьшее и наибольшее значения функции.

Решение

Данная функция является квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$, $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх ($a > 0$).

Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$, ордината вершины $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Следовательно, точка $(-2; -9)$ — вершина параболы.

Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс:

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = -5,\ x_2 = 1.$$

Следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-5; 0)$ и $(1; 0)$.

---

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запоминать необязательно. Достаточно вычислить значение функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Найдем точку пересечения параболы с осью ординат: $f(0) = -5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; -5)$.

Отметим найденные четыре точки параболы на координатной плоскости (рис. 60).

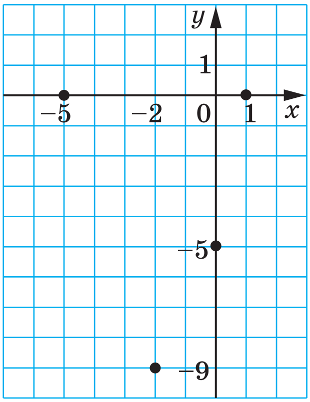


Рис. 60

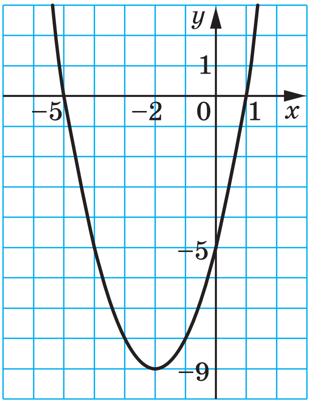


Рис. 61

Теперь понятно, что удобно найти значения данной функции в точках -1, -3, -4 и, отметив соответствующие точки на координатной плоскости, провести через все найденные точки график данной функции.

Имеем: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Искомый график изображен на рисунке 61.

Область значений функции $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

$f(x) > 0$ при $x < -5$ или $x > 1$; $f(x) < 0$ при $-5 < x < 1$.

Наименьшее значение функции равно -9, наибольшего значения не существует.

1. Какую функцию называют квадратичной?

2. Какая фигура является графиком квадратичной функции?

3. По какой формуле можно найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?

4. Каково направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значения a?

5. Опишите схему построения графика квадратичной функции.

335.° Какая из данных функций является квадратичной:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$; 3) $y = \frac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;

2) $y = 4x + 3$; 4) $y = 6x^2 - 5x$?

336.° Вычислите значение функции $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, если аргумент x равен 1; -2; 4.

337.° Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Найдите значение аргумента x, при котором: 1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$.

338.° График функции $y = -6x^2 + x + c$ пересекает ось ординат в точке $M(0; -8)$. Найдите значение c.

339.° Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 12x + 3$; 3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;

2) $y = -x^2 + 4x - 6$; 4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

340.° Постройте график функции:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 5) $y = x^2 - 2x + 4$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;

3) $y = 6x - x^2$; 7) $y = x^2 - 6x + 5$;

4) $y = 2x^2 - 8x + 8$; 8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

341.° Постройте график функции:

1) $y = x^2 + 2x - 8$; 3) $y = -x^2 + 4x - 5$;

2) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

342.• Постройте график функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Используя график, найдите:

1) $f(6)$; $f(1)$;

2) значения x, при которых $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;

3) наибольшее и наименьшее значения функции;

4) область значений функции;

5) промежуток возрастания и промежуток убывания функции;

6) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения, а при каких — отрицательные.

343.• Постройте график функции $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции;
3) множество решений неравенства $f(x) > 0$.

344.• Постройте график функции $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток возрастания функции;
3) при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \leqslant 0$.

345.• Постройте график функции $f(x) = 3x^2 - 6x$. Используя график, найдите:
1) область значений функции;
2) промежуток убывания функции;
3) при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$.

346.• Решите графически уравнение $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

347.• Решите графически уравнение $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

348.• Постройте в одной системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите количество корней уравнения $f(x) = g(x)$:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7;\ g(x) = -\sqrt{x}$;
2) $f(x) = 4x - 2x^2;\ g(x) = -\frac{4}{x}$.

349.• Построив в одной системе координат графики функций $y = x^2 + 4x + 1$ и $y = \frac{6}{x}$, определите количество корней уравнения $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

350.• Найдите координаты точки параболы $y = -x^2 + 9x + 9$, у которой:
1) абсцисса и ордината равны;
2) сумма абсциссы и ординаты равна 25.

351.• Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$, у которой ордината на 12 больше абсциссы.

352.• Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

353.• Найдите область значений и промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

354.• Постройте график данной функции, укажите ее область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

355.• Постройте график данной функции, укажите ее область значений и промежутки возрастания и убывания:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{если } 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{если } x \geqslant 5. \end{cases}$$

356.• Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, которая:

1) убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$;
2) возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.

357.• Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на промежутке:

1) $[-1; 4]$;
2) $[-4; 1]$;
3) $[4; 5]$.

358.• Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на промежутке:

1) $[-5; -3]$;
2) $[-1; 0]$;
3) $[-11; -10]$.

359.• При каких значениях p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(-1; 4)$ и $K(2; 10)$?

360.• При каких значениях a и b нулями функции $y = ax^2 + bx + 7$ являются числа -2 и 3?

361.• При каких значениях a и b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходит через точки C (−3; 8) и D (1; 4)?

362.• Пусть D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0,\ D > 0,\ c > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0,\ c = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$.

363.• Пусть D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0,\ c < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0. < 0$.

364.• При каком значении b промежуток $(-\infty; 2]$ является промежутком возрастания функции $y = -4x^2 - bx + 5$?

365.• При каком значении b промежуток $(-\infty; -3]$ является промежутком убывания функции $y = 3x^2 + bx - 8$?

366.• При каком значении a график квадратичной функции $y = ax^2 + (a - 2)x + \frac{1}{4}$ имеет с осью абсцисс одну общую точку?

367.•• При каких значениях a функция $y = 0,5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?

368.•• При каких значениях a функция $y = -4x^2 - 16x + a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях x?

369.•• При каком значении c наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 10x + c$ равно −3?

370.•• При каком значении c наименьшее значение функции $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ равно -1?

371.•• На рисунке 62 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

Рис. 62

372.•• На рисунке 63 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

Рис. 63

373.•• При каких значениях p и q вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке A (2; 5)?

374.•• Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке C (4; −10) и проходит через точку D (1; −1). Найдите значения коэффициентов a, b и c.

375.•• Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображен на рисунке 64.

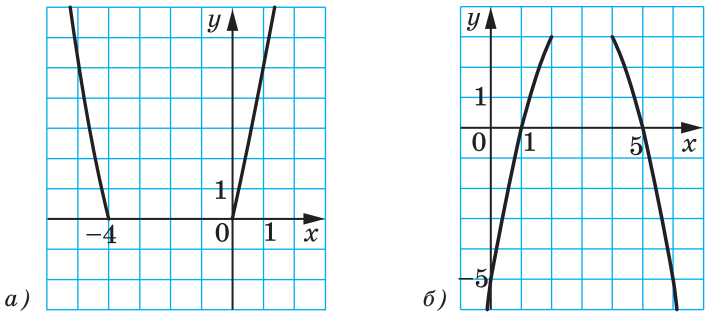


Рис. 64

376.•• Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображен на рисунке 65.

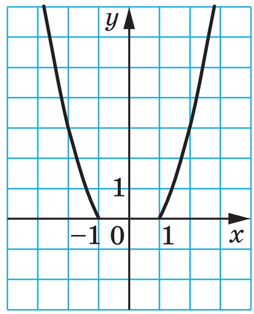


Рис. 65

377.•• Сумма двух чисел равна 10. Найдите:

1) какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел;
2) какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел.

378.•• Участок земли прямоугольной формы надо огородить забором длиной 160 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

379.•• Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;
2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;
3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;
4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

380.•• Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$;
2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;
3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

381.•• Постройте график функции:

1) $y = x\,|x|$;
2) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;
3) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

382.•• Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$;
2) $y = 6|x| - x^2$.

383.•• Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя построенный график, определите, при каких значениях a уравнение $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней.

384.•• Постройте график функции $y = -x^2 - 4x + 5$. Используя построенный график, определите, сколько корней имеет уравнение $-x^2 - 4x + 5 = a$ в зависимости от значения a.

385.* Пусть x_1 и x_2 — нули функции $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. При каких значениях a выполняется неравенство $x_1 < -2 < x_2$?

386.* Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = 2x^2 - (3a - 1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. При каких значениях a число 1 принадлежит промежутку $[x_1; x_2]$?

387.* При каком значении a отрезок прямой $x = a$, концы которого принадлежат параболам $y = x^2$ и $y = -(x + 1)^2$, имеет наименьшую длину?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

388. Решите уравнение:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$.

389. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

390. Выполните действия:

1) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-2}{b+2}$;   2) $\frac{p+4}{p-1} - \frac{p+20}{p+5}$;   3) $\frac{x}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3}$.

391. Упростите выражение:

1) $\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\right)\left(4a - 6\sqrt{ab} + 9b\right) - 9\sqrt{9b^3}$;
2) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{28} + 4\sqrt{63}\right) \cdot \sqrt{7} - \sqrt{126}$;
3) $\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$.

392. Моторная лодка отправилась по реке от одной пристани к другой и вернулась обратно через 2,5 ч, потратив на стоянку 25 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 км/ч, а расстояние между пристанями — 20 км.

393. Через одну из двух труб бак можно наполнить водой на 10 мин быстрее, чем через другую. За какое время можно заполнить этот бак через каждую из труб, если при одновременной их работе в течение 8 мин будет заполнено $\frac{2}{3}$ бака?

О некоторых преобразованиях графиков функций

Как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$

Заметим, что если точка $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(-x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Следовательно, все точки графика функции $y = f(-x)$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с такой же ординатой и противоположной абсциссой.[1]

На рисунке 66 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построен график функции $y = \sqrt{-x}$.

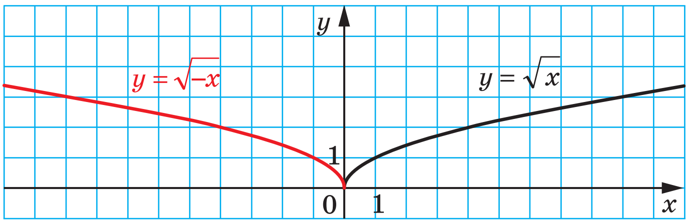


Рис. 66

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 67, постройте график функции $y = f(-x)$.

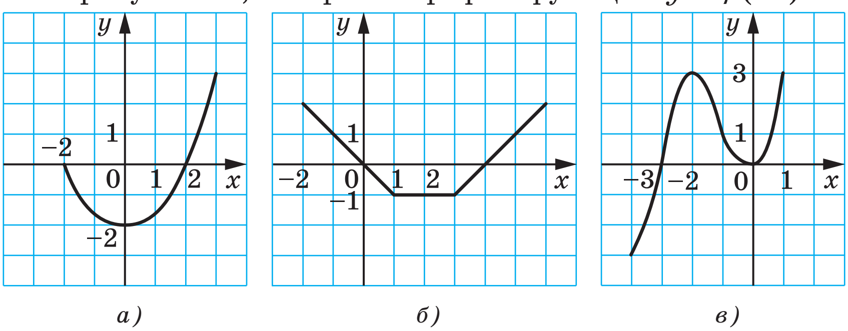


Рис. 67

[1] Позднее на уроках геометрии вы узнаете, что описанное преобразование графика функции $y = f(x)$ называют осевой симметрией.

2. Постройте график функции $y = \sqrt{x-2}$. Используя полученный график, постройте график функции $y = \sqrt{-x-2}$.

Как построить график функции $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$

Воспользовавшись определением модуля, запишем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда делаем вывод, что график функции $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при $x < 0$ — с графиком функции $y = f(-x)$.

Тогда построение графика функции $y = f(|x|)$ можно проводить по такой схеме:

1) построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить ту часть графика функции $y = f(-x)$, все точки которой имеют отрицательные абсциссы.

Объединение этих двух частей и составит график функции $y = f(|x|)$.

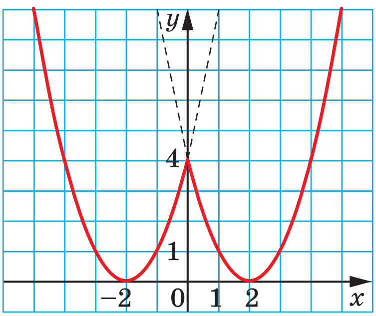


Рис. 68

На рисунке 68 показано, как с помощью графика функции $y = (x-2)^2$ построен график функции $y = (|x| - 2)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 67, постройте график функции $y = f(|x|)$.

2. Используя график функции $y = x + 2$, постройте график функции $y = |x| + 2$.

3. Постройте график функции:

1) $y = |x| - 3$;
2) $y = x^2 - 4|x|$;
3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
4) $y = 2|x| - x^2$;
5) $y = \frac{4}{|x|}$;
6) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;
7) $y = \frac{4}{|x| - 2}$;
8) $y = \sqrt{|x|}$.

Как построить график функции $y = |f(x)|$, если известен график функции $y = f(x)$

Для функции $y = |f(x)|$ можно записать:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что график функции $y = |f(x)|$ при всех x, для которых $f(x) \geqslant 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при всех x, для которых $f(x) < 0$, — с графиком функции $y = -f(x)$.

Тогда строить график функции $y = |f(x)|$ можно по такой схеме:

1) все точки графика функции $y = f(x)$ с неотрицательными ординатами оставить без изменений;

2) точки с отрицательными ординатами заменить на точки с теми же абсциссами, но противоположными ординатами.

На рисунке 69 показано, как с помощью графика функции $y = x^2 - x - 2$ построен график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

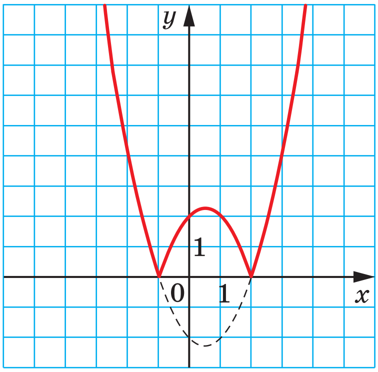


Рис. 69

ПРИМЕР 1

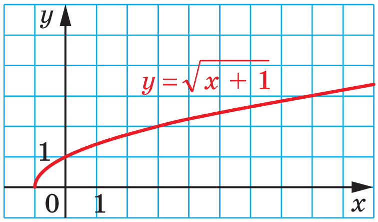
Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

Решение

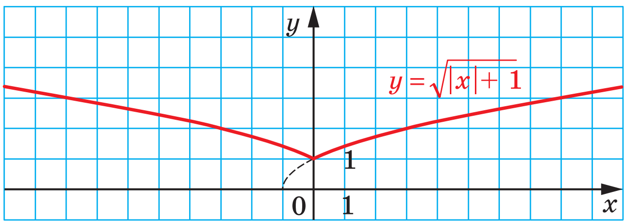
Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$$y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to y=\sqrt{|x|+1}-2 \to y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$

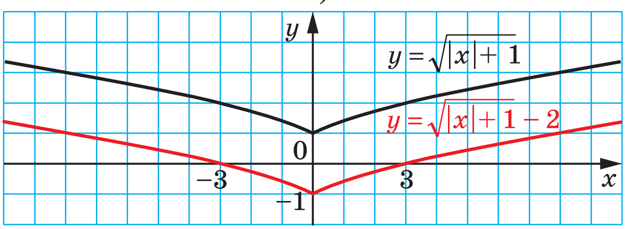
(рис. 70).



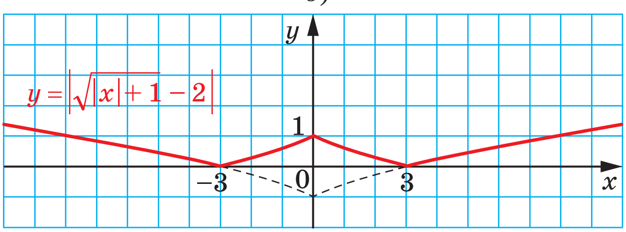
а)



б)



в)



г)

Рис. 70

ПРИМЕР 2

Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Решение

Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$

(рис. 71).

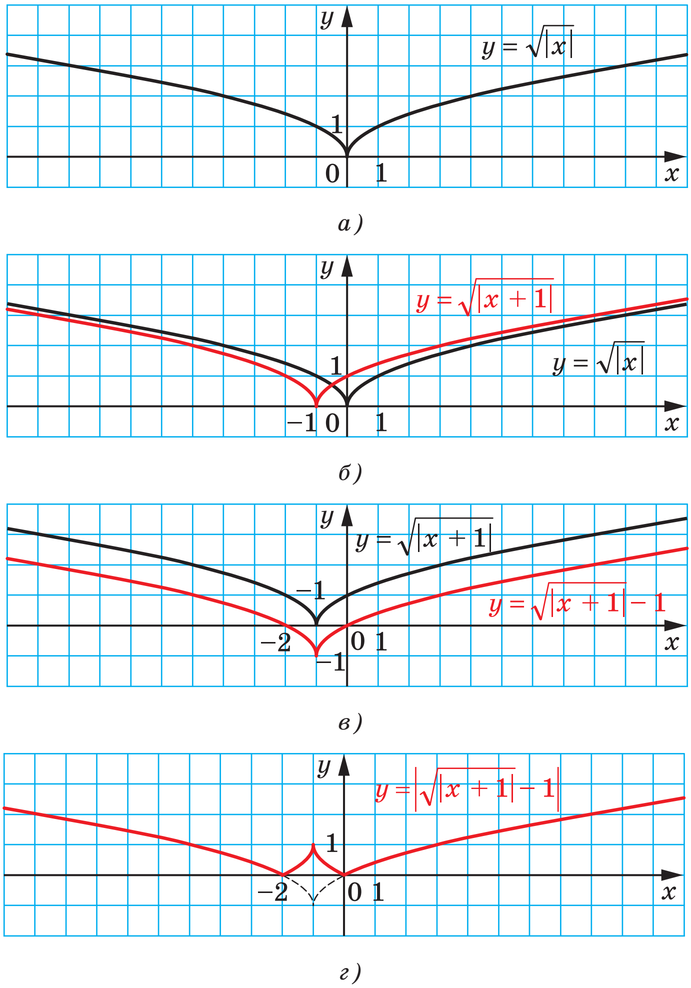


Рис. 71

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя график функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 67, постройте график функции: 1) $y = |f(x)|$; 2) $y = |f(|x|)|$.

2. Используя график функции $y = x + 2$, постройте график функции $y = |x + 2|$.

3. Постройте график функции:

1) $y = |x - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4x|$;
3) $y = |x^2 + 2x - 3|$;
4) $y = |2x - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$.

4. Постройте график функции:

1) $y = ||x| - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4|x||$;
3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;
4) $y = |2|x| - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$.

5. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$;
2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$;
3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$;
4) $y = \sqrt{|4 - x|}$;
5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;
6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 2

1. Чему равно значение функции $f(x) = 2x^2 - 1$ в точке $x_0 = -3$?

А) -19; Б) -13; В) 11; Г) 17.

2. Среди приведенных функций укажите квадратичную.

А) $y = 2x - 5$;
Б) $y = 2\sqrt{x} - 5$;
В) $y = 2x^2 - 5$;
Г) $y = \frac{2}{x^2} - 5$.

3. Областью определения какой из функций является промежуток $(-\infty; 6)$?

А) $y = \sqrt{6 + x}$; Б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$; В) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 + x}}$; Г) $y = \sqrt{6 - x}$.

4. Как надо параллельно перенести график функции $y = \dfrac{7}{x}$, чтобы получить график функции $y = \dfrac{7}{x - 5}$?

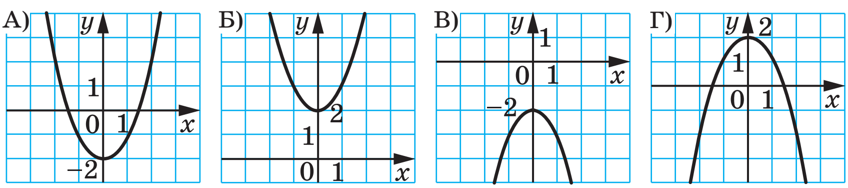
А) на 5 единиц вверх; В) на 5 единиц вправо;
Б) на 5 единиц влево; Г) на 5 единиц вниз.

5. График функции $y = \sqrt{x}$ параллельно перенесли на 2 единицы влево и на 7 единиц вниз. График какой функции получили?

А) $y = \sqrt{x + 2} - 7$; В) $y = \sqrt{x - 2} + 7$;
Б) $y = \sqrt{x - 2} - 7$; Г) $y = \sqrt{x + 2} + 7$.

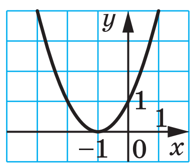
6. На каком из рисунков изображен график функции

$$y = -x^2 + 2?$$



7. График какой функции изображен на рисунке?

А) $y = x^2 - 1$; В) $y = (x - 1)^2$;
Б) $y = x^2 + 1$ Г) $y = (x + 1)^2$.

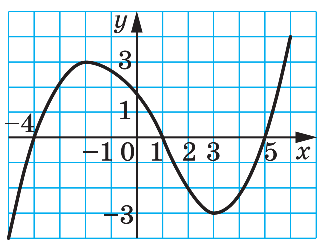


8. Укажите координаты вершины параболы $y = 3(x - 4)^2 - 5$.

А) $(4; 5)$; Б) $(-4; 5)$; В) $(4; -5)$; Г) $(-4; -5)$.

9. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Используя рисунок, укажите промежуток убывания функции.

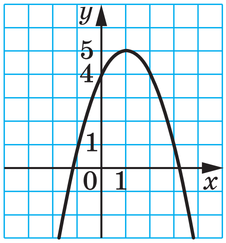
А) $[-4; 1]$; В) $[-2; 3]$;
Б) $[-3; 3]$; Г) $[-3; 1]$.



10. Найдите абсциссу вершины параболы $y = 2x^2 - 12x + 3$.
А) 6; Б) −6; В) 3; Г) −3.

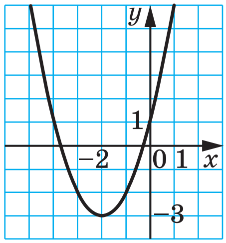
11. Вершина какой из парабол принадлежит оси абсцисс?
А) $y = x^2 - 6$; В) $y = (x - 6)^2$;
Б) $y = x^2 - 6x$; Г) $y = (x - 6)^2 + 2$.

12. На рисунке изображен график функции $y = -x^2 + 2x + 4$. Используя рисунок, найдите область значений функции.



А) $(-\infty; +\infty)$; В) $[1; +\infty)$;
Б) $(-\infty; 1]$; Г) $(-\infty; 5]$.

13. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + 4x + 1$. Используя рисунок, укажите промежуток возрастания функции.

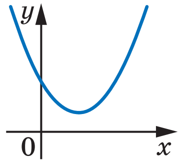


А) $(-\infty; -2]$;
Б) $[-2; +\infty)$;
В) $[-3; +\infty)$;
Г) определить невозможно.

14. Найдите нули функции $y = 2x^2 + x - 6$.
А) −1,5; −2; Б) 1,5; 2; В) −1,5; 2; Г) 1,5; −2.

15. При каких значениях b и c вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ находится в точке $M(3; 8)$?
А) $b = 6$, $c = -19$; В) $b = -3$, $c = 8$;
Б) $b = -6$, $c = 17$; Г) определить невозможно.

16. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите правильное утверждение, если D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.



А) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D > 0$;
Б) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$;
В) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$;
Г) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D = 0$.

17. При каком значении a наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 6x + a$ равно 4?
А) −5; Б) 4; В) 7; Г) 8.

18. Известно, что $m - n = 8$. Найдите множество значений выражения mn.

А) $[-16; +\infty)$; В) $(-\infty; +\infty)$;
Б) $[8; +\infty)$; Г) определить невозможно.

12. Решение квадратных неравенств

На рисунке 72 изображен график некоторой функции $y = f(x)$, областью определения которой является множество действительных чисел.

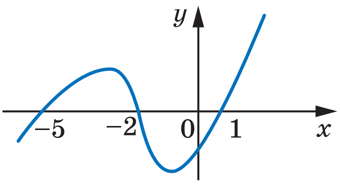


Рис. 72

С помощью этого графика легко определить промежутки знакопостоянства функции f, а именно: $y > 0$ на каждом из промежутков $(-5; -2)$ и $(1; +\infty)$; $y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -5)$ и $(-2; 1)$.

Определив промежутки знакопостоянства функции f, мы тем самым решили неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Промежутки $(-5; -2)$ и $(1; +\infty)$ вместе составляют множество решений неравенства $f(x) > 0$. В таких случаях говорят, что множество решений неравенства $f(x) > 0$ является **объединением** указанных промежутков. Объединение промежутков записывают с помощью специального символа $\cup$.

Тоогда множество решений неравенства $f(x) > 0$ можно записать так:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Множество решений неравенства $f(x) < 0$ можно записать так:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Такой метод решения неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ с помощью графика функции $y = f(x)$ называют **графическим**.

Покажем, как с помощью этого метода решают квадратные неравенства.

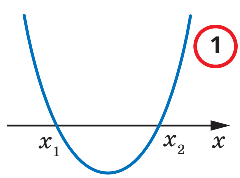
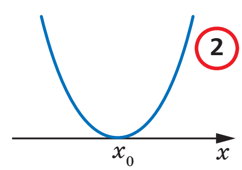
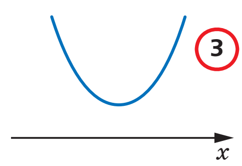
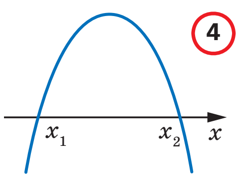
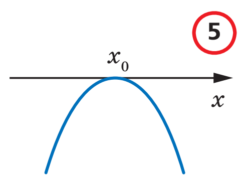
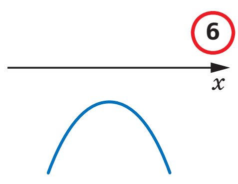
Определение. **Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где x — переменная, a, b, и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратными.**

Выясним, как определить положение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс.

Наличие и количество нулей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определяют с помощью дискриминанта D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$: если $D > 0$, то нулей у функции два, если $D = 0$, то нуль один, если $D < 0$, то нулей нет.

Знак старшего коэффициента квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ определяет направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел a и D отображено в таблице (x_1 и x_2 — нули функции, x_0 — абсцисса вершины параболы):

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Разъясним, как эту таблицу можно использовать для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a < 0$ и $D > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 4 таблицы. Тогда ясно, что ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график соответствующей квадратичной функции расположен над осью абсцисс.

ПРИМЕР 1

Решите неравенство $2x^2 - x - 1 > 0$.

Решение

Для квадратного трехчлена $2x^2 - x - 1$ имеем: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Этим условиям соответствует ячейка 1 таблицы. Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Получим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тогда схематически график функции $y = 2x^2 - x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 73.

Из рисунка 73 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

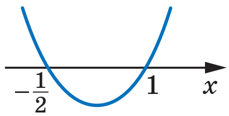


Рис. 73

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

ПРИМЕР 2

Решите неравенство $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Решение

Имеем: $a = -9$, $D = 0$. Этим условиям соответствует ячейка 5 таблицы. Устанавливаем, что $x_0 = \frac{1}{3}$. Тогда схематически график функции $y = -9x^2 + 6x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 74.

Из рисунка 74 видно, что решениями неравенства являются все числа, кроме $\frac{1}{3}$.

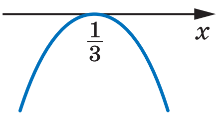


Рис. 74

Заметим, что это неравенство можно решить другим способом. Перепишем данное неравенство так: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тогда $(3x - 1)^2 > 0$. Отсюда получаем тот же результат.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

ПРИМЕР 3

Решите неравенство $3x^2 - x + 1 < 0$.

Решение

Имеем: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Этим условиям соответствует ячейка 3 таблицы. В этом случае график функции $y = 3x^2 - x + 1$ не имеет точек с отрицательными ординатами.

Ответ: решений нет.

ПРИМЕР 4

Решите неравенство $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Решение

Так как $a = 0{,}2$, $D = 0$, то данному случаю соответствует ячейка 2 таблицы, причем $x_0 = -5$. Но в этом случае квадратичная функция принимает только неотрицательные значения. Следовательно, данное неравенство имеет единственное решение $x = -5$.

Ответ: -5.

1. С помощью какого символа записывают объединение промежутков?
2. Какие неравенства называют квадратными?
3. Чем и как именно определяются наличие и количество нулей квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$?
4. Какие возможны случаи расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков a и D, где D – дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$? Изобразите схематически эти случаи.

394.° Какие из чисел -2; 0; 1 являются решениями неравенства:

1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $x^2 + x \geqslant 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

395.° На рисунке 75 изображен график функции $y = x^2 + 4x - 5$. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

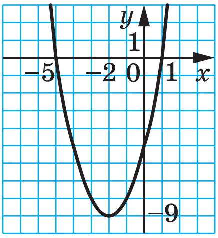


Рис. 75

396.° На рисунке 76 изображен график функции $y = -3x^2 - 6x$. Найдите множество решений неравенства:

1) $-3x^2 - 6x < 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$;
3) $-3x^2 - 6x > 0$;
4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.

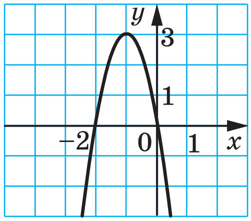


Рис. 76

397.° На рисунке 77 изображен график функции $y = x^2 - 4x + 4$. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 4x + 4 < 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$;
3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

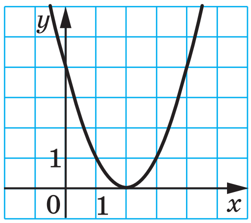


Рис. 77

398.° На рисунке 78 изображен график функции $y = -x^2 + 2x - 2$. Найдите множество решений неравенства:

1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

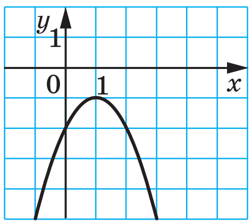


Рис. 78

399.° Решите неравенство:

1) $x^2 + 6x - 7 < 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
8) $4x^2 - 9 > 0$;
9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

400.° Решите неравенство:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;

7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

401.° Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2 \leqslant 49$;
2) $x^2 > 5$;
3) $7x^2 \leqslant 4x$;
4) $0{,}9x^2 < -27x$.

402.° Найдите множество решений неравенства:
1) $x^2 > 1$;
2) $x^2 < 3$;
3) $-3x^2 \geqslant -12x$;
4) $-2x^2 < -128$.

403.• Решите неравенство:
1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

404.• Решите неравенство:
1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$..

405.• При каких значениях x:
1) значения трехчлена $-3x^2 + 6x + 1$ больше $-\frac{4}{3}$;
2) значения трехчлена $-5x^2 + 11x + 2$ не больше $-\frac{2}{5}$?

406.• При каких значениях x:
1) значения трехчлена $x^2 - 2x - 11$ меньше $\frac{1}{4}$;
2) значения трехчлена $-3x^2 + 8x + 6$ не меньше $-\frac{2}{3}$?

407.• При каких значениях аргумента значения функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$ больше соответствующих значений функции $y = 2x - 1$?

408.• При каких значениях аргумента значения функции $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$ меньше соответствующих значений функции $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

409.• Найдите целые решения неравенства:

1) $x^2 + 5x \leqslant 0$;
2) $x^2 - 10 < 0$;
3) $6x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$.

410.• Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $20 - 8x - x^2 > 0$;
2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

411.• Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

412.• Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

413.• Составьте какое-нибудь неравенство, множество решений которого:

1) объединение промежутков $(-\infty; -4)$ и $(8; +\infty)$;
2) промежуток $[-2; 9]$;
3) состоит из одного числа 7.

414.• Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;
2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;
4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

415.• Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

416.• Равносильны ли неравенства:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ и $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;
2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ и $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ и $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;
4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ и $-2x^2 - 4 > 0$?

417.• При каких значениях a не имеет корней уравнение:
1) $x^2 - ax + 4 = 0$;
2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;
3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

418.• При каких значениях b имеет два различных действительных корня уравнение:
1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;
2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

419.•• Решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

420.•• Решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

421.•• Найдите целые решения системы неравенств:
1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

422.•• Найдите область определения функции:
1) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \dfrac{9}{x^2 - 81}$;
2) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \dfrac{8}{x - 5}$;
4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

423.•• Найдите область определения функции:
1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;
2) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \dfrac{x - 1}{|x| - 6}$.

424.•• Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$; 2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$.

425.•• Найдите множество решений неравенства:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$; 2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$.

426.•• Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 2x - 8) \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2(x^2 - 8x - 9) < 0$;
4) $(x + 5)^2(x^2 - 2x - 15) > 0$;
5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \leqslant 0$.

427.•• Решите неравенство:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$; 3) $(x + 3)^2(x^2 - x - 6) > 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 6x - 40) > 0$; 4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \leqslant 0$.

428.* Решите неравенство:

1) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0$; 3) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0$;
2) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geqslant 0$; 4) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leqslant 0$.

429.* Решите неравенство:

1) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$; 3) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$;
2) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$; 4) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leqslant 0$.

430.* При каких значениях a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?

431.* При каких значениях a не имеет решений неравенство:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$?

432.* Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

433.* Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

434. Выполните умножение и деление дробей:

1) $\dfrac{x^2 + 3xy}{x + 6} : \dfrac{x^2 - 9y^2}{2x + 12}$;

2) $\dfrac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{2a^2 - 8b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 8ab + 8b^2}{6a - 9b}$.

435. Найдите значение выражения, не пользуясь таблицей квадратов и микрокалькулятором:

1) $\sqrt{20 \cdot 66 \cdot 330}$; 3) $2\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{30} \cdot 5\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$; 4) $6\sqrt{10} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}$.

436. Одна бригада может собрать урожай за 12 дней. Второй бригаде для выполнения этой же работы требуется 75 % этого времени. После того как первая бригада проработала 5 дней, к ней присоединилась вторая бригада, и они вместе закончили работу. Сколько дней бригады работали вместе?

437. Во время первой поездки автомобиля потратили 10 % бензина, который был в баке, а во время второй — 25 % оставшегося. После этого в баке осталось на 13 л меньше бензина, чем было сначала. Сколько литров бензина было в баке до первой поездки?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

438. Является ли пара чисел $(2; -3)$ решением уравнения:

1) $4x - 3y = 17$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

439. График уравнения $5x - y = 2$ проходит через точку $A\ (4;\ b)$. Чему равно значение b?

440. Постройте график уравнения:

1) $4x + y = 3$;
2) $2x - 3y = 6$;
3) $xy = -8$;
4) $(x - 2)^2 + y^2 = 0$;
5) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$;
6) $x^2 + y^2 = 4$;
7) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$;
8) $(x - 3)(y - x) = 0$;
9) $\dfrac{y - x}{y^2 - 1} = 0$.

441. Какая из пар чисел $(-2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(6;\ 4)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28 \end{cases}$?

442. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

443. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

Обновите в памяти содержание пунктов 38–43 на с. 295–298

13. Системы уравнений с двумя переменными

В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений. Напомним, что его суть заключается в поиске координат общих точек графиков уравнений, входящих в систему. На уроках геометрии вы узнали, что графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ является окружность радиуса R с центром $(a;\ b)$. Вы также научились строить график квадратичной функции. Все это расширяет возможности применения графического метода для решения систем уравнений.

ПРИМЕР 1

Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение

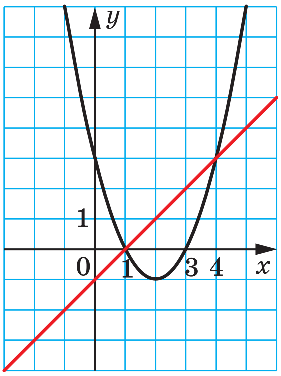


Рис. 79

Первое уравнение системы равносильно такому: $y = x^2 - 4x + 3$. Его графиком является парабола, изображенная на рисунке 79.

Графиком второго уравнения является прямая, которая пересекает построенную параболу в двух точках: (1; 0) и (4; 3) (рис. 79).

Как известно, графический метод не гарантирует того, что полученный результат является точным. Поэтому найденные решения следует проверить. Проверка подтверждает, что пары чисел (1; 0) и (4; 3) действительно являются решениями данной системы.

Заметим, что эта система является «удобной» для графического метода: координаты точек пересечения графиков оказались целыми числами. Понятно, что такая ситуация встречается далеко не всегда. Поэтому графический метод эффективен тогда, когда нужно определить количество решений или достаточно найти их приближенно.

Рассмотренную систему можно решить, не обращаясь к графикам уравнений. Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод подстановки** решения систем линейных уравнений. Этот метод является эффективным и для решения более сложных систем, в которых только одно уравнение является линейным, и для некоторых систем, в которых вообще линейных уравнений нет.

Решим систему $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ методом подстановки.

Выразим переменную y через x во втором уравнении системы:

$$y = x - 1.$$

Подставим в первое уравнение вместо y выражение $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Получили уравнение с одной переменной. Упростив его, получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значения y, которые соответствуют найденным значениям x, найдем из уравнения $y = x - 1$:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

Ответ: (1; 0), (4; 3).

ПРИМЕР 2

Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Решение

Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0; 0) радиуса 3.

Второе уравнение равносильно такому: $y = \dfrac{3,5}{x}$. Графиком этого уравнения является гипербола.

Изобразим окружность и гиперболу на одной координатной плоскости (рис. 80). Мы видим, что графики пересекаются в четырех точках. Следовательно, данная система имеет четыре решения.

Рисунок 80 также позволяет приближенно определить решения данной системы.

Не обращаясь к графическому методу, можно найти точные значения решений этой системы.

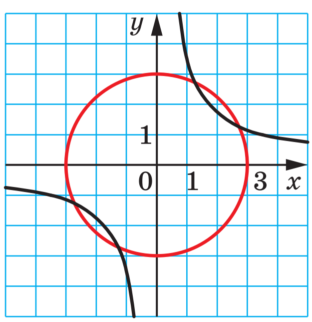


Рис. 80

Готовясь к изучению этой темы, вы повторили **метод сложения** для решения систем линейных уравнений. Покажем, как этот метод «работает» и при решении более сложных систем.

Умножим второе уравнение рассматриваемой системы на 2. Получим:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Отсюда $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ или $x + y = -4$.

Ясно, что для решения данной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение этой системы, получим:

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $y_1 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_2 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение этой системы, получим:

$$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}, \quad x_4 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $y_3 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_4 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

О т в е т: $\left(\dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$.

Очевидно, что найти такое решение графическим методом невозможно.

В 8 классе вы ознакомились с **методом замены переменных** при решении уравнений. Этот метод применяется и для решения целого ряда систем уравнений.

ПРИМЕР 3

Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Решение

Пусть $\dfrac{x+y}{x-y} = t$. Тогда $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1}{t}$.

Теперь первое уравнение системы можно записать так:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

Отсюда $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

Для решения исходной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем:

$y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Тогда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем:

$y_3 = 1$, $y_4 = -1$.

Тогда $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ: $(3; 1)$; $(-3; -1)$; $(-3; 1)$; $(3; -1)$.

ПРИМЕР 4

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14. \end{cases}$

Решение

Заметим, что данная система не изменится, если заменить x на y, а y на x. В таких случаях может оказаться эффективной замена $x + y = u$, $xy = v$.

Запишем данную систему так:

$$\begin{cases} 2(x+y)+xy=8, \\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)=14. \end{cases}$$

Выполним указанную замену. Получим систему:

$$\begin{cases} 2u+v=8, \\ u^2-2v+3u=14. \end{cases}$$

Ее можно решить методом подстановки (сделайте это самостоятельно). Получаем:

$$\begin{cases} u_1=3, \\ v_1=2, \end{cases} \begin{cases} u_2=-10, \\ v_2=28. \end{cases}$$

Остается решить две системы:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-10, \\ xy=28. \end{cases}$$

Каждую из них можно решить методом подстановки. Однако здесь удобнее воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета. Так, для системы $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ можно считать, что x и y — корни квадратного уравнения $t^2-3t+2=0$. Отсюда $t_1=1$, $t_2=2$. Следовательно, пары (1; 2) и (2; 1) являются решениями этой системы.

Используя этот метод, легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что система $\begin{cases} x+y=-10, \\ xy=28 \end{cases}$ решений не имеет.

Ответ: (1; 2); (2; 1).

1. Какие методы решения систем уравнений вы знаете?

2. Поясните суть графического метода решения систем уравнений.

3. В каких случаях графический метод является наиболее эффективным?

4. Поясните суть метода подстановки решения систем уравнений.

444.° Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+x^2=3, \\ y=x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

445.° Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

446.° Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

447.° Решите методом подстановки систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

448.• Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

449.• Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

450.$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x-3)(y+5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

451.$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

452.$^{\bullet}$ Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения:

1) прямой $3x - y = 1$ и параболы $y = 3x^2 + 8x - 3$;

2) прямой $2x - y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$;

3) прямой $x + y = 1$ и окружности $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$;

4) парабол $y = x^2 - 4x + 7$ и $y = 3 + 4x - 2x^2$.

453.$^{\bullet}$ Докажите, что прямая $y - x = 3$ является касательной к окружности $(x+5)^2 + y^2 = 2$, найдите координаты точки касания.

454.$^{\bullet}$ Докажите, что:

1) прямая $y = -2x - 4$ и парабола $y = 6x^2 - 7x - 2$ не пересекаются;

2) парабола $y = 4x^2 - 3x + 6$ и прямая $y = x + 5$ имеют одну общую точку, найдите координаты этой точки;

3) параболы $y = 4x^2 - 3x - 24$ и $y = 2x^2 - 5x$ имеют две общие точки, найдите их координаты.

455.$^{\bullet}$ Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$

456.• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$

457.• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + xy = -10, \\ \dfrac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$

458.• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - 2y} = \dfrac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4(x - y)^2 + 7(x - y) = 15, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} = 10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x - y)^2 + 2x = 35 + 2y, \\ (x + y)^2 + 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

459.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$

460.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

461.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$

462.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases}$

463.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases}$

464.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$

465.•• При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

466.•• При каких значениях k система уравнений

$$\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$$

1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

467.* Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

468.* Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

469. Докажите, что значение выражения $25^{10} - 5^{17}$ кратно числу 31.

470. Упростите выражение:

$$\frac{5a + 5}{a^2 - a} : \left(\frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 + a}\right).$$

471. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(x - 3) \geqslant -3(x + 2), \\ \dfrac{7x}{3} \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

472. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 6x - 2 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

473. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7\sqrt{3} - 21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

474. (*Из старинного китайского трактата «Девять отделов искусства счета»*.) 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов — 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

475. (*Задача Леонардо Пизанского* (*Фибоначчи*).) Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

476. Из села A в село B, расстояние между которыми равно 140 км, выехал мотоциклист. За 20 мин до этого навстречу ему из B в A выехал велосипедист, который встретился с мотоциклистом через 2 ч после своего выезда. Найдите скорость каждого из них, если мотоциклист за 2 ч проезжает на 104 км больше, чем велосипедист за 4 ч.

14. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Рассмотрим задачи, в которых системы уравнений второй степени используются как математические модели реальных ситуаций.

ПРИМЕР 1

Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились через 2 ч. С какой скоростью шел каждый турист, если для прохождения всего расстояния между пунктами одному из них нужно на 54 мин больше, чем другому?

Решение

Пусть скорость первого туриста равна x км/ч, а второго — y км/ч, $x < y$. До встречи первый турист прошел $2x$ км, а второй — $2y$ км. Вместе они прошли 18 км. Тогда $2x + 2y = 18$.

Все расстояние между пунктами первый турист проходит за $\frac{18}{x}$ ч, а второй — за $\frac{18}{y}$ ч. Так как первому туристу для прохождения этого расстояния нужно на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше, чем второму, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9 - y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Решив второе уравнение последней системы, получаем: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корень -36 не подходит по смыслу задачи. Следовательно, $y = 5$, $x = 4$.

О т в е т: 4 км/ч, 5 км/ч.

ПРИМЕР 2

Два работника могут вместе выполнить производственное задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы одного из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это производственное задание, работая самостоятельно?

Решение

Пусть первый работник может выполнить все задание за x дней, а второй — за y дней. За 1 день первый работник выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{x}$ часть задания. Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют все задание, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}$.

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x = 15$, $y = 30$. Следовательно, первый работник может выполнить задание за 15 дней, а второй — за 30 дней.

О т в е т: 15 дней, 30 дней.

ПРИМЕР 3

При делении двузначного числа на произведение его цифр получим неполное частное 5 и остаток 2. Разность этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 36. Найдите это число.

Решение

Пусть искомое число содержит x десятков и y единиц. Тогда оно равно $10x + y$. Так как при делении этого числа на число xy получаем неполное частное 5 и остаток 2, то $10x + y = 5xy + 2$.

Число, полученное перестановкой цифр данного, равно $10y + x$. По условию $(10x - y) - (10y - x) = 36$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + y = 5xy + 2, \\ (10x + y) - (10y + x) = 36, \end{cases}$$

решениями которой являются две пары чисел: $x = 6$; $y = 2$ или $x = 0{,}2$; $y = 3{,}8$. Но вторая пара не подходит по смыслу задачи.

Следовательно, искомое число равно 62.

О т в е т: 62.

477.° Сумма двух чисел равна 12, а сумма их квадратов равна 74. Найдите эти числа.

478.° Разность двух чисел равна 16, а их произведение равно 192. Найдите эти числа.

479.° Разность двух натуральных чисел равна 3, а их произведение на 87 больше их суммы. Найдите эти числа.

480.° Разность квадратов двух натуральных чисел равна 20, а сумма большего из них и удвоенного второго числа равна 14. Найдите эти числа.

481.° Вокруг прямоугольного участка земли площадью 2400 м^2 поставили ограду длиной 220 м. Найдите длину и ширину участка.

482.° Периметр прямоугольника равен 32 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух его соседних сторонах, — 130 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

483.• Какое двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр и в 2 раза больше их произведения?

484.• Если некоторое двузначное число разделить на сумму его цифр, то получим неполное частное 7 и остаток 6, а если разделить это число на произведение цифр, то получим неполное частное 5 и остаток 2. Найдите данное число.

485.• Двузначное число в 7 раз больше суммы своих цифр и на 52 больше произведения цифр. Найдите это число.

486.• Разность двух натуральных чисел равна 12, а сумма чисел, обратных им, равна $\frac{1}{8}$. Найдите эти числа.

487.• Сумма двух натуральных чисел равна 15, а разность чисел, обратных им, равна $\frac{1}{18}$. Найдите эти числа.

488.• Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его площадь — 30 см^2. Найдите катеты этого треугольника.

489.• Периметр прямоугольного треугольника равен 40 см, а один из катетов — 8 см. Найдите второй катет треугольника и его гипотенузу.

490.$^{\bullet}$ Площадь прямоугольника равна 180 $см^2$. Если одну его сторону уменьшить на 3 см, а вторую — на 2 см, то его площадь станет равной 120 $см^2$. Найдите исходные размеры прямоугольника.

491.$^{\bullet}$ Если длину прямоугольника уменьшить на 3 см, а ширину увеличить на 2 см, то его площадь увеличится на 6 $см^2$. Если длину прямоугольника уменьшить на 5 см, а ширину увеличить на 3 см, то площадь прямоугольника не изменится. Найдите стороны данного прямоугольника.

492.$^{\bullet}$ Из металлического листа прямоугольной формы изготовили открытую коробку. Для этого в углах листа вырезали квадраты со стороной 4 см. Найдите длину и ширину листа, если его периметр равен 60 см, а объем коробки — 160 $см^3$.

493.$^{\bullet}$ Два мотоциклиста выехали одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили двигаться с той же скоростью. Один из них прибыл в город A на 35 мин раньше, чем второй — в город B. Найдите скорость каждого мотоциклиста, если расстояние между городами составляет 140 км.

494.$^{\bullet}$ Со станции M в направлении станции N, расстояние между которыми равно 450 км, отправился скорый поезд. Через 3 ч после этого со станции N в направлении станции M отправился товарный поезд, который встретился со скорым через 3 ч после своего выхода. Скорый поезд преодолевает расстояние между станциями M и N на 7 ч 30 мин быстрее, чем товарный. Найдите скорость каждого поезда.

495.$^{\bullet}$ Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорости автомобиля и автобуса, если за 2 ч автобус проезжает на 40 км больше, чем автомобиль за один час.

496.$^{\bullet}$ По круговой дорожке длиной 2 км в одном направлении двигаются двое конькобежцев. Один конькобежец пробегает круг на 1 мин быстрее другого и догоняет его через каждые 20 мин. Найдите скорость каждого конькобежца (в метрах в минуту).

497.• Две бригады, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 8 дней. Если первая бригада, работая самостоятельно, выполнит $\frac{1}{3}$ задания, а потом ее сменит вторая бригада, то задание будет выполнено за 20 дней. За сколько дней каждая бригада может выполнить данное производственное задание, работая самостоятельно?

498.• Если открыть одновременно две трубы, то бассейн будет наполнен за 12 ч. Если сначала наполнять бассейн только через первую трубу в течение 5 ч, а потом только через вторую в течение 9 ч, то водой будет наполнена половина бассейна. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба, работая самостоятельно?

499.• Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 6 ч. Если первый тракторист проработает самостоятельно 4 ч, а потом его сменит второй, то этот тракторист закончит вспашку за 9 ч. За какое время, работая самостоятельно, может вспахать поле каждый тракторист?

500.• При последовательном соединении двух проводников сопротивление в электрической цепи составит 150 Ом, а при параллельном — 36 Ом. Найдите сопротивление каждого проводника.

501.• При последовательном соединении трех проводников первого вида и одного проводника второго вида сопротивление в электрической цепи составит 18 Ом. Если параллельно соединить по одному проводнику первого и второго видов, то при напряжении 24 В сила тока в электрической цепи составит 10 А. Найдите сопротивление проводника каждого вида.

502.•• Турист проплыл на лодке по реке от пристани A до пристани B и вернулся назад за 6 ч. Найдите скорость течения реки, если 2 км по течению реки турист проплывает за то же время, что и 1 км против течения, а расстояние между пристанями A и B составляет 16 км.

503.•• Катер проходит 48 км против течения реки и 30 км по течению реки за 3 ч, а 15 км по течению — на 1 ч быстрее, чем 36 км против течения. Найдите собственную скорость катера и скорость течения.

504.•• Из города A в город B, расстояние между которыми 40 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, один из которых прибыл в город B через 40 мин, а другой — в город A через 1,5 ч после встречи. Найдите скорость движения каждого велосипедиста.

505.•• Из одного села одновременно в одном направлении вышли два пешехода. Скорость движения первого составляла 3 км/ч, а второго — 4 км/ч. Через полтора часа из этого села выехал велосипедист, который догнал второго пешехода через 15 мин после того, как догнал первого. Найдите скорость движения велосипедиста.

506.•• Расстояние между пристанями A и B равно 28 км. Отчалив от пристани A в направлении пристани B, через 2 ч после начала движения катер встретил плот, отправленный от пристани B по течению реки за 2 ч до начала движения катера. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера, если катер проходит расстояние от A до B и возвращается назад за 4 ч 48 мин.

507.•• Масса куска одного металла равна 336 г, а куска другого — 320 г. Объем куска первого металла на 10 см^3 меньше объема второго, а плотность первого — на 2 г/см^3 больше плотности второго. Найдите плотность каждого металла.

508.•• Модуль равнодействующей двух сил, приложенных к одной точке под прямым углом, равен 25 Н. Если модуль одной силы уменьшить на 8 Н, а другой увеличить на 4 Н, то модуль их равнодействующей не изменится. Найдите модули данных сил.

509.•• По двум сторонам прямого угла в направлении к его вершине двигаются два тела. Первое тело двигается со скоростью 12 м/мин, а второе — 16 м/мин. В некоторый момент времени расстояние между телами составляло 100 м. Через 2 мин после этого расстояние между телами стало равным 60 м. На каком расстоянии от вершины прямого угла находилось каждое тело в первый зафиксированный момент времени?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

510. Упростите выражение:

1) $\frac{2}{a^2-3a}-\frac{1}{a^2+3a}-\frac{a+1}{a^2-9}$;

2) $\frac{3}{b-2}-\frac{3b-2}{b^2+2b+4}-\frac{b^2+16b+12}{b^3-8}$.

511. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{b}-1}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$; 4) $\frac{2}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$.

512. Решите неравенство:

1) $1{,}1(5x-4) \leqslant 0{,}2(10x+13)$;

2) $\frac{0{,}6-5y}{4}<\frac{0{,}5-5y}{6}$.

513. Найдите наибольшее целое решение неравенства $(2x+1)(x+4)-3x(x+2)>0$.

514. При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{12-5x}+\sqrt{2x+1}$?

515. Найдите промежуток убывания функции:

1) $y=2x^2+10x-9$; 2) $y=5x-3x^2$.

516. 14 декабря 1840 года в Париже комиссия в составе академиков-математиков собралась для изучения математических способностей мальчика Анри Монде, феноменально выполнявшего вычисления. Решите одну из предложенных Монде задач, которую мальчик решил устно: «Какие два натуральных числа надо взять, чтобы разность их квадратов была равной 133?»

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 3

1. При каких значениях x выполняется неравенство $x^2>4$?

А) $x>2$; В) $x<-2$ или $x>2$;

Б) $x>2$ или $x>-2$; Г) $-2<x<2$.

2. Каково множество решений неравенства $x^2 + 8x - 9 \geqslant 0$?

А) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; В) $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$;
Б) $(-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$; Г) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$.

3. Сколько целых решений имеет неравенство $3x^2 + 5x - 8 < 0$?

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

4. Какое из данных неравенств выполняется при всех действительных значениях переменной?

А) $x^2 - 14x + 49 > 0$; В) $x^2 - 3x + 4 > 0$;
Б) $-3x^2 + x + 2 \leqslant 0$; Г) $-x^2 + 7x - 10 < 0$.

5. Какова область определения функции $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$?

А) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; В) $[0; 2]$;
Б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; Г) $(0; 2)$.

6. Укажите неравенство, не имеющее решений.

А) $x^2 - 6x + 10 < 0$; В) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$;
Б) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$; Г) $-x^2 - 10x > 0$.

7. Пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10. \end{cases}$ Чему равно значение выражения $x_1y_1 + x_2y_2$?

А) 23; Б) 7; В) 35; Г) −26.

8. Какие фигуры являются графиками уравнений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3? \end{cases}$

А) Прямая и парабола; В) окружность и гипербола;
Б) окружность и парабола; Г) парабола и гипербола.

9. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1? \end{cases}$

А) Ни единого решения; В) два решения;
Б) одно решение; Г) четыре решения.

10. Какое наибольшее значение принимает выражение $x + y$, если пара чисел $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$

А) 1; Б) 6; В) 0; Г) −5.

11. Пара чисел $(a; b)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9. \end{cases}$ Найдите значение выражения $a - b$.

А) 5; Б) 1; В) $\dfrac{1}{6}$; Г) $\dfrac{5}{6}$.

12. Пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$ Найдите значение выражения $|x_1y_1 - x_2y_2|$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

13. Периметр прямоугольника равен 34 см, а его диагональ — 13 см.
Пусть стороны прямоугольника равны x см и y см. Какая из данных систем уравнений соответствует условию задачи?

А) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

14. Расстояние между двумя городами, равное 120 км, легковой автомобиль проезжает на 30 мин быстрее, чем грузовик. Известно, что за 2 ч грузовик проезжает на 40 км больше, чем легковой автомобиль за 1 ч.
Пусть скорость грузовика равна x км/ч, а легкового автомобиля — y км/ч. Какая из данных систем уравнений соответствует условию задачи?

А) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$

15. Два оператора могут выполнить компьютерный набор учебника по алгебре за 8 дней. Если первый оператор наберет $\frac{2}{3}$ учебника, а потом второй оператор завершит набор, то весь учебник будет набран за 16 дней.
Пусть первый оператор может набрать учебник за x дней, а второй — за y дней. Какая из данных систем уравнений соответствует условию задачи?

А) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

16. При каких значениях b уравнение $3x^2 - bx + 3 = 0$ не имеет корней?

А) $-6 < b < 6$;
Б) $b < 6$;
В) $b > 6$;
Г) $b < -6$ или $b > 6$.

17. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

А) $a = 5$;
Б) $a = 5\sqrt{2}$;
В) $a = -5$ или $a = 5$;
Г) $a = -5\sqrt{2}$ или $a = 5\sqrt{2}$.

18. При каких значениях a неравенство $ax^2 - 2x + a < 0$ не имеет решений?

А) $a < -1$ или $a > 1$;
Б) $a \geqslant 1$;
В) $-1 < a < 1$;
Г) таких значений не существует.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - нуль функции;
  - возрастающая функция;
  - убывающая функция;
  - промежутки знакопостоянства функции;
  - квадратичная функция;
  - квадратное неравенство;
- вы повторили:
  - основные понятия, связанные с функцией;
  - методы решения систем уравнений;
- вы изучили свойства квадратичной функции;
- вы научились:
  - используя график функции, находить ее промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, нули функции;
  - используя график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$;
  - строить график квадратичной функции;
  - решать квадратные неравенства;
  - применять методы подстановки и сложения при решении систем уравнений второй степени;
  - решать задачи с помощью систем уравнений второй степени;
- вы ознакомились с методом замены переменных решения систем уравнений;
- вы развили навыки применения графического метода решения систем уравнений.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

- Изучая материал этого параграфа, вы сможете расширить свои представления о математических моделях реальных ситуаций.
- Вы разовьете свои умения проводить процентные расчеты, ознакомитесь с формулой сложных процентов и возможностями ее применения.
- Расширите и углубите свои знания о случайных событиях, вероятности случайного события; узнаете, какую величину называют частотой случайного события и по какой формуле ее можно вычислить, что называют вероятностью случайного события, какую науку называют теорией вероятностей.
- Ознакомитесь с начальными сведениями о статистике, узнаете о способах сбора, представления и анализа данных, о мерах центральной тенденции совокупности данных.
- Научитесь вычислять вероятности случайных событий, находить моду, среднее значение и медиану статистической выборки.

15. Математическое моделирование

Наверное, нет сегодня такой области знаний, где бы не применялись достижения математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют математический аппарат.

В чем же секрет универсальности «математического инструмента»?

«Ключ к решению многих научных задач – их удачный перевод на язык математики». Такой ответ на поставленный вопрос дал один из основателей и первый директор Института математики Академии наук Украины академик Д. А. Граве (1863–1939).

Дмитрий Александрович Граве

Действительно, формулировки задач из разных областей знаний содержат нематематические понятия. Если математик участвует в решении такой задачи, то он в первую очередь стремится перевести ее на свой «родной» математический язык, то есть язык выражений, формул, уравнений, неравенств, функций, графиков и т. д. Результат такого перевода называют **математической моделью**, а саму задачу — **прикладной задачей**.

Термин «модель» (от латинского *modulus* — образец) мы встречаем очень часто: модель самолета, модель атомного ядра, модель Солнечной системы, модель какого-то процесса или явления и т. п. Изучая свойства модели объекта, мы тем самым изучаем свойства самого объекта.

Область математики, которая занимается построением и изучением математических моделей, называют **математическим моделированием**.

В таблице приведены образцы прикладных задач и соответствующих им математических моделей.

№	Прикладная задача	Математическая модель
1	Один килограмм картофеля стоит 2 грн. Сколько картофеля можно купить за 14 грн.?	Чему равно частное $14 : 2$?

№	Прикладная задача	Математическая модель
2	В магазине есть 3 вида чашек и 2 вида тарелок. Сколько существует способов составить набор из одной чашки и одной тарелки?	Чему равно произведение $3 \cdot 2$?
3	На стоянке было несколько машин. Когда 5 машин уехали, осталось 2 машины. Сколько машин было на стоянке сначала?	Найдите корень уравнения $x - 5 = 2$.
4	Из 156 желтых, 234 белых и 390 красных роз составили букеты. Какое наибольшее количество букетов можно составить так, чтобы во всех букетах роз каждого цвета было поровну и все розы были использованы?	Найдите НОД (156; 234; 390)
5	Автомобиль тратит 7,8 л бензина на 100 км пути. Хватит ли 40 л бензина, чтобы доехать от Киева до Одессы, если расстояние между этими городами 490 км?	Сравните значение выражения $\frac{7,8 \cdot 490}{100}$ с числом 40

Цель решения любой задачи — получить правильный ответ. Поэтому составление математической модели — это только первый этап решения прикладной задачи.

На самом деле решение прикладной задачи состоит из трех этапов:

1) построение математической модели;

2) решение математической задачи;

3) результат, полученный на втором этапе, анализируется, исходя из содержания прикладной задачи.

Первый этап иллюстрируют приведенные выше примеры. Заметим, что успешная реализация этого шага требует определенных знаний в области, к которой относится данная прикладная задача.

Реализация второго этапа связана лишь с математической деятельностью: нахождение значений выражений, решение уравнений, неравенств и их систем, построение графических объектов и т. п.

На третьем этапе полученный результат надо записать на языке прикладной задачи. Поясним это, обратившись к приведенной таблице. Например, ответы к первой, второй, третьей задачам надо записать так: можно купить 7 кг картофеля; покупку можно осуществить 6 способами; на стоянке было 7 машин. Далее ответ следует проанализировать на соответствие условию прикладной задачи. Например, ответ «1,5 ученика» не может быть приемлемым ни для одной прикладной задачи.

ПРИМЕР

Масса деревянной балки составляет 120 кг, а масса железной балки — 140 кг, причем железная балка на 1 м короче деревянной. Какова длина каждой балки, если масса 1 м железной балки на 5 кг больше массы 1 м деревянной?

Решение

В решении задачи выделим три этапа.

I этап. Построение математической модели

Пусть длина деревянной балки равна x м, тогда длина железной составляет $(x - 1)$ м. Масса 1 м деревянной балки равна $\frac{120}{x}$ кг, а масса 1 м железной — $\frac{140}{x-1}$ кг, что на 5 кг больше массы 1 м деревянной. Тогда $\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5$. Полученное уравнение и является математической моделью данной прикладной задачи.

II этап. Решение уравнения

Имеем:

$$\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5;$$

$$\frac{28}{x-1} - \frac{24}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} 28x - 24(x-1) = x^2 - x, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 24 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = 8 \text{ или } x = -3.$$

III этап. Анализ результата, полученного на II этапе, исходя из содержания прикладной задачи

Корень -3 не удовлетворяет условию задачи, поскольку такая величина, как длина, не может выражаться отрицательным числом.

Следовательно, длина деревянной балки равна 8 м, а длина железной — 7 м.

О т в е т: 8 м, 7 м.

1. Что называют математической моделью задачи?
2. Какую задачу называют прикладной?
3. Что называют математическим моделированием?
4. Из каких этапов состоит решение прикладной задачи?

517.° Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) Бабушка испекла 60 пирожков. Часть пирожков она отдала соседям, а 12 пирожками угостила внуков. После этого у нее осталось 16 пирожков. Сколько пирожков бабушка отдала соседям?

2) От двух пристаней одновременно навстречу друг другу отправились два катера, которые встретились через 4 ч после начала движения. Один катер двигался со скоростью 28 км/ч, а другой — 36 км/ч. Чему равно расстояние между пристанями?

3) Затраты бензина на проезд 100 км в автомобиле «Таврия» составляют 7 л. Хватит ли 28 л бензина, чтобы доехать из Киева в Полтаву, расстояние между которыми 337 км?

4) Хватит ли 5 т гороха, чтобы засеять им поле, имеющее форму прямоугольника со сторонами 500 м и 400 м, если на 1 га земли надо высеять 260 кг гороха?

5) Три тетради и ручка стоят 5,4 грн., а тетрадь и три такие ручки — 6,6 грн. Сколько стоит одна ручка?

6) С одного места в одном направлении одновременно стартовали по велотреку два велосипедиста. Один из них проезжает круг велотрека за 1 мин, а другой — за 45 с. Через какое наименьшее количество минут после начала движения велосипедисты снова встретятся в месте старта?

7) Один работник может выполнить задание за 30 ч, а другой — за 45 ч. За какое время они выполнят это задание, работая вместе?

8) Из 45 т железной руды выплавляют 25 т железа. Сколько тонн руды требуется, чтобы выплавить 10 т железа?

9) Есть два водно-солевых раствора. Первый раствор содержит 25 %, а второй — 40 % соли. Сколько килограммов каждого раствора нужно взять, чтобы получить раствор массой 60 кг, содержащий 35 % соли?

10) Сколько понадобится метров проволоки, чтобы огородить участок земли, имеющий форму прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза на 8 м длиннее одного катета и на 1 м длиннее другого катета?

518.° Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) От двух станций, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно в одном направлении отошли два поезда. Впереди шел поезд со скоростью 60 км/ч. Через 4 ч после начала движения его догнал второй поезд. С какой скоростью двигался второй поезд?

2) В один ящик помещается 20 кг яблок. Сколько требуется ящиков, чтобы положить в них 154 кг яблок?

3) Затраты эмалевой краски ПФ-115 на однослойное покрытие составляют 180 г на 1 м^2. Хватит ли 4 кг эмали, чтобы покрасить стену длиной 6 м и высотой 4 м?

4) Между учениками одного класса разделили поровну 145 тетрадей и 58 ручек. Сколько в этом классе учеников?

5) Одна швея может выполнить заказ за 4 ч, а другая — за 6 ч. Хватит ли им 2 ч 30 мин, чтобы, работая вместе, выполнить заказ?

6) Из 150 кг картофеля получают 27 кг крахмала. Сколько получают крахмала из 390 кг картофеля?

7) Вкладчик положил в банк 2000 грн. на два разных счета. По первому из них банк выплачивает 8 % годовых, а по второму — 10 % годовых. Через год вкладчик получил 176 грн. процентов. Сколько гривен он положил на каждый счет?

519.• Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) В прямоугольной крышке со сторонами 30 см и 15 см надо сделать прямоугольное отверстие площадью 100 см^2 так, чтобы его края были на одинаковом расстоянии от краев крышки. На каком расстоянии от края крышки должен быть край отверстия?

2) Во время сбора урожая с каждого из двух участков собрали по 300 ц пшеницы. Площадь первого участка на 5 га меньше площади второго. Сколько центнеров пшеницы собрали с 1 га каждого участка, если урожайность пшеницы на 1 га на первом участке на 5 ц больше, чем на втором?

3) Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу отправились соответственно велосипедист и пешеход, которые встретились через 1 ч после начала движения. Найдите скорость каждого из них, если велосипедист прибыл в пункт B на 2 ч 40 мин раньше, чем пешеход в пункт A, а расстояние между этими пунктами составляет 16 км.

4) Две бригады грузчиков, работая вместе, могут разгрузить товарный поезд за 6 ч. Первая бригада выполнила $\frac{3}{5}$ всей работы, потом ее сменила вторая бригада, которая и закончила разгрузку. Вся работа была выполнена за 12 ч. Сколько времени нужно каждой бригаде для самостоятельной разгрузки поезда?

5) Стоимость доставки на стройку одной машины песка составляет 250 грн., а машины гравия — 350 грн. За день планируется 50 рейсов, причем транспортные расходы не должны превышать 14 000 грн. Сколько машин гравия может быть доставлено за день?

520.• Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) Из одного порта одновременно вышли два теплохода, один из которых шел на юг, а другой — на запад. Через 2 ч 30 мин расстояние между ними было 125 км. С какой скоростью двигался каждый теплоход, если скорость первого теплохода была на 10 км/ч больше скорости второго?

2) Из города A в город B одновременно выехали автобус и автомобиль. Через 1 ч 30 мин после начала движения автомобиль опережал автобус на 30 км. Когда автомобиль прибыл в город B, автобус находился на расстоянии 80 км от этого города. С какой скоростью двигались автобус и автомобиль, если расстояние между городами A и B составляет 300 км?

3) На соревнованиях по стрельбе каждый участник делает 25 выстрелов. За каждый удачный выстрел он получает 4 очка, а за каждый промах снимается 2 очка. Сколько промахов может сделать стрелок, чтобы набрать не менее 60 очков?

521.•• Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) Проволочной сеткой длиной 600 м надо огородить участок земли прямоугольной формы. При каких размерах участка его площадь будет наибольшей?

2) Из пунктов A и B (рис. 81), расстояние между которыми равно 13 км, одновременно вышли в указанных направлениях два туриста. Скорость туриста, вышедшего из пункта A, равна 4 км/ч, а туриста, вышедшего из пункта B, — 6 км/ч. Через какое время после начала движения расстояние между туристами будет наименьшим?

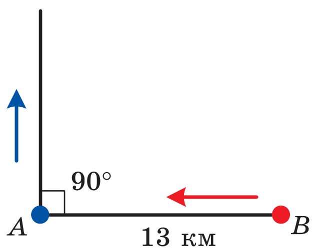


Рис. 81

522.•• Решите задачу, построив ее математическую модель.

Сечение туннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом (рис. 82). Периметр сечения

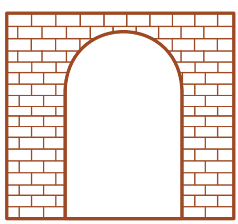


Рис. 82

равен 20 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения туннеля будет наибольшей? (Число π округлите до единиц.)

523.* Решите задачу, построив ее математическую модель.

1) Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два туриста. При встрече выяснилось, что турист, вышедший из пункта A, прошел на 6 км больше, чем другой. Продолжив движение с такими же скоростями, первый турист пришел в пункт B через 2 ч после встречи, а второй турист — в пункт A через 4,5 ч. Каково расстояние между пунктами A и B?

2) (*Задача Л. Эйлера.*) Один купец приобрел коней и быков на сумму 1770 талеров. За каждого коня он заплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько коней и сколько быков было куплено?

524.* Решите задачу, построив ее математическую модель.

Купили 40 птиц за 40 монет. За каждых трех воробьев заплатили 1 монету, за каждых двух горлиц — 1 монету, а за каждого голубя — 2 монеты. Сколько купили птиц каждого вида?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

525. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значения переменной (переменных):

1) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a-8}\right)\left(a-4-\frac{16}{a-4}\right)$;

2) $\frac{a}{b-a}-\frac{ac}{b-c}\cdot\left(\frac{b+c}{bc-ac}-\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{b}{ac}\right)$.

526. Решите неравенство:

1) $(3x-2)^2-(3x-1)(2x+3)<3x(x-7)$;

2) $-3x^2-10x+48\leqslant 0$.

527. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $4\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{54}$, $5\sqrt{2}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

528. Агрофирма владеет 120 га земли, 18 % которой занимает фруктовый сад. Найдите площадь сада.

529. Масса соли составляет 24 % массы раствора. Сколько килограммов раствора надо взять, чтобы он содержал 96 кг соли?

530. Найдите процентное содержание олова в руде, если 40 т этой руды содержат 3,2 т олова.

531. Цена товара выросла со 120 грн. до 150 грн. На сколько процентов повысилась цена?

532. Цена товара снизилась со 150 грн. до 120 грн. На сколько процентов снизилась цена?

533. Цену товара снизили на 10 %, а потом повысили на 25 %. На сколько процентов изменилась первоначальная цена?

Обновите в памяти содержание пунктов 45–47 на с. 299

16. Процентные расчеты

В предыдущих классах вам приходилось решать много задач, в том числе прикладные задачи на проценты.

Вы знакомы с такими типами задач на проценты:

- нахождение процента от числа;
- нахождение числа по его проценту;
- нахождение процентного отношения двух чисел.

Вы умеете конструировать математические модели этих задач с помощью таких выражений:

1) $\frac{a \cdot p}{100}$ — нахождение p % от числа a;

2) $\frac{a \cdot 100}{p}$ — нахождение числа, p % которого равны a;

3) $\frac{a}{b} \cdot 100$ % — нахождение процентного отношения числа a к числу b.

Рассмотрим прикладную задачу, которую часто приходится решать банковским работникам, а также тем, кто хранит деньги в банке под проценты.

Задача. Пусть вкладчик положил в банк 100 000 грн. под 10 % годовых. Какая сумма будет на его счете через 7 лет при условии, что вкладчик в течение этого срока не снимает денег со счета?

Решение

Пусть a_0 — первоначальный капитал вкладчика, то есть

$$a_0 = 100\ 000 \text{ грн.}$$

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_7$ количество денег на счете соответственно в конце первого, второго, ..., седьмого годов.

В конце первого года первоначальный капитал a_0 вырос на 10 %. Следовательно, число a_1 составляет 110 % от первоначального капитала a_0. Тогда

$$a_1 = a_0 \cdot 1{,}1 = 100\ 000 \cdot 1{,}1 = 110\ 000 \text{ (грн.)}.$$

В конце второго года число a_1, в свою очередь, увеличилось на 10 %. Следовательно, число a_2 составляет 110 % от числа a_1. Тогда

$$a_2 = a_1 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^2 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^2 = 121\ 000 \text{ (грн.)}.$$

В конце третьего года число a_2 увеличилось на 10 %. Следовательно, число a_3 составляет 110 % от числа a_2. Тогда

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^3 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^3 = 133\ 100 \text{ (грн.)}.$$

Теперь становится понятным, что

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\ 000 \cdot 1{,}1^7 = 194\ 871{,}71 \text{ (грн.)}.$$

Ответ: 194 871,71 грн.

Аналогично решают эту задачу в общем виде, когда первоначальный капитал, равный a_0, положили в банк под p % годовых.

Действительно, в конце первого года первоначальный капитал увеличится на $\frac{a_0 \cdot p}{100}$ и будет равным

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

то есть увеличится в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз.

Кстати, в рассмотренном выше примере это число составляло $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.

Ясно, что в конце второго года сумма снова вырастет в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз и станет равной

$$a_2 = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Следовательно, в конце n-го года будем иметь:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

Полученную формулу называют **формулой сложных процентов.**

1. Какие вы знаете три основные задачи на проценты?

2. Какой вид имеет формула сложных процентов? Поясните ее.

534.° Вкладчик положил в банк 2000 грн. под 6 % годовых. Сколько денег будет на его счете через год?

535.° Вкладчик положил в банк 5000 грн. под 8 % годовых. Сколько денег будет на его счете через три года?

536.° Четыре года назад завод изготавливал 10 000 единиц некоторого изделия в год. Благодаря модернизации производства и повышению продуктивности труда достигли ежегодного прироста объемов производства на 20 %. Сколько единиц указанного изделия будет изготовлено в этом году?

537.° После двух последовательных снижений цены на 10 % канцелярский стол стал стоить 1944 грн. Найдите первоначальную цену стола.

538.° После двух последовательных повышений цены на 25 % люстра стала стоить 937 грн. 50 к. Найдите первоначальную цену люстры.

539.° Население города за два года увеличилось с 40 000 жителей до 44 100. Найдите средний ежегодный процент прироста населения в этом городе.

540.° Вследствие двух последовательных снижений цены на одно и то же количество процентов цена кресла снизилась с 800 грн. до 578 грн. На сколько процентов происходило каждый раз снижение цены?

541.° Было 300 г 6-процентного раствора соли. Через некоторое время 50 г воды испарили. Каким стало процентное содержание соли в растворе?

542.° К сплаву массой 600 г, содержавшему 12 % серебра, добавили 60 г серебра. Каким стало процентное содержание серебра в новом сплаве?

543.° В саду росли яблони и вишни, причем яблони составляли 42 % всех деревьев. Вишен было на 48 деревьев больше, чем яблонь. Сколько деревьев росло в саду?

544.° За два дня проложили кабель. В первый день проложили 56 % кабеля, а во второй — на 132 м меньше, чем в первый. Сколько всего метров кабеля проложили за два дня?

545.• В первый день мальчик прочел 25 % всей книги, во второй — 72 % от оставшегося количества страниц, а в третий — остальные 84 страницы. Сколько страниц в книге?

546.• В магазин завезли три вида мороженого: шоколадное, клубничное и ванильное. Шоколадное составляло 45 % всего мороженого, клубничное — 40 % количества шоколадного, а ванильное — остальные 111 кг. Сколько всего килограммов мороженого завезли в магазин?

547.• Морская вода содержит 5 % соли. Сколько пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 2 %?

548.• (*Задача Безу*[1].) Некто купил коня и через некоторое время продал его за 24 пистоля. При продаже он потерял столько процентов, сколько стоил ему конь. Спрашивается: за какую сумму он купил коня?

549.• Фирма покупает у производителя товар по оптовой цене, а продает в розницу за 11 грн., при этом прибыль от продажи в процентах равна оптовой цене товара в гривнях. Какова оптовая цена товара?

---

[1] Безу́ Этьен (1730–1783) — французский математик, основные работы которого лежат в области высшей алгебры. Преподавал математику в училище гардемаринов, Королевском артиллерийском корпусе. Автор шеститомного труда «Курс математики».

550.• На старом станке рабочий изготавливал одну деталь за 20 мин, а на новом — за 8 мин. На сколько процентов выросла производительность труда рабочего?

551.• Внедрение новых технологий позволило уменьшить время на изготовление одной детали с 12 мин до 10 мин. На сколько процентов будет выполняться при этом план, если норму времени не изменят?

552.• Один работник может вырыть траншею за 6 ч, а другой — за 4 ч. Если же они будут работать вместе, то производительность труда каждого из них повысится на 20 %. За какое время они выроют траншею, работая вместе?

553.• Один каменщик может сложить кирпичную стену за 15 ч, а другой — за 10 ч. Если же они будут работать вместе, то производительность труда каждого из них повысится на одно и то же количество процентов и они сложат стену за 4 ч. На сколько процентов возрастает производительность труда каждого каменщика при их совместной работе?

554.• Смешали 30-процентный раствор соляной кислоты с 10-процентным раствором и получили 800 г 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора взяли для этого?

555.• В первом бидоне находится молоко, в котором массовая часть жира составляет 2 %, а во втором — молоко с массовой частью жира 5 %. Сколько надо взять молока из каждого бидона, чтобы получить 18 л молока, массовая часть жира в котором равна 3 %?

556.• Костюм стоил 600 грн. После того, как цена была снижена дважды, он стал стоить 432 грн., причем процент снижения во второй раз был в 2 раза больше, чем в первый. На сколько процентов каждый раз снижалась цена?

557.• Некоторый товар стоил 200 грн. Сначала его цену повысили на несколько процентов, а потом снизили на столько же процентов, после чего его стоимость стала 192 грн. На сколько процентов каждый раз происходило изменение цены товара?

558.• Вкладчик положил в банк 4000 грн. За первый год ему насчитали некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был увеличен на 4 %. В конце второго года на счете оказалось 4664 грн. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

559.° Вкладчик положил в банк 10 000 грн. За первый год ему насчитали некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был уменьшен на 2 %. В конце второго года на счете оказалось 11 880 грн. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

560.° К сплаву меди и цинка, содержавшему меди на 12 кг больше, чем цинка, добавили 6 кг меди. Вследствие этого процентное содержание цинка в сплаве снизилось на 5 %. Сколько цинка и сколько меди содержал сплав первоначально?

561.° К сплаву магния и алюминия, содержавшему 12 кг алюминия, добавили 5 кг магния, после чего процентное содержание магния в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько килограммов магния было в сплаве первоначально?

562.°° В цистерне находилась концентрированная серная кислота, содержавшая 2 т воды. После того, как эту кислоту смешали с 4 т воды, концентрация ее снизилась на 15 %. Сколько кислоты было в цистерне первоначально?

563.°° Чтобы получить соляную кислоту, 2 кг хлористого водорода растворили в некотором объеме воды. Потом, чтобы повысить концентрацию полученной кислоты на 25 %, добавили еще 9 кг хлористого водорода. Сколько соляной кислоты было получено?

564.* В емкости было 12 кг кислоты. Часть кислоты отлили и долили до предыдущего уровня водой. Потом снова отлили столько же, сколько и в первый раз, и долили водой до предыдущего уровня. Сколько литров жидкости отливали каждый раз, если в результате получили 25-процентный раствор кислоты?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

565. Известно, что $-3 \leqslant a \leqslant 2$, $-1 \leqslant b \leqslant 3$. Оцените значение выражения: 1) $3a + 4b$; 2) $4a - 3b$. Сколько целых значений принимает каждое из этих выражений?

566. При каких значениях c трехчлен $2x^2 - 2x + 5c$ принимает положительные значения при любом значении x?

567. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy - y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

17. Частота и вероятность случайного события

Нам нередко приходится проводить наблюдения, опыты, участвовать в экспериментах или испытаниях. Часто подобные исследования заканчиваются некоторым результатом, который заранее предсказать нельзя.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

- Если открыть книгу наугад, то невозможно знать заранее, какой номер страницы вы увидите.
- Нельзя до начала футбольного матча определить, с каким счетом закончится игра.
- Вы не можете быть уверенным в том, что, когда нажмете на кнопку выключателя, загорится настольная лампа.
- Нет гарантии, что из куриного яйца, помещенного в инкубатор, вылупится цыпленок.

Как правило, наблюдения или эксперимент определяются каким-то комплексом условий. Например, футбольный матч должен проходить по правилам; куриные яйца должны находиться в инкубаторе не менее 21 дня при определенной методике изменения температуры и влажности воздуха.

Результат наблюдения, опыта, эксперимента будем называть **событием.**

Случайным событием называют такой результат наблюдения или эксперимента, который при соблюдении данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Например, при подбрасывании однородной монеты случайным событием является выпадение цифры. Обнаружение письма при проверке почтового ящика также является случайным событием.

Представим, что выпущен 1 000 000 лотерейных билетов и разыгрывается один автомобиль. Можно ли, приобретя один лотерейный билет, выиграть этот приз? Конечно, можно, хотя это событие *маловероятно*. А если будут разыгрываться 10 автомобилей? Ясно, что **вероятность** выигрыша увеличится. Если же представить, что разыгрываются 999 999 автомобилей, то вероятность выигрыша станет намного большей.

Следовательно, **вероятности случайных событий** можно сравнивать. Однако для этого следует договориться, каким образом количественно оценивать возможность появления того или иного события.

Основанием для такой количественной оценки могут быть результаты многочисленных наблюдений или экспериментов. Так, люди давно заметили, что многие события происходят с той или иной, на удивление постоянной, **частотой**.

Демографам[1] хорошо известно число 0,514. Статистические данные, полученные в разные времена и в разных странах, свидетельствуют о том, что на 1000 новорожденных приходится в среднем 514 мальчиков. Число 0,514 называют **частотой случайного события** «рождение мальчика». Оно определяется формулой

$$\text{частота} = \frac{\text{количество новорожденных мальчиков}}{\text{количество всех новорожденных}}.$$

Подчеркнем, что это число получено в результате анализа многих наблюдений. В таких случаях говорят, что вероятность события «рождение мальчика» приблизительно равна 0,514.

Вы знаете, что курение вредно для здоровья. По данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) курильщики составляют приблизительно 97 % от всех больных раком легких. Число 0,97 — это частота случайного события «тот, кто заболел раком легких,— курил», которая определяется таким соотношением:

$$\text{частота} = \frac{\text{количество курильщиков среди заболевших раком легких}}{\text{количество всех людей, заболевших раком легких}}.$$

---

[1] Демография — наука о народонаселении.

Это впечатляющее число 97 % может у кого-то вызвать сомнения. Однако мы хотим подчеркнуть, что частота случайного события тем лучше характеризует явление, чем больше наблюдений проведено. Вывод ВОЗ основывается на анализе многих наблюдений, проведенных в разных странах, следовательно, касается всех людей.

В таких случаях говорят, что вероятность попасть на курильщика среди тех, кто заболел раком легких, приблизительно равна 0,97 (или 97 %).

Чтобы детальнее ознакомиться с понятием вероятности случайного события, обратимся к классическому примеру с подбрасыванием монеты.

Предположим, что в результате двух подбрасываний монеты дважды выпал герб. Тогда в данной серии, состоящей из двух испытаний, частота выпадения герба равна:

$$\text{частота} = \frac{\text{количество выпадений герба}}{\text{количество бросков}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Означает ли это, что вероятность выпадения герба равна 1? Конечно, нет.

Для того чтобы по частоте случайного события можно было оценивать его вероятность, количество испытаний должно быть достаточно большим.

Начиная с XVIII в. многие исследователи проводили серии испытаний с подбрасыванием монеты.

В таблице приведены результаты некоторых таких испытаний.

Исследователь	Количество подбрасываний монеты	Количество выпадений герба	Частота выпадения герба
Жорж Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Огастес де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Уильям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовский (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Карл Пирсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Уильям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

По приведенным данным прослеживается четкая закономерность: при многократном подбрасывании монеты частота появления герба незначительно отклоняется от числа $0,5$.

Следовательно, можно считать, что вероятность события «выпадение герба» приблизительно равна $0,5$.

В каждом из рассмотренных примеров использовалось понятие **частота случайного события**. Эту величину мы вычисляли по формуле:

$$\text{частота} = \frac{\text{количество появлений интересующего события}}{\text{количество испытаний (наблюдений)}}.$$

Далее по частоте мы оценивали вероятность события, а именно:

вероятность случайного события приближенно равна частоте этого события, найденной при проведении большого количества испытаний (наблюдений).

Такую оценку вероятности случайного события называют **статистической**. Ее используют в разных областях деятельности человека: физике, химии, биологии, страховом бизнесе, социологии, экономике, здравоохранении, спорте и т. д.

Вероятность события обозначают буквой P (первой буквой французского слова *probabilité* — вероятность).

Если в первом примере событие «рождение мальчика» обозначить буквой A, то полученный результат записывают так:

$$P\ (A) \approx 0{,}514.$$

Если событие «выпадение герба» обозначить буквой B, то

$$P\ (B) \approx 0{,}5.$$

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Опишите, что такое частота случайного события.
3. При каких условиях частота случайного события может оценивать вероятность случайного события?
4. Как обозначают вероятность события A?

УПРАЖНЕНИЯ

568.° Приведите примеры экспериментов, результатом которых, на ваш взгляд, является: 1) маловероятное событие; 2) очень вероятное событие.

569.° Эксперимент состоит в бросании кнопки. Кнопка может упасть как острием вниз, так и на шляпку (рис. 83). Подбросьте кнопку: 1) 10 раз; 2) 20 раз; 3) 50 раз; 4) 100 раз; 5) 200 раз. Результаты, полученные в пяти сериях экспериментов, занесите в таблицу.

Рис. 83

Номер серии	1	2	3	4	5
Количество экспериментов (бросков) в серии	10	20	50	100	200
Количество выпадений кнопки острием вниз					
Количество выпадений кнопки острием вверх					

В каждой из пяти серий экспериментов подсчитайте частоту выпадения кнопки острием вверх и оцените вероятность этого события. Какое событие более вероятно: «кнопка упадет острием вниз» или «кнопка упадет острием вверх»?

570.° Проведите серию, состоящую из 100 экспериментов, в которых подбрасывают пуговицу с петлей (рис. 84). Найдите частоту события «пуговица упадет петлей вниз». Оцените вероятность события «пуговица упадет петлей вверх» в проведенной серии экспериментов.

Рис. 84

571.° В таблице приведены данные о рождении детей в городе Киеве за 2007 год.

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Количество рождений мальчиков	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Количество рождений девочек	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Подсчитайте частоту рождений мальчиков в каждом месяце и за весь 2007 год. Оцените вероятность рождения девочки в 2007 году.

572.° Оператор справочной службы в течение рабочего дня (9:00–17:00) разговаривает в среднем по телефону 6 ч. Оцените вероятность того, что, если позвонить в справочную в это время, телефон окажется свободным.

573.° По статистике, в городе Одесса в течение лета количество солнечных дней в среднем равно 70. Оцените вероятность того, что, приехав летом в Одессу на один день, гость застанет пасмурную погоду.

574.° Из большой партии лампочек выбрали 1000, среди которых оказалось 5 бракованных. Оцените вероятность купить бракованную лампочку.

575.° Во время эпидемии гриппа среди обследованных 40 000 жителей выявили 7900 больных. Оцените вероятность события «наугад выбранный житель болен гриппом».

576.° Вероятность купить бракованную батарейку равна 0,02. Верно ли, что в любой партии из 100 батареек есть две бракованные?

577.° Приведенную таблицу называют «Учебный план 9 класса общеобразовательной школы»:

Предмет	Количество часов в неделю
Украинский язык	2
Украинская литература	2
Русский язык	2
Иностранный язык	2
Русская и зарубежная литература	2
История Украины	2
Всемирная история	1
Правоведение	1
Художественная культура	1
Алгебра	2
Геометрия	2
Биология	3
География	2
Физика	2
Химия	2
Трудовое обучение	1
Информатика	1
Основы здоровья	1
Физкультура	3

Оцените вероятность того, что выбранный наугад урок в недельном расписании 9 класса окажется: 1) алгеброй; 2) геометрией; 3) математикой; 4) физкультурой; 5) иностранным языком.

578.• Выберите наугад одну страницу из повести Марко Вовчок «Институтка». Подсчитайте, сколько на этой странице окажется букв «н», «о», «я», «ю», а также сколько всего на ней букв. Оцените вероятность появления этих букв в выбранном тексте. Эта оценка позволит понять, почему на клавиатурах пишущей машинки и компьютера (рис. 85) буквы «н» и «о» расположены ближе к центру, а буквы «я» и «ю» — ближе к краю.

Рис. 85

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

579. Решите неравенство $(|x| + 1)(x^2 + 5x - 6) > 0$.

580. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{\frac{2}{5}} - 0,5\sqrt{160} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; 2) $9\sqrt{2\frac{1}{3}} - 8\sqrt{1\frac{5}{16}} + \sqrt{189}$.

581. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2 - 6x < 14, \\ (x-2)^2 > (x+4)(x-4) + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - (3 - x) \leqslant 5 - 3(x - 5), \\ 7 - 2(x - 3) > 1 - (2x + 5). \end{cases}$

582. Решите графически уравнение:

1) $x^2 + 2 = -\frac{3}{x}$; 2) $x^2 - 2x - 6 = \sqrt{x}$.

583. Известно, что $a + 3b = 10$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a^2 + b^2$ и при каких значениях a и b?

18. Классическое определение вероятности

Для нахождения вероятности некоторых событий не обязательно проводить испытания или наблюдения. Достаточно руководствоваться жизненным опытом и здравым смыслом.

ПРИМЕР 1

Пусть в коробке лежат 10 красных шариков. Какова вероятность того, что взятый наугад шарик будет красного цвета? желтого цвета?

Очевидно, что при испытании в данных условиях любой взятый наугад шарик будет красного цвета.

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют **достоверным**. Вероятность такого события считают равной 1, то есть:

если A — достоверное событие, то

$$P(A) = 1.$$

Также очевидно, что при любом испытании шарик не может быть желтого цвета, ведь в коробке их нет.

Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют **невозможным**. Вероятность такого события считают равной 0, то есть:

если A — невозможное событие, то

$$P(A) = 0.$$

Заметим, что для любого события A выполняется неравенство

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

ПРИМЕР 2

Рассмотрим эксперимент, состоящий в том, что однородную монету подбрасывают один раз.

Понятно, что можно получить только один из двух результатов (исходов): выпадение цифры или выпадение герба. Причем ни один из них не имеет преимуществ. Такие результаты называют **равновозможными**, а соответствующие случайные события **равновероятными**. Тогда естественно считать, что вероятность каждого из событий «выпадение герба» и «выпадение цифры» равна $\frac{1}{2}$.

Подчеркнем: это совсем не означает, что в любой серии экспериментов с подбрасыванием монеты половиной результатов будет выпадение герба. Мы можем лишь прогнозировать, что при большом количестве испытаний частота выпадения герба приблизительно будет равной $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых ключевую роль будут играть равновозможные результаты.

ПРИМЕР 3

При бросании игрального кубика (рис. 86) можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти результаты равновозможны. Поэтому естественно считать, что, например, вероятность события «выпадение 5 очков» равна $\frac{1}{6}$.

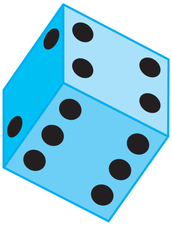


Рис. 86

ПРИМЕР 4

Пусть выпущен 1 000 000 лотерейных билетов, 10 из которых являются выигрышными. Испытание состоит в том, что покупают один билет. Этот эксперимент приводит к 1 000 000 равновозможных результатов: купили первый билет, купили второй билет и т. д. Тогда вероятность выигрыша при покупке одного билета равна $\frac{10}{1\,000\,000} = \frac{1}{100\,000}$.

ПРИМЕР 5

Пусть в коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный 3?

Понятно, что в этом испытании есть 15 равновозможных результатов. Из них существует 5, которые нас устраивают: когда вынимают шары с номерами 3, 6, 9, 12, 15. Поэтому естественно считать, что вероятность события «вынули шар с номером, кратным 3» равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Несмотря на то, что в примерах 1–5 рассматривались разные ситуации, их описывает одна математическая модель. Поясним это.

- В каждом примере при испытании можно получить один из n равновозможных результатов.

Пример 1: $n = 10$.
Пример 2: $n = 2$.
Пример 3: $n = 6$.
Пример 4: $n = 1\,000\,000$.
Пример 5: $n = 15$.

- В каждом примере рассматривается некоторое событие A, к которому приводят m результатов. Будем называть их благоприятными.

Пример 1: A — вынули красный шарик, $m = 10$, или
A — вынули желтый шарик, $m = 0$.
Пример 2: A — выпал герб, $m = 1$.
Пример 3: A — выпало заранее заданное количество очков на грани кубика, $m = 1$.
Пример 4: A — выигрыш приза, $m = 10$.
Пример 5: A — вынули шар, номер которого кратен 3, $m = 5$.

В каждом примере вероятность события A можно вычислить по формуле:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Определение. **Если испытание заканчивается одним из n равновозможных результатов, из которых m приводят к наступлению события A, то вероятностью события A называют отношение $\frac{m}{n}$.**

Такое определение вероятности называют **классическим.**

Рис. 87

Подчеркнем, что если результаты испытания не являются равновозможными, то классическое определение вероятности к такой ситуации применять нельзя.

Например, если монету заменить на пуговицу (рис. 87), то события «пуговица упадет петлей вниз» и «пуговица упадет петлей вверх» неравновероятны. Оценить вероятность каждого из них можно в результате эксперимента с помощью частот этих событий, найденных при проведении большого количества испытаний.

ПРИМЕР 6

Бросают одновременно два игральных кубика: синий и желтый. Какова вероятность того, что выпадут две шестерки?

С помощью таблицы, изображенной на рисунке 88, мы можем установить, что в данном эксперименте можно получить 36 равновозможных результатов, из которых благоприятным является только один. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{36}$.

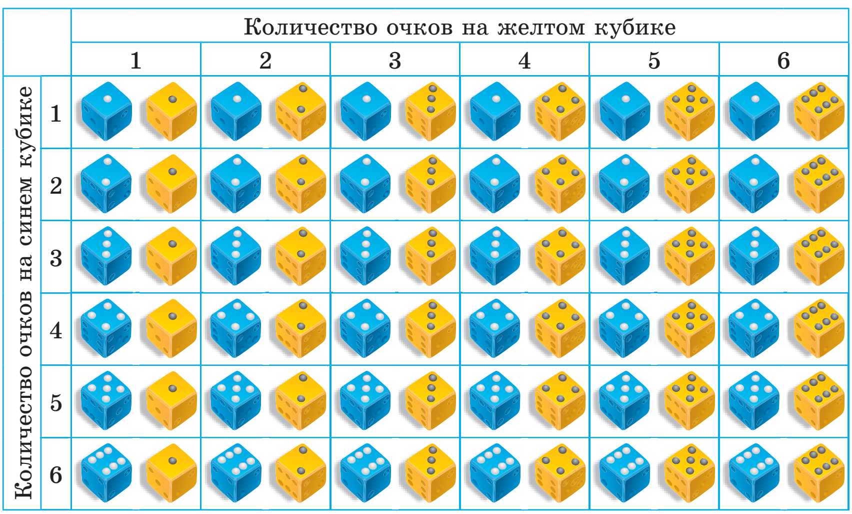


Рис. 88

ПРИМЕР 7 **(задача Д'Аламбера)**

Бросают одновременно две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

Эта задача похожа на задачу из примера 6. Разница лишь в том, что кубики отличались по цвету, а монеты неразличимы. Тогда, чтобы определить в данном эксперименте все равновозможные результаты, будем различать монеты, предварительно их пронумеровав. Можно получить четыре равновозможных результата (рис. 89):

Первая монета   Вторая монета

Рис. 89

В первых трех из этих результатов хотя бы один раз появился герб. Эти результаты являются благоприятными.

Поэтому вероятность того, что при одновременном бросании двух монет хотя бы один раз появится герб, равна $\frac{3}{4}$.

В завершение этого пункта отметим следующее.

На первый взгляд кажется, что многими явлениями, происходящими вокруг нас, управляет «его величество случай». Однако при более основательном анализе выясняется, что через хаос случайностей прокладывает себе дорогу закономерность, которую можно количественно оценить. Науку, которая занимается такими оценками, называют **теорией вероятностей.**

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Какова вероятность: 1) достоверного события; 2) невозможного события?
4. Пусть $P(A)$ — вероятность наступления события A. В каких границах находится $P(A)$?
5. Приведите примеры равновероятных событий.
6. Сформулируйте классическое определение вероятности.
7. К каким ситуациям нельзя применять классическое определение вероятности?

УПРАЖНЕНИЯ

584.° Приведите примеры достоверных событий.

585.° Приведите примеры невозможных событий.

586.° В корзинке лежат 10 красных и 15 зеленых яблок. Какова вероятность взять наугад из корзинки грушу? яблоко?

587.° Наугад выбирают три четные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечетным?

588.° Наугад выбирают три нечетные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечетным?

589.° Какова вероятность того, что, переставив буквы в слове «алгебра», мы получим слово «геометрия»?

590.° Приведите примеры событий с равновозможными результатами.

591.° Приведите примеры событий с неравновозможными результатами.

592.° Равновероятны ли события A и B:
1) событие A: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 1;
событие B: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с номером 7;
2) событие A: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с четным номером;
событие B: из 15 бильярдных шаров с номерами от 1 до 15 взять наугад шар с нечетным номером?

593.° Какова вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет количество очков, равное:
1) одному;
2) трем;
3) четному числу;
4) числу, кратному 5;
5) числу, которое не делится нацело на 3;
6) числу, кратному 7?

594.° Представь себе, что в классе, в котором ты учишься, разыгрывается одна бесплатная туристическая поездка в Лондон. Какова вероятность того, что в Лондон поедешь ты?

595.° Чтобы сдать экзамен по математике, надо выучить 35 билетов. Ученик выучил безупречно 30 билетов. Какова вероятность того, что, отвечая на один наугад вытянутый билет, он получит оценку 12 баллов?

596.° Чтобы сдать экзамен по математике, надо выучить 30 билетов. Ученик не выучил только один билет. Какова вероятность того, что он не сдаст экзамен, отвечая на один билет?

597.° Какова вероятность того, что имя ученицы вашего класса, которую вызовут к доске на уроке математики, — Екатерина?

598.° В классе учится 12 девочек и 17 мальчиков. Один учащийся опоздал в школу. Какова вероятность того, что это: 1) был мальчик; 2) была девочка?

599.° В лотерее 20 выигрышных билетов и 280 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть, купив один билет?

600.° В коробке лежат 7 синих и 5 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик окажется: 1) желтым; 2) синим?

601.° В коробке было 23 карточки, пронумерованные от 1 до 23. Из коробки наугад взяли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней записано число:
1) 12;
2) 24;
3) четное;
4) нечетное;
5) кратное 3;
6) кратное 7;
7) двузначное;
8) простое;
9) в записи которого есть цифра 9;
10) в записи которого есть цифра 1;
11) в записи которого отсутствует цифра 5;
12) сумма цифр которого делится нацело на 5;
13) которое при делении на 7 дает в остатке 5;
14) в записи которого отсутствует цифра 1?

602.° Из натуральных чисел от 1 до 30 наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет:
1) простым;
2) делителем числа 18;
3) квадратом натурального числа?

603.° Набирая номер телефона своего товарища, Николай забыл: 1) последнюю цифру; 2) первую цифру. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберет правильный номер?

604.• Какова вероятность того, что твой самый счастливый день в следующем году попадет на: 1) 7 число; 2) 31 число; 3) 29 число?

605.• Грани кубика раскрашены в красный или белый цвет (каждая грань в один цвет). Вероятность выпадения красной грани равна $\frac{5}{6}$, а вероятность выпадения белой грани — $\frac{1}{6}$. Сколько красных и сколько белых граней у кубика?

606.• Грани кубика раскрашены в два цвета — синий и желтый (каждая грань в один цвет). Вероятность того, что выпадет синяя грань, равна $\frac{2}{3}$, а что желтая — $\frac{1}{3}$. Сколько синих и сколько желтых граней у кубика?

607.• В коробке лежат 2 синих шарика и несколько красных. Сколько красных шариков в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад шарик:

1) окажется синим, равна $\frac{2}{5}$;

2) окажется красным, равна $\frac{4}{5}$?

608.•• Карточки с номерами 1, 2, 3 произвольным образом разложили в ряд. Какова вероятность того, что карточки с нечетными номерами окажутся рядом?

609.•• На скамейку произвольным образом садятся два мальчика и одна девочка. Какова вероятность того, что мальчики окажутся рядом?

610.•• В коробке лежат 5 зеленых и 7 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет зеленого цвета, была равной 1?

611.•• В коробке лежат 3 красных, 7 желтых и 11 синих карандашей. Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть наугад, чтобы вероятность того, что среди вынутых карандашей хотя бы один будет красного цвета, была равной 1?

612.•• Бросают одновременно два игральных кубика. С помощью рисунка 88 установите, какова вероятность того, что выпадут:

1) две единицы;
2) два одинаковых числа;
3) числа, сумма которых равна 7;
4) числа, сумма которых больше 10;
5) числа, произведение которых равно 6.

613.•• Бросают одновременно две монеты. Какова вероятность того, что выпадут: 1) два герба; 2) герб и цифра?

614.* Какова вероятность того, что при трех подбрасываниях монеты: 1) трижды выпадет герб; 2) дважды выпадет герб; 3) один раз выпадет герб; 4) хотя бы один раз выпадет герб?

615.* Какова вероятность того, что при двух бросках игрального кубика:

1) в первый раз выпадет число, которое меньше 5, а во второй — больше 4;
2) шестерка выпадет только во второй раз;
3) в первый раз выпадет больше очков, чем во второй?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

616. Упростите выражение:

$$\left(\frac{9a^2}{a^3+64}-\frac{a+4}{a^2-4a+16}\right):\frac{8a+8}{a^2-4a+16}+\frac{a+10}{a+4}.$$

617. Найдите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-5x-2x^2}}$;

3) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

4) $f(x)=\sqrt{3-5x-2x^2}+\dfrac{2}{x^2+2x}$.

618. Постройте график функции:

1) $y = \frac{6}{x} + 2$;
3) $y = \frac{4}{x - 3}$;
2) $y = -\frac{8}{x} - 3$;
4) $y = -\frac{6}{x + 2}$.

Сначала была игра

Вы знаете много игр, в которых результат зависит от мастерства участников. Однако есть и такие игры, в которых от умения игроков ничего не зависит. Все решает случай. К последним принадлежит и игра в кости. Считают, что именно с нее началась наука о случайном.

Придворный французского короля Людовика XIV, азартный игрок, философ и литератор кавалер де Мере обратился к выдающемуся ученому Блезу Паскалю (1623–1662) с просьбой разъяснить такой парадокс. С одной стороны, богатый игровой опыт де Мере свидетельствовал, что при бросании трех игральных костей сумма в 11 очков выпадает чаще, чем в 12 очков.

С другой стороны, этот факт вступал в противоречие с такими соображениями. Сумму в 11 очков можно получить из шести разных комбинаций кубиков:

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

Но и 12 очков также можно получить из шести комбинаций:

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французский религиозный философ, писатель, математик и физик. В раннем возрасте проявил математические способности, вошел в историю науки как классический пример подростковой гениальности. Круг его математических интересов был необычайно широк. В частности, он изобрел общий алгоритм для нахождения признаков делимости любых целых чисел, сформулировал ряд основных положений теории вероятностей, методы вычисления площадей фигур, площадей поверхностей и объемов тел. Сконструировал первую вычислительную машину — сумматор.

Следовательно, к появлению в сумме 11 и 12 очков приводит одинаковое количество благоприятных результатов. Таким образом, эти события имеют одинаковые шансы, что противоречит практике.

Паскаль понял: ошибка состояла в том, что события, рассматриваемые де Мере, не являются равновероятными. Например, сумму в 11 очков с помощью комбинации 6-4-1 можно получить при 6 разных результатах бросания кубиков: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Если подсчитать для каждой комбинации количество способов ее появления, то будем иметь: для суммы 11 количество благоприятных результатов равно 27, а для суммы 12 — 25. Причем все такие результаты являются равновозможными.

Эту и другие задачи, связанные с азартными играми, Б. Паскаль обсуждал в переписке с Пьером Ферма (1601–1665). Считают, что в этой переписке были заложены основы теории вероятностей.

Интересно, что ошибку, подобную той, которую допустил де Мере, сделал выдающийся французский математик Жан Лерон Д’Аламбер (1717–1783). Он решал задачу, которую мы рассмотрели в примере 7 предыдущего пункта, и рассуждал приблизительно так.

Возможны три результата: герб выпал на первой монете, герб выпал на второй монете, герб вообще не выпал. Тогда из трех вероятных результатов благоприятными являются только два, то есть вероятность равна $\frac{2}{3}$.

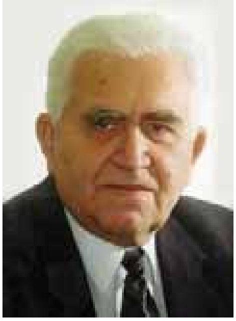
Ошибка состояла в том, что указанные три результата не являются равновозможными (подумайте, почему). Скорее всего, эта ошибка свидетельствует о том, что в XVIII веке теория вероятностей была еще «молодой» наукой, требовавшей уточнения самого понятия «вероятность события».

Становление и развитие теории вероятностей связаны с трудами таких выдающихся ученых как Якоб Бернулли (1654–1705), Пьер Лаплас (1749–1827), Рихард Мизес (1883–1953). В XX в. особое значение приобрели работы выдающегося советского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987).

Украинская математическая наука подарила миру плеяду выдающихся специалистов в области теории вероятностей. Имена И. И. Гихмана, Б. В. Гнеденко, А. В. Скорохода, М. И. Ядренко известны математикам во всем мире.

Михаил Иосифович Ядренко значительную часть своих творческих сил посвящал также педагогической деятельности. Он много работал с одаренной молодежью, был основателем Всеукраинских олимпиад юных математиков. Михаил Иосифович проводил значительную просветительскую работу. В частности, по его инициативе в 1968 г. был создан первый в Украине научно-популярный сборник «У світі математики».

А. Н. Колмогоров



М. И. Ядренко

19. Начальные сведения о статистике

Каким тиражом следует выпустить учебник по алгебре для 9 класса?

Стоит ли определенному политику выдвигать свою кандидатуру на очередных выборах мэра?

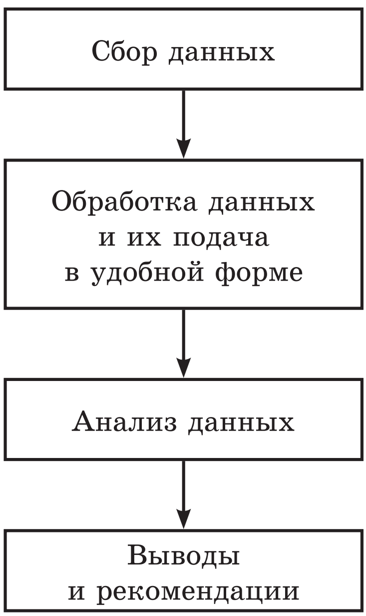
Сколько килограммов рыбы и морепродуктов потребляет в среднем за год один житель Украины?

Выгодно ли для концерта данного артиста арендовать стадион?

На эти и много других вопросов помогает отвечать статистика.

Определение. Статистика (от латинского *status* — состояние) — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов:



Остановимся отдельно на каждом этапе.

Сбор данных

Вы знаете, что вредные привычки, неправильное питание, малоподвижный образ жизни приводят к сердечно-сосудистым заболеваниям. К такому выводу врачи пришли, исследовав, конечно, не всех людей планеты.

Понятно, что исследование носило *выборочный*, но *массовый* характер.

В статистике совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой**.

В данном примере выборка состояла из нескольких миллионов людей.

Следует отметить, что статистический вывод, основанный лишь на численности выборки, не всегда достоверен. Например, если мы, исследуя популярность артиста, ограничимся опросом людей, пришедших на его концерт, то полученные выводы не будут объективными, ведь эти люди пришли на концерт именно потому, что этот артист им нравится. Статистики говорят, что выборка должна быть **репрезентативной** (от французского *représentatif* – показательный).

Так, врачи, изучая факторы риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний, исследовали людей разного возраста, профессий, национальностей и т.д.

Следовательно, *сбор данных должен основываться на массовости и репрезентативности выборки*. Иногда выборка может совпадать с множеством всех объектов, исследование которых проводится. Примером такого исследования является проведение государственной итоговой аттестации по математике в 9 классе.

Способы представления данных

Собранную информацию (совокупность данных) удобно представлять в виде таблиц, графиков, диаграмм.

Рассмотрим несколько примеров.

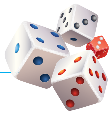
ПРИМЕР 1

В таблице представлены результаты выступлений украинских школьников на Международных математических олимпиадах в течение 1993–2008 годов.

Год	Место проведения	Количество медалей				Без медалей
		Золотые	Серебряные	Бронзовые	Всего медалей	
1993	Турция	0	2	3	5	1
1994	Гонконг	1	1	2	4	2
1995	Канада	1	1	1	3	3
1996	Индия	1	0	5	6	0
1997	Аргентина	3	3	0	6	0
1998	Тайвань	1	3	2	6	0
1999	Румыния	2	2	1	5	1
2000	Южная Корея	2	2	0	4	2
2001	США	1	5	0	6	0
2002	Великобритания	1	3	0	4	2
2003	Япония	1	2	3	6	0
2004	Греция	1	5	0	6	0
2005	Мексика	2	2	2	6	0
2006	Словения	1	2	2	5	1
2007	Вьетнам	3	1	2	6	0
2008	Испания	2	2	2	6	0

Примечание. Команда участников на Международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек.

Во многих случаях данные удобно представлять в виде **столбчатой диаграммы,** которую еще называют **гистограммой** (от греческих *histos* — столб и *gramma* — написание). Такая информация легко воспринимается и хорошо запоминается.



ПРИМЕР 2

На рисунке 90 представлена выборка природно-заповедного фонда Украины.

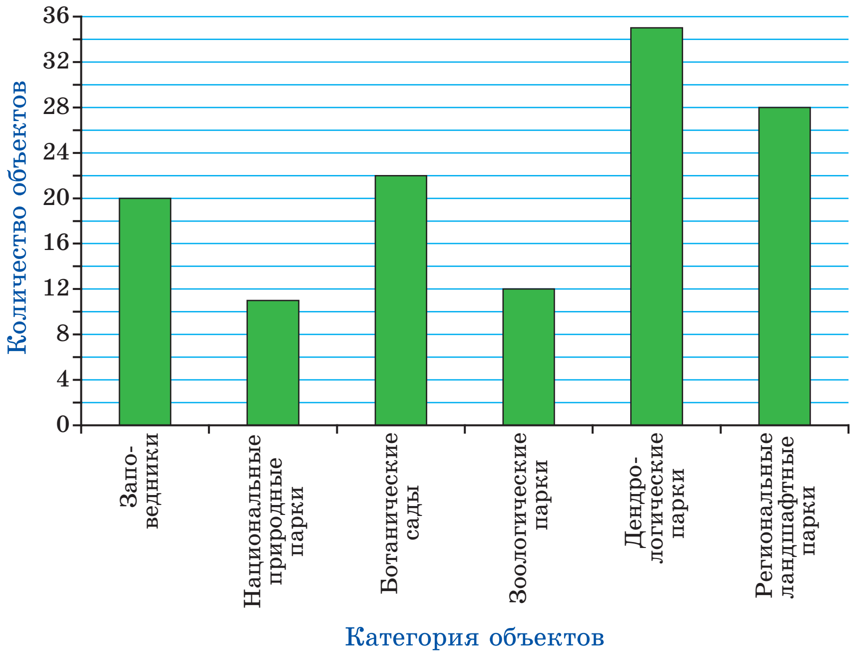


Рис. 90

ПРИМЕР 3

Информацию также можно представлять в виде графиков. Так, на рисунке 91 изображен график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в мире в течение 1995–2008 гг.

Столбчатые диаграммы и графики обычно используют тогда, когда хотят продемонстрировать, как с течением времени изменяется некоторая величина.

ПРИМЕР 4

На рисунке 92 приведено распределение медалей, полученных украинскими школьниками на международных олимпиадах в 2008 году. Для этого использована **круговая диаграмма:** круг представляет общее количество медалей, а каждому предмету соответствует некоторый сектор круга.

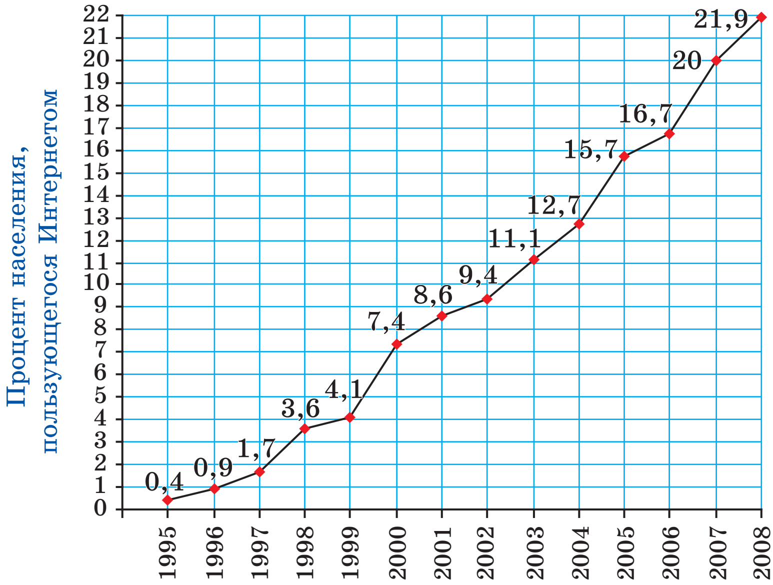


Рис. 91

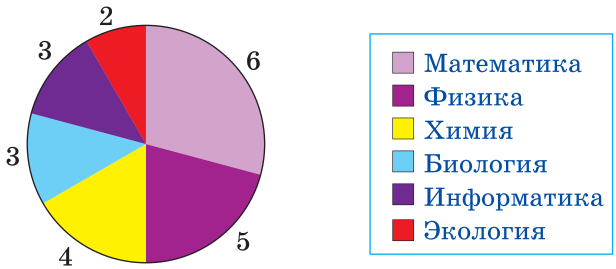


Рис. 92

Анализ данных, выводы и рекомендации

Статистические сведения поступают из разных областей знаний и деятельности человека: экономики, медицины, социологии, демографии, сельского хозяйства, метеорологии, спорта и т. д. Однако статистические методы обработки (анализа) данных много в чем схожи. Ознакомимся с некоторыми из них.

Обратимся к примеру 1. Приведенная таблица позволяет узнать, сколько в среднем медалей в год завоевывали школьники Украины на Международных математических олимпиадах. Для этого надо количество всех медалей, полученных на протяжении рассматриваемого периода, разделить на количество лет. Например, за период 1993–2008 годы имеем:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6}{16}=\frac{84}{16}=5{,}25.$$

Так как за год можно завоевать не более 6 медалей, то среднее значение 5,25 свидетельствует о том, что команда Украины достойно выступает на этом престижном форуме.

В статистической информации средние значения полученной совокупности данных встречаются довольно часто. Например, приведем таблицу реализации основных продуктов питания через сети больших магазинов в некоторых странах (в килограммах на человека в год).

Страна	Мясо	Рыба и морепродукты	Зерновые	Овощи	Фрукты
Австралия	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Дания	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Испания	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Италия	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Канада	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
США	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Украина	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Франция	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Такую таблицу могут использовать, например, экономисты в исследованиях, выводах и рекомендациях, хозяева магазинов и производители продукции при планировании своей деятельности.

Однако среднее значение не всегда точно (адекватно) отображает ситуацию. Например, если в стране доходы разных слоев населения очень отличаются, то средний доход на одного человека для большинства жителей может не отображать их материального состояния.

Например, в какой-то стране 100 жителей — очень богатые, а остальные 5 миллионов — очень бедные. Тогда показатель среднего дохода может оказаться не низким, а следовательно, не будет адекватно отображать общую бедность населения.

В подобных случаях для анализа данных используют другие характеристики.

С помощью примера 1 составим таблицу, отображающую количество медалей каждого вида:

Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали	Без медалей
23	36	25	12

Такую таблицу называют **частотной**, а числа, записанные во второй строке, — **частотами**.

Частота 36 показывает, что украинские школьники чаще всего завоевывали серебряные медали. Показатель «серебряные медали» называют **модой** полученных данных.

Это слово всем хорошо знакомо. Мы часто говорим «войти в моду», «выйти из моды», «дань моде». В повседневной жизни мода означает совокупность взглядов и привычек, которым большинство отдает предпочтение в данный момент времени.

Именно мода является важнейшей характеристикой тогда, когда полученная совокупность данных не является числовым множеством. Продемонстрируем это на таком примере.

Одна известная фирма, планирующая поставлять джинсы в Украину, провела опрос репрезентативной выборки, состоящей из 500 человек. В результате получили такую частотную таблицу:

Размер джинсов	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	52	71	145	126	59	40	7
Относительная частота (в %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

В третьей строке этой таблицы записано отношение соответствующей частоты к величине выборки. Это отношение, записанное в процентах, называют **относительной частотой**. Например, для размера XS имеем: $\frac{52}{500} \cdot 100 = 10{,}4$ (%).

Мода данной выборки — это размер M, и ей соответствует относительная частота 29 %.

Тем самым фирма получила информацию, что наибольшую часть объемов поставок (около 29 %) должны составлять джинсы размера M.

Заметим, что если бы в таблице две частоты были равны и принимали наибольшие значения, то модой являлись бы два соответствующих размера.

Выше мы привели пример, когда среднее значение неточно отображает материальное состояние людей в стране. Более полную характеристику можно получить, если средние значения дополнить результатом такого исследования.

Формируют репрезентативную выборку, состоящую из жителей данной страны, и получают совокупность данных, составленную из доходов. Далее в соответствии со шкалой, определяющей уровень доходов (низкий, средний, высокий), разбивают полученный ряд данных на три группы. Составляют таблицу, в которую вносят значения частот и относительных частот:

Уровень доходов	Низкий	Средний	Высокий
Частота	m	n	k
Относительная частота	p %	q %	r %

Мода такой совокупности данных может характеризовать уровень доходов в стране.

Исследование совокупности данных можно сравнить с работой врача, ставящего диагноз. В зависимости от жалоб пациента или видимых симптомов врач выбирает определенную методику поиска причины болезни. Понятно, что методы исследования определяют точность диагноза. Так и в статистике: в зависимости от собранной информации и способа ее получения применяют различные методы ее обработки. Эти методы могут дополнять друг друга, какой-то из них может более точно (адекватно), чем другие, отражать конкретную ситуацию. Так, анализируя выступления украинских школьников на Международных математических олимпиадах, можно установить, что статистические характеристики — среднее значение и мода – удачно сочетаются. А в примере, определяющем «ходовой» размер джинсов, наиболее приемлем поиск моды.

Чем богаче арсенал методик обработки данных, тем более объективный вывод можно получить.

Ознакомимся еще с одной важной статистической характеристикой.

Семья, приняв решение сделать ремонт на кухне, интересуется, сколько стоит положить один квадратный метр кафельной плитки. Изучив прейскурант 11 строительных фирм, получили такую информацию (цены записаны в гривнях в порядке возрастания):

40, 40, 45, 45, 50, 65, 90, 100, 150, 225, 250.

Семья хочет выбрать фирму со средними ценами.

Среднее значение полученной совокупности данных равно 100.

Однако полученные данные показывают, что цену 100 грн. скорее можно отнести к высоким, чем к средним.

Заметим, что число 65 стоит посередине записанной упорядоченной совокупности данных. Его называют **медианой** этой выборки. В этой ситуации именно медиана помогает выбрать фирму со средними ценами. Действительно, в последовательности из 11 чисел есть пять меньших, чем 65, и пять больших, чем 65.

Теперь рассмотрим упорядоченную совокупность данных, состоящую из четного количества чисел, например, из восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Здесь «серединой» выборки являются сразу два числа: 7 и 8. Считают, что медиана такой выборки равна их среднему арифметическому $\frac{7+8}{2}=7{,}5$.

Среднее значение, моду и медиану называют **мерами центральной тенденции** полученной совокупности данных.

1. Какую науку называют статистикой?
2. Из каких этапов состоит статистическое исследование?
3. Что в статистике называют выборкой?
4. На чем должен основываться сбор данных?
5. Какие существуют способы представления данных?
6. Приведите примеры применения статистической информации в форме средних значений.
7. Приведите примеры, когда статистическая информация в форме средних значений неточно отображает ситуацию.
8. Опишите частотную таблицу.
9. Опишите, что такое мода.
10. Опишите, как найти относительную частоту.
11. Какое число называют медианой упорядоченной выборки?

УПРАЖНЕНИЯ

619.° **Пользуясь диаграммой, в которой отображены площади наибольших водохранилищ Украины (рис. 93), установите:**

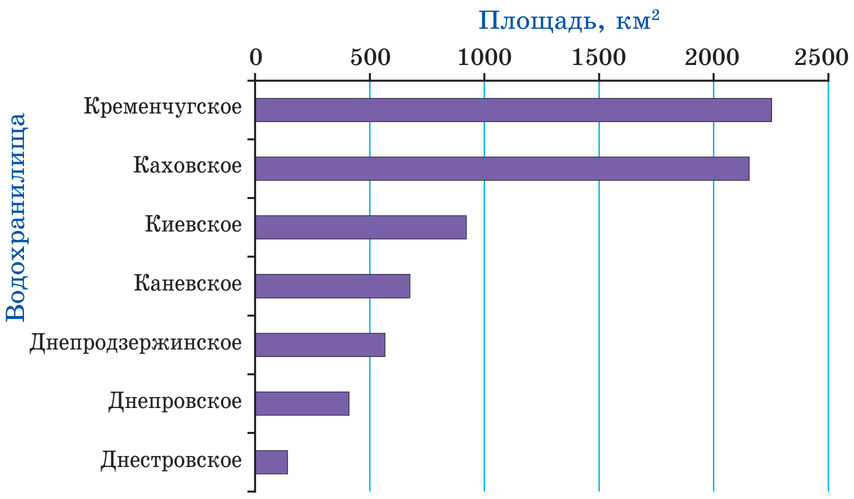


Рис. 93

1) площадь какого из водохранилищ наибольшая;
2) площадь какого из водохранилищ наименьшая;
3) площадь какого из водохранилищ, Киевского или Каневского, больше.

620.° Пользуясь диаграммой, на которой изображено процентное содержание соли в воде некоторых водоемов (рис. 94), установите:
1) в каком из данных водоемов самая соленая вода;
2) в каком из данных водоемов наименее соленая вода;
3) в каком из морей, Средиземном или Красном, вода более соленая.

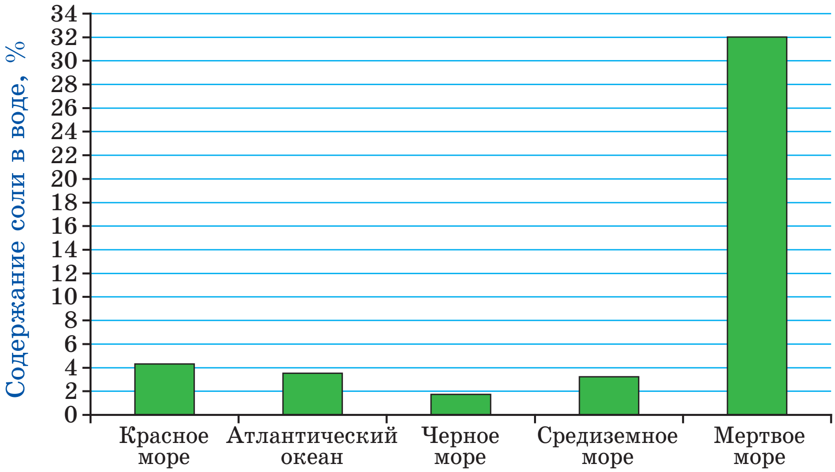


Рис. 94

621.° Учащиеся девятых классов посещают разные спортивные секции. Используя диаграмму (рис. 95), дайте ответы на вопросы.
1) Какую секцию посещает больше всего девятиклассников?
2) Какие секции посещает одинаковое количество девятиклассников?
3) Какую часть от количества футболистов составляет количество легкоатлетов?
4) Сколько процентов составляет количество гандболистов от количества баскетболистов?

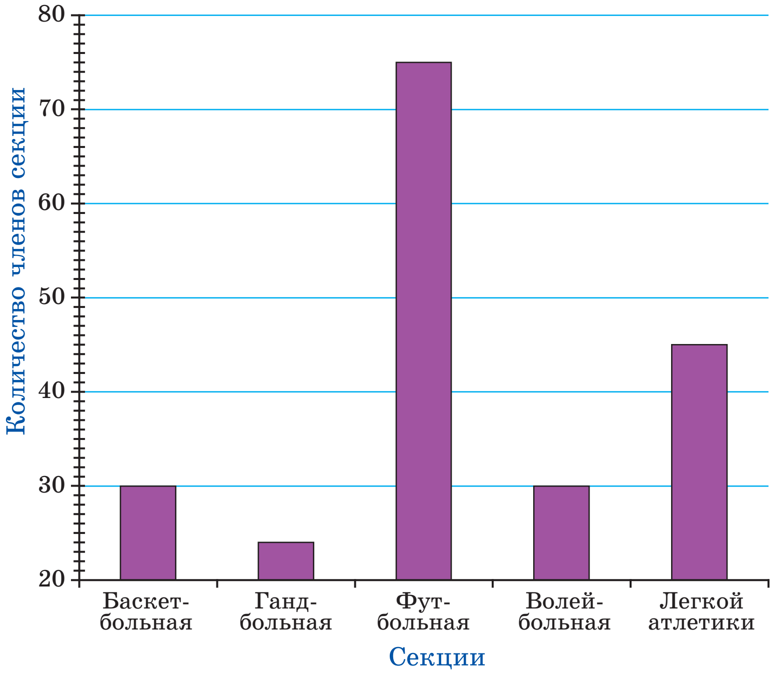


Рис. 95

622.° Используя таблицу среднегодовых температур воздуха в отдельных городах Украины, постройте соответствующую столбчатую диаграмму.

Город	Температура, °C	Город	Температура, °C
Львов	7,5	Черкассы	7,3
Ужгород	9,3	Полтава	6,8
Киев	6,9	Донецк	7,5
Сумы	6,0	Луганск	9,2
Одесса	9,4	Ялта	13,1

623.° Используя таблицу развития Киевского метрополитена, постройте график роста длины его линий.

Год	Количество станций	Длина линий, км	Год	Количество станций	Длина линий, км
1960	5	5,2	1987	28	32,8
1965	10	12,7	1992	35	43,3
1971	14	18,2	2000	39	51,7
1976	17	20,5	2004	42	56,6
1981	23	28,2	2008	46	59,7

624.° Используя таблицу развития Киевского метрополитена, постройте график увеличения количества его станций.

625.° Определите, является ли репрезентативной выборка:
1) чтобы узнать, как часто жители города в выходные дни бывают на природе, были опрошены члены трех садовых кооперативов;
2) с целью выяснения знания девятиклассниками наизусть стихотворений Леси Украинки произвольным образом были опрошены 4 тысячи девятиклассников в разных регионах страны;
3) для определения процента пользователей Интернета в Украине произвольным образом опросили 500 киевлян;
4) для выяснения рейтинга молодежной телепрограммы произвольным образом были опрошены 10 тысяч юношей и девушек в возрасте от 15 до 20 лет.

626.° Найдите меры центральной тенденции совокупности данных:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

627.° Девушки 9 класса на уроке физкультуры сдавали зачет по прыжкам в высоту. Учитель записал такую последовательность результатов:

105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.

Найдите среднее значение и медиану полученных данных.

628.• Классный руководитель 9 класса ведет учет посещения учащимися занятий. В конце недели его записи выглядели так:

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Количество отсутствующих	3	2	5	4	8

1) Найдите, сколько учащихся отсутствовало в среднем в день в течение этой недели.
2) Найдите моду полученных данных.

629.• В 9 классе, в котором учится 23 ученика, провели опрос: сколько приблизительно часов в день тратит девятиклассник на выполнение домашних заданий. Ответы учащихся представлены в виде гистограммы (рис. 96).

Рис. 96

1) Заполните частотную таблицу.

Время, затраченное на выполнение домашних заданий, ч	0	1	2	3	4
Частота					
Относительная частота					

2) Сколько времени в день в среднем учащийся этого класса выполняет домашнее задание? (Найдите среднее значение ряда данных.)
3) Сколько времени выполняет домашнее задание большинство учеников этого класса? (Найдите моду ряда данных.)

630.• На рисунке 97 изображена столбчатая диаграмма результатов письменной работы по алгебре в трех девятых классах.
1) Заполните частотную таблицу.

Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота												
Относительная частота												

2) Найдите средний балл, полученный учащимися за эту письменную работу.
3) Найдите моду полученных данных.

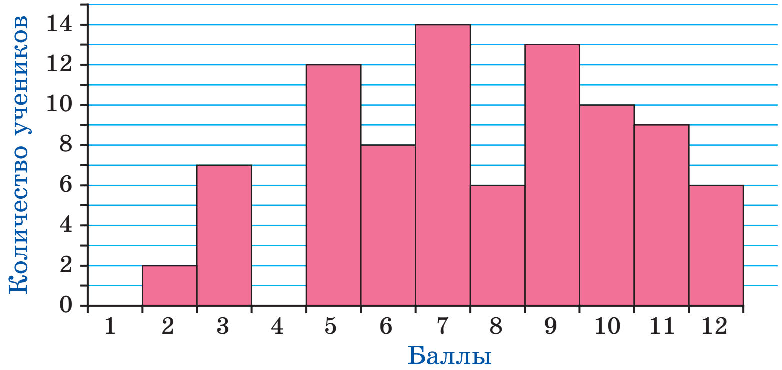


Рис. 97

631.• По результатам последней контрольной работы по алгебре, проведенной в вашем классе, заполните частотную таблицу, приведенную в задаче 630.

1) Найдите средний балл, полученный учащимися за эту контрольную работу.
2) Найдите моду полученных данных.

632.• Учащихся одной херсонской школы опросили: сколько раз в жизни они летали на самолете. Полученные данные приведены в таблице.

Количество полетов	0	1	2	3	4	5
Количество учащихся	530	92	46	30	8	4
Относительная частота (%)						

1) Заполните третью строку таблицы.
2) Представьте полученные данные в виде столбчатой диаграммы.
3) Найдите моду и среднее значение полученных данных.
4) Поясните, можно ли считать рассматриваемую выборку репрезентативной для выводов относительно всех школьников города Херсона.

633.• Выпишите все ваши оценки по алгебре, полученные в течение года. Найдите среднее значение, моду и медиану полученного ряда данных.

634.• Директор фирмы получает 20 000 грн. в месяц, два его заместителя по 10 000 грн., а остальные 17 работников фирмы — по 1500 грн. в месяц. Найдите среднее значение, моду, медиану заработных плат в этой фирме.

635.• Прочтите одно из самых известных стихотворений Т. Г. Шевченко:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі с плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Для букв «а», «е», «и», «ї», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» составьте частотную таблицу их наличия в данном стихотворении. Определите моду полученных данных.

636.• В течение мая 2007 года утренняя температура воздуха в городе Киеве составляла:

Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C
01.05.2007	5	11.05.2007	20	21.05.2007	30
02.05.2007	4	12.05.2007	21	22.05.2007	29
03.05.2007	6	13.05.2007	19	23.05.2007	31
04.05.2007	11	14.05.2007	20	24.05.2007	29
05.05.2007	19	15.05.2007	26	25.05.2007	28
06.05.2007	15	16.05.2007	25	26.05.2007	29
07.05.2007	16	17.05.2007	25	27.05.2007	30
08.05.2007	19	18.05.2007	26	28.05.2007	27
09.05.2007	14	19.05.2007	28	29.05.2007	26
10.05.2007	10	20.05.2007	28	30.05.2007	26
				31.05.2007	25

Найдите меры центральной тенденции полученных данных.

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. / Ін-т літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України.— К.: Наук. думка, 2003.— Т. 2.— С. 17.

637.$^{\bullet}$ Постройте ряд: 1) из пяти чисел; 2) из шести чисел, у которого:

а) среднее значение равно медиане;

б) среднее значение больше медианы.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

638. Упростите выражение:

$$\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a}{a+1}\right):\frac{3a+1}{a^2+a}.$$

639. Сократите дробь:

1) $\dfrac{9x^2-1}{3x^2-4x+1}$; 2) $\dfrac{2x^2-5x+3}{4x^2-12x+9}$.

640. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x-y=13, \\ x^2-y^2=23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-y^2=23, \\ 2x^2+y^2=41. \end{cases}$

641. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{3x-2x^2}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$.

642. Решите неравенство $(x^2+1)(x^2-x-2)<0$.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 4

1. Катер проплыл по озеру на 5 км больше, чем по реке против течения, затратив на путь по реке на 15 мин больше, чем по озеру. Собственная скорость катера равна 10 км/ч, а скорость течения реки — 2 км/ч.

Пусть расстояние, которое проплыл катер по реке, равно x км. Какое из данных уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{8}=15$; В) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{12}=15$;

Б) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{8}=\dfrac{1}{4}$; Г) $\dfrac{x+5}{10}-\dfrac{x}{12}=\dfrac{1}{4}$.

2. Первый рабочий работал 3 ч, а второй — 4 ч. Вместе они изготовили 44 детали, причем первый рабочий изготавливал за 1 ч на 2 детали меньше, чем второй рабочий за 2 ч.

Пусть первый рабочий за 1 ч изготавливал x деталей, а второй — y деталей. Какая из данных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ y - 2x = 2; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x + 4y = 44, \\ 2y - x = 2. \end{cases}$

3. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 2 ч 40 мин. Если первый тракторист проработает 1 ч, а потом его сменит второй тракторист, который проработает 2 ч, то вспаханной окажется половина поля.

Пусть первый тракторист может самостоятельно вспахать поле за x ч, а второй — за y ч. Какая из данных систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} x + y = 2,4, \\ x + 2y = 0,5; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$

4. Морская вода содержит 6 % соли. Сколько килограммов воды надо взять, чтобы получить 48 кг соли?

А) 80 кг; Б) 60 кг; В) 800 кг; Г) 600 кг.

5. Французский язык изучают 12 учащихся класса. Сколько процентов учащихся класса изучают французский язык, если всего в классе 30 учащихся?

А) 24 %; Б) 30 %; В) 40 %; Г) 48 %.

6. Вкладчик положил в банк 4000 грн. под 10 % годовых. Сколько денег будет на его счете через два года?

А) 4840 грн.; Б) 4800 грн.; В) 4080 грн.; Г) 4400 грн.

7. Цена некоторого товара после двух последовательных повышений выросла на 50 %, причем в первый раз цена была повышена на 20 %. На сколько процентов состоялось второе повышение?

А) на 30 %; Б) на 25 %; В) на 20 %; Г) на 15 %.

8. Шкаф стоил 1500 грн. Сначала его цену снизили, а потом повысили на одно и то же число процентов. После этого шкаф стал стоить 1440 грн. На сколько процентов изменяли каждый раз цену шкафа?

А) на 20 %; Б) на 15 %; В) на 10 %; Г) на 18 %.

9. Сплав массой 800 г содержит 15 % меди. Сколько меди надо добавить к этому сплаву, чтобы медь в нем составила 20 %?

А) 50 г; Б) 40 г; В) 30 г; Г) 5 г.

10. После того, как смешали 50-процентный и 20-процентный растворы кислоты, получили 600 г 25-процентного раствора. Сколько было граммов 50-процентного раствора?

А) 500 г; Б) 300 г; В) 250 г; Г) 100 г.

11. Из натуральных чисел от 1 до 18 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 18?

А) $\frac{1}{4}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{18}$.

12. В лотерее разыгрывалось 12 компьютеров, 18 фотоаппаратов и 120 калькуляторов. Всего было выпущено 15 000 лотерейных билетов. Какова вероятность, приобретя один билет, не выиграть никакого приза?

А) $\frac{1}{10}$; Б) $\frac{1}{100}$; В) $\frac{9}{10}$; Г) $\frac{99}{100}$.

13. Из двузначных четных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет кратным числу 7?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{7}{45}$; В) $\frac{1}{14}$; Г) $\frac{2}{15}$.

14. В коробке лежат 12 белых и 16 красных шариков. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик окажется белым?

А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $\frac{4}{7}$.

15. В коробке лежат карандаши, из них 24 карандаша — синие, 8 карандашей — зеленые, а остальные — желтые. Сколько карандашей лежит в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад карандаш будет желтым, составляет $\frac{1}{3}$?

А) 48 карандашей; В) 45 карандашей;
Б) 54 карандаша; Г) 42 карандаша.

16. Найдите среднее значение выборки, состоящей из чисел 1,6; 1,8; 2,5; 2,2; 0,9.

А) 2,5; Б) 2,2; В) 1,8; Г) 2,6.

17. Укажите медиану выборки 2, 5, 6, 8, 9, 11.

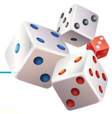
А) 6; Б) 7; В) 8; Г) 9.

18. Учащихся девятого класса опросили: сколько времени они затрачивают на выполнение домашнего задания по алгебре. Были получены такие данные:

Время выполнения задания	15 мин	20 мин	30 мин	45 мин	60 мин
Количество учащихся	3	7	6	10	4

Чему равна мода полученных данных?

А) 30 мин; В) 10 учащихся;
Б) 45 мин; Г) 6 учащихся.



ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - прикладная задача;
  - частота случайного события;
  - достоверное и невозможное события;
  - равновероятные события;
  - среднее значение;
  - частотная таблица;
  - гистограмма;
  - мода;
  - медиана;
- вы изучили:
  - формулу сложных процентов;
  - формулу для вычисления частоты случайного события;
- вы научились:
  - применять формулу сложных процентов;
  - находить меры центральной тенденции совокупности данных;
  - вычислять частоту случайного события;
- вы усовершенствовали свои навыки:
  - решения прикладных задач;
  - выполнения процентных расчетов;
  - нахождения вероятностей случайных событий.

Ответы и указания

10. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет. **18.** Значение дроби увеличится. **19.** Значение дроби уменьшится или не изменится. **22.** 1) Нет; 2) да. **26.** Да. **28.** 1) *Указание.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **47.** 3) Сравнить невозможно. **53.** 4) Если $c > 0$, то $c^2 > -4c$; если $-4 < c < 0$, то $c^2 < -4c$; если $c = 0$, то верное неравенство получить невозможно. **55.** 1. **56.** 24. **70.** 3) Нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 8) да; 10) да; 11) нет; 12) да; 13) нет; 14) нет. **85.** 1) $\sqrt{10} + \sqrt{6} > \sqrt{11} + \sqrt{5}$; 2) $2 + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5} > \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20} > 9$. **86.** 1) $\sqrt{6} + \sqrt{3} > \sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2} < \sqrt{14}$. **90.** 400 %. **106.** 4) Корней нет; 5) x — любое число; 6) -6. **107.** 6 км. **132.** 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; 7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) решений нет; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **133.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **134.** 1) -8; 2) -1. **135.** 1) -6; 2) -3. **136.** 5 решений. **137.** 8 решений. **140.** 1) $a < -\frac{9}{4}$; 2) $a \leqslant 1{,}6$. **141.** 1) $b < 3$; 2) $b < -\frac{1}{8}$. **142.** 12 км. **143.** Таких чисел не существует. **144.** 18 шариков. **145.** 44 вишни. **146.** 21. **147.** 28, 30, 32. **148.** 25, 30, 35. **149.** 1) При $-4 \leqslant x < 2$ и $x > 2$; 2) при $x < -4$ и $-4 < x \leqslant 3$; 3) при $-3 < x < -2$, $-2 < x < 2$ и $x > 2$; 4) при $-1 < x < 1$ и $x > 1$. **150.** 1) При $x < -3$ и $-3 < x \leqslant 9$; 2) при $7 < x < 8$ и $x > 8$. **151.** 1) 9; 2) -3; 3) 13; 2,2; 4) корней нет. **152.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2; 12. **155.** 3) При $a > -1$ и $a \neq 1$. **156.** 2) При $m < 7$ и $m \neq 0$. **157.** 1) При $a > -1$ и $a \neq 0$; 2) при $a < \frac{9}{16}$ и $a \neq -1$; 3) при $a < \frac{19}{5}$ и $a \neq 3$. **158.** При $a < -\frac{1}{12}$. **159.** 1) 3; 2) -1. **160.** 1) -7; 2) -4. **161.** 1) Если $a > 0$, то $x > 0$; если $a < 0$, то $x < 0$; если $a = 0$, то решений нет; 2) если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$;

если $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то x — любое число; 3) если $a > 0$, то $x \geqslant 1$; если $a < 0$, то $x \leqslant 1$; если $a = 0$, то x — любое число; 4) если $a < 2$, то $x < -2$; если $a > 2$, то $x > -2$; если $a = 2$, то решений нет; 5) если $a > 2$, то $x > a + 2$; если $a < 2$, то $x < a + 2$; если $a = 2$, то решений нет; 6) если $a > -3$, то $x \leqslant a - 3$; если $a < -3$, то $x \geqslant a - 3$; если $a = -3$, то x — любое число. **162.** 1) Если $a \neq 0$, то $x \leqslant 0$; если $a = 0$, то x — любое число; 2) если $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; если $a < -1$, то $x > \frac{2-a}{a+1}$; если $a = -1$, то x — любое число; 3) если $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$; если $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; если $a = -4$, то решений нет. **166.** 15 ч, 10 ч. **189.** 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4{,}2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0{,}8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **190.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **191.** 1) -3; -2; -1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **192.** 1) 4 решения; 2) 6 решений. **193.** 1) $[2{,}5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **194.** 1) $0 < x \leqslant 8$; 2) $x > 5$. **195.** 1) $-0{,}5 < x < 6{,}5$; 2) $14 \leqslant x \leqslant 17$. **196.** 1) $-1{,}5 \leqslant x < 2{,}5$; 2) $0 \leqslant x < \frac{1}{3}$. **197.** 2) $(1{,}5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **198.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **199.** 3 см, 5 см или 4 см, 4 см. **200.** 1) $-4 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $x < -1$ или $x > 3{,}5$; 3) $x < 1$ или $x > 8$; 4) $-2 < x < 9$; 5) $-2 < x \leqslant 0{,}5$; 6) $x \leqslant -0{,}8$ или $x > 6$. **201.** 1) $-3 < x < 2$; 2) $x < 4$ или $x > 8$; 3) $x < -9$ или $x \geqslant 1{,}2$; 4) $-\frac{1}{4} \leqslant x < 10$. **202.** 1) $-1{,}6 \leqslant x \leqslant 5{,}6$; 2) $-4 < x < 1$; 3) $x < -12$ или $x > 6$; 4) $x \leqslant 2$ или $x \geqslant \frac{8}{3}$; 5) $x \geqslant 1$; 6) $x > -\frac{11}{7}$. **203.** 1) $x \leqslant 3{,}6$ или $x \geqslant 8{,}4$; 2) $-2 \leqslant x \leqslant -1{,}2$; 3) $x < \frac{1}{2}$; 4) $x \leqslant 2$. **204.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leqslant 3$. **205.** 1) При $a \leqslant 4$; 2) при $a > 1$. **206.** 1) При $a \leqslant -1$; 2) при $a = 1$. **207.** Если

$a < 2$, то $x \leqslant a$; если $a \geqslant 2$, то $x < 2$. **208.** Если $a < -3$, то $a < x < -3$; если $a \geqslant -3$, то решений нет. **209.** При $10 < a \leqslant 11$. **210.** При $1 < b \leqslant 2$. **211.** При $8 \leqslant a < 9$. **212.** При $-6 \leqslant b < -5$. **213.** При $a < 3$. **214.** При $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3$. **215.** При $a < -7$ или $a > 8$. **216.** 1) -1; 2) -2; 4. **217.** 1) $2\sqrt{10} - \sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$. **239.** 2) Все числа, кроме 7 и -7; 4) все числа, не меньшие 4, кроме числа 6. **249.** 60 км/ч. **266.** $a < \frac{1}{8}$. **267.** $a > 9$. **268.** 2. **269.** $m < -2$. **275.** $a = 1$, $a = 2$ и $a = 1{,}5$. **276.** Если $a < -2$, то наибольшее значение $f_{\text{наиб.}} = f(a) = a^2$, наименьшее значение $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$; если $a = -2$, то $f_{\text{наиб.}} = f(-2) = f(2) = 4$, $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$; если $-2 < a \leqslant 0$, то $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 4$, $f_{\text{наим.}} = f(0) = 0$; если $0 < a < 2$, то $f_{\text{наиб.}} = f(2) = 4$, $f_{\text{наим.}} = f(a) = a^2$. **279.** 10 ч, 40 ч. **280.** 20 %. **300.** 3 т. **318.** *а*) $y = x^2 + 3$; *б*) $y = -2x^2 - 1$. **319.** *а*) $y = 2x^2 - 6$; *б*) $y = 4 - x^2$. **320.** *а*) $y = (x - 2)^2$; *б*) $y = -3(x + 3)^2$. **321.** *а*) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$; *б*) $y = -2(x - 1)^2$. **322.** *а*) $y = (x + 2)^2 - 4$; *б*) $y = -(x - 2)^2 + 5$; *в*) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 1$. **323.** *а*) $y = (x - 4)^2 - 5$; *б*) $y = -2(x + 6)^2 + 7$. **326.** Оба утверждения верны. **329.** 3) *Указание*. $y = \frac{-2x + 2 - 2}{x - 1} = -2 - \frac{2}{x - 1}$. **333.** $\frac{3}{4}$. **346.** -1; 1; 3. **347.** 4. **348.** 1) 2 корня; 2) 1 корень. **349.** 3 корня. **350.** 1) $(-1; -1)$, $(9; 9)$; 2) $(2; 23)$, $(8; 17)$. **351.** $(3; 15)$, $(-1; 11)$. **357.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **358.** 1) 26; 2) 17; 3) -10. **359.** $p = 1$, $q = 4$. **360.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **361.** $a = 3$, $b = 5$. **364.** $b = -16$. **365.** $b = 18$. **366.** $a = 1$ или $a = 4$. **367.** $a \geqslant \frac{9}{2}$. **368.** $a < -16$. **369.** $c = -8$. **370.** $c = 14$. **371.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *б*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **373.** $p = -4$, $q = 9$. **374.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **375.** *а*) -4; *б*) 4. **376.** -1. **377.** 1) 25. *Указание*. Пусть одно из чисел равно x, тогда другое число равно

$10 - x$. Рассмотрите функцию $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$; 2) 50. **378.** 1600 м^2. **383.** 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **385.** $a > \frac{13}{8}$. **386.** $a \geqslant -0{,}5$. **387.** $a = -\frac{1}{2}$. **391.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2} - 5$. **392.** 4 км/ч. **393.** 20 мин, 30 мин. **403.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$. **404.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; -3)$; 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **405.** 1) При $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$; 2) при $x \leqslant -0{,}2$ или $x \geqslant 2{,}4$. **406.** 1) При $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$; 2) при $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$. **407.** При $-5 < x < 4$. **408.** При $1 < x < 2{,}5$. **409.** 1) $-5, -4, -3, -2, -1, 0$; 2) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; 3) 0; 4) $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. **410.** 1) 11; 2) 4. **411.** 1) -6; 2) -2. **412.** 1) 1; 2) -3. **417.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **418.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ или $b > 1$; 2) $b < 4$ или $b > 10$. **419.** 1) $(0; 3]$; 2) $[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **420.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$. **421.** 1) $-4, -3, -2, -1, 0, 1$; 2) $-3, -2, 1, 2$. **422.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5) \cup (5; 6)$; 3) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. **423.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **424.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **425.** 1) $(-\infty; -1] \cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$. **426.** 1) $(-5; 0) \cup (0; 2)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-1; 2) \cup (2; 9)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (-5; -3) \cup (5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -8] \cup [1; 4) \cup (4; +\infty)$; 6) $[-11; -3) \cup (-3; 1]$. **427.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3]$. **428.** 1) $-4 < x < -3$ или $x > 5$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant -3$ или $x \geqslant 5$;

3) $x < -4$; 4) $x \leqslant -4$, или $x = -3$, или $x = 5$. **429.** 1) $3 < x < 7$; 2) $3 \leqslant x \leqslant 7$ или $x = -2$; 3) $-2 < x < 3$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 3$ или $x = 7$. **430.** 1) При $a > 4$; 2) при $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}$; 3) при $0 < a < \frac{1}{2}$; 4) при $a > \frac{5}{3}$. **431.** 1) При $a \geqslant 9$; 2) при $3 \leqslant a \leqslant 7$; 3) при $a \geqslant 1$. **432.** 1) Если $a < 1$, то $a < x < 1$ или $x > 4$; если $1 \leqslant a \leqslant 4$, то $x > 4$; если $a > 4$, то $x > a$; 2) если $a \leqslant -\frac{1}{4}$, то решений нет; если $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; если $a > 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **433.** 1) Если $a \leqslant -8$, то $-8 < x < 9$; если $-8 < a < 9$, то $a < x < 9$; если $a \geqslant 9$, то решений нет; 2) если $a < 1$, то $x < a$; если $1 \leqslant a \leqslant 8$, то $x < 1$; если $a > 8$, то $x < 1$ или $8 < x < a$. **436.** 3 дня. **437.** 40 л. **446.** 1) (5; 8), (−3; 0); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (−1; 1), (−3; −1); 4) (6; 1), (−6; −2); 5) (5; 3), (−1,5; −10); 6) (2; −2). **447.** 1) (−4; −7), (7; 4); 2) (2; 4), (−5; −3); 3) (−1; 4), (−0,5; 2,5); 4) (4; 2), (20; −14). **448.** 1) 2 решения; 2) 3 решения; 3) 1 решение; 4) 2 решения; 5) решений нет; 6) 3 решения. **449.** 1) 2 решения; 2) решений нет; 3) 2 решения; 4) 4 решения. **450.** 1) (4; 3); 2) (0; 0), (−2,4; 4,8); 3) (4; −3), (17; 10); 4) (9; −4), (4; 1); 5) (2; 2,5), (−4,4; −2,3); 6) (4; −1), (0; 3). **451.** 1) (6; 9), (−9; −6); 2) (1; 0), (−0,5; 0,75); 3) (2; 4), (3; 3); 4) (1; 1), $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **452.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, (−2; −7); 2) (2; 2), (−1; −4); 3) (1; 0), (5; −4); 4) (2; 3), $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **453.** (−4; −1). **454.** 2) (0,5; 5,5); 3) (−4; 52), (3; 3). **455.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (−2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **456.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **457.** 1) (−5; 1), (1; −5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; −2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (−3; −1), $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) (2; 3); 5) (−3; 3),

(3; −3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **458.** 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; −1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (−9; −3); 5) (−2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (−3; 4), (−5; 2), (1; −4), (3; −2). **459.** 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; −1), (1; −3); 3) (4; 3), (−4; −3); 4) (−3; 2), (3; −2). **460.** 1) (4; 2), (−2; −4); 2) (1; 3), (−1; −3). **461.** 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (−7; −5), (4; 6); 3) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **462.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; −2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (−4; −5); 4) (5; 4), (−5; −4), (5; −4), (−5; 4). **463.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (−2; 4), (2; −4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (−4; −3), (−3; −4); 4) (1; −1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (−1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **464.** 1) (2; 1), (−5; −0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (−3; −1), (−1; −3); 4) (−2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; −2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **465.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ или $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ или $a > 3\sqrt{2}$. **466.** 1) $k = 2$ или $k = -2$; 2) $k < -2$ или $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **467.** 1) Если $a > 0$, то 2 решения; если $a = 0$, то одно решение; если $a < 0$, то решений нет; 2) если $-4 < a < 4$, то решений нет; если $a = -4$ или $a = 4$, то 2 решения; если $a < -4$ или $a > 4$, то 4 решения; 3) если $a > -\frac{1}{4}$, то 2 решения; если $a = -\frac{1}{4}$, то одно решение; если $a < -\frac{1}{4}$, то решений нет; 4) если $a < -\frac{17}{4}$ или $a > 2$, то решений нет; если $a = -\frac{17}{4}$ или $-2 < a < 2$, то 2 решения; если $-\frac{17}{4} < a < -2$, то 4 решения; если $a = -2$, то 3 решения;

если $a = 2$, то одно решение. **468.** 1) Если $a < 1$, то решений нет; если $a = 1$, то 2 решения; если $a > 1$, то 4 решения; 2) если $a > 3\sqrt{2}$ или $a < -3$, то решений нет; если $a = 3\sqrt{2}$ или $-3 < a < 3$, то 2 решения; если $3 < a < 3\sqrt{2}$, то 4 решения; если $a = 3$, то 3 решения; если $a = -3$, то одно решение; 3) если $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то решений нет; если $a = -2\sqrt{2}$ или $a = 2\sqrt{2}$, то 2 решения; если $a < -2\sqrt{2}$ или $a > 2\sqrt{2}$, то 4 решения. **470.** 5. **471.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **472.** 40. **475.** $7\frac{2}{17}$ динария, $9\frac{14}{17}$ динария. **476.** 72 км/ч, 10 км/ч. **477.** 5 и 7. **478.** 24 и 8 или –8 и –24. **479.** 9 и 12. **480.** 6 и 4. **481.** 80 м, 30 м. **482.** 7 см, 9 см. **483.** 36. **484.** 62. **485.** 84. **486.** 12 и 24. **487.** 6 и 9. **488.** 5 см, 12 см. **489.** 15 см, 17 см. **490.** 15 см и 12 см или 18 см и 10 см. **491.** 15 см, 6 см. **492.** 18 см, 12 см. **493.** 80 км/ч, 60 км/ч. **494.** 60 км/ч, 30 км/ч. **495.** 80 км/ч, 60 км/ч или 120 км/ч, 80 км/ч. **496.** 500 м/мин, 400 м/мин. **497.** 12 дней, 24 дня или 40 дней, 10 дней. **498.** 16 ч, 48 ч. **499.** 10 ч, 15 ч. **500.** 60 Ом, 90 Ом. **501.** 4 Ом, 6 Ом или 3,6 Ом, 7,2 Ом. **502.** 2 км/ч. **503.** 27 км/ч, 3 км/ч. **504.** 24 км/ч, 16 км/ч. **505.** 12 км/ч. **506.** 2 км/ч, 12 км/ч. **507.** 8,4 г/см^3, 6,4 г/см^3. **508.** 15 Н, 20 Н. **509.** 60 м, 80 м. **510.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **512.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(0{,}16; +\infty)$. **513.** 3. **514.** $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. **515.** 1) $(-\infty; -2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **516.** 13 и 6 или 67 и 66. **517.** 9) 20 кг, 40 кг; 10) 30 м. **518.** 7) 1200 грн., 800 грн. **519.** 1) 5 см; 2) 15 ц, 20 ц; 3) 12 км/ч, 4 км/ч; 4) 10 ч, 15 ч или 12 ч, 12 ч; 5) не более 15 машин. **520.** 1) 40 км/ч, 30 км/ч; 2) 55 км/ч, 75 км/ч; 3) не более 6 промахов. **521.** 1) 150 м × 150 м; 2) через 1 ч 30 мин. **523.** 1) 30 км;

2) 51 конь и 9 быков, или 30 коней и 40 быков, или 9 коней и 71 бык. **524.** 6 воробьев, 20 горлиц, 14 голубей или 15 воробьев, 10 горлиц, 15 голубей. **526.** 1) $(-\infty; -3{,}5)$; 2) $(-\infty; -6] \cup \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **533.** На 12,5 %. **535.** 6298,56 грн. **536.** 20 736 единиц. **537.** 2400 грн. **538.** 600 грн. **539.** 5 %. **540.** На 15 %. **541.** 7,2 %. **542.** 20 %. **543.** 300 деревьев. **544.** 1100 м. **545.** 400 страниц. **546.** 300 кг. **547.** 60 кг. **548.** 40 пистолей или 60 пистолей. **549.** 10 грн. **550.** 150 %. **551.** 120 %. **552.** 2 ч. **553.** 50 %. **554.** 200 г, 600 г. **555.** 12 л, 6 л. **556.** На 10 % в первый раз и на 20 % во второй. **557.** 20 %. **558.** 6 %. **559.** 10 %. **560.** 6 кг, 18 кг или 9 кг, 21 кг. **561.** 3 кг. **562.** 20 т или $2\frac{2}{3}$ т. **563.** 33 кг. *Указание*. Пусть получили x кг соляной кислоты. Тогда математической моделью задачи является уравнение $\frac{11}{x} - \frac{2}{x-9} = \frac{1}{4}$, корни которого — числа 33 и 12. Но корень 12 не удовлетворяет условию задачи, исходя из химических свойств соляной кислоты. **564.** 6 л. **566.** При $c > 0{,}1$. **567.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (5; 2), (–2; –5). **581.** $\left(-2; \frac{19}{4}\right)$; 2) $\left(-\infty; 5\frac{1}{4}\right]$. **583.** 10 при $a = 1$ и $b = 3$. **607.** 1) 3 шарика; 2) 8 шариков. **608.** $\frac{2}{3}$. **609.** $\frac{2}{3}$. **610.** 8 карандашей. **611.** 19 карандашей. **613.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **614.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Указание*. Бросить монету три раза — то же самое, что независимо друг от друга бросить три монеты. Если пронумеровать монеты, то имеем 8 равновозможных результатов, показанных на рисунке 111.

Первая монета	Вторая монета	Третья монета
Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

Рис. 111

615. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Указание*. Бросить кубик дважды — это то же самое, что независимо друг от друга бросить два кубика. Далее воспользуйтесь рисунком 88 к п. 18. **616.** 2. **638.** $\frac{a}{a-1}$. **640.** 1) (12; 11), $\left(\frac{16}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; 2) (4; 3), (−4; 3), (4; −3), (−4; −3). **653.** 8 членов. **654.** 13. **655.** 1, 2, 3, 4, 5. **656.** 8. **657.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **658.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **660.** 2) [−6; 1). **662.** 32 детали. **675.** 1) Да, $n = 16$; 2) нет. **676.** 15. **679.** 23. **680.** −6. **682.** 18. **683.** 16. **684.** −0,6. **685.** −6; −4,5; −3; −1,5; 0; 1,5; 3. **686.** 2,2; 0,4; −1,4; −3,2. **687.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **688.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ или $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **689.** Если первый член прогрессии равен ее разности или разность прогрессии равна нулю. **692.** 60°. **693.** 1) Да, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) нет; 3) да, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) нет. **694.** 1) Да, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) да, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) нет. **700.** При $x = -1$ имеем: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$;

при $x = 8$ имеем: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **701.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **702.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **703.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **707.** 1) (7; −1), (11; −5); 2) (2; 2), (2; −2), (−2; 2), (−2; −2). **709.** −4. **710.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **712.** 24 детали. **722.** 1) 204; 2) 570. **723.** −310. **724.** 156 ударов. **725.** 1400. **726.** 710. **727.** 1188. **728.** 8, 14, 20. **729.** −17. **730.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **731.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **732.** $n(n+1)$. **733.** 3. **734.** −67,2. **735.** 63. **736.** 5880. **737.** 2112. **738.** 1632. **739.** 61 376. **740.** 70 336. **741.** 0,3. **742.** 10. **743.** 20. **744.** 16. **745.** Да, 19, 23, 27, 31, 35. **746.** Нет. **747.** 10 с. **748.** 42 страницы. **749.** −1976. **750.** 348. **751.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **752.** −10. **753.** 10. **754.** 690. **755.** 250. **756.** 1) 12; 2) 26. **757.** 1) 10; 2) 69. **758.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **760.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Указание.* $a_n = S_n - S_{n-1}$. **761.** 2610. **765.** 1) $\frac{a - \sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d} - 28}{3\sqrt{d} + 18}$. **766.** 24 км/ч. **785.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ или $-\frac{3}{5}$. **786.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **787.** 6. **788.** 9. **789.** 30 и 150. **790.** 1; 2; 4; 8. **791.** Да, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **792.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **793.** 1) 15 или −15; 2) 6 или −6; 3) $2\sqrt{5}$ или $-2\sqrt{5}$. **794.** 2. **795.** $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. **796.** 216. **797.** 243. **799.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **801.** 3) Последовательность является геометрической прогрессией, если $q \neq -1$. **803.** 80, 40, 20, 10, 5 или 80, −40, 20, −10, 5. **804.** 6, 18, 54, 162, 486 или 6, −18, 54, −162, 486. **805.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ или $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ или $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **806.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **807.** При $x = 1$ имеем 3, 6, 12; при $x = -14$ имеем −27, −9, −3. **808.** При $x = 2$ имеем 8, 4, 2; при $x = -7$ имеем −1, −5,

–25. **810.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **811.** 3, 7, 11. **812.** 8, 10, 12 или 17, 10, 3. **813.** 5, 15, 45 или 45, 15, 5. **814.** 2, 6,18 или 18, 6, 2. **819.** За 2 дня. **824.** 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **825.** 762. **826.** 1210. **827.** –68,2. **828.** 27. **829.** –7 или 6. **830.** 16 ран. **831.** 5. **832.** $(2^{72}-1)$ бактерий. **833.** 72. **834.** $\frac{9}{8}$. **835.** 4368. **836.** –12 285. **839.** 5. **840.** 1) $\left[-\frac{18}{7};13\right]$; 2) $[-1; 4)$. **843.** 50 деталей, 40 деталей. **844.** 1) $b-5a$; 2) $x+2y$. **851.** 1) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\frac{9\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$. **852.** 1) $\frac{3\left(\sqrt{6}+2\right)}{2}$; 2) $3\sqrt{2}+4$. **853.** 35. **854.** $-\frac{1}{12}$. **855.** 1) $16+8\sqrt{2}$ или $16-8\sqrt{2}$; 2) 27. **856.** 1) 243; 2) 312,5. **858.** $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$ или $b_1=3$, $q=-\frac{1}{2}$. **859.** $b_1=192$, $q=\frac{1}{4}$. **860.** $27+9\sqrt{3}$ или $27-9\sqrt{3}$. **861.** $\frac{25\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}$ или $\frac{25\left(\sqrt{5}-5\right)}{2}$. **862.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) –3. **863.** $-\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{4}$. **864.** $\frac{2}{5}$. **865.** $-\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}$. **866.** $2a^2$. **867.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **868.** 1) $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **870.** Рисунок 112. **892.** 6. **895.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$; 3) $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$; 4) $\varnothing$; 5) R. **896.** 2. **897.** 0. **899.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[2; 3)$; 3) $[-2; 16]$; 4) $(-4; 7]$. **900.** 1) –9; 2) –2. **902.** 4. **904.** 1) $a<4$; 2) $a<2$; 3) $a\leqslant-3$; 4) $a\geqslant1$. **905.** 1) $a\geqslant6$; 2) $a\geqslant5$; 3) $a>-8$; 4) $a\leqslant0$. **907.** $a<-1{,}5$. **908.** $a=0$. **916.** 1) $b=6$, $c=9$; 2) $b=0$, $c=4$; 3) $b=-3$, $c=-10$. **919.** 3) $-2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}$. **921.** $a=\frac{1}{3}$, $b=-4$, $c=10$. **922.** $a=2$, $b=-1$, $c=-3$. **923.** 1) 1; 2) –8. **925.** 1. **931.** 1) $a\neq4$; 2) $a<\frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2}<a<1$, или $a>13$; 3) $a<-1$, или

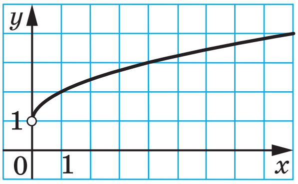


Рис. 112

$-\frac{1}{5} < a < 0$, или $a > 0$. **932.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \leqslant -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **933.** 1) (1; 4), (–2; 7); 2) (3; –4), (4; –3); 3) (4; 0), (0; –4); 4) (0; –5), (3; 4), (–3; 4). **934.** 1) (–2; 1), (–0,4; 1,4); 2) (–2; 4), $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) (3; 5), (10; 1,5); 4) (4; –3), (2; –6); 5) (–5; 2); 6) (3; 2), (–2; –3); 7) (3; –2), (0; 1); 8) (1; –2), (3; 0); 9) (8; 4), (4; 8); 10) (1; 5), (–5; –1). **935.** 1) (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2); 2) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (–4; –1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; –2), (–3; 2); 7) (10; 5), (–5; –10); 8) (5; 3), (5; –3), (–5; 3), (–5; –3); 9) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; –2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **936.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (–1,5; –2); 3) (3; 2), (2; 3), (–3; –2), (–2; –3). **937.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ или $a = -2\sqrt{3}$. **938.** 8 см, 15 см. **939.** 9 см, 40 см. **940.** 54. **941.** 80 км/ч, 60 км/ч. **942.** 6 км/ч, 4 км/ч. **943.** 2 ч, 6 ч. **944.** 36 ч, 12 ч. **945.** 0,5 км/ч. **946.** 15 км/ч. **947.** 72 км/ч, 48 км/ч. **948.** 500 %. **949.** 220 %. **950.** 75 %. **951.** $33\frac{1}{3}$ %. **952.** 50 %. **953.** 3149 грн. 28 коп. **954.** 6000 грн. **955.** 20% или 80 %. **956.** 20 %. **957.** 80 %. **958.** 10 %. **959.** 1 : 3. **960.** 20 кг. **961.** 2 кг. **973.** $\frac{11}{12}$. **975.** С тридцать второго по шестьдесят четвертый. **978.** 2,4 см; 3,2 см. **979.** 6) Да, $2d$; 7) да, $4d$. **980.** 0, 4, 8. **983.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **984.** 11. **985.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ или $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ или $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0,7$, $d = 0,3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1,5$. **986.** 10. **987.** 255. **988.** $\frac{2a^2}{3}$ **989.** 1160. **990.** 2610. *Указание*. Искомая сумма

$S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, где S_1 — сумма всех двузначных чисел, S_2 — сумма двузначных чисел, кратных 3, S_3 — сумма двузначных чисел, кратных 5, S_4 — сумма двузначных чисел, кратных 15. **991.** Да, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ **993.** 2. **994.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **995.** 3) Да, q^2; 4) да, q; 5) нет; 6) да, $\frac{1}{q}$. **998.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответы к заданиям в тестовой форме «Проверь себя»

Номер задания	Номер задачи																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	Б	Г	Б	В	Б	А	В	В	В	А	Б	Г	Г	Г	Г	В	Б	Б
2	Г	В	Б	В	А	Г	Г	В	В	В	В	Г	Б	Г	Б	В	В	А
3	В	Б	А	В	Г	А	А	В	В	А	Г	Б	Г	В	Г	А	Г	Б
4	Б	Г	В	В	В	А	Б	А	А	Г	Б	Г	Б	Б	А	В	Б	Б
5	Б	В	Б	Г	Г	В	А	Б	Б	В	Б	А	Г	А	В	Б	А	В

Предметный указатель

Содержание

§ 3. Элементы прикладной математики

§ 4. Числовые последовательности

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Мерзляк Аркадий Григорьевич, автор более 40 учебников и пособий по математике, отличник образования Украины, учитель-методист, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

Полонский Виталий Борисович, автор более 50 учебников, книг и статей по математике, Заслуженный учитель Украины, кавалер ордена «За заслуги» III степени, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

Якир Михаил Семенович, автор более 50 учебников, книг и статей по математике, Заслуженный учитель Украины, кавалер орденов «За заслуги» III и II степеней, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

(Російською мовою)

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 18.08.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 20,00. Обл.-вид. арк. 16,38.
Тираж 61 050 прим. Замовлення № 386.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, факс: (057) 758-83-93

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
Тел. (057) 758-15-80

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.

М52 Алгебра: Учебн. для 9 кл. общеобразовательных учебных заведений. — Х.: Гимназия, 2009. — 320 с.:ил.

ISBN 978-966-474-061-3.

УДК 373:512
ББК 22.141.я721