Домашняя работа по алгебре за 9 класс

к задачнику «Алгебра 9 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений» А.Г. Мордкович и др. М.: «Мнемозина», 2000 г.

учебно-практическое пособие

Содержание

Задачи на повторение

1.

а) $(8\frac{7}{12}-2\frac{17}{36})\cdot 2{,}7-4\frac{1}{3}:0{,}65=\left(\frac{103}{12}-\frac{89}{36}\right)\frac{27}{10}-\frac{13}{3}\times$

$\times\frac{100}{65}=\frac{220}{36}\cdot\frac{27}{10}-\frac{20}{3}=\frac{22\cdot 3}{4}-\frac{20}{3}=\frac{59}{6}.$

б) $\left(1\frac{11}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot 1{,}44-\frac{8}{15}\cdot 0{,}5625=\left(\frac{35}{24}+\frac{13}{36}\right)\cdot\frac{144}{100}-\frac{8}{15}\times$

$\times\frac{5625}{10000}=\frac{131\cdot 2}{100}-\frac{15}{50}=\frac{232}{100}=2{,}32.$

2.

а) $3x(x-5)-5x(x-3)=3x^2-15x-5x^2+15x=-2x^2$;

б) $2y(x-y)+y(3y-2x)=2yx-2y^2+3y^2-2yx=y^2$.

3.

а) $2x^2-x(2x-5)-2(2x-1)-5=0$, $2x^2-2x^2+5x-4x+2-5=0$,
$x-3=0$, $x=3$;

б) $6x(x+2)-0{,}5(12x^2-7x)-31=0$, $6x^2+12x-6x^2+3{,}5x-31=0$,
$15{,}5x=31$, $x=2$.

4.

$(b+c-2a)(c-b)+(c+a-2b)(a-c)-(a+b-2c)(a-b)=$
$=bc+c^2-2ac-b^2-bc+2ab+ac+a^2-2ab-c^2-ac+2bc-$
$-a^2-ab+2ac+ab+b^2-2bc=0$.

5.

а) $(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$; б) $(6b-3)^2=36b-36b+9$;

в) $(8x+3y)^2=64x^2+48xy+9y^2$; г) $(9p-2q)^2=81p^2-36pq+4q^2$.

6.

а) $(3a-1)(3a+1)=9a^2-1$; б) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$;

в) $(10x^3-5y^2)(10x^3+5y^2)=100x^6-25y^4$;

г) $(x+4)(x^2-4x+16)=x^3+64$.

7.

а) При $a=-0{,}8$: $(a-1)(a-2)-(a-5)(a+3)=a^2-3a+2-a^2+2a+15=$
$=-a+17=-(-0{,}8)+17=17{,}8$;

б) При $m=-0{,}5$:

$(m+3)^2-(m-9)(m+9)=m^2+6m+9-(m^2-81)=6m+90$

$=6(-0{,}5)+90=-3+90=87$;

в) При $a=-\dfrac{1}{6}$:

$(a-3)(a+4)-(a+2)(a+5)=a^2-3a+4a-12-a^2-2a-$

$-5a-10=-6a-22=(-6)\left(-\dfrac{1}{6}\right)-22=1-22=21$;

г) При $c=-0{,}25$: $(c+2)^2-(c+4)(c-4)=c^2+4c+4-c^2+16=4c+20=$

$=(-0{,}25)\cdot 4+20=19$.

8.

а) $53^2-43^2=(53-43)(53+43)=10\cdot 96=960$;

б) $\dfrac{910}{137^2-123^2}=\dfrac{910}{(137-123)(137+123)}=\dfrac{910}{14\cdot 260}=\dfrac{1}{4}$;

в) $\dfrac{144^2-18^2}{153^2-90^2}=\dfrac{(144-18)(144+18)}{(153-90)(153+90)}=\dfrac{126\cdot 162}{63\cdot 243}=\dfrac{4}{3}$;

г) $\dfrac{7{,}8\cdot 8{,}7+7{,}8\cdot 1{,}3}{100}=\dfrac{7{,}8(8{,}7+1{,}3)}{100}=\dfrac{7{,}8\cdot 10}{100}=0{,}78$.

9.

а) $ax^2+3ax=ax(x+3)$;

б) $15x^3y^2+10x^2y-20x^2y^3=5x^2y(3xy+2-4y^2)$;

в) $5a^2b-6a^2b^2=a^2b(5-6b)$;

г) $195c^6p^5-91c^5p^6+221c^3p^{10}=13c^3p^5(15c^3-7c^2p+17p^5)$.

10.

а) $ax+bx+ac+bc=(a+b)x+(a+b)c=(a+b)(x+c)$;

б) $4a+by+ay+4b=4(a+b)+4(a+b)=(4+y)(a+b)$;

в) $9m^2-9mn-5m+5n=9m(m-n)-5(m-n)=(9m-5)\times\ \times(m-n)$;

г) $16ab^2+5b^2c+10c^3+32ac^2=16a(b^2+2c^2)+5c(b^2+2c^2)=$

$=(16a+5c)(b^2+2c^2)$.

11.

а) $17^6+17^5=17^5(17+1)=17^5\cdot 18$ — кратно 18;

б) $3^{17}+3^{15}=3^{15}(3^2+1)=3^{15}\cdot 10=3^{13}\cdot 90$ — кратно 90;

в) $42^8+42^7=42^7(42^1+1)=42^7\cdot 43$ — кратно 43;

г) $2^{23}+2^{20}=2^{20}(2^3+1)=2^{20}\cdot 9=2^{17}\cdot 72$ — кратно 72.

12.

а) $2{,}7\cdot 6{,}2-9{,}3\cdot 1{,}2+6{,}2\cdot 9{,}3-1{,}2\cdot 2{,}7=2{,}7(6{,}2-1{,}2)+$
$+9{,}3(6{,}2-1{,}2)=5\cdot 2{,}7+9{,}3\cdot 5=5(9{,}3+2{,}7)=5\cdot 12=60$;

б) $125\cdot 48-31\cdot 82-31\cdot 43+125\cdot 83=125(48+83)-31(82+$
$+43)=125\cdot 131-31\cdot 125=125\cdot(131-31)=125\cdot 100=12500$;

в) $109\cdot 9{,}17-5{,}37\cdot 72-37\cdot 9{,}17+1{,}2\cdot 72=9{,}17(109-37)-$
$-72(5{,}37-1{,}2)=9{,}17\cdot 72-72\cdot 4{,}17=72(9{,}17-4{,}17)=72\cdot 5=360$;

г) $19.9\cdot 18-19.9\cdot 16+30{,}1\cdot 18+30{,}1\cdot 16=19{,}9(18-16)+$
$+30{,}1(18-16)=2\cdot 19{,}9+30{,}1\cdot 2=2(30{,}1+19{,}9)=100$.

13.

а) $m^2-49=(m-7)(m+7)$;

б) $a^2c^2-9=(ac)^2-3^2=(ac-3)(ac+3)$;

в) $64p^2-81q^2=(8p-9q)(8p+9q)$;

г) $10x^2+10y^2=10(x^2-y^2)=10(x-y)(x+y)$.

14.

а) $c^3-64=c^3-4^3=(c-4)(c^2+4c+16)$;

б) $25a^4-20a^2b+4b^2=(5a^2)^2-2\cdot 5a\cdot 2a+(2b)^2=\ (5a^2-2b^2)^2$;

в) $5a^2+10ab+5b^2=5(a^2+2ab+b^2)=5(a+b)^2$;

г) $15a^3+15d^3=15(a^3+d^3)=15(a+d)(a^2-ad+d^2)$.

15.

а) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x-$
$-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)$;

б) $d^2-16d+55=d^2-16d+64-9=(d-8)^2-3^2=(d-$
$-8-3)(d-8+3)=(d-11)(d-5)$;

в) $m^2-2n-m-4n^2=m^2-4n^2-(2n+m)=(m+2n)(m-$
$-2n)-(2n+m)=(2n+m)(m-2n-1)$;

г) $n^2+16n+39=n^2+16n+64-25=(n+8)^2-25=$
$=(n+8-5)(n+8+5)=(n+3)(n+13)$.

16.

а) $\dfrac{6a+6b}{7a+7b}=\dfrac{6(a+b)}{7(a+b)}=\dfrac{6}{7}$;

б) $\dfrac{ma^2-m^2a}{m^2-ma}=\dfrac{ma(a-m)}{m(m-a)}=-\dfrac{a(m-a)}{m-a}=-a$;

в) $\frac{2p-4q}{16q-8p}=\frac{2(p-2q)}{8(2q-p)}=-\frac{(2q-p)}{4(2q-p)}=-\frac{1}{4}$;

г) $\frac{xy^4-zy^4}{Zy^3-xy^3}=\frac{y^4(x-z)}{y^3(z-x)}=-\frac{y(z-x)}{z-x}=-y$.

17.

а) $\frac{b-7}{b^2-14b+49}=\frac{b-7}{(b-7)^2}=\frac{1}{b-7}$;

б) $\frac{y^2-x^2}{x^2-2xy+y^2}=\frac{(y-x)(y+x)}{(x-y)^2}=-\frac{x+y}{x-y}$;

в) $\frac{125y^3+1}{1-5y+25y^2}=\frac{(5y)^3+1}{25y^2-5y+1}=\frac{(5y+1)(25y^2-5y+1)}{25y^2-5y+1}=5y+1$;

г) $\frac{4t^2-2t+1}{8t^3+1}=\frac{4t^2-2t+1}{(2t+1)(4t^2-2t+1)}=\frac{1}{2t+1}$.

18.

а) $\frac{27^5-27^4}{9^8+9^7+9^6}=\frac{27^4(27-1)}{9^6(9^2+9+1)}=\frac{(3^3)^4\cdot 26}{(3^2)^6\cdot 91}=\frac{3^{12}\cdot 2}{3^{12}\cdot 2}=\frac{2}{7}$;

б) $\frac{8^{11}-8^{10}-8^9}{4^{15}-4^{14}-4^{13}}=\frac{8^9(8^2-8-1)}{4^{13}(4^2-4-1)}=\frac{(2^3)^9\cdot 55}{(2^2)^{13}\cdot 11}=\frac{2^{27}\cdot 5}{2^{26}}=10$.

19.

а) $\frac{1}{x^2}+\frac{x-2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}$;

б) $\frac{3}{x+y}+\frac{5}{x-y}=\frac{3x-3y+5x+5y}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(4x+y)}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{1-5d^2}{d^6}-\frac{d-5}{d^4}+\frac{1}{d^3}=\frac{1-5d^2-d^3+5d^2+d^3}{d^6}=\frac{1}{d^6}$;

г) $\frac{5c}{6c+6}+\frac{3c}{7c+7}=\frac{5c}{6(c+1)}+\frac{3c}{7(c+1)}=\frac{35c+18c}{42(c+1)}=\frac{53c}{42(c+1)}$.

20.

а) $\frac{3c+2}{c^2-4c+4}-\frac{5}{c-2}=\frac{3c+2-5(c-2)}{(c-2)^2}=\frac{2(6-c)}{(c-2)^2}$;

б) $\frac{y^2+4}{y^3+8}-\frac{1}{y+2}=\frac{y^2+4-y^2+2y-4}{(y+2)(Y^2-2y+4)}=\frac{2y}{y^3+8}$;

в) $\frac{3a(16-3a)2}{9a^2-4}+\frac{3+6a}{2-3a}-\frac{2-9a}{3a+2}=$

$=\frac{48a-9a^2-(3+6a)(3a+2)-(2-9a)(3a-2)}{(3a-2)(3a+2)}=$

$=\frac{48a-9a^2-9a-6-18a^2-12a-6a+4+27a^2-18a}{(3a-2)(3a+2)}=\frac{1}{3a+2}$.

(Опечатка в ответе задачника).

г) $\frac{2mn}{m^3+n^3}+\frac{2m}{m^2-n^2}-\frac{1}{m-n}=$

$=\frac{2mn(m-n)+2m(m^2-mn+n^2)-(m+n)(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)(m-n)}=$

$=\frac{m^3-n^3}{(m^3+n^3)(m-n)}=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)}{(m-n)(m^3+n^3)}=\frac{m^2+mn+n^2}{m^3+n^3}$.

21.

а) $\frac{x^2-y^2}{3xy}\cdot\frac{3y}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)3y}{3xy(x-y)}=\frac{x+y}{x}$;

б) $\frac{c^2-49}{10cd}:\frac{2c+14}{5d}=\frac{(c-7)(c+7)}{10cd}\cdot\frac{5d}{2(c+7)}=\frac{(c-7)}{4c}$;

в) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12}:\frac{2x-10}{x^2-16}=\frac{(x-5)^2}{3(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-5)}=\frac{(x-5)(x-4)}{6}$;

г) $\frac{t^3+8}{12t^2+27t}\cdot\frac{4t+9}{t^2-2t+4}=\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{3t(4t+9)}\cdot\frac{(4t+9)}{t^2-2t+4}=\frac{t+2}{3t}$.

22.

а) $\left(\frac{a+b}{a}-\frac{2b}{a+b}\right)\cdot(a+b)=\frac{(a+b)^2-2ab}{a(a+b)}\cdot(a+b)=\frac{a^2+b^2}{a}$;

б) $\left(\frac{m}{n^2-mn)}+\frac{n}{m^2-mn}\right)\frac{mn}{m+n}=\left(\frac{m}{n(n-m)}-\frac{n}{m(n-m)}\right)\times$

$\times\frac{mn}{m+n}=\frac{m^2-n^2}{mn(n-m)}\cdot\frac{mn}{m+n}=\frac{(m-n)(m+n)}{(n-m)(m+n)}=-1$.

23.

а) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{b-a}{(b-a)(b+a)}=\frac{1}{b+a}$;

б) $\frac{a^2-25}{a+3}\cdot\frac{1}{a^2+5a}-\frac{a+5}{a^2-3a}=\frac{(a-5)(a+5)}{a+3}\cdot\frac{1}{a(a+5)}-$

$-\frac{a+5}{a(a-3)}=\frac{(a-5)(a-3)-(a+5)(a+3)}{a(a+3)(a-3)}=-\frac{16}{a^2-9}$.

24.

а) $\begin{cases}5x-3y=14,\\2x+y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}5x-3y=14,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}5x-30+6x=14,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}11x=44,\\y=10-2x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3a+4b=55,\\7a-b=56;\end{cases}$ $\begin{cases}3a+28a-224=55,\\b=7a-56;\end{cases}$ $\begin{cases}a=9,\\b=7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x-7y=30,\\4x-5y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=30+7y,\\30+7y-5y=90;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=30+7y,\\2y=60;\end{cases}$ $\begin{cases}x=60,\\y=30;\end{cases}$

г) $\begin{cases}-2a+4b=-11,\\4a+4b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}4b=2a-11,\\4a+2a-11=1;\end{cases}$ $\begin{cases}4b=2a-11,\\6a=12;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\b=-\frac{7}{4};\end{cases}$

25.

а) $\begin{cases}4x+5y=1,\\2x+2{,}5y=5;\end{cases}$ Умножим второе уравнение на 2.

$\begin{cases}4x+5y=1,\\4x+5y=10;\end{cases}$ чего, очевидно, быть не может. Решений нет.

б) $\begin{cases}4x-3y=12,\\\frac{4}{3}x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}4x-\frac{3\cdot 4}{3}x+12=12,\\y=\frac{4}{3}x-4;\end{cases}$ $\begin{cases}0\cdot x=0,\\y=\frac{4}{3}x-4;\end{cases}$

Решением будет пара (x; $\frac{4}{3}x-4$) , где x – любое действительное число.

26.

а) $5-\frac{13}{7}\sqrt{1\frac{27}{169}}=5-\frac{13}{7}\sqrt{\frac{196}{169}}=5-\frac{13}{7}\cdot\frac{14}{13}=3$;

б) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}=\sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}}=\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{17}{2}=8{,}5$;

в) $4-\frac{7}{4}\sqrt{5\frac{11}{49}}=4-\frac{7}{4}\sqrt{\frac{256}{49}}=4-\frac{7}{4}\cdot\frac{16}{7}=4-4=0$;

г) $\sqrt{\frac{145{,}5^2-96{,}5^2}{193{,}5^2-31{,}5^2}}=\sqrt{\frac{(145{,}5-96{,}5)(145{,}5+96{,}5)}{(193{,}5-31{,}5)(193{,}5+31{,}5)}}=$

$= \sqrt{\dfrac{49 \cdot 242}{162 \cdot 225}} = \dfrac{7 \cdot 11}{9 \cdot 15} = \dfrac{77}{135}$.

27.

а) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{54a^3} = \sqrt{9a^2 \cdot 6a} = 3a\sqrt{6a}$;

в) $\sqrt{8z^2} = \sqrt{4z^2 \cdot 2} = 2Z\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{49d} = 7\sqrt{d}$.

28.

а) $2\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 4} = \sqrt{20}$;

б) $b\sqrt{3} = -\sqrt{3b^2}$, $b > 0$;

в) $7\sqrt{3a} = \sqrt{49 \cdot 3a} = \sqrt{147a}$;

г) $-a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$, $a > 0$.

29.

а) $2\sqrt{125} + 2\sqrt{20} - 2\sqrt{80} = 2 \cdot 5\sqrt{5} + 2 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{9a} - \sqrt{25a} - \sqrt{36a} = 3\sqrt{a} - 5\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = -8\sqrt{a}$;

в) $5\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{27} = 5 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 4\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$;

г) $0{,}1\sqrt{5m} - \sqrt{0{,}45m} + 2\sqrt{80m} = 0{,}1\sqrt{5m} - 0{,}3\sqrt{5m} + 2 \cdot 4\sqrt{5m} = 7{,}8\sqrt{5m}$.

30.

а) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = \left|\sqrt{7}-2\right| + \left|\sqrt{7}-3\right| = \; = \sqrt{7} - 2 - \sqrt{7} + 3 = 1$,

т.к. $2 < \sqrt{7} < 3$;

б) $\sqrt{(\sqrt{12}-4)^2} - 2\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \left|\sqrt{12}-4\right| + 2\left|2-\sqrt{3}\right|$,

т.к. $\sqrt{12} < 4$, то $\left|\sqrt{12}-4\right| = -\sqrt{12} + 4$,

т.к. $2 > \sqrt{3}$, то $\left|2-\sqrt{3}\right| = -2 - \sqrt{3}$,

$\left|\sqrt{12}-4\right| - 2\left|2-\sqrt{3}\right| = -\sqrt{12} + 4 - 4 + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$.

31.

а) $0{,}4a^2b\sqrt{\dfrac{25}{a^2b^2}} = 0{,}4a^2b \cdot \dfrac{5}{|a||b|}$,

т.к. $a > 0$, то $|a| = a$; т.к. $b < 0$, то $|b| = -b$,

$0{,}4a^2b \cdot \dfrac{5}{|a||b|} = 0{,}4ab \cdot \dfrac{5}{ab} = -2a$;

б) $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b^6}{a^2}} - \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a^6}{b^2}} = \dfrac{a}{b}\dfrac{\left|b^3\right|}{|a|} - \dfrac{b}{a}\dfrac{\left|a^3\right|}{|b|}$, $|b| = b$, $\left|b^3\right| = b^3$, т.к. $b > 0$,

$|a| = -a$, $\left|a^3\right| = -a^3$, т.к. $a < 0$,

$$\frac{a}{b}\frac{|b^3|}{|a|}-\frac{b}{a}\frac{|a^3|}{|b|}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{(-a)}-\frac{b}{a}\cdot\frac{(-a^3)}{b}=-b^2+a^2=a^2-b^2 .$$

32.

а) $(2+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{12}-2\sqrt{18}=$

$=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6\sqrt{2}=2\sqrt{3}$;

б) $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})=2a-3b$;

в) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})=2\sqrt{15}+6\cdot 5-3-3\sqrt{15}=27-\sqrt{15}$;

г) $(c+\sqrt{d})(c^2+c\sqrt{d}+d)=(c+\sqrt{d})(c^2-c\cdot\sqrt{d}+(\sqrt{d})^2)=$

$=c^3+(\sqrt{d})^3=c^2+d\sqrt{d}$.

33.

а) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-4}-\dfrac{3-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-6}=\dfrac{3-3\sqrt{a}-6+2\sqrt{a}}{6(\sqrt{a}-2)}=\dfrac{-\sqrt{a}-3}{6(\sqrt{a}-2)}$;

б) $\dfrac{\sqrt{d}+2}{\sqrt{cd}+d}-\dfrac{\sqrt{c}-3}{\sqrt{cd}+c}=\dfrac{\sqrt{cd}+2\sqrt{c}-\sqrt{cd}+3\sqrt{d}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\dfrac{2\sqrt{c}+3\sqrt{d}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}$;

в) $\dfrac{1-a}{4\sqrt{a}+8\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{3-3\sqrt{a}}=\dfrac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}{4(\sqrt{a}+2\sqrt{b})}\cdot\dfrac{(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2}{3(1-\sqrt{a})}=$

$=\dfrac{(1+\sqrt{a})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})}{12}$;

г) $\dfrac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)=\dfrac{x(x+\sqrt{2})}{x^2+2}\times$

$\left(\dfrac{x^2+x\sqrt{2}-x\sqrt{2}+2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\right)=\dfrac{x\cdot(x^2+2)}{(x^2+2)(x-\sqrt{2})}=\dfrac{x}{x-\sqrt{2}}$.

34.

а) $(x^{-2}-y^{-2}):(x^{-1}-y^{-1})=\dfrac{(x^{-1})^2-(y^{-1})^2}{x^{-1}-y^{-1}}=$

$=\dfrac{(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})}{x^{-1}-y^{-1}}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}$;

б) $(c^{-2}-d^{-2})\cdot(d-c)^{-2}=\dfrac{(c^{-1}-d^{-1})(c^{-1}+d^{-1})}{(d-c)^2}=$

$$=\frac{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{(d-c)^2}=\frac{(d-c)(d+c)}{c^2d^2(d-c)^2}=\frac{d+c}{c^2d^2(d-c)^2};$$

в) $(k-l)^{-2}\cdot(k^{-1}-l^{-1})=\dfrac{\frac{1}{k}-\frac{1}{c}}{(k-l)^2}=\dfrac{l-k}{kl(k-l)^2}=\dfrac{1}{kl(l-k)};$

г) $(a^{-1}-b^{-1}):(b^{-3}-a^{-3})=\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{(b^{-1}-a^{-1})(b^{-2}+a^{-1}b^{-1}+a^{-2})}=$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}}=-\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}.$$

35.

$$\left(1+\frac{x^{-2n}+y^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}=\left(\frac{x^{-2n}-y^{-2n}+x^{-2n}+y^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}==\left(\frac{2x^{-2n}}{x^{-2n}-y^{-2n}}\right)^{-2}$$

При $x=3,\quad y=\frac{3}{4},\quad n=\frac{1}{2}$ имеем

$$\left(\frac{2\cdot3^{-1}}{3^{-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{-1}\right)^{-2}=\left(\frac{-3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}=2{,}25.$$

36.

а) $2x^2+3x+1=0$

$D=9-8=1$

$x_1=\dfrac{-3+1}{4}=-\dfrac{1}{2}$

$x_2=\dfrac{-3-1}{4}=-2$

б) $5x^2-8x+3=0$

$\dfrac{D}{4}=16-5\cdot3=1$

$x_1=\dfrac{4-1}{5}=\dfrac{3}{5}$

$x_2=\dfrac{4+1}{5}=1$

в) $3x^2+5x-2=0$

$D=25-4\cdot3(-2)=49$

$x_1=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{6}=-\dfrac{12}{6}=-2$

г) $14x^2-5x-1=0$

$D=25-4\cdot14\cdot(-1)=81$

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{81}}{28}=-\dfrac{4}{28}=-\dfrac{1}{7}$

$x_2=\dfrac{5+9}{28}=\dfrac{14}{282}=\dfrac{-2}{1}$

37.

а) $(a^2-5)^2-(2a+3)^2=0$

$\left|a^2-5\right|=\left|2a+3\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-5=2a+3, \\ a^2-5=-2a-3 \end{array}\right.$

Решим первое уравнение:

$a^2-2a-8=0$

по теореме Виета:

$a_1=4$
$a_2=-2$

Решим второе уравнение

$a^2+2a-2=0$

$\frac{D}{4}=1+2=3$

$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}}{1}=-1+\sqrt{3}$

$a_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{1}=-1-\sqrt{3}$

Опечатка в ответе задачника.

б) $(3x-1)(2x-2)=(x-4)^2+7$

$6x^2-6x-2x+2=x^2+16-8x+7$

$x^2=\frac{21}{5},\ x=\pm\sqrt{4{,}2}$

в) $(d^2-13)^2-(d-77)^2=0$, $(d^2-13)^2=(d-77)^2$,

$\left|d^2-13\right|=\left|d-77\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d^2-13=d-77, \\ d^2-13=77-d \end{array}\right.$

Решим первое уравнение: $d^2-d+64=0$, $D=1-4\cdot1\cdot64<0$
Решений нет.
Решим второе уравнение

$d^2+d-90=0$, $D=1+90\cdot4=361$,

$d_1=\frac{-1+19}{2}=9$, $d_2=\frac{-1-19}{2}=-10$;

г) $2x-(x+1)^2=3x^2-5$, $2x-x^2-2x-1=3x^2-5$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$.

38.

а) $x^2-17x+60$.
По теореме Виета:

$x_1=12;\ x_2=5$; $x^2-17x+60=(x-12)(x-5)$;

б) $3x^2+35x-38$; $D=35^2+12\cdot38=1225+456=1681=41^2$;

$x_1=\frac{-35+41}{6}=1;\ x_2=\frac{-35-41}{6}=-\frac{38}{3}$;

$3x^2+35x-38=3(x-1)(x+\frac{38}{3})$;

в) $2x^2-297x+295$; $D=297^2-8\cdot 295=88209-2360=85849=(293)^2$;

$x_1=\frac{297+293}{4}=147{,}5$; $x_2=\frac{297-293}{4}=1$;

$2x^2-297x+295=2(x-147{,}5)(x-1)=(2x-295)(x-1)$;

г) $x^2+26x+105$; $\frac{D}{4}=13^2-105=169-105=64$;

$x_1=\frac{-13+8}{1}=-5$; $x_2=\frac{-13-8}{1}=-21$; $x^2+26x+105=(x+5)(x+21)$.

39.

а) $\frac{3x^2-10x+3x}{x^2-9}=\frac{3(x-3)(x-\frac{1}{3})}{(x-3)(x+3)}=\frac{3x-1}{x+3}$;

б) $\frac{5x^2+x-4}{x^2+x}=\frac{5(x+1)(x-\frac{4}{5})}{x(x+1)}=\frac{5x-4}{x}$;

в) $\frac{2x^2-9x+4}{x^2-16}=\frac{2(x^2-4{,}5+2)}{(x-4)(x+4)}=\frac{2(x-4)(x-0{,}5)}{(x-4)(x+4)}=\frac{2x-1}{x+4}$;

г) $\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}=\frac{2(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2})}{(x-3)(x+3)}=\frac{2(x+3)(x-0{,}5)}{(x+3)(x-3)}=\frac{2x-1}{x-3}$.

40.

а) $\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2-2x}=\frac{1+2x}{x-2}$, $\frac{2}{x}+\frac{10}{x(x-2)}-\frac{1+2x}{x-2}=0$,

$\frac{2x-4+10-x-2x^2}{x(x-2)}=0$, $\frac{-2x^2+x+6}{x(x-2)}=0\Rightarrow\begin{cases}-2x^2+x+6=0,\\ x(x-2)\neq 0;\end{cases}$

Решим первое уравнение:

$2x^2-x-6=0$, $D=1+48=49$, $x_1=\frac{1+7}{4}=2$; $x_2=\frac{1-7}{4}=-1{,}5$;

Но при $x=2$ второе уравнение системы обращается в 0.

Следовательно, $x=2$ - не решение.

Ответ: $x=-1{,}5$.

б) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x+3}=\frac{12}{x^3-9x}$, $\frac{2}{x(x-3)}-\frac{1}{x+3}-\frac{12}{x(x-3)(x+3)}=0$,

$\frac{2x+6-x^2+3x-12}{x(x-3)(x+3)}=0$, $\begin{cases}-x^2+5x-6=0\\x(x-3)(x+3)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-5x+6=0\\x\neq 0\\x\neq 3\\x\neq -3\end{cases}$

$D=25-24=1$, $x_1=\frac{-5+1}{-2}=2$, $x_1=\frac{-5-1}{-2}=3$;

$x=3$ не удовлетворяет 2-му условию системы. Значит решением будет лишь $x=2$. В задачнике приведен неверный ответ.

в) $\frac{5}{x-2}+1=\frac{14}{x^2-4x+4}$, $\frac{5+x-2}{x-2}=\frac{14}{(x-2)^2}$, $\frac{14-(x+3)(x-2)}{(x-2)^2}=0$,

$\frac{14-x^2-x+6}{(x-2)^2}=0$, $\begin{cases}-x^2-x+20=0,\\(x-2)^2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-20=0,\\x\neq 2;\end{cases}$ $D=1+80=81$

$x_1=\frac{-1+9}{2}=4$, $x_2=\frac{-1-9}{2}=-5$.

Ответ: -5; 4. Опечатка в ответе задачника.

г) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{x-3}{5-x}$, $\frac{1}{x}-\frac{10}{x(x-5)}+\frac{x-3}{x-5}=0$, $\frac{x-5-10+x^2-3x}{x(x-5)}=0$,

$\begin{cases}x^2-2x+15=0\\x(x-5)\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-5)(x+3)=0\\x(x-5)\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=-3.$

Опечатка в ответе задачника.

41.

а) $x^4-17x^2+16=0$.

по теореме Виета:

$x^2=1$ или $x^2=16$

$x=\pm 1$ $\quad$ $x=\pm 4$

б) $x^6-9x^3+8=0$

По теореме Виета:

$x^3=8$ или $x^3=1$

$x=2$ $\quad$ $x=1$

в) $9x^4-40x^2+16=0$, $\frac{D}{4}=400-144=256=16^2$

$x^2=\frac{20+16}{9}=4$ или $x^2=\frac{20-16}{9}=\frac{4}{9}$

$x=\pm 2$ $\quad$ $x=\pm\frac{2}{3}$

г) $x^6-7x^3-8=0$

По теореме Виета:

$x^3 = 8$ или $x^3 = -1$

$x = 2$ $\quad\quad x = -1$

42.

Пусть v км/ч – скорость пешехода, $S_{км}$ – длина пути, тогда

$$\begin{cases} S = 1{,}2v \\ S = v + 1 \end{cases} \begin{cases} v = -1 + S \\ S = -1{,}2 + 1{,}2S \end{cases} \begin{cases} v = 5 \\ S = 6 \end{cases}$$

Ответ: 5 км./ч.

43.

Пусть v км/ч – скорость лодок, тогда

$$\frac{45}{(v+3)+(v-3)} = \frac{3}{2}, \quad \frac{45}{2v} = \frac{3}{2} \Rightarrow v = 15 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 15 км/ч.

44.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, тогда

$$\frac{80}{60} \cdot v + 7 = \frac{36}{60}(v + 30), \quad 80v + 420 = 36v + 1080,$$

$$44v = 660, \quad v = 15 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 15 км/ч.

45.

Пусть v км/ч – скорость автомобиля, тогда

$$2v + (3 - 2 - \frac{1}{5})(v + 10) = 3v, \quad 10v + 4v + 40 = 15v, \quad v = 40 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 40 км/ч.

46.

Пусть на одно платье требуется x м ткани, а на один сарафан y м, тогда

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases} \begin{cases} x = 9 - 3y \\ 27 - 9y + 5y = 19 \end{cases} \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: 2м.; 3м.

47.

Пусть v км/ч – скорость велосипедиста, тогда

$$\frac{15}{v} + \frac{6}{v-3} = \frac{3}{2}, \quad 15v - 45 + 6v = \frac{3}{2}v^2 - \frac{9}{2}v, \quad v^2 - 17v + 30 = 0,$$

$$D = 289 - 120 = 169 = 13^2,$$

$$v_1 = \frac{17-13}{2} = 2; \quad v_2 = \frac{17+13}{2} = 15.$$

По смыслу задачи $v > 0$ и $v - 30 > 0$, поэтому $v = 15$.
Ответ: 15 км/ч и 12 км/ч.

48.
Пусть v км/ч – скорость лодки, тогда
$\frac{2}{v+1} + \frac{2}{v-1} = \frac{7}{12}$, $2v - 2 + 2v + 2 = \frac{7}{12}(v^2 - 1)$, $7v^2 - 48v - 7 = 0$,
$\frac{D}{4} = 576 + 49 = 625 = 25^2$, $v_1 = \frac{24+25}{7} = 7$;
$v_2 < 0$ — не пожходит по смыслу задачи.
Ответ: 7 км/ч.

49.
Пусть завод по плану должен был выпускать n станков в день, тогда:
$180n + 360 - n^2 - 2n = 180n$, $n^2 + 2n - 360 = 0$,
$\frac{D}{4} = 1 + 360 = 361 = 19^2$, $n_1 = 18$, $n_2 < 0$, $\frac{180}{n} - 1 = \frac{180}{18} - 1 = 9$ (дней).

50.
Пусть первая машинистка печатала в день x страниц, тогда получим:
$\begin{cases} (y+5)(x) = 320 \\ y(x+2) = 270 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 320 - 5x \\ xy = 270 - 2y \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{320-5x}{x} \\ xy = 270 - 2y \end{cases}$
$320x - 5x^2 = 270x - 640 + 10x$, $x^2 - 8x - 128 = 0$,
$\frac{D}{4} = 16 + 128 = 144 = 12^2$, $x_1 = 4 + 12 = 16$, $x_2 < 0$,
Ответ: 16 стр. первая, и 18 – вторая.

51.
Пусть грузоподъемность машины x тонн, тогда
$\left(\frac{30}{x} - 4\right) = \frac{30}{x+2}$, $30x + 60 - 4x^2 - 8x = 30x$, $4x^2 + 8x - 60 = 0$,
$x^2 + 2x - 15 = 0$, $D_1 = 1 + 15 = 16 = 4^2$, $x_1 = -1 + 4 = 3$, $x_1 < 0$,
$\frac{30}{3+2} = 6$ (рейсов).

52.
Пусть токарь должен был сделать работу за x дней, тогда
$39(x-6) - 24x = 21$, $15x = 255$, $x = 17$, $39(17-6) = 429$.
Ответ: 429 деталей.

53.
Пусть первоначально в 1-й школе было x учеников, а во второй – y, тогда

$\begin{cases} x+y=1500 \\ 1{,}1x+1{,}2y=1720 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=1500 \\ 11x+12y=17{,}200 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1500-y \\ 16.500-11y+12y=17.200 \end{cases}$ $\begin{cases} y=700 \\ x=800 \end{cases}$

Ответ: 800 и 700 человек соответственно.

54.
Пусть швея в день шила x сумок, тогда

$60-(\frac{60}{x-2}-4)x=4$, $56(x-2)-(60-4x+8)x=0$,

$x^2-3x-28=0$, $x_1=7$, $x_2=-4$ — не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 7 сумок в день.

55.
Пусть v – скорость второго велосипедиста, тогда получим:

$\frac{120}{v}-\frac{120}{v+3}=2$, $120v+360-120v=2v^2+6v$, $v^2+3v-120=0$,

$D=9+720=729=27^2$, $v_1=-\frac{3+27}{2}=12$, $v_2<0$.

Ответ: 12 км/ч и 15 км/ч.

56.
Пусть v – скорость легкового автомобиля, тогда

$\frac{30}{v-20}-\frac{30}{v}=\frac{1}{4}$, $120v-120v+2400=v^2-20v$, $v^2-20v-2400=0$,

$D_2=100+2400=1500=50^2$, $v_1=+10+50=60$, $v_2<0$.

Ответ: 60 км/ч.

57.
Пусть n и v – скорости первого и второго туриста соответственно, тогда

$\begin{cases} \frac{50}{n+v}=1 \\ \frac{50}{v}-\frac{50}{n}=\frac{5}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} 50=n+v \\ 60n-60v=nv \end{cases}$

$60(50-v)-60v=nv(50-v)$, $v^2-170v+3000=0$,

$\frac{D}{4}=7225-3000=4225=65^2$, $v_1=85-65=20$, $v_2=85+65=150$,

$n_2 = 30$, $n_2 < 0$.

Ответ: 30 км/ч и 20 км/ч.

58.

Пусть v км/ч – скорость катера, тогда

$(v+6)\left(\frac{36}{v} - \frac{18}{60}\right) = 36$, $(v+6)(36 - 0{,}3v) = 36v$.

$(v+6)(360-3v) = 360v$, $-18v + 360v + 3v^2 - 360v + 2160 = 0$,

$v^2 + 6v - 720 = 0$, $D = 9 + 720 = 729 = 27^2$, $v_1 = -3 + 27 = 24$ (км/ч),

$v_2 = -3 - 27 < 0,$ что нас не устраивает.

Ответ: 24 км/ч. Опечатка в ответе задачника.

59.

Пусть $a_{см}$ и $b_{см}$ – длина катетов, тогда

$\begin{cases} a - b + 37 = 84 \\ a^2 + b^2 = 1369 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 47 - b \\ a^2 + b^2 = 1369 \end{cases}$

$2209 - 1369 + 2b^2 - 94b = 0$, $b^2 - 47b - 420 = 0$,

$D = 2209 - 1680 = 529 = 23^2$

$b_1 = \frac{47-23}{2} = 12$; $b_2 = \frac{47+23}{2} = 35$.

Для $b_1 = 12$ см, $a_1 = 35$ см $\Rightarrow S = 210$ см^2.

Для $b_2 = 35$ см, $a_1 = 12$ см $\Rightarrow S = 210$ см^2.

$S = \frac{1}{2}ab = 210$ см^2.

Ответ: 210 см^2. Опечатка в ответе задачника.

ГЛАВА 1.

§ 1. Линейные и квадратные неравенства

1.

а) $a=-1$ $-2-5>9$ - неверно. $a=-1$ не является решением.

$a=3$ $6-5=1>9$ - неверно. $a=3$ не является решением.

б) $a=-2$ $2+12=14<-10$ - неверно. Не является решением.

$a=4$ $2-24=-22<10$ - верно. Является решением.

в) $a=-15$ $7+45=52<13$ - неверно. Не является решением.

$a=4$ $7-12=-5<13$ - верно. Является решением.

г) $a=-2$ $-8+5>17$ - неверно. Не является решением.

$a=5$ $20+5>17$ - верно. Является решением.

2.

а) $4a-11<a+13$

$3a<24$

$a<8$

б) $6-4c>7-6c$

$2c>1$

$c>\frac{1}{2}$

в) $8b+3<9b-2$

$b>5$

г) $3-2x<12-5x$

$3x<9$

$x<3$

3.

а) $\frac{5-a}{3}-\frac{3-2a}{5}<0$

$25-5a-9+6a<0$

$a<-16$

б) $\frac{b+4}{2}+\frac{13-4b}{5}<0$

$5b+20+26-8b<0$

$3b>46$

$b>\frac{46}{3}$

в) $\frac{x+7}{4}>\frac{5+4x}{3}$

$3x+21>20+16x$

$1>13x$

$x<\frac{1}{13}$

г) $\frac{6-y}{7}<\frac{y+6}{5}$

$30-5y<7y+42$

$12y>-12$

$y>-1$

4.

а) $a(a-2)-a^2>5-3a$, $a^2-2a-a^2>5-3a$, $a>5$;

б) $5y^2-5y(y+4)\geq 100$, $5y^2-5y^2-20y\geq 100$, $y\leq -5$;

в) $3x(3x-1)-9x^2 \le 2x+6$, $9x^2-3x-9x^2 \le 2x+6$,

$5x+6 \ge 0$, $x \ge -\frac{6}{5}$;

г) $7c(c-2)-c(7c+1)<3$, $7c^2-14c-7c^2-c<3$, $-15c<3$, $c>-\frac{1}{5}$.

5.

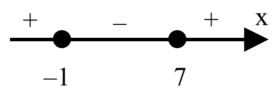
а) $x^2-6x-7 \ge 0$

по теореме Виета:

$x_1=7$, $x_2=-1$

$(x-7)(x+1) \ge 0$

$x \le 1$, $x \ge 7$

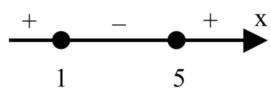


б) $-x^2+6x-5<0$

$x^2-6x+5>0$

по теореме Виета:

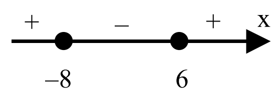
$x_1=5$, $x_2=1$, $x<1$, $x>5$



в) $x^2+2x-48 \le 0$

по теореме Виета:

$x_1=6$, $x_2=-8$, $-8 \le x \le 6$

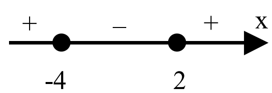


г) $-x^2-2x+8>0$

$x^2+2x-8<0$

по теореме Виета:

$x_1=2$, $x_2=-4$, $-4<x<2$

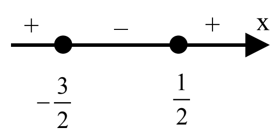


6.

а) $4x^2+4x-3 \ge 0$, $\frac{D}{4}=4+12=4^2$

$x_1=\frac{-2+4}{4}=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{-2-4}{4}=-\frac{3}{2}$

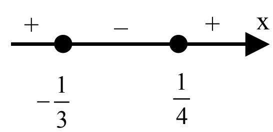
$x \ge \frac{1}{2}$, $x \le -\frac{3}{2}$



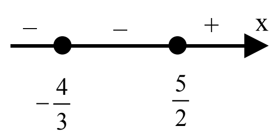
б) $12x^2+x-1<0$, $D=1+48=49$

$x_1=\frac{-1+7}{24}=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{-1-7}{24}=-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{4}$



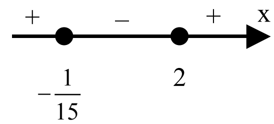
в) $6x^2-7x-20 \le 0$



$D = 49 + 480 = 529 = 23^2$

$x_1 = \frac{7+23}{12} = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{7-23}{12} = -\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{5}{2}$;

г) $15x^2 - 29x - 2 > 0$



$D = 841 + 120 = 961 = 31^2$

$x_1 = \frac{29+31}{30} = 2$, $x_2 = \frac{29-31}{30} = -\frac{1}{15}$

$x > 2$, $x < -\frac{1}{15}$

7.

а) $3x^2 + x + 2 > 0$, $D = 1 - 24 = -23 < 0$.

Следовательно $-\infty < x + \infty$ (т.к. первый коэффициент положителен).

б) $-3x^2 + 2x - 1 \ge 0$, $\frac{D}{4} = 1 - 12 = -11 < 0$.

Следовательно, решений нет.

в) $5x^2 - 2x + 1 < 0$, $\frac{D}{4} = 1 - 5 = -4 < 0$.

Следовательно, решений нет.

г) $-7x^2 + 5x - 2 \le 0$, $D = 25 - 28 = -3 < 0$.

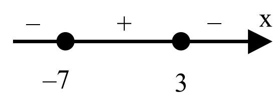
$-\infty < x < +\infty$ (т.к. старший коэффициент положителен).

8.

Выражение имеет смысл когда:

а) $(3-x)(x+7) \ge 0$,

$-7 \le x \le 3$;

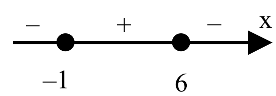


б) $5x - x^2 + 6 \ge 0$

$D = 25 + 24 = 49$

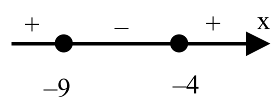
$x_1 = \frac{-5+7}{+2} = -1$, $x_2 = \frac{-5-7}{-2} = 6$

$-1 \le x \le 6$



в) $(x+4)(x+9) \ge 0$

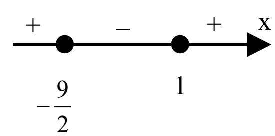
$x \ge -4$, $x \le -9$



г) $2x^2 + 7x - 9 \ge 0$

$D = 49 + 72 = 121 = 11^2$

$x_1 = \frac{-7+11}{4} = 1$, $x_1 = \frac{-7-11}{4} = -\frac{9}{2}$;

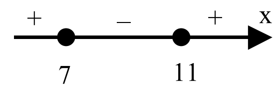


$x \geq 1, \;\; x \leq -\dfrac{9}{2}$.

9.

$f(x)$ Определено, если подкоренное выражение неотрицательно.

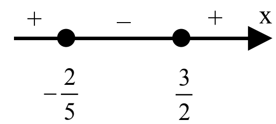
а) $x^2 - 18x + 77 \geq 0$



$\dfrac{D}{4} = 81 - 77 = 4$

$x_1 = 9 + 2 = 11, \;\; x_2 = 9 - 2 = 7, \;\; x \geq 11, \;\; x \leq 7$;

б) $10x^2 - 11x - 6 \geq 0$,

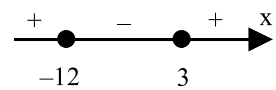


$D = 121 + 240 = 361 = 19^2$,

$x_1 = \dfrac{11+19}{20} = \dfrac{3}{2}, \;\; x_2 = \dfrac{11-19}{20} = -\dfrac{2}{5}$

$x \geq \dfrac{3}{2}, \;\; x \leq -\dfrac{2}{5}$;

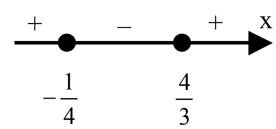
в) $x^2 + 9x - 36 \geq 0$,



$D = 81 + 144 = 225 = 15^2$,

$x_1 = \dfrac{-9+15}{2} = 3, \;\; x_2 = \dfrac{-9-15}{2} = -12, \;\; x \geq 3, \;\; x \leq -12$;

г) $12x^2 - 13x - 4 \geq 0$



$D = 169 + 192 = 361 = 19^2$

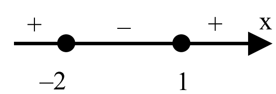
$x_1 = \dfrac{13+19}{24} = \dfrac{4}{3}, \;\; x_2 = \dfrac{13-19}{24} = -\dfrac{1}{4}$

$x \geq \dfrac{4}{3}, \;\; x \leq -\dfrac{1}{4}$. В задачнике приведен неверный ответ.

10.

f(x) определено тогда, когда подкоренное выражение строго больше нуля.

а) $-x^2 - x + 2 > 0, \;\; x^2 + x - 2 < 0$,

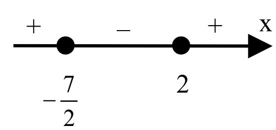


по теореме Виета:

$x_1 = 1, \;\; x_1 = -1, \;\; -2 < x < 1$;

б) $x^2 - 9 > 0, \;\; x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3, \;\; x > 3, \;\; x < -3$;

в) $\sqrt{\dfrac{7}{14 - 2x^2 - 3x}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{14 - 2x^2 - 3x}}$



$14 - 2x^2 - 3x > 0, \;\; 2x^2 + 3x - 14 < 0$

$D = 9 + 112 = 121 = 11^2$

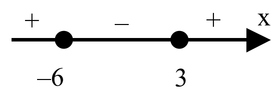
$x_1 = \dfrac{-3+11}{4} = 2,\ \ x_2 = \dfrac{-3-11}{4} = -\dfrac{7}{2}$, $\ -\dfrac{7}{2} < x < 2$;

г) $25 - x^2 > 0$, $\ x^2 < 25 \Leftrightarrow |x| < 5$, $\ -5 < x < 5$.

11.

Квадратное уравнение имеет 2 корня, при $D > 0$, 1 корень при $D = 0$ и не имеет корней при $D < 0$.

$\dfrac{D}{4} = p^2 + (p-6)\cdot 3 = p^2 + 3p - 18$



а) $p^2 + 3p - 18 > 0$

по теореме Виета:

$p_1 = 3,\ \ p_2 = -6$, $\ p > 3,\ \ p < -6$;

б) $p = 3,\ \ p = -6$; в) $-6 < p < 3$.

12.

а) $3x - 2 > 7 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$.

Число (-3) – решение второго неравенства, но не первого.

Неравенства не равносильны.

б) $4x - 3 \le 9 \Leftrightarrow 4x \le 12,\ \ x \le 3$, $\ \dfrac{1}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Неравенства не равносильны.

в) $2x + 1 \ge 5 \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2$, $\ \dfrac{1}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Неравенства не равносильны.

г) $-x + 7 > 5 \Leftrightarrow x < 2$, $\ (x-2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Неравенства не равносильны.

13.

а) $|x-2| \le 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \le 5, \\ x-2 \ge -5; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \le 7, \\ x \ge -3; \end{array}\right.$ $\qquad -3 \le x \le 7$;

б) $|1-x| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x > 2, \\ 1-x < -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3 \end{array}\right.$ $\qquad x < -1,\ \ x > 3$;

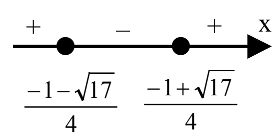
в) $|3-x| \ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x \ge 3, \\ 3-x \le -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 6 \end{array}\right.$ $\quad x \le 0,\ \ x \ge 6$;

г) $|3+x| < 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+x < 4, \\ 3+x > -4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -7 \end{array}\right.$ $\qquad -7 < x < 1$.

14.

а) $2x^2 + x < 2$, $\ 2x^2 + x - 2 < 0$

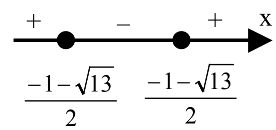
$D = 1 + 16 = 17$



$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$;

б) $3 - x^2 \le x$, $x^2 + x - 3 \ge 0$



$D = 1 + 12 = 13$

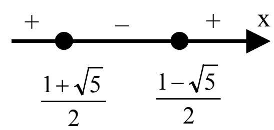
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$x \ge \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x \le \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$;

в) $x^2 - 4x + 2 \ge 0$, $x^2 - 4x + 4 \ge 2$

$(x-2)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \ge \sqrt{2}, \\ x-2 \ge -\sqrt{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2+\sqrt{2} \\ x \le 2-\sqrt{2} \end{array}\right.$ $\quad x \ge 2+\sqrt{2}$, $x \le 2-\sqrt{2}$;

г) $x + 1 > x^2$, $x^2 - x - 1 < 0$,



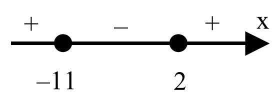
$D = 1 + 4 = 5$,

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

15.

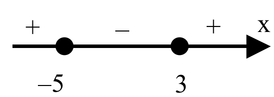
а) $\frac{x-1}{2} + \frac{x^2+x-4}{4} > \frac{0{,}5x^2+1}{3}$



$\frac{x^2+9x-22}{12} > 0$

$x^2 + 9x - 22 > 0$, $x_1 = 2$, $x_1 = -11$, $x > 2$, $x < -11$;

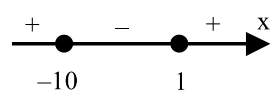
б) $\frac{x^2-5}{6} + \frac{x+1}{3} \ge 2$, $\frac{x^2-5+2x+2}{6} \ge 2$,



$x^2 + 2x - 15 \ge 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -5$,

$x \ge 3$, $x \le -5$;

в) $\frac{x^2+3x}{8} < \frac{x-1}{4} + \frac{3-2x}{2}$;



$\frac{x^2+3x-2x+2-12+8x}{8} < 0$;

$x^2+9x-10<0$, $x_1=-10$, $x_2=1$, $-10<x<1$;

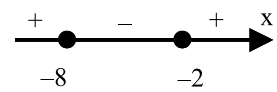
г) $\frac{x^2+1}{15}+3x>\frac{7x-3}{3}$

$x^2+1+45x>35x-15$, $x^2+10x+16>0$

по теореме Виета:

$x_1=-2$, $x_1=-8$

$x>-2$, $x<-8$



16.

а) $|4x+3|>5$,

$$\left[\begin{array}{l}4x+3>5,\\4x+3<-5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x>2,\\4x<-8;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2},\\x<-2;\end{array}\right.\quad x>\frac{1}{2},\ \ x<-2;$$

б) $6-|3x+1|>0$, $|3x+1|<6$,

$$\begin{cases}3x+1<6,\\3x+1>-6;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x<5,\\3x>-7;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{5}{3},\\x>-\frac{7}{3};\end{cases}\quad -\frac{7}{3}<x<\frac{5}{3};$$

в) $|3-2x|\ge 9$,

$$\left[\begin{array}{l}3-2x\ge 9,\\3-2x\le -9;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x\le -6,\\2x\ge 12;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3,\\x\ge 6;\end{array}\right.\quad x\le -3;\ \ x\ge 6;$$

г) $4-|3+2x|\le 0$, $|3+2x|\ge 4$,

$$\left[\begin{array}{l}3+2x\ge 4,\\3+2x\le -4;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x\ge 1,\\2x\le -7;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{1}{2},\\x\le -\frac{7}{2}.\end{array}\right.\quad x\ge\frac{1}{2},\ \ x\le -\frac{7}{2}.$$

В задачнике приведен неверный ответ.

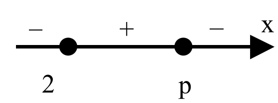
17.

Сначала решим это неравенство.

$(x+2)(p-x)\ge 0$

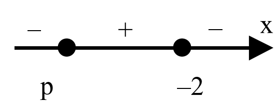
Пусть $p\ge -2$

$-2\le x\le p$



При $p<-2$

$p\le x\le -2$

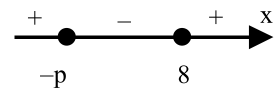


а) $p=1$, $p=-5$;

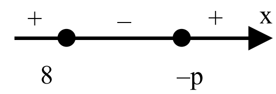
б) $p=2$;

в) $p=-1$, $p=-3$;
г) $p=-2$.

18.
$(x-8)(x+p)\le 0$
При $p\ge -8$
$-p\le x\le 8$



При $p<-8$

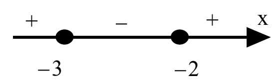


а) $p=1$; б) $p=2$; в) $p=3$;
г) решений нет.

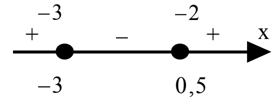
19.
$(7-x)(p-x)<0$, $(x-7)(x-p)<0$.
При $p>7$ $7<x<p$; При $p<7$ $p<x<7$;
При $p=7$ решений нет.
а) $p=11,$ $p=3$; б) $p=8,$ $p=6,$ $p=7$.
Опечатка в ответе задачника.

§ 2. Рациональные неравенства

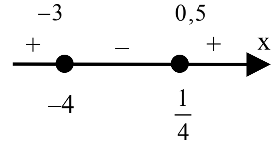
20.
а) $(x+2)(x+3)>0$
$x>-2,$ $x<-3$



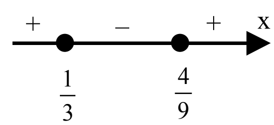
б) $(x+3)(x-0{,}5)<0$
$-3<x<0{,}5$



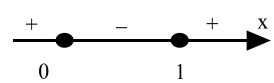
в) $(x-\frac{1}{4})(x+4)>0$
$x>\frac{1}{4},$ $x<-4$



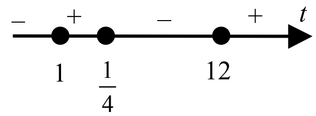
г) $(x-\frac{4}{9})(x-\frac{1}{3})<0$
$\frac{1}{3}<x<\frac{4}{9}$



21.
а) $t(t-1)<0$
$0<t<1$



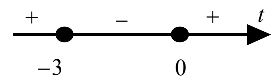
б) $t(t-\frac{1}{4})(t-12)\geq 0$



$0\leq t\leq \frac{1}{4},\ \ t\geq 12$

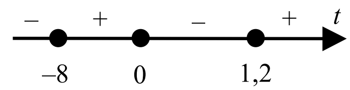
в) $t(t+3)>0$

$t>0,\ \ t<-3$



г) $t(t+8)(t-1{,}2)\leq 0$

$t\leq -8,\ \ 0\leq t\leq 1{,}2$



22.

а) $x^2-x>0$, $x(x-1)>0$, $x>1,\ \ x<0$;

б) $2x+x^2\leq 0$, $x(x+2)\leq 0$, $-2\leq x\leq 0$;

в) $x^2-3x\geq 0$, $x(x-3)\geq 0$, $x\geq 3,\ \ x\leq 0$;

г) $5x+x^2<0$, $x(x+5)<0$, $-5<x<0$.

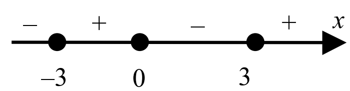
23.

а) $x^2-4>0$, $x^2>4\Leftrightarrow |x|>2\Leftrightarrow x>2$, $x<-2$;

б) $x(x^2-9)\leq 0$

$x(x-3)(x+3)\leq 0$

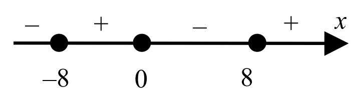
$x\leq -3,\ \ 0\leq x\leq 3$



в) $x^2-25\geq 0$, $x^2\geq 25$, $|x|\geq 5$, $x\geq 5,\ \ x\leq -5$;

г) $x(x^2-64)>0$

$x>8,\ \ -8<x<0$



24.

а) $a^2>225$, $|a|>15$, $a>15,\ \ a<-15$;

б) $b^2\leq 16$, $|b|\leq 4$, $4\leq b\leq 4$;

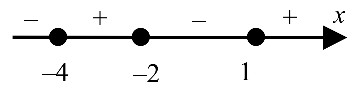
в) $\frac{1}{4}c^2\geq 1$, $c^2\geq 4$, $|c|\geq 2$, $c\geq 2,\ \ c\leq -2$;

г) $\frac{1}{9}z^2<0$. Решений нет.

25.

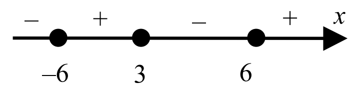
а) $(x+2)(x+4)(x-1)>0$

$x>1;\quad -4<x<-2$



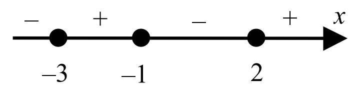
б) $(x-3)(x-6)(x+6)<0$

$x<-6,\quad 3<x<6$



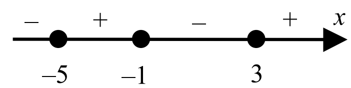
в) $(x-2)(x+3)(x+1)<0$

$x<-3;\quad -1<x<2$



г) $(x+5)(x+1)(x-3)>0$

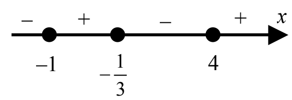
$x>3;\quad -1>x>-5$



26.

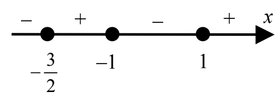
а) $(x-4)(3x+1)(x+1)>0$,

$(x-4)(x+\frac{1}{3})(x+1)>0$, $x>4$, $-1<x<-\frac{1}{3}$;



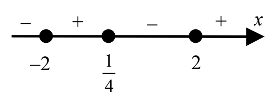
б) $(2x+3)(x+1)(x-1)>0$,

$\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)(x-1)<0$, $x<-\frac{3}{2}$, $-1<x<1$;



в) $(4x-1)(x-2)(x+2)<0$,

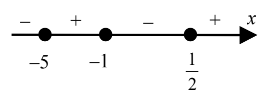
$\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-2)(x+2)<0$, $x<-2$, $\frac{1}{4}<x<2$;



г) $(x+5)(x+1)(2x-1)>0$,

$(x+5)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$,

$x>\frac{1}{2}$, $-5<x<-1$.

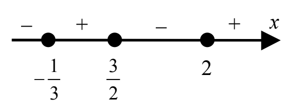


27.

а) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$,

$(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$,

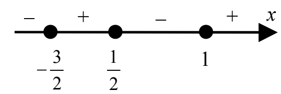
$x<-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}<x<2$;



б) $(2x+3)(1-2x)(x-1)<0$,

$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)>0$,

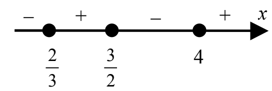
$x>1,\ -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$;



в) $(3x-2)(x-4)(3-2x)<0$,

$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0$,

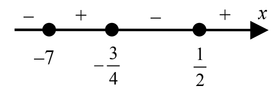
$x>4,\ \frac{3}{2}>x>\frac{2}{3}$;



г) $(x+7)(4x+3)(1-2x)>0$,

$(x+7)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$,

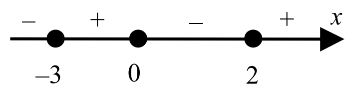
$x<-7,\ -\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}$



28.

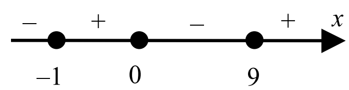
а) $\frac{x(x-2)}{x+3}>0$,

$x>2,\ 0>x>-3$;



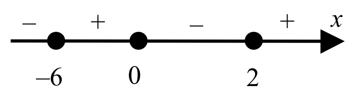
б) $\frac{x(x+1)}{x-9}\geq 0$,

$x>9,\ -1\leq x\leq 0$;



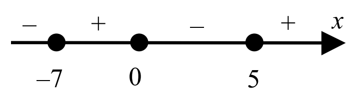
в) $\frac{x^2+6x}{x-2}<0$, $\frac{x(x+6)}{x-2}<0$,

$x<-6,\ 0<x<2$;



г) $\frac{x-5}{x^2+7x}\leq 0$; $\frac{x-5}{x(x+7)}\leq 0$,

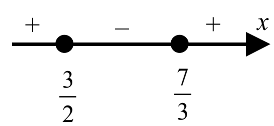
$0<x\leq 5,\ x<-7$.



29.

а) $\frac{3x-2}{2x-3}>3 \Leftrightarrow \frac{3x-2-6x+9}{2x-3}>0$

$\frac{-3x+7}{2x-3}>0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{7}{3}}{x-\frac{3}{2}}<0$, $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{3}$;

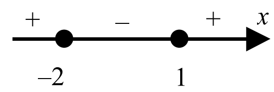


б) $\frac{x+3}{x-2}<1 \Leftrightarrow \frac{x+3-x+2}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{5}{x-2}<0$,

$x-2<0$, $x<2$;

в) $\frac{7x-4}{x+2}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{7x-4-x-2}{x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+2}\ge 0$;

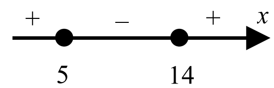
$\frac{x-1}{x+2}\ge 0$, $x\ge 1$, $x<-2$



г) $\frac{5x-7}{x-5}<7 \Leftrightarrow \frac{5x-7-7x+35}{x-5}<0$

$\frac{-2x+28}{x-5}<0 \Leftrightarrow \frac{x-14}{x-5}>0$

$x<5$, $x>14$



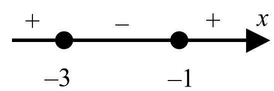
30.

а) $x^2+4x+3\le 0$

по теореме Виета:

$x_1=-1$, $x_2=-3$

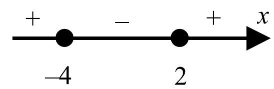
$-3\le x\le -1$



б) $8-2x\ge x^2$, $x^2+2x-8\le 0$,

по теореме Виета:

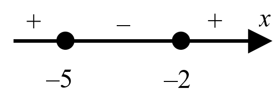
$x_1=2$, $x_2=-4$, $-4\le x\le 2$;



в) $-x^2-10\le 7x$, $x^2+7x+10\ge 0$,

по теореме Виета:

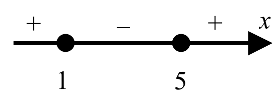
$x_1=-2$, $x_1=-5$, $x\ge -2$, $x\le -5$;



г) $x^2-6x+5\ge 0$,

по теореме Виета:

$x_1=5$, $x_2=1$, $x\ge 5$, $x\le -1$.



31.

а) $x^2+6x+9\ge 0$, $(x+3)^2\ge 0$, $-\infty<x<+\infty$;

б) $-4x^2+20x>25$, $4x^2-20x+25<0$,

$(2x-5)^2<0$ — решений нет;

в) $49x^2+14x+1\le 0$, $(7x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow 7x+1=0$, $x=-\frac{1}{7}$;

г) $-x^2+8x\ge 16$, $x^2-8x+16\le 0$, $(x-4)^2\le 0 \Leftrightarrow x-4=0$, $x=4$.

32.

а) $4x^2+x+1>0$, $D=1-16=-15<0$.

Решением будут все $-\infty<x<+\infty$.

б) $7x^2+3\le 2x$, $7x^2-2x+3\le 0$, $\frac{D}{4}=1-21=-20<0$.

Решений нет.

в) $3x^2+4<x$, $3x^2-x+4<0$, $D=1-48=-47<0$.

Решений нет.

г) $5x^2+6x+13\ge 0$, $\frac{D}{4}=9-65=-64<0$.

Решение – все $-\infty<x<+\infty$.

33.

а) $-2x^2+x-3<0$,

$2x^2-x+3>0$,

$D=1-24=-23<0$,

$-\infty<x<+\infty$;

б) $-4x^2+x-1\ge 0$,

$4x^2-x+1\le 0$,

$D=1-16=-15<0$,

Решений нет;

в) $-6x^2+5x-6>0$,

$6x^2-5x+6<0$,

$D=25-4\cdot 6\cdot 8<0$,

Решений нет;

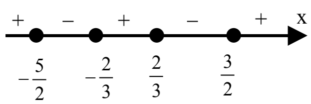
г) $-3x^2+4x-5\le 0$,

$3x-4x+5\ge 0$,

$\frac{D}{4}=4-15=-11<0$,

Решения: $-\infty<x<+\infty$.

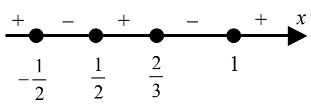
34.



а) $(2-3x)(3x+2)(5+3x)(2x-3)>0$,

$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$,

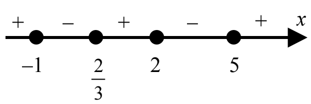
$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{3}<x<-\frac{2}{3}$;



б) $(2x+1)(1-2x)(x-1)(2-3x)>0$,

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0$,

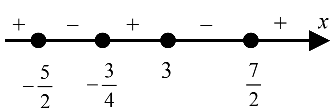
$x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$, $x>1$;



в) $(3x-2)(5-x)(x+1)(2-x)<0$,

$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)(x-1)(x-2)<0$,

$2<x<5$; $-1<x<\frac{2}{3}$;

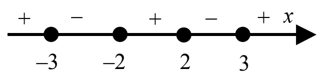


г) $(2x+5)(4x+3)(7-2x)(x-3)<0$,

$\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-3)>0$,

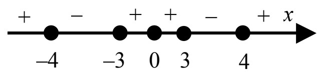
$$x > \frac{7}{2};\quad -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2};\quad x < -\frac{5}{2}.$$

35.



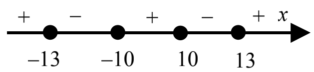
а) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9} \geq 0$, $\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

$x > 3,\quad 2 \geq x \geq -2,\quad x < -3$;



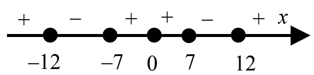
б) $\dfrac{x^2(x^2-16)}{x^2-9} < 0$, $\dfrac{x^2(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)} < 0$,

$3 < x < 4;\quad -4 < x < -3$;



в) $\dfrac{x^2-169}{x^2-100} \leq 0$, $\dfrac{(x-13)(x+13)}{(x-10)(x+10)} \leq 0$,

$-13 \leq x < -10;\quad 10 < x \leq 13$;

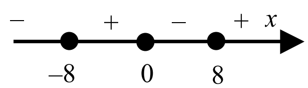


г)

$$\frac{x^2-49}{x^2(x^2-144)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-7)(x+7)}{x^2(x-12)(x+12)} > 0$$

$x > 12;\quad 0 < x < 7;\quad -7 < x < 0;\quad x < -12$.

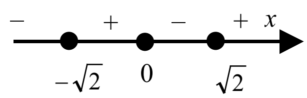
36.



а) $x^3 - 64x > 0$,

$x(x-8)(x+8) > 0$,

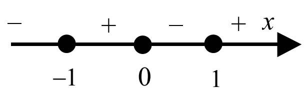
$x > 8;\quad 0 > x > -8$;



б) $x^3 \leq 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) \leq 0$

$x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$,

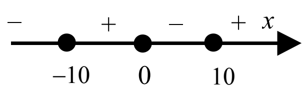
$x \leq -\sqrt{2};\quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}$;



в) $x^3 \geq x \Leftrightarrow x(x^2-1) \geq 0$,

$x(x-1)(x+1) \geq 0$,

$x \geq 1;\ 0 \geq x \geq -1$;

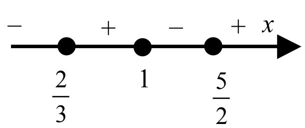


г) $x^3 - 100x < 0$,

$x(x-10)(x+10) < 0$,

$0 < x < 10;\quad x < -10$.

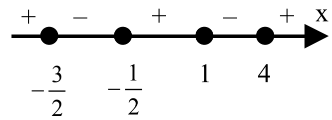
37.



а) $\frac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}>0$, $\frac{(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x-\frac{5}{2}}<0$

$x<\frac{2}{3}$; $1<x<\frac{5}{2}$;

б) $\frac{(2x+3)(2x+1)}{(x-1)(x-4)}\geq 0$,

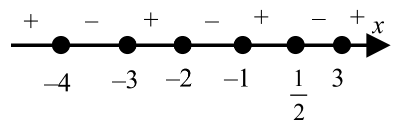


$\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x-4)}\geq 0$,

$x>4$; $1>x\geq -\frac{1}{2}$; $x\leq -\frac{3}{2}$;

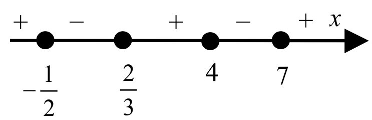
в) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}\leq 0$

$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)(x-3)}\geq 0$



$x>3$; $\frac{1}{2}>x\geq -1$; $-3\leq x\leq -2$; $x<-4$

г) $\frac{7-x}{(3x-2)(2x+1)(x-4)}<0$,

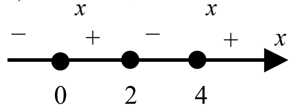


$\frac{x-7}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)}>0$,

$x>7$; $4>x>\frac{2}{3}$; $x<-\frac{1}{2}$.

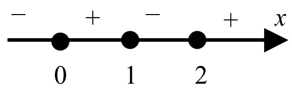
38.

а) $x+\frac{8}{x}\leq 6$, $\frac{x^2-6x+8}{x}\leq 0$, $\frac{(x-4)(x-2)}{x}\leq 0$,



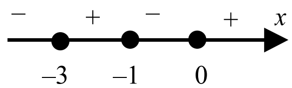
$4\geq x\geq 2$; $x<0$;

б) $x+\frac{2}{x}\geq 3$, $\frac{x^2-3x+2}{x}\geq 0$, $\frac{(x-1)(x-2)}{x}\geq 0$,



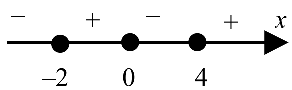
$x \geq 2,\ \ 0 < x \leq 1$;

в) $x + \dfrac{3}{x} \leq -4$, $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x} \leq 0$, $\dfrac{(x+3)(x+1)}{x} \leq 0$,



$-1 \leq x < 0,\ \ x \leq -3$;

г) $x - \dfrac{8}{x} > 2$, $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} > 0$, $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x} > 0$,



$x > 4,\ \ -2 < x < 0$.

39.

а) $(x-1)(x^2 - 3x + 8) < 0$.

Рассмотрим $x^2 - 3x + 8$

$D = 9 - 32 = -23 < 0$, следовательно $x^2 - 3x + 8 > 0$ при любых x.

Разделим обе части на $x^2 - 3x + 8$, $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$;

б) $(x+5)(x^2 + x + 6) \geq 0$.

Рассмотрим $x^2 + x + 6$,

$D = 1 - 24 = -23 < 0$, следовательно $x^2 + x + 6 > 0$ при любых x.

Разделим обе части на $x^2 + x + 6$, $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

в) $(x-7)(-x^2 - 3x - 18) > 0$, $(x-7)(x^2 + 3x + 18) < 0$,

$x^2 + 3x + 18 > 0$ при любых x (т.к. $D = 9 - 72 = -63 < 0$).

Разделим обе части на этот множитель; $x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < 7$.

г) $(x + 1{,}2)(x^2 + 5x + 14) \leq 0$,

$x^2 + 5x + 14 > 0$ при любых x (т.к. $D = 25 - 56 = -29 < 0$).

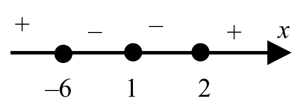
Разделим обе части на этот множитель; $x + 1{,}2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1{,}2$.

40.

а) $(x-1)^2(x^2 + 4x - 12) < 0$,

$(x-1)^2(x-2)(x+6) < 0$,

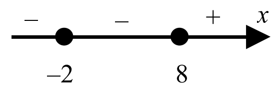
$-6 < x < 1;\ \ 1 < x < 2$;



б) $(x+2)(x^2-6x-16)>0$,

$(x+2)(x-8)(x+2)>0$,

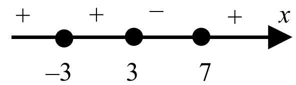
$(x+2)^2(x-8)>0$, $x>8$;



в) $(x+3)^2(x^2-10x+21)\ge 0$,

$(x+3)^2(x-7)(x-3)\ge 0$,

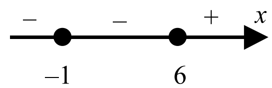
$x\le 3$; $x\ge 7$;



г) $(x-1)(x^2-7x+6)\ge 0$,

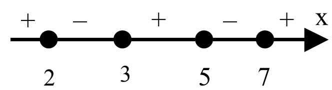
$(x-1)(x-6)(x-1)\ge 0$,

$(x-1)^2(x-6)\ge 0$, $x=1$; $x\ge 6$;



41.

а) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$,

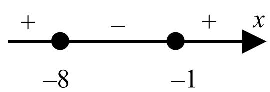


$\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-7)(x-5)}>0$,

$x>7$; $3<x<5$; $x<2$;

б) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+9x+8}<0$, $x^2-2x+3>0$ при любых x (т.к. $\dfrac{D}{4}=1-3=-2<0$).

Разделим обе части на это положительное выражение



$\dfrac{1}{x^2+x+8}<0$, $\dfrac{1}{(x+1)(x+8)}<0$,

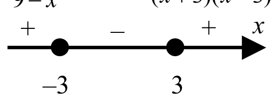
$-8<x<-1$;

в) $\dfrac{x^2-4x+12}{9-x^2}<0$.

Числитель $x^2-4x+12>0$ при любых x (т.к. $\dfrac{D}{4}=4-12= \ =-8<0$).

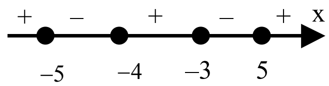
Разделим на него обе части.

$\dfrac{1}{9-x^2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+3)(x-3)}>0$



$x>3$; $x<-3$

г) $\dfrac{x^2+7x+12}{25-x^2}>0$, $\dfrac{(x+3)(x+4)}{(5-x)(x+5)}>0$, $\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x-5)(x+5)}<0$,

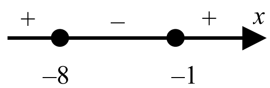


$-5 < x < -4, \quad -3 < x < 5$.

42.

а) $\frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2$, $\quad \frac{2x^2+18x-4-2x^2-18x-16}{x^2+9x+8} > 0$,

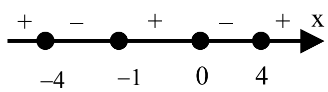
$\frac{-20}{x^2+9x+8} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+8)} < 0$,



$-8 < x < -1$;

б) $\frac{2x^2+x-16}{x^2+x} \le 1$, $\quad \frac{2x^2+x-16-x^2-x}{x^2+x} \le 0$,

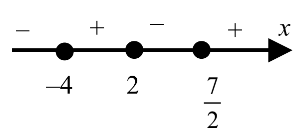
$\frac{x^2-16}{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{x(x+1)} \le 0$,



$0 < x \le 4, \quad -4 \le x < -1$;

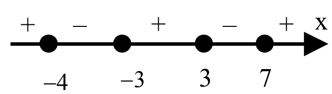
в) $\frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \ge -1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2+x^2+2x-8}{x^2+2x-8} \ge 0$,

$\frac{2x-7}{x^2+2x-8} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{7}{2}}{(x-2)(x+4)} \ge 0$,



$x \ge \frac{7}{2}, \quad -4 < x < 2$;

г) $\frac{x^2+3x+10}{x^2-9} < 0$,



$\frac{x^2+3x+10-2x^2+18}{x^2-9} < 0$,

$\frac{-x^2+3x+28}{x^2-9} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-28}{(x-3)(x+3)} > 0$, $\quad \frac{(x-7)(x+4)}{(x-3)(x+3)} > 0$,

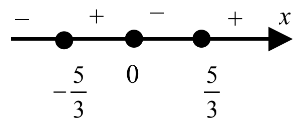
$x > 7, \quad -3 < x < 3, \quad x < -4$.

43.

а) $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2+x+1)}{(3x-5)(3x+5)} \geq 0$,

$x^2+x+1>0$ (т.к. $D=1-4=-3<0$, следовательно можно разделить обе части на (x^2+x+1).

$\dfrac{x}{(3x-5)(3x+5)} \geq 0$, $\dfrac{x}{(x-\frac{3}{5})(x+\frac{3}{5})} \geq 0$



$-\dfrac{5}{3}<x\leq 0,\quad x>\dfrac{5}{3}$;

б) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{x+8} \leq 0$, $\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x+8} \leq 0$.

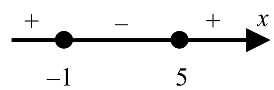
Разделим обе части на строго положительное выражение x^2+1.

$\dfrac{x-1}{x+8} \leq 0 \Leftrightarrow -8<x\leq 1$.

в) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$

Числитель всегда строго положителен. Разделим на него обе части.

$\dfrac{1}{x^2-4x-5}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-5)(x+1)}<0$,



$-1<x<5$;

г) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x+1}<0$.

Знаменатель строго положителен ($D<0$).
Умножим обе части неравенства на него.

$x^4-2x^2-8<0$, $y=x^2$, $y^2-2y-8<0$, $y_1=4,\quad y_2=-2$,

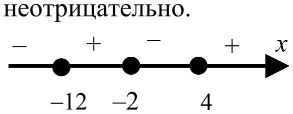
$(y-4)(y+2)<0$.

Вернемся к x:

$(x^2-4)(x^2+2)<0$, $x^2-4<0$, $x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

44.

Выражение имеет смысл тогда, когда то, что стоит под корнем неотрицательно.

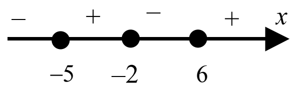


а) $\dfrac{2x+4}{x^2+8x-48} \geq 0$, $\dfrac{(x+2)}{(x-4)(x+12)} \geq 0$,

$x>4,\quad -12<x\leq -2$;

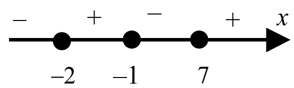
б) $\frac{x-3}{x^2+5x-24} \ge 0$, $\frac{x-3}{(x-3)(x+8)} \ge 0,\ \ x \ne 3$, $\frac{1}{x+8} \ge 0,\ \ x \ne 3$,

$x+8>0,\ \ x \ne 3,\ \ x>-8,\ \ x \ne 3$, то есть $-8<x<3,\ \ x>3$;



в) $\frac{x^2+7x+10}{6-x} \ge 0$, $\frac{(x+2)(x+5)}{x-6} \le 0$,

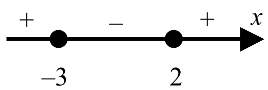
$-2 \le x < 6,\ \ x \le -5$



г) $\frac{14-x^2+5x}{x+1} \ge 0$, $\frac{(x-7)(x+2)}{x+1} \le 0$,

$x \le -2,\ \ -1 < x \le 7$.

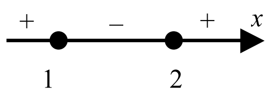
45.



а) $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} \ge 0$,

$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} \ge 0,\ \ x \ne 3$,

$x>2,\ \ x \le -3,\ \ x \ne 3,$ то есть $x \le -3,\ \ 2<x<3,\ \ x>3$;

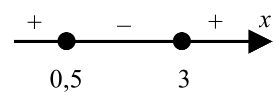


б) $\frac{2-x-x^2}{x^2-4} \ge 0$,

$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \le 0$, $x \ne -2$,

$2 > x \ge 1$;

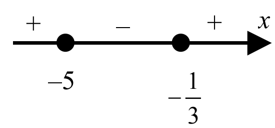
в) $\frac{2x^2-5x+2}{5x-6-x^2} \ge 0$, $\frac{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-3)(x-2)} \le 0,$



$x \ne 2$, $\frac{1}{2} \le x < 3,\ \ x \ne 2$,

$\frac{1}{2} \le x < 2,\ \ 2 < x < 3$;

г) $\frac{3x^2+10x+3}{x^2+8x+15} \ge 0$, $\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)}{(x+3)(x+5)} \ge 0,$



$x \ne -3$, $x \ge -\frac{1}{3},\ \ x<-5$.

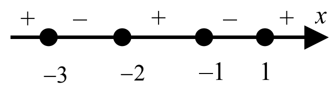
46.

а) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$,

$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x+1)(x+2)-3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0,$$

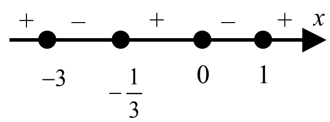
$$\frac{x^2+5x+6+2x^2+6x+4-3x^2-12x-9}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0,$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0,$$



$1>x>-1,\quad -2>x>-3$;

б) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}>-3$,

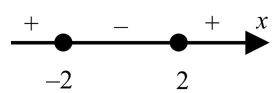


$$\frac{2x+2-x+1+3(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}>0,$$

$$\frac{x+3+3x^2-3}{(x-1)(x+1)}>0,\ \frac{x\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-1)(x+1)}>0,$$

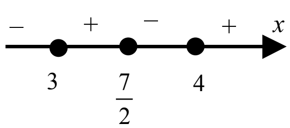
$x<-1,\quad -\frac{1}{3}<x<0,\ x>1$;

в) $\frac{x+1}{x-2}>-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$,



$$\frac{2x+2x+6+x-2}{2(x-2)}>0,\ \frac{3(x+2)}{2(x-2)}>0$$

$x>2,\quad x<-2$;



г) $\frac{x-4}{x-3}>\frac{x-3}{x-4}$, $\frac{(x-4)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-4)}>0$,

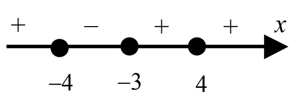
$$\frac{-2x+7}{(x-3)(x-4)}>0,\ \frac{\left(x-\frac{7}{2}\right)}{(x-3)(x-4)}<0,$$

$x<3,\quad \frac{7}{2}<x<4$.

47.

а) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-12)\le 0$,

(x^2+4) и (x^2+x+1) строго положительны. Разделим обе части на них.

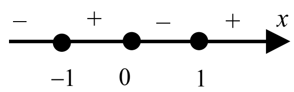


$(16-x^2)(x^2-x-12)\le 0$,

$(4-x)(x+4)(x-4)(x+3)\le 0$,

$(x-4)^2(x-4)(x+3)\ge 0$,

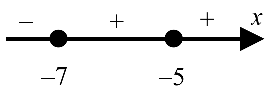
$x\ge -3,\ \ x\le -4$. (опечатка в ответе задачника).



б) $\dfrac{x-1+2x+2-1+2x}{x^2-1}\le 0$,

$\dfrac{5x}{(x-1)(x+1)}\le 0$, $x<-1,\ \ 0\le x<1$;

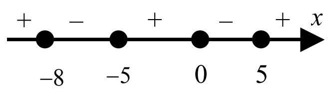
в) $(x^2+12x+35)(2x+10)(x^2+14x+49)>0$,



$(x+7)(x+5)(x+5)(x+7)^2>0$,

$(x+7)^3(x+5)^2>0$,

$-7<x<-5,\ \ -5<x$;

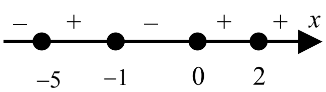


г) $4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$,

$\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}<0$,

$\dfrac{x^2+5x+3x}{x^2-25}<0$, $\dfrac{x(x+8)}{(x-5)(x+5)}<0$, $0<x<5,\ \ -8<x<-5$.

48.



$f(x)=x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)$;

а) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)>0$,

$-5<x<-1;\ \ 0<x<2,\ \ x>2$;

б) $x(x-2)^2(x+1)^3(x+5)<0$,

$x<-5,\ \ -1<x<0$;

в) $x(x-2)^2(x+1)^2(x+5)\ge 0$, $-5\le x\le -1,\ \ x\ge 0$;

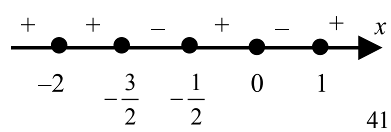
г) $x(x-2)^2(x+1)^2(x+5)\le 0$, $x\le -5,\ \ -1\le x\le 0$.

49.

$$f(x)=\frac{(x+2)^2(x-1)(2x+3)}{x(2x+1)}=\frac{2(x+2)^2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2x\left(x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(x+2)^2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

а) $f(x)>0$,



$x > 1,\ -\frac{1}{2} < x < 0,\ -2 < x < -\frac{3}{2},$

$x < -2$;

б) $f(x) < 0$, $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2},\ 0 < x < 1$;

в) $f(x) \ge 0$, $x \ge 1,\ 0 > x > -\frac{1}{2},\ x \le -\frac{3}{2}$.

(опечатка в ответе задачника).

г) $f(x) \le 0$, $0 < x \le 1,\ -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2},\ x = -2$.

50.

$x^2(x+2)(p-x) \ge 0$,

$x^2(x+2)(x-p) \le 0$.

При $p \ge 0$:

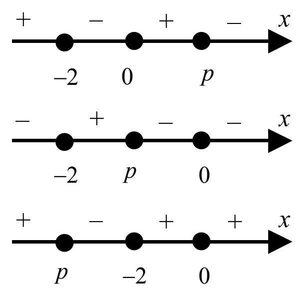
$-2 \le x \le p$;

При p $-2 < p < 0$,

$x \ge p,\ x \le -2$;

При $p \le -2$,

$p \le x \le -2,\ x = 0$;



а) $p = -2$,

б) $p = 1,\ p = -4$,

в) $p = 0,\ p = -3,\ p = -1$,

г) $p = 2\ p = -5$.

§ 3. Системы рациональных неравенств

51.

а) $\begin{cases} 20-3 < 10+10 \\ 7-10 > 5+11 \end{cases}$ — второе неравенство неверно.

Ответ: не является.

б) $\begin{cases} 10+5 < 35-8 \\ 12-5 > 15-11 \end{cases}$ — оба неравенства верны.

Ответ: является.

в) $\begin{cases} 10-30 < 40-40 \\ 20-1 > 25-3 \end{cases}$ — второе неравенство неверно.

Ответ: не является.

г) $\begin{cases} 8+5<15+2 \\ 19-10>5+3 \end{cases}$ — верно.

Ответ: является.

52.

$x=-2$ $\begin{cases} -6-22<0 \\ -4-1>3 \end{cases}$ — второе неверно.

$x=0$ $\begin{cases} 0-22<0 \\ 0-1>3 \end{cases}$ — второе неверно.

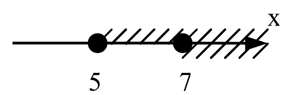
$x=5$ $\begin{cases} 15-22<0 \\ 10-1>3 \end{cases}$ — верно.

$x=6$ $\begin{cases} 18-22<0 \\ 12-1>3 \end{cases}$ — верно.

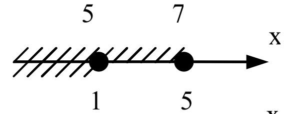
Ответ: Числа 5 и 6 являются решениями.

53.

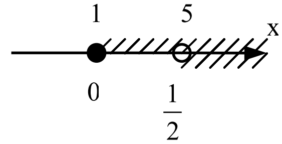
а) $\begin{cases} x>5 \\ x>7 \end{cases}$ x > 7



б) $\begin{cases} x\le 1 \\ x<5 \end{cases}$ x ≤ 1

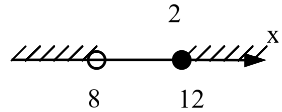


в) $\begin{cases} x\ge 0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$ x > $\frac{1}{2}$



г) $\begin{cases} x<8 \\ x\ge 12 \end{cases}$

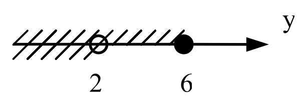
нет решений



54.

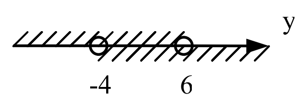
а) $\begin{cases} 7y\le 42 \\ 2y<4 \end{cases}$ $\begin{cases} y\le 6 \\ y<2 \end{cases}$

y < 2



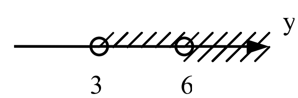
б) $\begin{cases} 8y<48 \\ -3y<12 \end{cases}$ $\begin{cases} y<6 \\ y>-4 \end{cases}$

–4 < y < 6

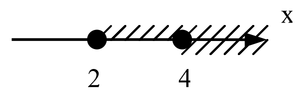


в) $\begin{cases} 3y-18>0 \\ 4y>12 \end{cases}$ $\begin{cases} y>6 \\ y>3 \end{cases}$

y > 6



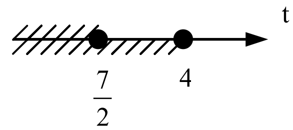
г) $\begin{cases} 7x-14 \ge 0 \\ 2x \ge 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge 4 \end{cases}$



x ≥ 4

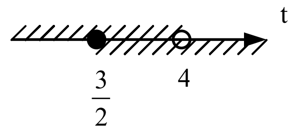
55.

а) $\begin{cases} 7-2t \ge 0 \\ 5t-20 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \le \dfrac{7}{2} \\ t < 4 \end{cases}$



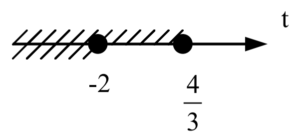
$t \le \dfrac{7}{2}$

б) $\begin{cases} 2t-8 < 0 \\ 2t-3 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t < 4 \\ t \ge \dfrac{3}{2} \end{cases}$



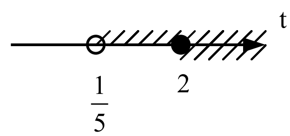
$\dfrac{3}{2} \le t < 4$

в) $\begin{cases} 2t+4 \le 0 \\ 4-3t > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \le -2 \\ t < \dfrac{4}{3} \end{cases}$



$t < -2$

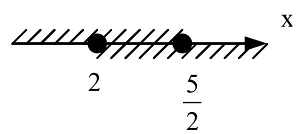
г) $\begin{cases} 5t-1 > 0 \\ 3t-6 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t > \dfrac{1}{5} \\ t \ge 2 \end{cases}$



$t \ge 2$

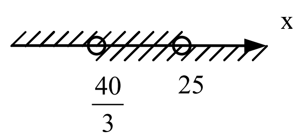
56.

а) $\begin{cases} 0{,}4x-1 \le 0 \\ 2{,}3x \ge 4{,}6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ x \ge 2 \end{cases}$



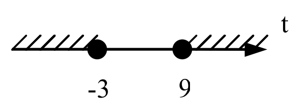
$2 \le x \le \dfrac{5}{2}$

б) $\begin{cases} 0{,}3x > 4 \\ 0{,}2x+1 < 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{40}{3} \\ x < 25 \end{cases}$

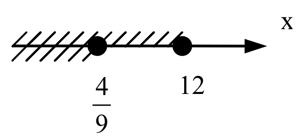


$\dfrac{40}{3} < x < 25$

в) $\begin{cases} 1{,}5t+4{,}5 \le 0 \\ \dfrac{1}{9}t \ge 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t \le -3 \\ t \ge 9 \end{cases}$



нет решений.

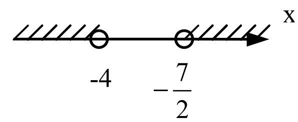


г) $\begin{cases} \frac{5}{6}z - 10 \le 0 \\ 3z \le 1\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 12 \\ x \le \frac{4}{9} \end{cases}$

$x \le \frac{4}{9}$

57.

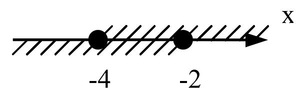
а) $\begin{cases} 5x - 7 > -14 + 3x \\ -4x + 5 > 29 + 2x \end{cases}$



$\begin{cases} 2x > -7 \\ 6x < -24 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x < -4 \end{cases}$

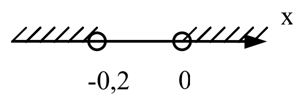
Решений нет

б) $\begin{cases} 3x + 3 \le 2x + 1 \\ 3x - 2 \le 4x + 2 \end{cases}$



$\begin{cases} x \le -2 \\ x \ge -4 \end{cases}$ $-4 \le x \le -2$

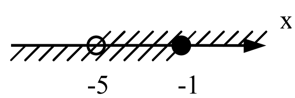
в) $\begin{cases} 1 - 12x < 3x + 1 \\ 2 - 6x > 4 + 4x \end{cases}$



$\begin{cases} 15x > 0 \\ 10x < -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x < -0{,}2 \end{cases}$

Решений нет

г) $\begin{cases} 4x + 2 \ge 5x + 3 \\ 2 - 3x < 7 - 2x \end{cases}$

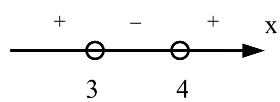


$\begin{cases} x \le -1 \\ x > -5 \end{cases}$

$-5 < x \le -1$

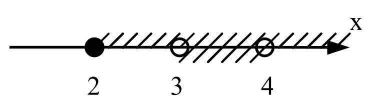
58.

а) $\begin{cases} 2x - 4 \ge 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases}$



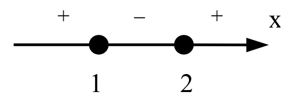
$x_1 = 3$, $x_2 = 4$

$\begin{cases} x \ge 2 \\ (x-3)(x-4) < 0 \end{cases}$



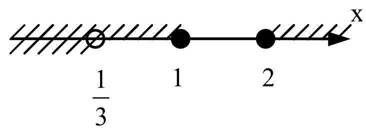
$\begin{cases} x \ge 2 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$ $3 < x < 4$

б) $\begin{cases} 3x-1<0 \\ x^2-3x+2\geq 0 \end{cases}$



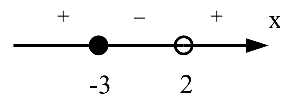
по теореме Виета: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$

$\begin{cases} x<\frac{1}{3} \\ (x-1)(x-2)\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<\frac{1}{3} \\ x\geq 2, x\leq 1 \end{cases}$



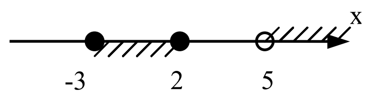
$x<\frac{1}{3}$

в) $\begin{cases} 5x-10>15 \\ x^2+x-6\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2>3 \\ x^2+x-6\leq 0 \end{cases}$



по теореме Виета: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$;

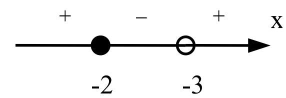
$\begin{cases} x-2>3 \\ (x-2)(x+3)\leq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x>5 \\ -3\leq x\leq 2 \end{cases}$

Решений нет

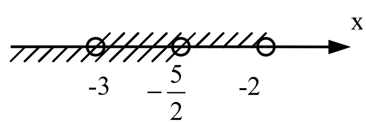
г) $\begin{cases} 3x-10>5x-5 \\ x^2+5x+6<0 \end{cases}$



$\begin{cases} 2x<-5 \\ x^2+5x+6<0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$;

$\begin{cases} x<-\frac{5}{2} \\ (x+2)(x+3)<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-\frac{5}{2} \\ -3<x<-2 \end{cases}$



$-3<x<-\frac{5}{2}$.

59.

а) $\begin{cases} 7x^2-x+3\leq 0 \\ 2x+3>7 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x^2-x+3\leq 0 \\ 2x+3>7 \end{cases}$ D = 1 – 83 = –81 < 0.

Первое неравенство не имеет решений (т.к. D = < 0). Следовательно, и вся система не имеет решений.

б) $\begin{cases} -3x^2+2x-1\leq 0 \\ 6x>3(x+1)-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2-2x+1\geq 0 \\ 6x>3x+2 \end{cases}$ $\frac{D}{4}$ = 4 – 12 < 0.

Следовательно, решениями первого неравенства будут все –∞ < x < +∞.

$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 3x > 2 \end{cases}$ $x > \frac{2}{3}$;

в) $\begin{cases} 5x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ 2(x+3) - (x-8) < 4 \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 1 - 5 = -4 < 0.$

Первое неравенство не имеет решений (т.к. D = < 0). Следовательно, и вся система не имеет решений.

г) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 2 < 0 \\ -3(6x-1) - 2x < x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 > 0 \\ -18x + 3 - 2x < x \end{cases}$ $D = 9 - 16 = -7 < 0.$

Поэтому решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$.

$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 21x > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x > \frac{1}{7} \end{cases}$ $x > \frac{1}{7}$.

60.

а) $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ x^2 < 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 + x + 2 > 0 \\ |x| < 3 \end{cases}$ $D = 1 - 24 = -23 < 0.$

Решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$.

$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -3 < x < 3 \end{cases}$ $-3 < x < 3$;

б) $\begin{cases} -7x^2 + 5x - 2 > 0 \\ x^2 \le 25 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x^2 - 5x + 2 < 0 \\ |x| \le 5 \end{cases}$ $D = 25 - 56 < 0.$

Первое неравенство не имеет решений, значит решений не имеет и вся система.

в) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 10 > 0 \\ x^2 \ge 16 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 10 > 0 \\ |x| \ge 4 \end{cases}$ $D = 25 - 80 = -55 < 0.$

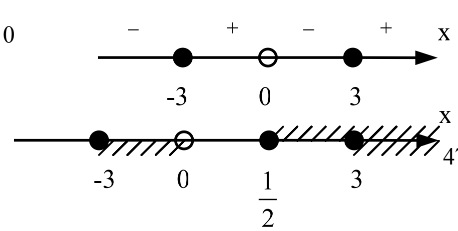
Решениями первого неравенства будут все $-\infty < x < +\infty$. $x \ge 4, x \le -4$

г) $\begin{cases} -5x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 > 81 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2 - x + 1 < 0 \\ x^2 > 81 \end{cases}$ $D = 1 - 20 = -19 < 0.$

Первое неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся система решений не имеет.

61.

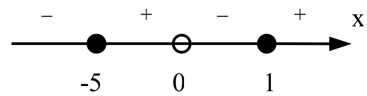
а) $\begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x} \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{(x-3)(x+3)}{x} \ge 0 \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} x \ge 3, -3 \le x \le 0 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

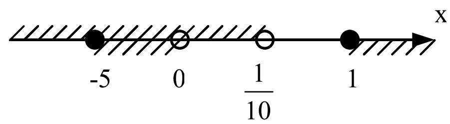
$x \ge 3$

б) $\begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x} \ge 0 \\ 10x - 1 < 0 \end{cases}$



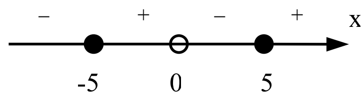
$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)(x-1)}{x} \ge 0 \\ 10x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1, -5 \le x \le 0 \\ x < \dfrac{1}{10} \end{cases}$$



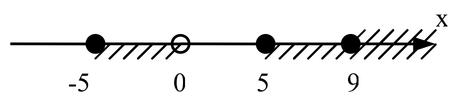
$-5 \le x < 0$

в) $\begin{cases} \dfrac{25 - x^2}{x} \le 0 \\ 5x - 10 \ge 35 \end{cases}$



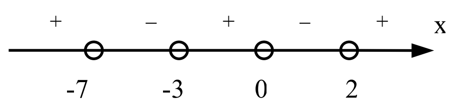
$$\begin{cases} \dfrac{(5-x)(5+x)}{x} \le 0 \\ 5x \ge 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+5)}{x} \ge 0 \\ x \ge 9 \end{cases}$$



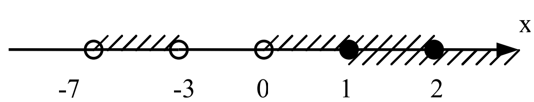
$x \ge 9$

г) $\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ 20x \ge 20 \end{cases}$



$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)} < 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

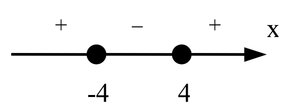
$$\begin{cases} 0 < x < 2, -7 < x < -3 \\ x \ge 1 \end{cases}$$



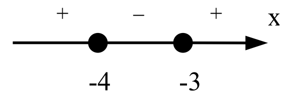
$1 \le x < 2$.

62.

а) $\begin{cases} x^2 - 16 \ge 0 \\ x^2 - 7x + 12 \ge 0 \end{cases}$

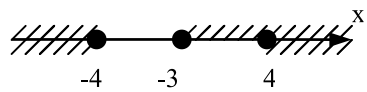


$$\begin{cases}(x-4)(x+4)\geq 0\\ x^2-7x+12\geq 0\end{cases}$$



$x_1=-3 \quad x_2=-4$

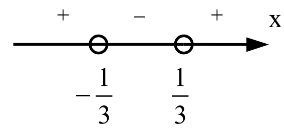
$$\begin{cases}x\geq 4, x\leq -4\\ (x-4)(x+4)\geq 0\end{cases}$$



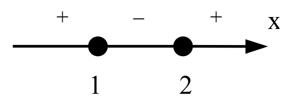
$$\begin{cases}x\geq 4, x\leq -4\\ x\geq -3, x\leq -4\end{cases}$$

$x\leq -4, x\geq 4$

б) $\begin{cases}9x^2-1<0\\ x^2-3x+2\geq 0\end{cases}$

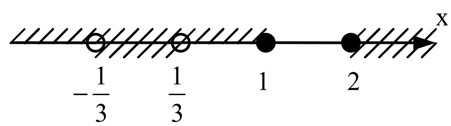


$$\begin{cases}3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)<0\\ x^2-3x+2\geq 0\end{cases}$$



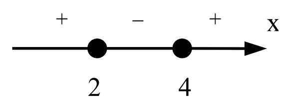
$x_1=1 \quad , \; x_2=2$

$$\begin{cases}-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}\\ x\geq 2, x\leq 1\end{cases}$$



$-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

в) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2\geq 36\end{cases}$

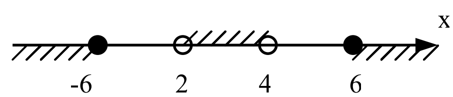


по теореме Виета:

$x_1=4$

$x_1=2$

$\begin{cases}(x-2)(x-4)<0\\ |x|\geq 6\end{cases}$ $\begin{cases}2<x<4\\ x\geq 6, x\leq -6\end{cases}$



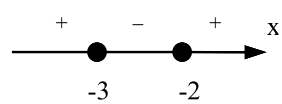
Решений нет

г) $\begin{cases}49x^2-1<0\\ x^2+5x+6\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}(7x)^2<1\\ x^2+5x+6\geq 0\end{cases}$

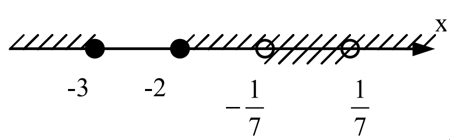
по теореме Виета:

$x_1=-2$

$x_1=-3$



$$\begin{cases}|7x|<1\\ (x+2)(x+3)\geq 0\end{cases}$$

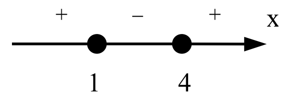


$$\begin{cases} -\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7} \\ x \geq -2; x \leq -3 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}$$

63.

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$



по теореме Виета:

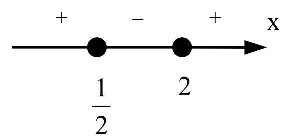
$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

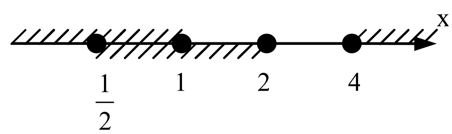
D = 25 – 16 = 9.

$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

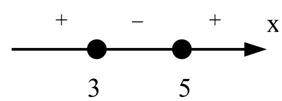


$\begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 4, x \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$



$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

б) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases}$



по теореме Виета:

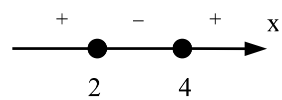
$x_1 = 5$

$x_2 = 3$

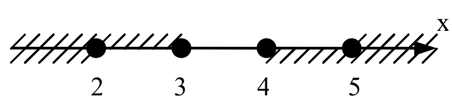
по теореме Виета:

$x_1 = 4$

$x_2 = 2$

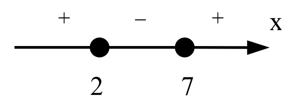


$\begin{cases} (x-3)(x-5) \geq 0 \\ (x-2)(x-4) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 5, x \leq 3 \\ x \geq 4, x \leq 2 \end{cases}$



$x \geq 5, x \leq 2$

в) $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 7x - 8 \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 7x - 8 \le 0 \end{cases}$

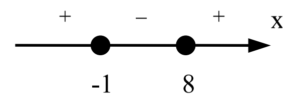


по теореме Виета:

$x_1 = 7$

$x_2 = 2$

по теореме Виета:

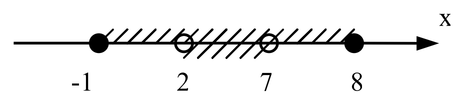


$x_1 = 8$

$x_2 = -1$

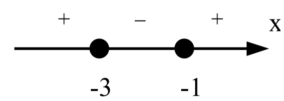
$\begin{cases} (x-7)(x-2) < 0 \\ (x+1)(x-8) \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 < x < 7 \\ -1 \le x \le 8 \end{cases}$



$2 < x < 7$

г) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \le 0 \\ 2x^2 + 5x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \le 0 \\ 2x\left(x + \frac{5}{2}\right) < 0 \end{cases}$

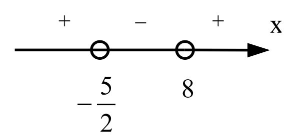


по теореме Виета:

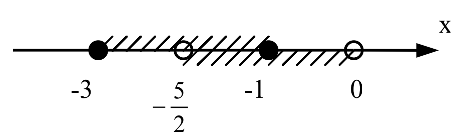
$x_1 = -1$

$x_2 = -3$

$\begin{cases} (x+1)(x+3) \le 0 \\ x\left(x + \frac{5}{2}\right) < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} -3 \le x \le -1 \\ -\frac{5}{2} < x < 0 \end{cases}$



$-\frac{5}{2} < x \le -1$

64.

а) $-2 \le 3x \le 6$, $-\frac{2}{3} \le x \le 2$; б) $-1 < \frac{x}{6} < 1$, $-6 < x < 6$;

в) $6 < -6x < 12$, $-1 > x > -2$; г) $0 \le \frac{x}{4} \le 2$, $0 \le x \le 8$.

65.

а) $3 < x + 1 < 8$, $2 < x < 7$;

б) $-2 \le 1 - 2x \le 2$, $-3 \le -2x \le 1$, $\frac{3}{2} \ge x \ge -\frac{1}{2}$;

в) $-3<\frac{5x+2}{2}<1$, $-6<5x+2<2$, $-\frac{8}{5}<x<0$;

г) $-1\le\frac{6-2x}{4}\le 0$, $-4\le 6-2x\le 0$, $5\ge x\ge 3$.

66.

а) $-6<3-5x<6$, $-9<-5x<3$, $\frac{9}{5}>x>\frac{3}{5}$;

б) $-4\le\frac{2x+1}{3}\le 0$, $-12\le 2x+1\le 0$, $-\frac{11}{2}\le x\le -\frac{1}{2}$.

67.

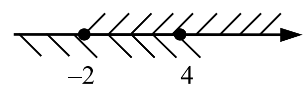
$0<1+4x<17$, $-\frac{1}{4}<x<4$.

Наименьшее целое – 0; Наибольшее целое – 3.

68.

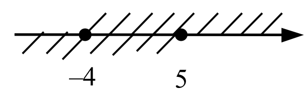
а) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$

$\begin{cases}12-3x\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 4\\ x\ge -2\end{cases}$ $-2\le x\le 4$;



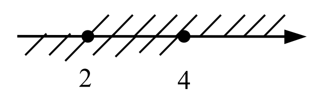
б) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{x+4}$

$\begin{cases}15-3x\ge 0\\ x+4\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 5\\ x\ge -4\end{cases}$ $-4\le x\le 5$;



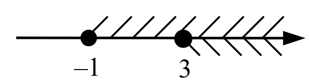
в) $y=\sqrt{15x-30}+\sqrt{4-x}$

$\begin{cases}15x-30\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2\\ x\le 4\end{cases}$ $2\le x\le 4$;



г) $y=\sqrt{6x-18}+\sqrt{x+1}$,

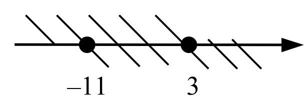
$\begin{cases}6x-18\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 3\\ x\ge -1\end{cases}$ $x\ge 3$.



69.

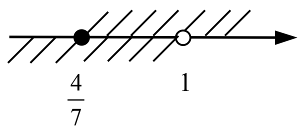
а) $\begin{cases}7x+3\ge 5(x-4)+1\\ 4x+1\le 43-3(7+x)\end{cases}$

$\begin{cases}7x+3\ge 5x-19\\ 4x+1\le 43-3(7+x)\end{cases}$ $\begin{cases}2x\ge -22\\ 7x\le 21\end{cases}$



$\begin{cases}x\ge -11\\ x\le 3\end{cases}$

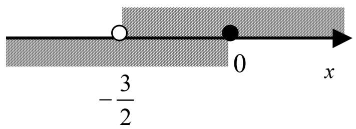
$-11\le x\le 3$



б) $\begin{cases} 3(x+8) \ge 4(7-x) \\ (x+2)(x-5) > (x+3)(x-4) \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+24 \ge 28-4x \\ x^2-3x-10 > x^2-x-12 \end{cases}$

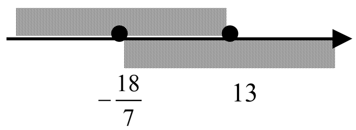
$\begin{cases} 7x \ge 4 \\ 2x < 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \frac{4}{7} \\ x < 1 \end{cases}$ $\frac{4}{7} \le x < 1$



в) $\begin{cases} 5(x+1)-x > 2x+2 \\ 4(x+1)-2 \le 2(2x+1)-x \end{cases}$

$\begin{cases} 4x+5 > 2x+2 \\ 4x+2-2 \le 3x+2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > 3 \\ x \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x \le 0 \end{cases}$ $-\frac{3}{2} < x \le 0$



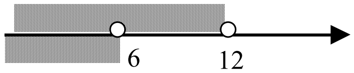
г) $\begin{cases} (x+2)(x-6) \le (x+2)(x+1)+4 \\ 2(6x-1) \ge 7(2x-4) \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4x-12 > x^2+3x+6 \\ 12x-2 \ge 14x-28 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x \ge -18 \\ 2x \le 26 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -\frac{18}{7} \\ x \le 13 \end{cases}$ $-\frac{18}{7} \le x \le 13$.

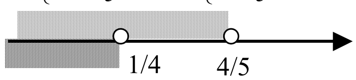
70.

а) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{4}<7 \\ 1-\frac{x}{6}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4x+3x}{12}<7 \\ \frac{6-x}{6}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x<84 \\ 6-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<12 \\ x<6 \end{cases}$



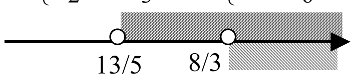
$x<6$;

б) $\begin{cases} 1-\frac{x}{4}>x \\ x-\frac{x-4}{5}>1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4-x}{4}>x \\ \frac{5x-x-4}{5}>1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4-x>4x \\ 4x-4>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x<\frac{4}{5} \\ x>\frac{1}{4} \end{cases}$



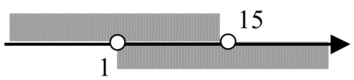
$\frac{1}{4}<x<\frac{4}{5}$;

в) $\begin{cases} x-\frac{x}{4}\geq 2 \\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4x-x}{4}\geq 2 \\ \frac{3x-3+2x-4}{6}>1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x\geq 8 \\ 5x-7>6 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq\frac{8}{3} \\ x>\frac{13}{5} \end{cases}$



$x\geq\frac{8}{3}$;

г) $\begin{cases} x-\frac{x-1}{2}>1 \\ \frac{x}{3}<5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2x-x+1}{2}>1 \\ x<15 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1>2 \\ x<15 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x<15 \end{cases}$



$1<x<15$.

71.

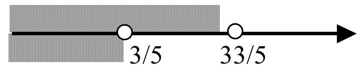
а)

$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\geq\frac{x-3}{4}-x \\ 1-x>0{,}5x-4 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x-6-4x+8 \ge 3x-9-12x \\ 1{,}5x < 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 11x \ge -11 \\ x < \dfrac{10}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -1 \\ x < \dfrac{10}{3} \end{cases}$ $-1 \le x < \dfrac{10}{3}$;

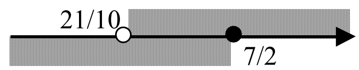
б) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{6}+\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-8}{2} > x\text{-}1 \\ 2-2x > 0{,}5x+0{,}5 \end{cases}$ | Умножим на 6

$\begin{cases} 2x-1+2x+4-3x+24 > 6x-6 \\ 2{,}5x < 1{,}5 \end{cases}$

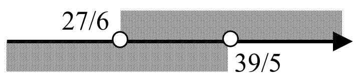


$\begin{cases} 5x < 33 \\ x < \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x < \dfrac{33}{5} \\ x < \dfrac{3}{5} \end{cases}$ $x < \dfrac{3}{5}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12} \\ \dfrac{1-3x}{2}-\dfrac{1-4x}{3} \ge \dfrac{x}{6}-1 \end{cases}$



$\begin{cases} 10x+14-9x < 11x-7 \\ 3-9x-2+8x \ge x-6 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x > 21 \\ 2x \le 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 21 \\ x \le \dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\dfrac{21}{10} < x \le \dfrac{7}{2}$;



г) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2}-\dfrac{x-1}{3} \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2}-\dfrac{x+2}{3} \end{cases}$

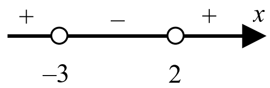
$\begin{cases} 16x+2 > 12x+27-2x+2 \\ 10x-4 < 6x+39-2x-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x > 27 \\ 6x < 39 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{27}{6} \\ x < \dfrac{39}{5} \end{cases}$

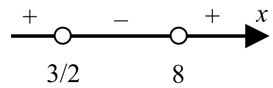
$\dfrac{27}{6} < x < \dfrac{39}{6} \Leftrightarrow 4{,}5 < x < 6{,}5$.

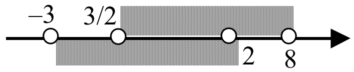
72.

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2} < 1 \\ \dfrac{3x+2}{2x-3} > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x+1-x+2}{x-2} < 0 \\ \dfrac{3x+2-4x+6}{2x-3} > 0 \end{cases}$

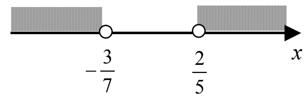
$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 0 \\ \dfrac{-x+8}{2x-3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 0 \\ \dfrac{x-8}{x-\frac{3}{2}} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 2 \\ \dfrac{3}{2} < x < 8 \end{cases}$ $\dfrac{3}{2} < x < 2$



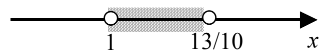


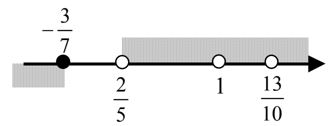


б) $\begin{cases} \dfrac{7-3x}{2-5x} \le 2 \\ \dfrac{2x+1}{3x-3} > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{7-3x-4+10x}{2-5x} \le 0 \\ \dfrac{2x+1-12x+12}{3x-3} > 0 \end{cases}$

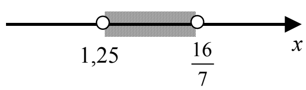


$\begin{cases} \dfrac{7x+3}{2-5x} \le 0 \\ \dfrac{-10x+13}{3x-3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+\frac{3}{7}}{x-\frac{2}{5}} \ge 0 \\ \dfrac{x-\frac{13}{10}}{x-1} < 0 \end{cases}$



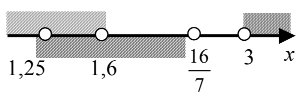


$\begin{cases} x < -\dfrac{3}{7}, \quad x > \dfrac{2}{5} \\ 1 < x < 1{,}3 \end{cases}$ $1 < x < 1{,}3$;



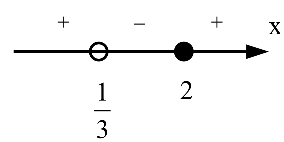
в) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3-x} < 2 \\ \dfrac{5x+1}{4x-5} > 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3x-2-6+2x}{3-x} < 0 \\ \dfrac{5x+1-12x+15}{4x-5} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{5x-8}{3-x} < 0 \\ \dfrac{-7x+16}{4x-5} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-1{,}6}{x-3} > 0 \\ \dfrac{x-\frac{16}{7}}{x-1{,}25} < 0 \end{cases}$

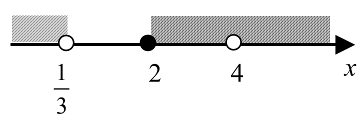


$\begin{cases} x > 3, \quad x < 1{,}6 \\ 1{,}25 < x < \dfrac{16}{7} \end{cases}$ $1{,}25 < x < 1{,}6$;

г) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3x-1} \le 1 \\ \dfrac{2x+5}{x-4} \ge 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+3-3x+1}{3x-1} \le 0 \\ \dfrac{2x+5-2x+8}{x-4} \ge 0 \end{cases}$



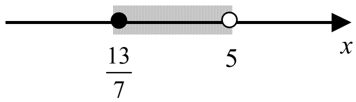
$\begin{cases} \dfrac{-2x+4}{3x-1} \le 0 \\ \dfrac{13}{x-4} \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-\frac{1}{3}} \ge 0 \\ x-4 > 0 \end{cases}$



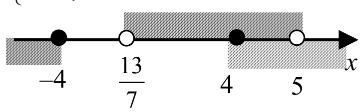
$\begin{cases} x \ge 2, \quad x < \dfrac{1}{3} \\ x > 4 \end{cases}$ $\quad x > 4$.

73.

а) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{5-x} \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 \ge 16 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{6x-8-5+x}{2(5-x)} \ge 0 \\ |x| \ge 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{7x-13}{5-x} \ge 0 \\ x \ge 4, x \le -4 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-\frac{13}{7}}{x-5} \le 0 \\ x \ge 4, x \le -4 \end{cases}$

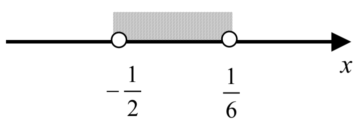


$\begin{cases} \dfrac{13}{7} < x < 5 \\ x \ge 4, x \le -4 \end{cases}$

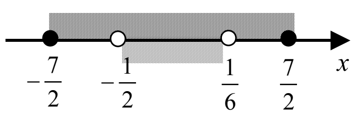


$4 \le x < 5$;

б) $\begin{cases} 4x^2 \le 49 \\ \dfrac{2x+5}{1-6x} > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} |2x| \le 7 \\ \dfrac{2x+5-1+6x}{1-6x} > 0 \end{cases}$

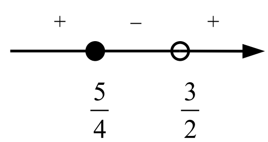


$\begin{cases} -7 \le 2x \le 7 \\ \dfrac{8x+4}{1-6x} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{7}{2} \le x \le \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{6}} < 0 \end{cases}$



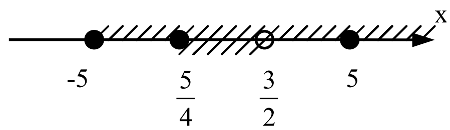
$\begin{cases} -\dfrac{7}{2} \le x \le \dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{6} \end{cases}$ $\quad -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{6}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3-2x} \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 \le 25 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2(x-1)-3+2x}{2(3-2x)} \ge 0 \\ |x| \le 5 \end{cases}$

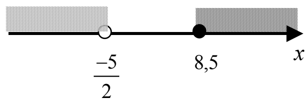


$\begin{cases} \dfrac{4x-5}{2(3-2x)} \ge 0 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-\frac{5}{4}}{x-\frac{3}{2}} \le 0 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{5}{4} \le x < \frac{3}{2} \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$

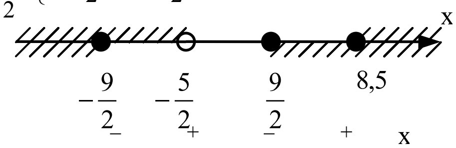


$\frac{5}{4} \le x < \frac{3}{2}$;



г) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{2x+5} \ge \dfrac{3}{2} \\ 4x^2 \ge 81 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{8x-2-6x-15}{2(2x+5)} \ge 0 \\ x^2 \ge \dfrac{81}{4} \end{cases}$

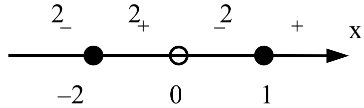
$\begin{cases} \dfrac{2x-17}{4\left(x+\frac{5}{2}\right)} \ge 0 \\ |x| \ge \dfrac{9}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-8,5}{x+\frac{5}{2}} \ge 0 \\ x \ge \frac{9}{2}, x \le -\frac{9}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 8,5; x < -\frac{5}{2} \\ x \ge \frac{9}{2}, x \le -\frac{9}{2} \end{cases}$



$x \ge 8,5$; $x \le -\frac{9}{2}$

74.

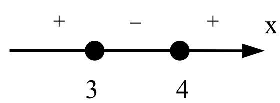
а) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{2x} \ge 0 \\ x^2 - 7x + 12 \ge 0 \end{cases}$



по теореме Виета:

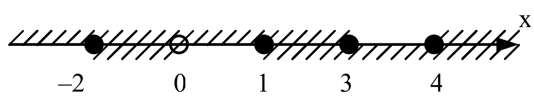
$x_1 = 4$

$x_2 = 3$



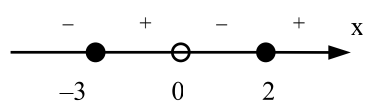
$\begin{cases} x \ge 1; -2 \le x < 0 \\ (x-3)(x-4) \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 1; -2 \le x < 0 \\ x \ge 4, x \le 3 \end{cases}$



$-2 \le x < 0$; $1 \le x \le 3$; $x \ge 4$

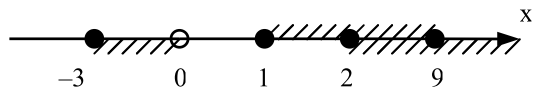
б) $\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \le 0 \\ \dfrac{(x+3)(x-2)}{2x} \ge 0 \end{cases}$



по теореме Виета:

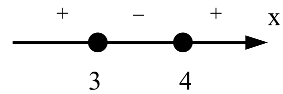
$x_1 = 9$
$x_2 = 1$

$$\begin{cases}(x-1)(x-9) \le 0 \\ x \ge 2; -3 \le x < 0\end{cases}$$

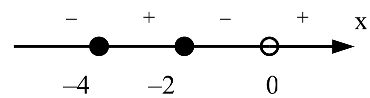


$$\begin{cases}1 \le x \le 9 \\ x \ge 2; -3 \le x < 0\end{cases}$$

$2 \le x \le 9$

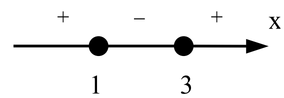


в) $\begin{cases}x^2 - 4x + 3 \le 0 \\ \dfrac{(x+2)(x+4)}{5x} \le 0\end{cases}$



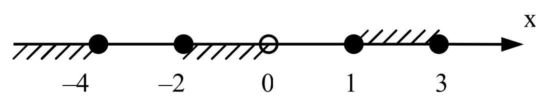
по теореме Виета:

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$



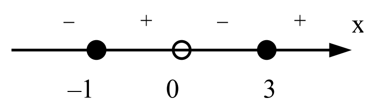
$$\begin{cases}(x-1)(x-3) \le 0 \\ -2 \le x < 0, x \le -4\end{cases}$$

$$\begin{cases}1 \le x \le 3 \\ x \le -4; -2 \le x < 0\end{cases}$$



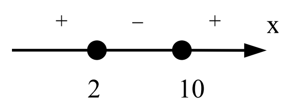
Нет решений.

г) $\begin{cases}x^2 - 12x + 20 \le 0 \\ \dfrac{(x-3)(x+1)}{3x} \le 0\end{cases}$



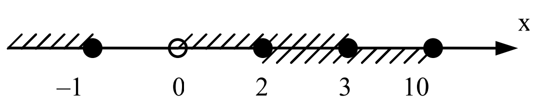
по теореме Виета:

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$



$$\begin{cases}(x-2)(x-10) \le 0 \\ x \le -1, 0 < x \le 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2 \le x \le 10 \\ x \le -1; 0 < x \le 3\end{cases}$$

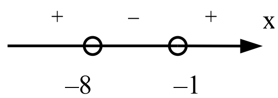


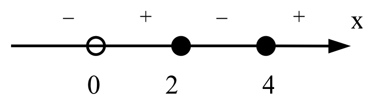
$2 \le x \le 3$

75.

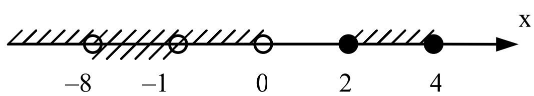
а) $\begin{cases} \dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2 \\ x+\dfrac{8}{x} \le 6 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{2x^2+18x-4-2x^2-18x-16}{x^2+9x+8} > 0 \\ \dfrac{x^2+8-6x}{x} \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{-20}{x^2+9x+8} > 0 \\ \dfrac{x^2+8-6x}{x} \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{20}{(x+8)(x+1)} < 0 \\ \dfrac{(x-2)(x-4)}{x} \le 0 \end{cases}$





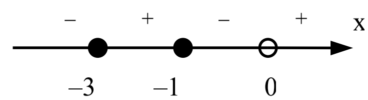
$\begin{cases} -8 < x < 1 \\ x < 0; 2 \le x \le 4 \end{cases}$



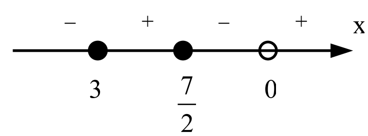
$-8 < x < -1$ В ответе задачника ошибка.

б) $\begin{cases} x+\dfrac{3}{x} \le -4 \\ \dfrac{x-4}{x-3} > \dfrac{x-3}{x-4} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x} \le 0 \\ \dfrac{(x-4)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-4)} > 0 \end{cases}$

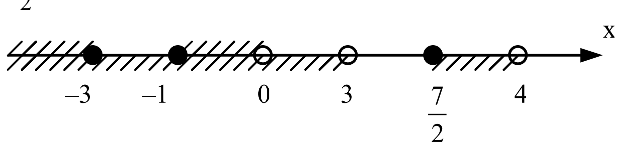
$\begin{cases} \dfrac{(x+3)(x+1)}{x} \le 0 \\ \dfrac{(x-4-x+3)(x-4+x-3)}{(x-3)(x-4)} > 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x \le -3, -1 \le x < 0 \\ \dfrac{x-\frac{7}{2}}{(x-3)(x-4)} < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x \le -3, -1 \le x < 0 \\ x < +3, \dfrac{7}{2} \le x < +4 \end{cases}$



$x \le -3, -1 \le x < 0$

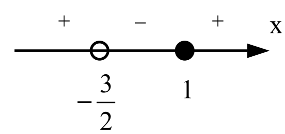
в) $\begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x+3} \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2(x-1) + (x-1)}{2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)} \le 0 \\ \dfrac{(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+2) - 3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \end{cases}$$

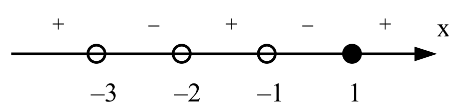
$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{2\left(x + \dfrac{3}{2}\right)} \le 0 \\ \dfrac{-x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \end{cases}$$

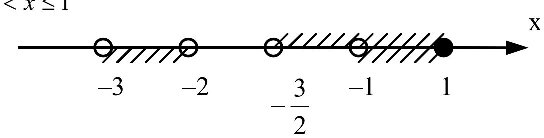
Разделим первое неравенство на положительное выражение $\dfrac{x^2+1}{2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x + \dfrac{3}{2}} \le 0 \\ \dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2} < x \le 1 \\ -3 < x < -2,\ -1 < x \le 1 \end{cases}$$



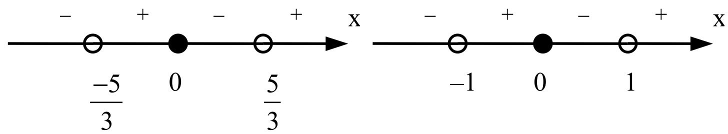


$-1 < x \le 1$ — ошибка в ответе задачника.

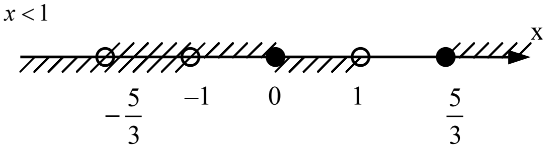
г) $\begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \ge 0 \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{1-2x}{x^2-1} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x(x^2+x+1)}{(3x-5)(3x+5)} \ge 0 \\ \dfrac{x - 1 + 2x + 2 - 1 + 2x}{x^2 - 1} \le 0 \end{cases}$

Разделим первое неравенство на положительное выражение $x^2 + x + 1$ (оно положительно, т.к. D = 1 – 4 =–3 < 0).

$$\begin{cases} \dfrac{x}{(3x-5)(3x+5)} \ge 0 \\ \dfrac{5x}{(x-1)(x+1)} \le 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > \dfrac{5}{3},\ -\dfrac{5}{3} < x \le 0 \\ x < -1,\ 0 \le x < 1 \end{cases}$$

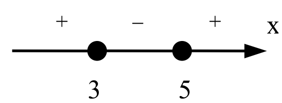


$x = 0,\ \ -\dfrac{5}{3} < x < -1$

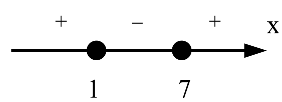
76.

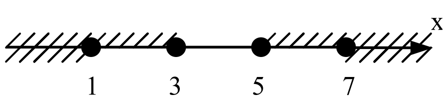
Выражение определено, если стоящее под корнем выражения неотрицательны.

а) $\begin{cases} (x-3)(x-5) \ge 0 \\ (1-x)(7-x) \ge 0 \end{cases}$

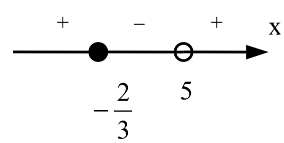


$\begin{cases} x \ge 5,\ x \le 3 \\ x \ge 7,\ x \le 1 \end{cases}$

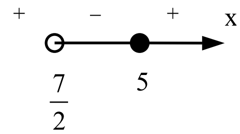




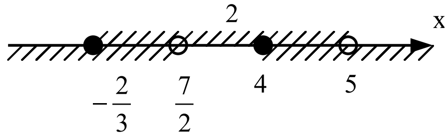
б) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}} + \sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$



$$\begin{cases}\dfrac{3x+2}{5-x}\ge 0\\ \dfrac{4-x}{7-2x}\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x+\frac{2}{3}}{x-5}\le 0\\ \dfrac{x-4}{x-\frac{7}{2}}\ge 0\end{cases}$$

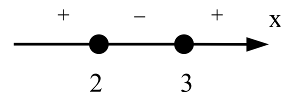


$$\begin{cases}-\dfrac{2}{3}\le x<5\\ x\ge 4,\ x<\dfrac{7}{2}\end{cases}$$



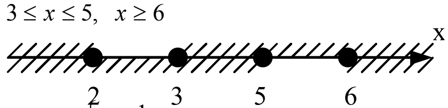
$-\dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{7}{2},\ \ 4\le x<5$

в) $\begin{cases}(x-2)(x-3)\ge 0\\ (5-x)(6-x)\ge 0\end{cases}$

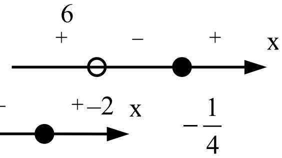


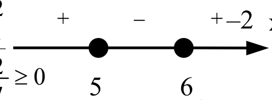
$\begin{cases}x\ge 3,\ x\le 2\\ x\ge 6,\ x\le 5\end{cases}$

$x\le 2,\ \ 3\le x\le 5,\ \ x\ge 6$

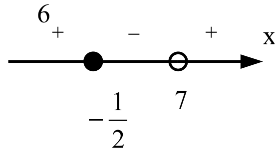


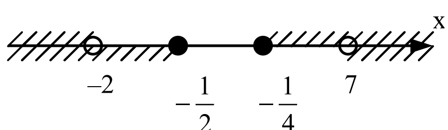
г) $\begin{cases}\dfrac{4x+1}{x+2}\ge 0\\ \dfrac{2x+1}{x-7}\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{4}}{x+2}\ge 0\\ \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-7}\ge 0\end{cases}$





$$\begin{cases}x<-2,\ x\ge -\dfrac{1}{4}\\ x\le -\dfrac{1}{2},\ x>7\end{cases}$$

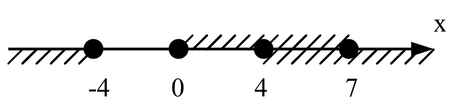




$x>7,\ \ x<-2$

77.

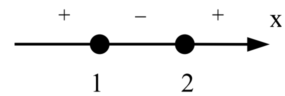
а) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ 7x-x^2\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}x^2\ge 16\\ x(7-x)\ge 0\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge 4,\ x\le -4\\ 0\le x\le 7\end{cases}$



$4 \le x \le 7$

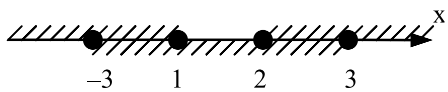
б) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ 9 - x^2 \ge 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$



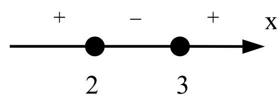
$\begin{cases} (x-2)(x-1) \ge 0 \\ x^2 \le 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 1, \quad x \ge 2 \\ |x| \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \quad x \ge 2 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$ $\qquad -3 \le x \le 1, \; 2 \le x \le 3$

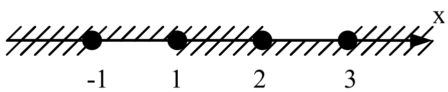


в) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0 \\ x^2 - 1 \ge 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$



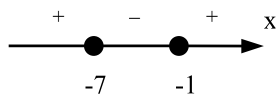
$\begin{cases} (x-2)(x-3) \ge 0 \\ x^2 \ge 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \ge 3, \quad x \le 2 \\ x \ge 1, \quad x \le -1 \end{cases}$



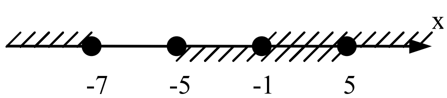
$x \le -1, \; 1 \le x \le 2, \; x \ge 3$

г) $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 \ge 0 \\ 25 - x^2 \ge 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = -1$, $x_2 = -7$



$\begin{cases} (x+1)(x+7) \ge 0 \\ x^2 \le 25 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \ge -1, \quad x \le -7 \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$



$-1 \le x \le 5$

78.

а) $\begin{cases}-\frac{13}{4}+\frac{3x}{4}\le\frac{x-1}{4}-\frac{7}{8}\\ 2\ge\frac{x}{4}+\frac{3-2x}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3x-x+1}{4}\le\frac{26-7}{8}\\ \frac{3x+12-8x}{12}\le 2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{2x+1}{4}\le\frac{19}{8}\\ \frac{-5x-12}{12}\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}2x+1\le\frac{19}{2}\\ -5x-12\le 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\le\frac{17}{4}\\ x\ge-\frac{12}{5}\end{cases}$ $-\frac{12}{5}\le x\le\frac{17}{4}$. Серединой промежутка

[a, b] будет число $\frac{a+b}{2}$. В данном случае $\frac{\frac{17}{4}-\frac{12}{5}}{2}=\frac{37}{40}$

б) $\begin{cases}\frac{3}{5}+\frac{3x-1}{10}\ge\frac{2-x}{5}-0{,}3\\ 1\ge\frac{x-1}{3}+0{,}5(x+3)\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{6+3x-1-4+2x+3}{10}\ge 0\\ \frac{x-1+1{,}5x+4{,}5-3}{3}\le 0\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{5x+4}{10}\ge 0\\ \frac{2{,}5x+0{,}5}{3}\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}5x\ge -4\\ 2{,}5x\le -0{,}5\end{cases}$ $-\frac{4}{5}\le x\le-\frac{1}{5}$. Середина [a, b] – это $\frac{a+b}{2}$.

$\frac{-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}}{2}=-\frac{1}{2}$.

79.

$\begin{cases}13-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}<\frac{7-8x}{2}\\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\frac{5(2x-6)}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{130-3+7x+5x+5-35+40x}{10}<0\\ 21x-35+68-4x-18+5x-15>0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{52x+97}{10}<0\\ 22x>0\end{cases}$ $\begin{cases}52x+97<0\\ 11x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<-\frac{97}{52}\\ x>0\end{cases}$ Решений нет.

80.

$\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{3x-1}{6}<\frac{2-x}{12}-\frac{x+1}{2}+3\\ x>\frac{5x-4}{10}-\frac{3x-1}{5}-2{,}5\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{4x-6x+2-2+x+6x+6-36}{12}<0\\ \frac{5x-4-6x+2-25-10x}{10}<0\end{cases}$

$\begin{cases} \frac{5x-30}{12} < 0 \\ \frac{-11x-27}{10} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x < 30 \\ 11x > -27 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 6 \\ x > -\frac{27}{11} \end{cases}$ $-\frac{27}{11} < x < 6$.

6 – наибольшее целое, удовлетворяющее системе.

81.

а) $\begin{cases} 0{,}2x > -1 \\ -\frac{x}{3} \geq 1 \end{cases}$ $-5 < x \leq -3$.

Целые числа: –4, -3.

б) $\begin{cases} 1-0{,}5x \geq 0 \\ -\frac{x+5}{5} < -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}5x \leq 1 \\ x+5 > 5 \end{cases}$ $0 < x \leq 2$; 1, 2

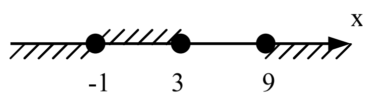
в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3x-3-2x}{6} < 0 \\ \frac{5x+5-2x}{10} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-3}{6} < 0 \\ \frac{3x+5}{2} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3 \\ x \geq -\frac{5}{3} \end{cases}$

$-\frac{5}{3} \leq x < 3$ –1, 0, 1, 2.

г) $\begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5} \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5x-5-4x}{20} \leq 0 \\ \frac{7x-3x-12}{21} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-5}{20} \leq 0 \\ \frac{4x-12}{21} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 5 \\ x > 3 \end{cases}$ $3 < x \leq 5$; 4, 5.

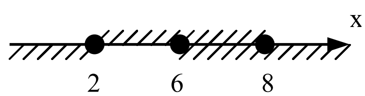
82.

а) $\begin{cases} |x-1| \leq 2 \\ |x-4| \geq 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x-1 \leq 2 \\ x-4 \geq 5, \quad x-4 \leq -5 \end{cases}$



$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 9, \quad x \leq -1 \end{cases}$ $x = -1$;

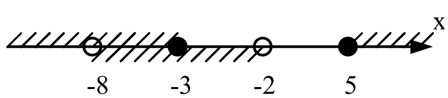
б) $\begin{cases} |x-5| \leq 3 \\ |x-4| \geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 \leq x-5 \leq 3 \\ x-4 \geq 2, \quad x-4 \leq -2 \end{cases}$



$\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ x \geq 6, \quad x \leq 2 \end{cases}$ $x = 2, \quad 6 \leq x \leq 8$;

в) $\begin{cases} |x+5| < 3 \\ |x-1| \geq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x+5 < 3 \\ x-1 \geq 4, \quad x-1 \leq -4 \end{cases}$

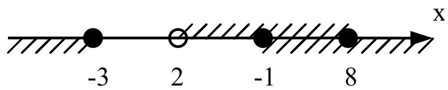
$\begin{cases} -8 < x < -2 \\ x \geq 5, \quad x \leq -3 \end{cases}$



$-8 < x \leq -3$

г) $\begin{cases} |x-3|<5 \\ |x+2|\geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -5\leq x-3\leq 5 \\ x+2\geq 1, \quad x+2\leq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2<x<8 \\ x\geq -1, \quad x\leq -3 \end{cases}$

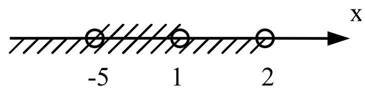


$-1\leq x<8$

83.

а) $\begin{cases} |2x+4|<6 \\ 3-2x>-1 \end{cases}$ $\begin{cases} -6\leq 2x+4\leq 6 \\ 4>2x \end{cases}$

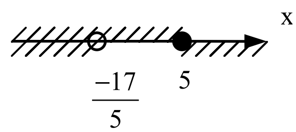
$\begin{cases} -10<2x<2 \\ x<2 \end{cases}$ $\begin{cases} -5<x<1 \\ x<2 \end{cases}$



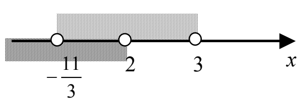
$-5<x<-1$

б) $\begin{cases} 5x+4<29 \\ |5x-4|\geq 21 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x<25 \\ 5x-4\geq 21, \quad 5x-4\leq -21 \end{cases}$

$\begin{cases} x<5 \\ x\geq 5, \quad x\leq -\dfrac{17}{5} \end{cases}$



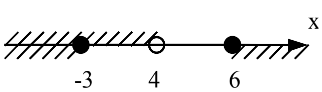
$x\leq -\dfrac{17}{5}$



в) $\begin{cases} |3x+1|<10 \\ 4x+3<11 \end{cases}$ $\begin{cases} -10<3x+1<10 \\ 4x<8 \end{cases}$

$\begin{cases} -11<3x<9 \\ x<2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{11}{3}<x<3 \\ x<2 \end{cases}$

$-\dfrac{11}{3}<x<-2$;

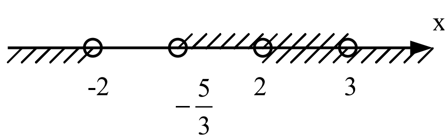


г) $\begin{cases} 2x-1<7 \\ |2x-3|\geq 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x<8 \\ 2x-3\geq 9, \quad 2x-3\leq -9 \end{cases}$

$\begin{cases} x<4 \\ x\geq 6, \quad x\leq -3 \end{cases}$ $x\leq -3$.

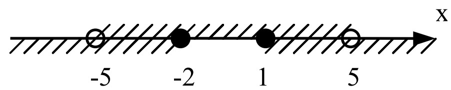
84.

а) $\begin{cases} |3x-2|<7 \\ x^2>4 \end{cases}$ $\begin{cases} -7<3x-2<7 \\ |x|>2 \end{cases}$ $\begin{cases} -5<3x<9 \\ x>2, \quad x<-2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{5}{3}<x<3 \\ x>2, \quad x<-2 \end{cases}$



$2 < x < 3$

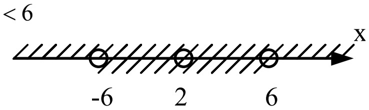
б) $\begin{cases} x^2 < 25 \\ |2x+1| \ge 3 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| < 5 \\ 2x+1 \ge 3, \quad 2x+1 \le -3 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 < x < 5 \\ x \ge 1, \quad x \le -2 \end{cases}$



$-5 < x \le -2,\ 1 \le x < 5$;

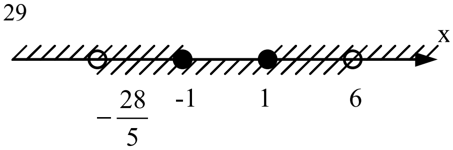
в) $\begin{cases} |2x-4| > 0 \\ x^2 < 36 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-4 \ne 0 \\ |x| < 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ne 2 \\ -6 < x < 6 \end{cases}$

$2 < x < 6,\ -6 < x < 2$



г) $\begin{cases} x^2 \ge 1 \\ |5x-1| < 29 \end{cases}$ $\begin{cases} |x| \ge 1 \\ -29 < 5x-1 < 29 \end{cases}$

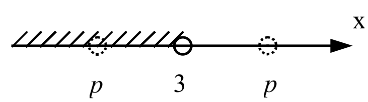
$\begin{cases} x \ge 1, \quad x \le -1 \\ -\dfrac{28}{5} < x < 6 \end{cases}$



$-\dfrac{28}{5} < x \le -1,\ 1 \le x < 6$

85.

а) $\begin{cases} x < 3 \\ x > p \end{cases}$

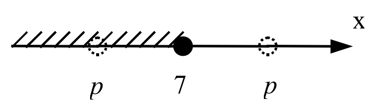


Изобразим на рисунке различные положения точки p

Видно, что при $p < 3$ решения есть.

При $p \ge 3$ решений нет.

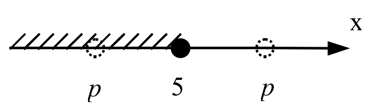
б) $\begin{cases} x \le 7 \\ x \ge p \end{cases}$



При $p > 7$ решений нет.

При $p \le 7$ решения есть.

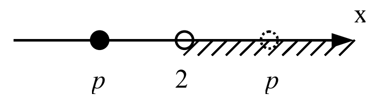
в) $\begin{cases} x \le 5 \\ x > p \end{cases}$



При $p \ge 5$ решений нет.

При $p \le 5$ решения есть.

г) $\begin{cases} x \le p \\ x \ge 2 \end{cases}$



При $p \ge 2$ решения есть.
При $p < 2$ решений нет.

86.

$\begin{cases} x > 3 \\ x > p \end{cases}$;

а) $p = 5$; б) Таких p нет.
в) $p \le 3$. Ответ в задачнике не верен. г) Таких p нет.

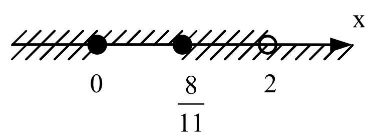
87.

$(p-2)x^2 - (p-4)x + (3p-2) > 0$

а) 1. Неравенство не имеет решений, если первый (старший) коэффициент отрицателен и дискриминант меньше либо равен 0.
2. Оно также может не иметь решений, если и первый и второй коэффициент равны 0, а свободный член меньше либо равен 0.

1. $\begin{cases} p-2<0 \\ (p-4)^2 - 4(p-2)(3p-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2<0 \\ p^2 - 8p + 16 - 12p^2 + 16p - 16 \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} p<2 \\ -11p^2 + 8p \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} p<2 \\ p\left(p - \frac{8}{11}\right) \ge 0 \end{cases}$



$\begin{cases} p<2 \\ p \ge \frac{8}{11}, \quad p \le 0 \end{cases}$ $p \le 0,\ \frac{8}{11} \le p < 2$;

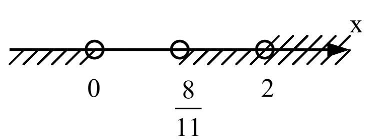
2. $\begin{cases} p-2=0 \\ p-4=0 \\ 3p-2 \le 0 \end{cases}$ Решений нет.

Итак

$p \le 0,\ \frac{8}{11} \le p < 2$

б) 1. Неравенство выполняется при любых x, если первый коэффициент положителен и дискриминант отрицателен.
2. Неравенство выполняется при любых x, если и первый и второй коэффициент нулевые, а свободный член положителен.

1. $\begin{cases} p-2>0 \\ -11p^2 + 8p < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} p>2 \\ p > \frac{8}{11}, \quad p < 0 \end{cases}$



$p > 2$

2. $\begin{cases} p-2=0 \\ p-4=0 \\ 3p-2>0 \end{cases}$ Решений нет.

Итак, $p > 2$.

Ответы решебника неверны.

§ 4. Домашняя контрольная работа

ВАРИАНТ 1.

1. $5x < 3\left(\frac{2}{9}+\frac{x}{2}\right)$, $x=-3$, $-15 < 3\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{2}\right)$, $-15 < 3\left(\frac{4-27}{18}\right)$
$-15 < \frac{-23}{6}$ - верно.

Является.

2. $5x+\frac{6}{7} \le \frac{2-3x}{14}$,

$\frac{70x+12-2+3x}{14} \le 0$, $\frac{73x+10}{14} \le 0$, $x \le -\frac{10}{73}$.

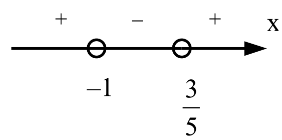
3. $|2x+4| \le 7$,

$-7 \le 2x+4 \le 7$, $-11 \le 2x \le 3$, $-\frac{11}{2} \le x \le \frac{3}{2}$;

4. Выражение определено, если

$5x^2+2x-3 \ge 0$, $\frac{D}{4} = 1+15 = 16$;

$x_1 = \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5}$; $x_2 = \frac{-1-4}{5} = -1$;



$5\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+1) \ge 0$, $\left(x-\frac{3}{5}\right)(x+1) \ge 0$

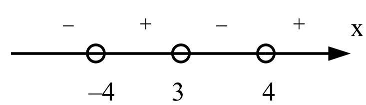
$x \ge \frac{3}{5}$, $x \le -1$.

5. $\frac{x^2+2{,}5x-18}{1{,}5x-6} > 1$, $\frac{x^2+2{,}5x-18-1{,}5x+6}{1{,}5x-6} > 0$, $\frac{x^2+x-12}{1{,}5(x-4)} > 0$

по теореме Виета:

$x_1 = 3$

$x_1 = -4$



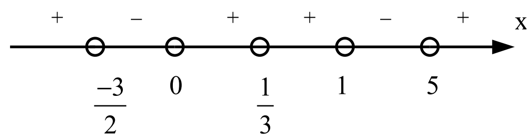
$$\frac{(x-3)(x+4)}{x-4}>0$$

$x>4, \quad -4<x<3$

6. а) $f(x)>0$

$$\frac{(3x-1)^2(2x+3)(5-x)}{x(x-1)}>0, \quad \frac{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)}<0,$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)}<0$$

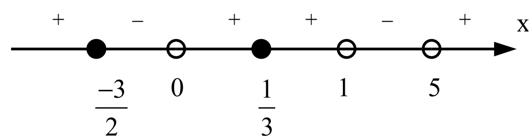


$1<x<5, \quad -\frac{3}{2}<x<0$

б) $f(x)\geq 0$

$$\frac{(3x-1)^2(2x+3)(5-x)}{x(x-1)}\geq 0$$

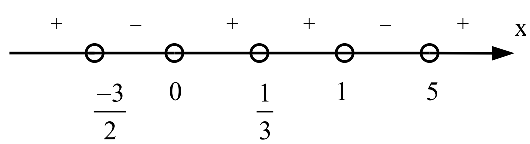
$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)}\leq 0$$



$1<x\leq 5, \quad -\frac{3}{2}\leq x<0$;

в) $f(x)<0$

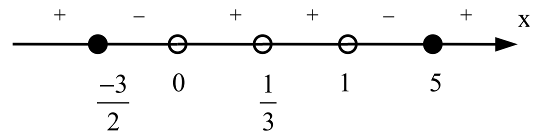
$$\frac{(3x-1)^2(2x+3)(5-x)}{x(x-1)}<0, \quad \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)}>0$$



$x<-\frac{3}{2}, \quad 0<x<\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}<x<1, \quad x>5$

г) $f(x)\leq 0$

$$\frac{(3x-1)^2(2x+3)(5-x)}{x(x-1)} \le 0, \quad \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{3}{2}\right)(x-5)}{x(x-1)} \ge 0$$



$x \le -\frac{3}{2}, \quad 0 < x < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < x < 1, \quad x \ge 5$

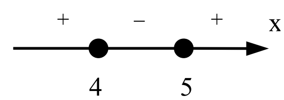
7. $\begin{cases} \frac{3x+2}{4} > 2 - \frac{3-x}{2} \\ 4(5-x) \le 5x - x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3x+2-8+6-2x}{4} > 0 \\ 20-4x \le 5x - x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} > 0 \\ x^2 - 9x + 20 \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ (x-5)(x-4) \le 0 \end{cases}$

по теореме Виета:

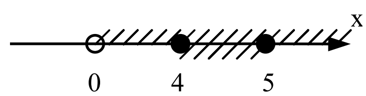
$x_1 = 5$

$x_1 = 4$



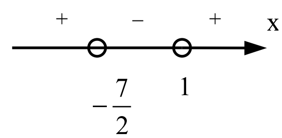
$\begin{cases} x > 0 \\ 4 \le x \le 5 \end{cases}$

$4 \le x \le 5$

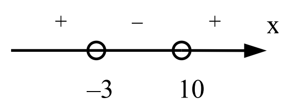


8. $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 7 > 0 \\ \frac{3x-4}{2x+6} \le 1 \end{cases}$ $\quad D = 25 + 56 = 81 \quad$ $x_1 = \frac{-5+9}{4} = 1$, $x_2 = \frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2}$

$\begin{cases} 2(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right) > 0 \\ \frac{3x-4-2x-6}{2x+6} \le 0 \end{cases}$

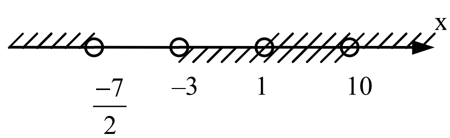


$\begin{cases} x > 1, \quad x < -\frac{7}{2} \\ \frac{x-10}{2(x+3)} \le 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x > 1, \quad x < -\frac{7}{2} \\ -3 < x \le 10 \end{cases}$

$1 < x \le 10.$



9. $-3 \le \frac{5+3x}{4} \le -1$

$-12 \le 5+3x \le -4$

$-\frac{17}{3} \le x \le -3$

10. $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2} < 2x \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2x-11+38-4x-8x}{4} < 0 \\ \frac{10x+75-9x+9-15x}{45} > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{-10x+27}{4} < 0 \\ \frac{-14x+84}{45} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x > 27 \\ 14x < 84 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{27}{10} = 2{,}7 \\ x < 6 \end{cases}$

$2{,}7 < x < 6$

Целые 3, 4, 5.

ВАРИАНТ 2.

1. $\frac{3\cdot 0{,}5+7{,}8}{2} \ge 2\cdot 0{,}5;$ $\frac{3x+7{,}8}{2} \ge 2x;$ $x=0{,}5$; $\frac{4{,}5+7{,}8}{2} \ge 1$;

$12{,}3 \ge 2$ — верно.

Является.

2. $\frac{4-5x}{4} \le 2+\frac{x}{8}$; $\frac{x+16-8+10x}{8} \ge 0,$ $\frac{11x+8}{8} \ge 0,$ $8+11x \ge 0,$ $x \ge -\frac{8}{11}$

3. $|4-3x| \ge 6$

$4-3x \ge 6,$ $4-3x \le -6$

$3x \le -2,$ $3x \ge 10$

$x \le -\frac{2}{3},$ $x \ge \frac{10}{3}.$

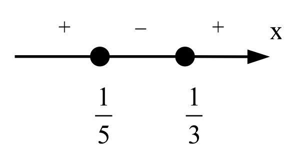
4. Выражение определено, если

$8x-15x^2-1 \ge 0;$ $15x^2-8x+1 \le 0$

$\frac{D}{4} = 16-15 = 1$

$x_1 = \frac{4+1}{15} = \frac{1}{3};$ $x_2 = \frac{4-1}{15} = \frac{1}{5}$

$15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) \le 0$



$\frac{1}{5} \le x \le \frac{1}{3}$

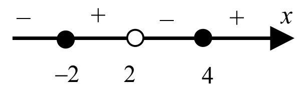
5. $\frac{x^2-4{,}5x-3}{5-2{,}5x} \le 1$; $\frac{x^2-4{,}5x-3+2{,}5x-5}{-2{,}5(x-2)} \le 0$; $\frac{x^2-2x-8}{x-2} \ge 0,$

по теореме Виета:

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

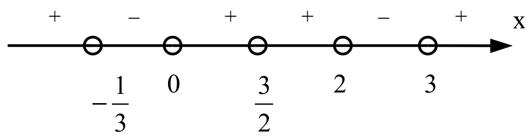
$\frac{(x-4)(x+2)}{x-2} \geq 0$



$-2 \leq x < 2, \quad x \geq 4$

6. а) $f(x) > 0$

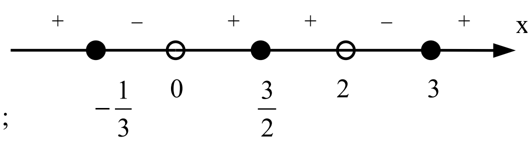
$\frac{(2x-3)^2(3x+1)(x-3)}{x(2-x)} > 0; \quad \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}{x(x-2)} < 0$



$-\frac{1}{3} < x < 0, \quad 2 < x < 3$

б) $f(x) \geq 0$

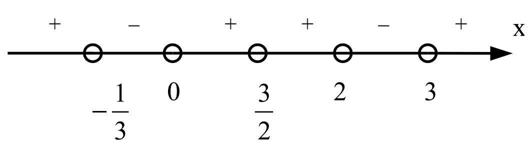
$\frac{(2x-3)^2(3x+1)(x-3)}{x(2-x)} \geq 0; \quad \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}{x(x-2)} \leq 0$



$2 < x \leq 3, \quad -\frac{1}{3} \leq x < 0$;

в) $f(x) < 0$

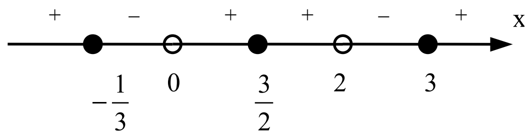
$\frac{(2x-3)^2(3x+1)(x-3)}{x(2-x)} < 0; \quad \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}{x(x-2)} > 0$



$x > 3, \quad \frac{3}{2} < x < 2, \quad 0 < x < \frac{3}{2}, \quad x < -\frac{1}{3}$

г) $f(x) \leq 0$

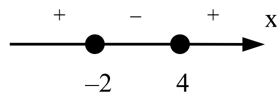
$$\frac{(2x-3)^2(3x+1)(x-3)}{x(2-x)} \le 0; \quad \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)}{x(x-2)} \ge 0$$



$x \le -\frac{1}{3}$, $0 < x < 2$, $x \ge 3$.

7. $\begin{cases} \frac{5-2x}{3} \le \frac{3x+5}{2} + 1 \\ 4x \ge 2(x-4) + x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{9x+15+6-10+4x}{6} \ge 0 \\ x^2 + 2x - 8 - 4x \le 0 \end{cases}$

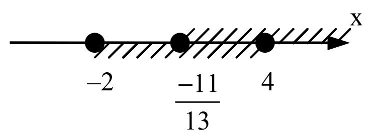
$\begin{cases} \frac{13x+11}{6} \ge 0 \\ x^2 - 2x - 8 \le 0 \end{cases}$



$x_1 = 4$
$x_2 = -2$

$\begin{cases} 13x + 11 \ge 0 \\ (x-4)(x+2) \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -\frac{11}{13} \\ -2 \le x \le 4 \end{cases}$



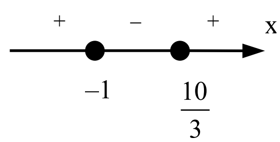
$-\frac{11}{13} \le x \le 4$

8. $\begin{cases} 3x^2 - 7x - 10 \le 0 \\ \frac{2x-1}{2-3x} > 3 \end{cases}$ $D = 49 + 120 = 169 = 13^2$

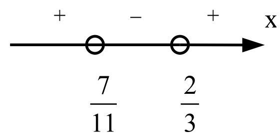
$x_1 = \frac{7+13}{6} = \frac{10}{3}$

$x_2 = \frac{7-13}{6} = -1$

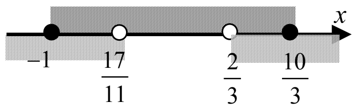
$\begin{cases} 3\left(x - \frac{10}{3}\right)(x+1) \le 0 \\ \frac{2x-1-6+9x}{2-3x} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x \le \frac{10}{3} \\ \frac{11x-7}{-1(3x-2)} > 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{x-\frac{7}{11}}{x-\frac{2}{3}} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{7}{11} < x < \dfrac{2}{3} \end{cases}$$



$$\frac{7}{11} < x < \frac{2}{3}$$



9. $2 \le \dfrac{4x-7}{5} \le 4$

$10 \le 4x-7 \le 20$

$17 \le 4x \le 27$

$\dfrac{17}{4} \le x \le \dfrac{27}{4}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{2x+3}{3} + \dfrac{x}{6} < 2 - \dfrac{x+5}{2}, \\ 1 - \dfrac{x+5}{8} + \dfrac{4-x}{2} < 3x - \dfrac{x+1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3x-3-4x-6+x-12+3x+15}{6} < 0 \\ \dfrac{8-x-5+16-4x-24x+2x+2}{8} < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{3x-6}{6} < 0 \\ \dfrac{-27x+21}{8} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-6<0 \\ -27x+21<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < +6 \\ 27x > 21 \end{cases} \quad \begin{cases} x < +2 \\ x > \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

$$\frac{7}{9} < x < 2$$

Целое: 1.

ГЛАВА 2. Системы уравнений

§ 5. Основные понятия

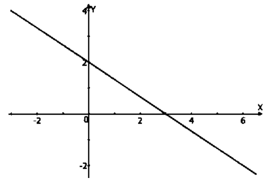
88.
а) $2x + y = 5$ — является (по определению);
б) $\frac{3}{x^2 + y^2} - \frac{x}{y^2 - 1} = 7xy$ — не является (по определению);
в) $x^2 + (y-5)^2 = 100$ — является (по определению);
г) $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ — является (по определению).

89. а) $-2 \cdot 2 + 1 = 5$ — неверно. Не является.
б) $3 \cdot 4 - 1 = 1$ — неверно. Не является.
в) $5 \cdot 4 - 1 = 19$ — верно. Является.
г) $\frac{2}{1} + 2 = -1$ — неверно. Не является.

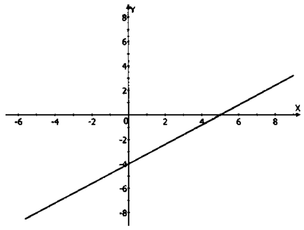
90.
а) $3 \cdot 3 + 1 = 4$ Не является
б) $9 - 2 \cdot 1 = 1$ — неверно. Не является
в) $5 \cdot 27 - 1 = 134$ — верно. Является
г) $\frac{3}{1} + 2 = -1$ — неверно. Не является

91.
$2x^2 - y^2 = 1$
а) (1; 1); $2 \cdot 1 - 1 = 1$ — верно. Эта пара является решением.
б) $(2; \sqrt{7})$; $2 \cdot 4 - (\sqrt{7})^2 = 1$ — верно. Эта пара является решением.
в) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$; $2 \cdot \frac{1}{4} - 16 = 1$ — неверно. Эта пара не является решением.
г) $(\sqrt{3}; \sqrt{5})$; $2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 1$ — верно. Эта пара является решением.

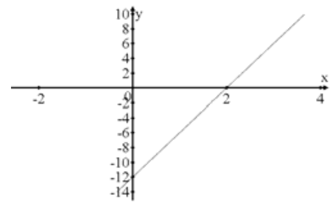
92.
а) $2x + 3y = 6$



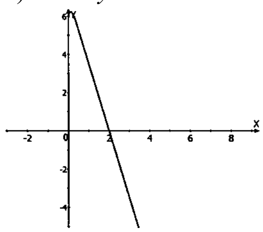
б) $4x - 5y = 20$



в) $6x - y = 12$

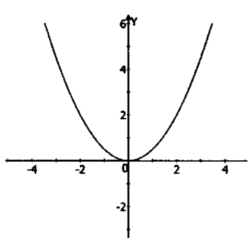


г) $7x + 2y = 14$

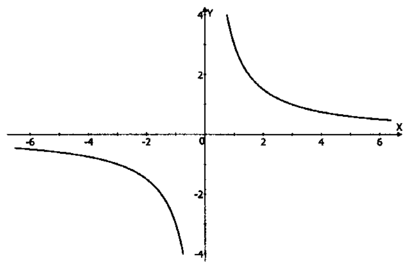


93.

а) $2y - x^2 = 0$

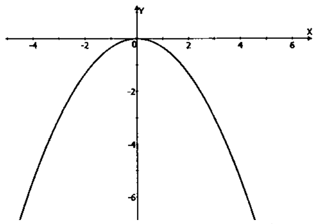


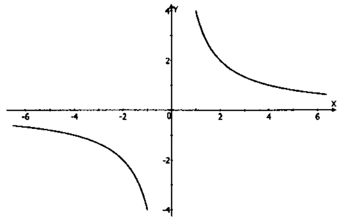
б) $\frac{3}{x} - y = 0$



в) $y + \frac{x^2}{3} = 0$

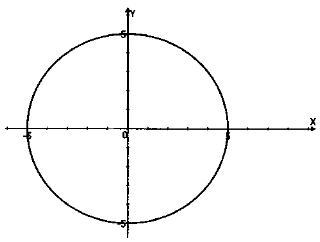
г) $\frac{1}{x} - \frac{y}{4} = 0$



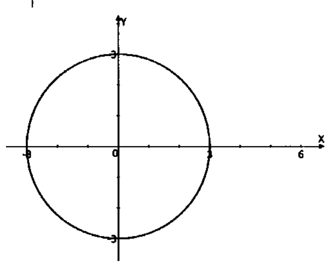


94.

а) $x^2 + y^2 = 25$

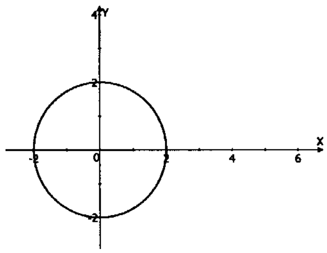


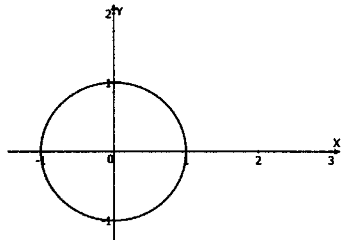
б) $x^2 + y^2 = 9$



в) $x^2 + y^2 = 4$

г) $x^2 + y^2 = 1$





95.

а) $(x+1)^2+(y-3)^2=25$, $(x-(-1))^2+(y-3)^2=5^2$.

Центр (–1; 3). Радиус 5.

б) $(x+5)^2+(y+7)^2=1$, $(x-(-5))^2+(y-(-7))^2=1^2$.

Центр (–5; –7). Радиус 1.

в) $(x-10)^2+(y+1)^2=17$, $(x-10)^2+(y-(-1))^2=\left(\sqrt{17}\right)^2$.

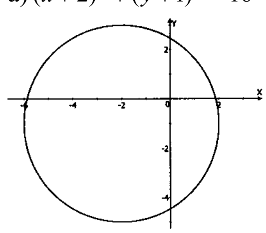
Центр (+10; –1). Радиус $\sqrt{17}$.

г) $(x-4)^2+(y-5)^2=144$, $(x-4)^2+(y-5)^2=12^2$.

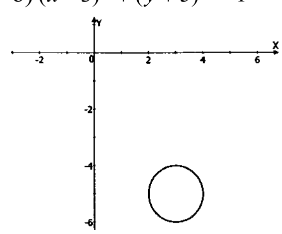
Центр (4; 5). Радиус 12.

96.

а) $(x+2)^2+(y+1)^2=16$

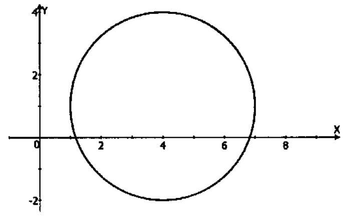


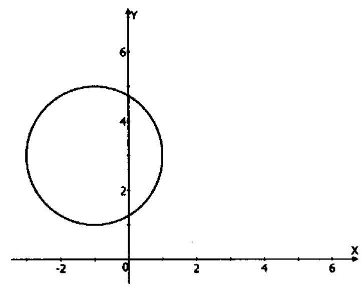
б) $(x-3)^2+(y+5)^2=1$



в) $(x-4)^2+(y-1)^2=9$

г) $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

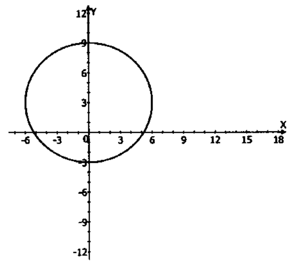


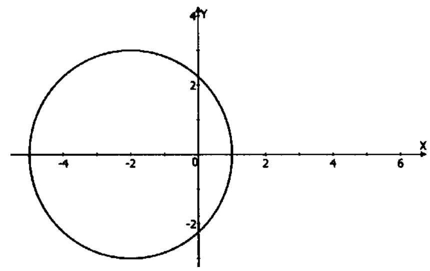


97.

а) $x^2 + (y-3)^2 = 36$

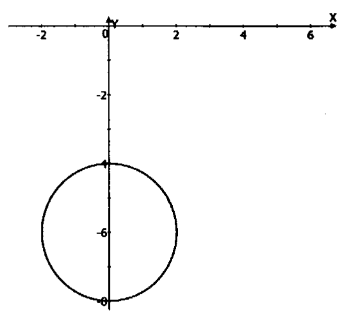
б) $(x+2)^2 + y^2 = 9$

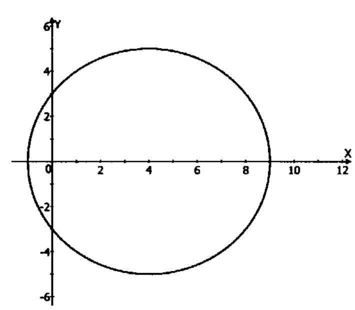




в) $x^2 + (y+6)^2 = 4$

г) $(x-4)^2 + y^2 = 25$





98.

а) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$, $x^2 + y^2 = 25$;

б) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$, $x^2 + y^2 = 3$;

в) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$;

г) $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

Если (a, b) – центр и R – радиус, то уравнение имеет вид:
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

а) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$;

б) $(x-(-3))^2+(y-8)^2=11^2$, $(x+3)^2+(y-8)^2=121$;

в) $(x-0)^2+(y-(-10))^2=7^2$, $x^2+(y+10)^2=49$;

г) $(x-(-5))^2+(y-(-2))^2=4^2$, $(x+5)^2+(y+2)^2=16$.

100.

а) Окружность с центром (0; 0). Радиус ее 2.
$(x-0)^2+(y-0)^2=2^2$, $x^2+y^2=4$

б) Окружность с центром (0; 0). Радиус ее $\sqrt{3}$.
$(x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{3})^2$, $x^2+y^2=3$

в) Окружность с центром (0; 0). Радиус 1,5.
$(x-0)^2+(y-0)^2=(1{,}5)^2$, $x^2+y^2=2{,}25$

г) Окружность с центром (0; 0). Радиус $\frac{1}{2}$.
$(x-0)^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $x^2+y^2=\frac{1}{4}$.

101.

а) Окружность с центром (–2; 2). Радиус 1.
$(x-(-2))^2+(y-2)^2=1$, $(x+2)^2+(y-2)^2=1$

б) Окружность с центром (–3; –1). Радиус 2.
$(x-3)^2+(y-(-1))^2=2^2$, $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

в) Окружность с центром (1; 4). Радиус 2.
$(x-1)^2+(y-4)^2=2^2$, $(x-1)^2+(y-4)^2=4$

г) Окружность с центром (–3; –2). Радиус 1.
$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=1^2$, $(x+3)^2+(y+2)^2=1$

102.

а) Окружность с центром (0; –2). Радиус 2.
$(x-0)^2+(y-(-2))^2=2^2$, $x^2+(y+2)^2=4$

б) Окружность с центром (–3; 0). Радиус 3.
$(x-(-3))^2+(y-0)^2=3^2$, $(x+3)^2+y^2=9$

в) Окружность с центром (0; 3). Радиус 3.
$(x-0)^2+(y-3)^2=3^2$, $x^2+(y-3)^2=9$

г) Окружность с центром (1; 0). Радиус 1.

$(x-1)^2+(y-0)^2=1^2,\ (x-1)^2+y^2=1$

Опечатка в ответе учебника.

103.

(2; 3)

а) $\begin{cases} 4+9=13 \\ 2\cdot 2+3=7 \end{cases}$ – верны оба уравнения. Является

б) $\begin{cases} 4+3=5 \\ 3\cdot 2-1=3 \end{cases}$ – неверны оба уравнения. Не является

в) $\begin{cases} 4+3\cdot 3=13 \\ 3+2=1 \end{cases}$ – второе неверно. Не является

г) $\begin{cases} 4+9=4 \\ 10-6=4 \end{cases}$ – первое неверно. Не является

104.

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-2x=1 \end{cases}$

а) $\begin{cases} 0+1=1 \\ 1-2\cdot 0=1 \end{cases}$ – оба верны. Является

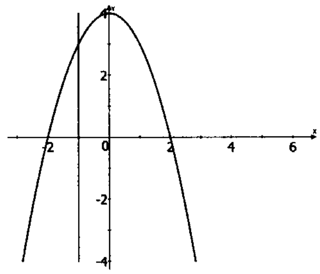
б) $\begin{cases} 1+1=1 \\ -1-2\cdot(-1)=1 \end{cases}$ – первое неверно. Не является

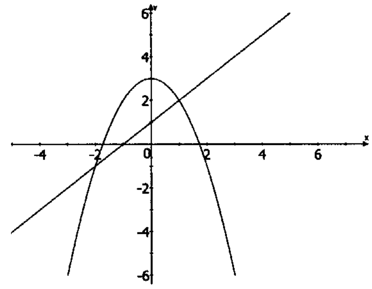
в) $\begin{cases} 1+0=0 \\ 0-2\cdot 1=1 \end{cases}$ – второе неверно. Не является

г) $\begin{cases} 1+1=1 \\ 1-2\cdot 0=1 \end{cases}$ – оба неверны. Не является

105.

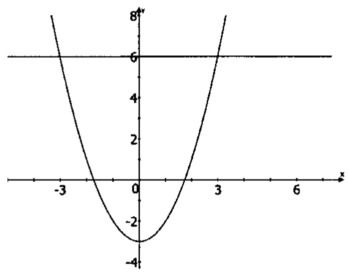
а) б)

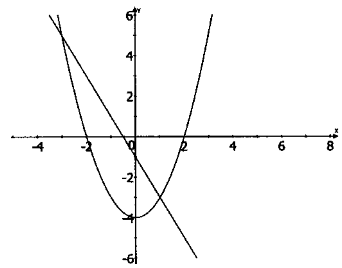




Ответ : (-1;3). Ответ : (-2;-1) ; (1;2) .

в) г)

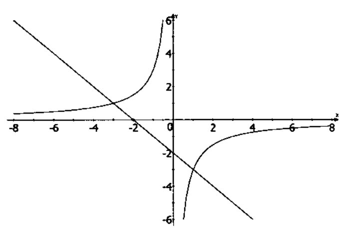


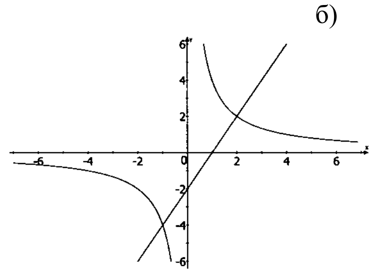


Ответ : (-3;6) ; (3;6). Ответ : (-3;5) ; (1;-3) .

106.

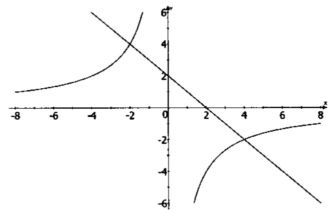
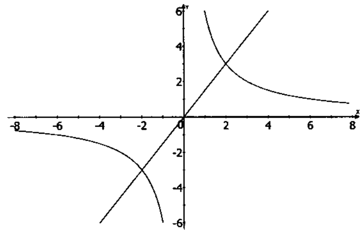
а) б)





Ответ : (-3;1) ; (1;-3). Ответ : (-1;-4) ; (2;2).

в) г)

Ответ : (-2;4) ; (4;-2). Ответ : (-2;-3) ; (2;3).

107.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2=1 \\ y=x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{2} \\ y=x \end{cases}$ $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}},\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}},-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

Два решения.

б) $\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-1 \\ (x-1)^2+(2x-1+2)^2=9 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2x-1 \\ x^2-2x+1+4x^2+4x+1=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-1 \\ 5x^2+2x-7=0 \end{cases}$

$\dfrac{D}{4}=1+35=36=6^2$

$x_1=\dfrac{-1+6}{5}=\dfrac{5}{5}=1$

$x_2=\dfrac{-1-6}{5}=-\dfrac{7}{5}$

Нашли два значения x, для каждого есть соответствующее y.
2 решения.

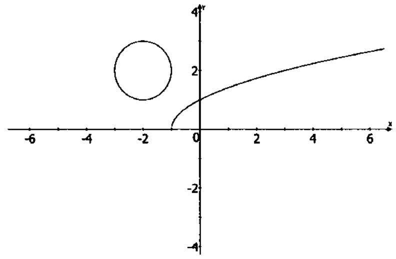
в) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+(x-1)^2=4 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2-2x+1=4 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-2x-3=0 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$ $\dfrac{D}{4}=1+6=7>0$

Так как D > 0, то существует два различных x и соответствующее y для каждого.
Два решения.

г) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=1 \\ y=\sqrt{x+1} \end{cases}$

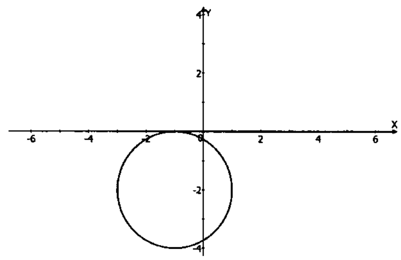
Построим графики для обоих уравнений



Нет точек пересечения, следовательно нет решений.

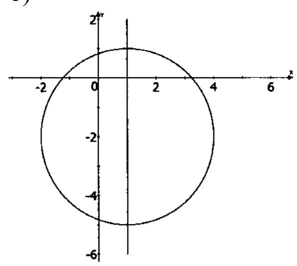
108.

а)



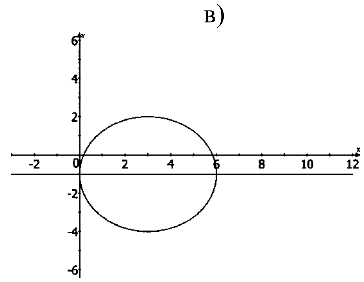
Ответ : (-1;0) .

б)



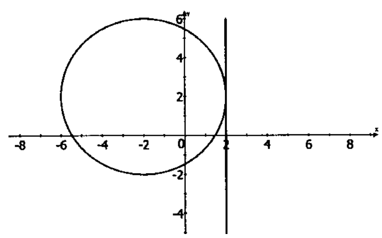
Ответ : (1;1) (1; –5).

в)



Ответ : (0;-1) ; (6;-1).

г)



Ответ : (2;2) .

109.

Точка пересечения – точка, координаты которой удовлетворяют уравнениям обеих кривых.

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ y=x^2+6 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+\left(x^2+6\right)^2=36 \\ y=x^2+6 \end{cases}$

$\begin{cases} x^4+13x^2+36=36 \\ y=x^2+6 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2\left(x^2+13\right)=0 \\ y=x^2+6 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+13=0 \end{array}\right. \\ y=x^2+6 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=-13 \end{array}\right. \\ y=x^2+6 \end{cases}$ - решений нет.

Точка пересечения (0; 6);

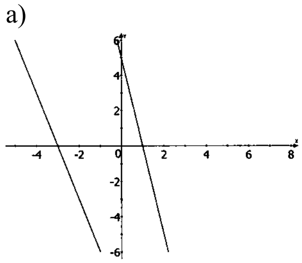
б) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ (x-2)^2+y^2=36 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=16-x^2 \\ (x-2)^2+16-x^2=36 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=16-x^2 \\ -4x+20=36 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=16-x^2 \\ x=-4 \end{cases}$

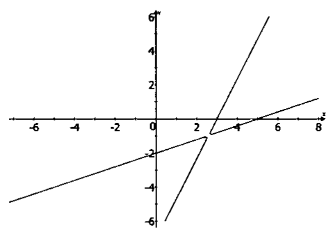
$\begin{cases} y^2=0 \\ x=-4 \end{cases}$ Точка пересечения (-4; 0).

110.

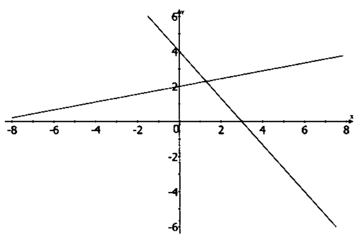
а)



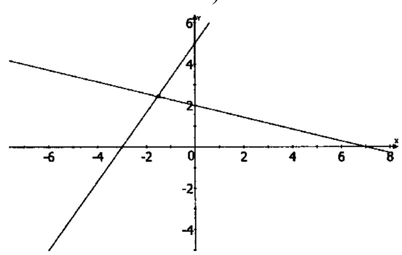
б)



в)

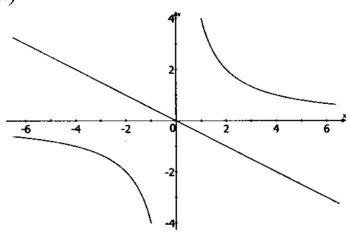


г)

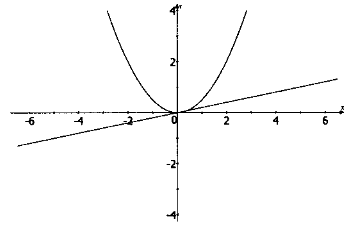


111.

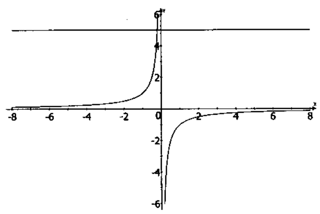
а)



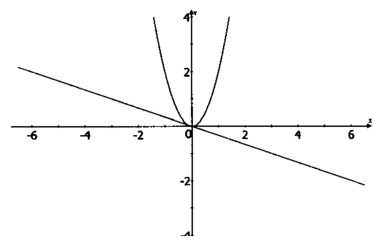
б)



в)

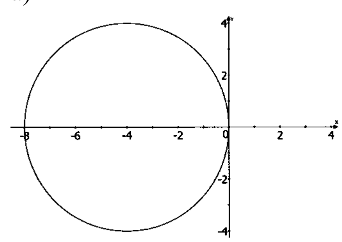


г)

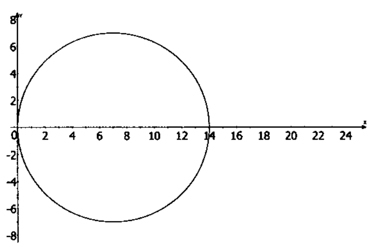


112.

а)

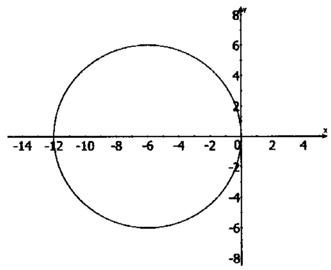


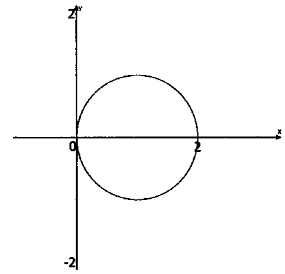
б)



в)

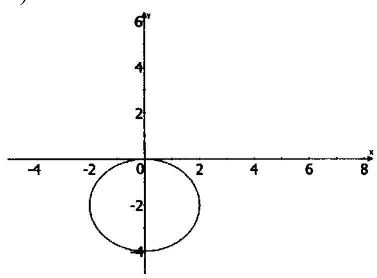
г)



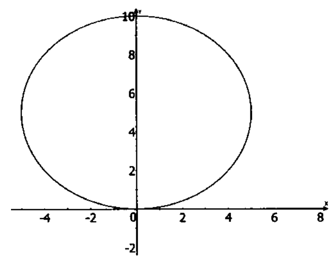


113.

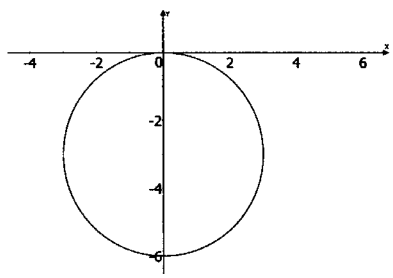
а)



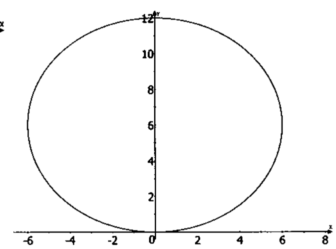
б)



в)



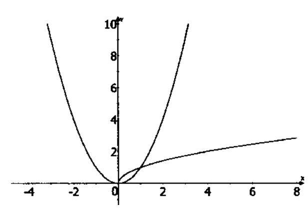
г)



114.

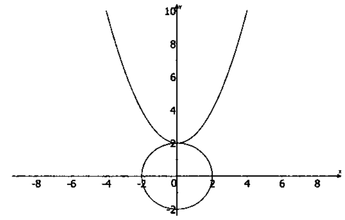
а) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

Точки пересечения (0; 0), (1; 1)



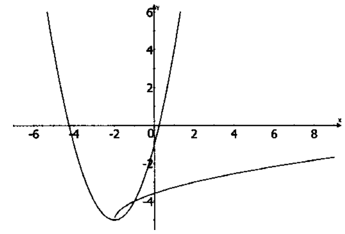
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 0{,}5x^2 + 2 \end{cases}$

Точка пересечения (0; 2)



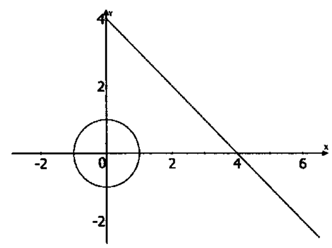
в) $\begin{cases} x^2 + 4x - y = 1 \\ y = \sqrt{x+2} - 5 \end{cases}$

Точки пересечения (-2;-5), (–1;–14). Опечатка в ответе задачника.



г) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

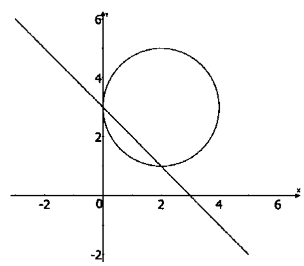
Решений нет.



115.

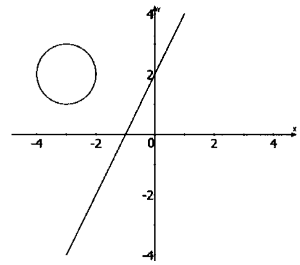
а) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ 2y = 6 - 2x \end{cases}$

Решения (0; 3), (2; 1)



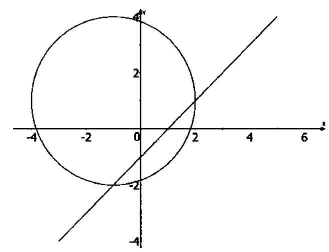
б) $\begin{cases} 2x = y - 2 \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$

Решений нет.



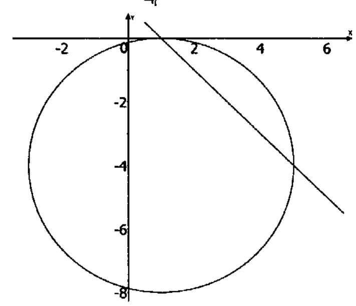
в) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ y + 1 = x \end{cases}$

Решения (2; 1), (-1; -2)



г) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 = 16 \\ x + y = 1 \end{cases}$

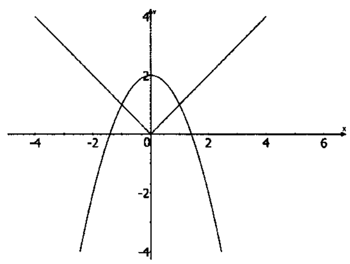
Решения (1; 0), (5; -4)

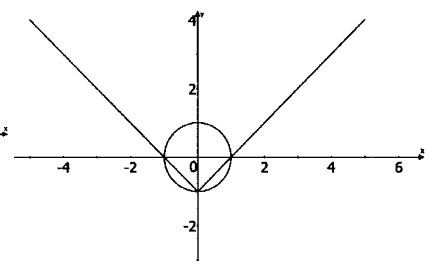


116.

а) $\begin{cases} y = |x| \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = |x| - 1 \end{cases}$





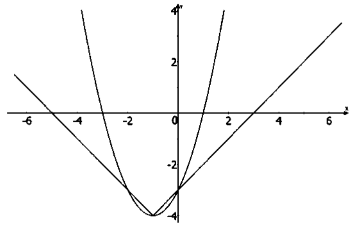
Решения (-1; -1), (1; 1)

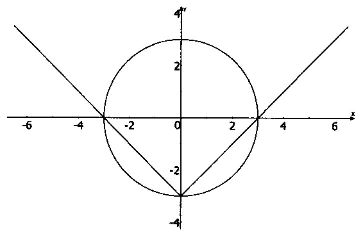
Решения (-1; 0), (0; -1); (1; 0).

в) $\begin{cases} x^2 - y = 3 - 2x \\ y = |x+1| - 4 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = |x| - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = |x+1| - 4 \end{cases}$





Решения (-2; -3), (-1; -4), (0; -3)

Решения (0; -3), (-3; 0), (3; 0)

117.

Подставим (1; -2) в уравнения: $\begin{cases} p^2 - 2 = 2 \\ 1 + 4 = p + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} p^2 = 4 \\ p = 2 \end{cases}$

При $p = 2$.

118.

$\begin{cases} y - x^2 = 4 \\ y + px = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ x^2 + 4 + px = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ x(x + p) = 0 \end{cases}$

Для того, чтобы система имела одно решение, второе уравнение должно иметь одно решение.
Оно имеет решения x = 0 и x = -p. Чтобы они совпали, p должно быть равно 0. p = 0.

119.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - x^2 = p \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + p \end{cases}$

Рассмотрим графики обоих уравнений.

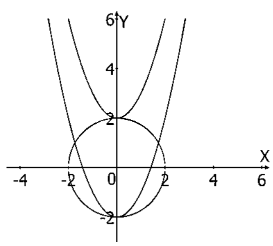


График первого – окружность с центром
(0; 0) и радиусом 2.

График второго – парабола $y = x^2$, сдвинутая вверх на величину p.

а) Для того, чтобы было 3 решения, парабола должна иметь вершину в точке
(0; -2). То есть p = –2.

б) Для того, чтобы было 1 решение, парабола должна касаться окружности. Это может быть только если ее вершина – (0; 2). То есть p = 2.

§ 6. Методы решения систем уравнений

120.

а) $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 2y = 26 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x - 1 \\ x = 6,\ x = 4 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 6;\ x_2 = -4$

Решения (6; 5), (-4; -5).

б) $\begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y^2 \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 2;\ x_2 = -3$

$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2,\quad y = -3 \end{cases}$

Решения (4; 2), (9; -3).

в) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2x = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2y - 6 = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 3 \\ y = 5,\quad y = -3 \end{cases}$

$y_1 = 5$; $y_2 = -3$

Решения (8; 5), (0; -3).

г) $\begin{cases} y = x^2 \\ x - y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x - x^2 + 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 3;\ x_2 = -2$

Решения (-2; 4), (3; 9).

121.

а) $\begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y - y^2 = -2 \\ x = 1 - y \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 2; y_2 = -1$

$\begin{cases} y = 2, \quad y = -1 \\ x = 1 - y \end{cases}$

Решения (-1; 2), (2; –1).

б) $\begin{cases} 5x^2 + 2y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5(y+5)^2 + 2y = -3 \\ x = y + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2 + 52y + 128 = 0 \\ x = y + 5 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 26^2 - 5 \cdot 128 = 676 - 640 = 36$

$y_1 = \frac{-26+6}{5} = -4; \quad y_2 = \frac{-26-6}{5} = -\frac{32}{5} = -6{,}4$

$\begin{cases} y = -4, \quad y = -6{,}4 \\ x = y + 5 \end{cases}$ Решения (1; -4), (-1,4; -6,4).

в) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x + y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ 22 - 6y + y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ y^2 - 6y + 8 = 0 \end{cases}$

$y_1 = 4$ $\begin{cases} x = 11 - 3y \\ y = 2, \quad \text{y} = 4 \end{cases}$
$y_2 = 2$

Решения (5; 2), (-1; 4).

г) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ (8 - y)y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ y^2 - 8y + 12 = 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 6; \ y_2 = 2$`

$\begin{cases} x = 8 - y \\ y = 2, \quad \text{y} = 6 \end{cases}$

Решения (6; 2), (2; 6).

122.

а) $\begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - (3y - 10)y = 12 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1 = 3$; $y_2 = 2$`

$\begin{cases} y = 2, \quad y = 3 \\ x = 3y - 10 \end{cases}$

Решения (-4; 2), (-1; 3).

б) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 32 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - (2x - 8)^2 = 32 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 16x + 48 = 0 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1 = 12$; $x_2 = 4$`

$\begin{cases} x = 4, \quad x = 12 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$

Решения (4; 0), (12; 16).

в) $\begin{cases}2x^2-xy=33\\4x-y=17\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-x(4x-17)=33\\y=4x-17\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-17x+33=0\\y=4x-17\end{cases}$

$D=289-264=25$

$x_1=\dfrac{17+5}{4}=\dfrac{11}{2};\ x_2=\dfrac{17-5}{4}=3$

$\begin{cases}x=\dfrac{11}{2},\quad x=3\\y=4x-17\end{cases}$ Решения ($\dfrac{11}{2}$; 5), (3; -5).

г) $\begin{cases}x^2-y^2=24\\2y-x=-7\end{cases}$ $\begin{cases}(2y+7)^2-y^2=24\\x=2y+7\end{cases}$ $\begin{cases}3y^2+28y+25=0\\x=2y+7\end{cases}$

$\dfrac{D}{4}=196-75=121=11^2$

$y_1=\dfrac{-14+11}{3}=-1;\ y_2=\dfrac{-14-11}{3}=-\dfrac{25}{3}$

$\begin{cases}y=-1,\ y=-\dfrac{25}{3}\\x=2y+7\end{cases}$

Решения (5; -1), $\left(-\dfrac{29}{3};-\dfrac{25}{3}\right)$

123.

а) $\begin{cases}x^2+xy-y^2=11\\x-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}(2y+1)^2+(2y+1)y-y^2=11\\x=2y+1\end{cases}$ $\begin{cases}y^2+y-2=0\\x=2y+1\end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=1;\ y_2=-2$

$\begin{cases}y=1,\quad y=-2\\x=2y+1\end{cases}$

Решения (3; 1), (-3; -2).

б) $\begin{cases}xy+y^2+x-3y=15\\x+y=5\end{cases}$ $\begin{cases}y(-y+5)+y^2-y+5-3y=15\\x=-y+5\end{cases}$

$\begin{cases}y=10\\x=-y+5\end{cases}$ $\begin{cases}y=10\\x=-5\end{cases}$

Решение (-5; 10).

в) $\begin{cases}x^2+xy-x-y=2\\y=x-2\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x(x-2)-x-x+2=2\\y=x-2\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-4x=0\\y=x-2\end{cases}$

$\begin{cases}x=0,\quad x=2\\y=x-2\end{cases}$

Решения (0; -2), (2; 0).

г) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=1 \\ x=-2y \end{cases}$ $\begin{cases} y=1, \quad y=-1 \\ x=-2y \end{cases}$

Решения (-2; 1), (2; -1).

124.

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ 2y-x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{2y-1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ x=2y-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{-10y^2+23y-6}{6y(2y-1)}=0 \\ x=2y-1 \end{cases}$

Решим первое уравнение.

$\dfrac{10y^2-23y+6}{6y(2y-1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2-23y+6=0 \\ 6y(2y-1)\neq 0 \end{cases}$

$D=529-240=289$

$y_1=\dfrac{23+17}{20}=2$; $y_2=\dfrac{23-17}{20}=0{,}3$

$\begin{cases} y=2, \quad y=0{,}3 \\ 6y(2y-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2, \quad y=0{,}3$

Для $y=2, \quad x=2\cdot 2-1=3$

Для $y=0{,}3, \; x=2\cdot 0{,}3-1=-0{,}4$

Решения (3; 2), (-0,4; 0,3).

б) $\begin{cases} x+y=6 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-x \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{6-x}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-x \\ \dfrac{-x^2+14x-24}{4x(x-6)}=0 \end{cases}$

Решим второе уравнение.

$\dfrac{x^2-14x+24}{4x(x-6)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-14x+24=0 \\ 4x(x-6)\neq 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=12$; $x_2=2$

$\begin{cases} x=2, \quad x=12 \\ 4x(x-6)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2, \quad x=12$

Для $x=2, \quad y=6-2=4$

Для $x=12, \; y=6-12=-6$

Решения (2; 4), (12; -6). Ответ в задачнике неверен.

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \\ x-2y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2(y+1)}-\dfrac{1}{3}=0 \\ x=2(y+1) \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{-2y^2+y+6}{6y(y+1)}=0 \\ x=2(y+1) \end{cases}$

Решим первое уравнение.

$\dfrac{2y^2-y-6}{6y(y+1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-y-6=0 \\ 6y(y+1)\neq 0 \end{cases}$

$D = 1 + 48 = 49$; $y_1 = \frac{1+7}{4} = 2$; $y_2 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y = 2, \quad y = -\frac{3}{2} \\ 6y(y+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2, \quad y = -\frac{3}{2}$$

Решения (6; 2), (-1; $-\frac{3}{2}$).

г) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{3}{y} = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{y+1} - \frac{12}{y(y+1)} + \frac{3}{y} = 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{7y - 9 - y^2 - y}{y(y+1)} = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$

Решим первое уравнение:

$$\frac{-y^2 + 6y - 9}{y(y+1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 6y - 9 = 0 \\ y(y+1) \neq 0 \end{cases} \begin{cases} -(y-3)^2 = 0 \\ y(y-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3$$

Решение (4; 3).

125.

а) $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ a - b = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = a - 1 \end{cases}$$

Решение (2; 1).

б) $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -a + 7b = 13 \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 9b = 18 \end{cases} \begin{cases} a = 5 - 2b \\ b = 2 \end{cases}$$

Решение (1; 2).

в) $\begin{cases} 2a + 3b = 3 \\ 2a - 3b = 9 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$$\begin{cases} 4a = 12 \\ 2a - 3b = 9 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ 6 - 3b = 9 \end{cases} \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Решение (3; –1).

г) $\begin{cases} 3a + 5b = 8 \\ -3a + b = -2 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 6b = 6 \\ -3a + b = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ -3a + b = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

Решение (1; 1).

126.

а) $\begin{cases} 40m + 3n = -10 \\ 20m - 7n = -5 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на (–2), заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 40m + 3n = -10 \\ 17n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 40m + 3n = -10 \\ n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ n = 0 \end{cases}$ Решение $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

б) $\begin{cases} 3m + 2n = 0{,}5 \\ 2m + 5n = 4 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{3}{2}\right)$, и заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 3m + 2n = 0{,}5 \\ -\frac{11}{2}n = -5{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3m + 2n = 0{,}5 \\ -11n = -11 \end{cases}$ $\begin{cases} m = -0{,}5 \\ n = 1 \end{cases}$ Решение $(-0{,}5;1)$.

в) $\begin{cases} 5m + 2n = 1 \\ 15m + 3n = 3 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на (–3), и заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} -3n = 0 \\ 15m + 3n = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 0 \\ 15m = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 0 \\ m = \frac{1}{5} \end{cases}$ Решение $\left(\frac{1}{5};0\right)$.

г) $\begin{cases} 4m + 7n = 11 \\ 5m - 2n = 3 \end{cases}$ Умножим второе уравнение на $\frac{7}{2}$

$\begin{cases} 4m + 7n = 11 \\ \frac{35}{2}m - 7n = \frac{21}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 4m + 7n = 11 \\ \frac{43}{2}m = \frac{43}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 4m + 7n = 11 \\ m = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 1 \\ m = 1 \end{cases}$

Решение $(1;1)$.

127.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases}2x^2=72\\x^2-y^2=11\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=36\\36-y^2=11\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm6\\y=\pm5\end{cases}$

Решения (6; –5), (6; 5), (–6; –5), (–6; 5).

б) $\begin{cases}2x^2-y^2=41\\2x^2+y^2=59\end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases}2x^2-y^2=41\\4x^2=100\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-y^2=41\\x^2=25\end{cases}$ $\begin{cases}50-y^2=41\\x=\pm5\end{cases}$ $\begin{cases}y=\pm3\\x=\pm5\end{cases}$

Решения (5; –3), (5; 3), (–5; –3), (–5; 3).

в) $\begin{cases}x^2-3y^2=22\\x^2+3y^2=28\end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases}2x^2=50\\x^2+3y^2=28\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=25\\25+3y^2=28\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm5\\y=\pm1\end{cases}$

Решения (5; –1), (5; 1), (–5; –1), (–5; 1).

г) $\begin{cases}x^2-2y^2=14\\x^2+2y^2=18\end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases}2x^2=32\\x^2+2y^2=18\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=16\\16+2y^2=18\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm4\\2y^2=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm4\\y=\pm1\end{cases}$

Решения (4; –1), (4; 1), (–4; –1), (–4; 1).

128.

а) $\begin{cases}x^2y^2+xy=2\\2x+y=3\end{cases}$

Введем переменную $t=xy$.

Первое уравнение примет вид $t^2+t-2=0$

по теореме Виета: $t_1=1;\ t_2=-2$

Решим по отдельности две системы

$\begin{cases}xy=1\\2x+y=3\end{cases}$ $\begin{cases}xy=-2\\2x+y=3\end{cases}$

$\begin{cases}x(3-2x)=1\\y=3-2x\end{cases}$ $\begin{cases}x(3-2x)=-2\\y=3-2x\end{cases}$

$\begin{cases}2x^2-3x+1=0\\y=3-2x\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-3x-2=0\\y=3-2x\end{cases}$

$D = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = 1, \quad x = \frac{1}{2} \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

$D = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$

$x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = 2, \quad x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

Решения (1; 1), ($\frac{1}{2}$; 2), (2; –1), ($-\frac{1}{2}$; 4).

б) $\begin{cases} 3(x-y) - 2(x-y)^2 = -2 \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}$

Введем переменную $p = x - y$.

Первое уравнение примет вид

$3p - 2p^2 = -2$

$2p^2 - 3p - 2 = 0$

Решим его:

$D = 9 + 6 = 25$

$p_1 = \frac{3+5}{4} = 2$; $p_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

Решим отдельно две системы:

$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 2 \\ 2y + 4 + 7y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 2 \\ 9y = -9 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = -1 \end{cases}$

$x = 1, \quad y = -1$

$\begin{cases} x - y = -\frac{1}{2} \\ 2x + 7y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 2y - 1 + 7y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 9y = -4 \end{cases}$

$x = -\frac{17}{18}, \quad y = -\frac{4}{9}$

Решения (1; –1), $\left(-\frac{17}{18}; -\frac{4}{9}\right)$.

в) $\begin{cases} 5\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 14 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$

Введем новую переменную $g = \frac{x}{y}$.

Первое уравнение примет вид:

$5g + g^2 = 14;\ g^2 + 5g - 14 = 0$

$D = 25 + 56 = 81$

$g_1 = \dfrac{-5+9}{2} = 2;\ g_2 = \dfrac{-5-9}{2} = -7$

То есть $\dfrac{x}{y} = 2$ или $\dfrac{x}{y} = -7$

Решим отдельно две системы:

$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -7 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y, \quad y \neq 0 \\ 10y + 3y = 13 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = -7y, \quad y \neq 0 \\ -35y + 3y = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \quad y \neq 0 \\ y = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{91}{32}, \quad y \neq 0 \\ y = -\dfrac{13}{32} \end{cases}$

Решения (2; 1), $\left(\dfrac{91}{32}; -\dfrac{13}{32}\right)$.

г) $\begin{cases} 4(x+y)^2 - 7(x+y) = 15 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

Введем переменную $p = x + y$.

Первое уравнение примет вид $4p^2 - 7p - 15 = 0$

$D = 49 + 240 = 289 = 17^2$

$p_1 = \dfrac{7-17}{8} = -\dfrac{5}{4};\ p_2 = \dfrac{7+17}{8} = 3$

То есть $x + y = -\dfrac{5}{4}$ или $x + y = 3$

Решим отдельно две системы:

$\begin{cases} x+y=-\dfrac{5}{4} \\ 5x-2y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\dfrac{5}{4}-y \\ -\dfrac{25}{4}-5y-2y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\dfrac{5}{4}-y \\ -7y=\dfrac{29}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{14} \\ y=-\dfrac{29}{28} \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3-y \\ 15-5y-2y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Решения $\left(-\dfrac{3}{14};-\dfrac{29}{28}\right)$, (1; 2).

129.

а) $\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+(x+y)=5 \end{cases}$

Введем новые переменные $p=xy$ и $t=x+y$.
Система примет вид

$\begin{cases} pt=6 \\ p+t=5 \end{cases}$ $\begin{cases} (5-t)t=6 \\ p=5-t \end{cases}$ $\begin{cases} 5t-t^2=6 \\ p=5-t \end{cases}$ $\begin{cases} t^2-5t+6=0 \\ p=5-t \end{cases}$

по теореме Виета: $t_1=3; t_2=2$

при $t=3$: $p=5-3=2$
при $t=2$: $p=5-2=3$

То есть (1) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$

Решим первую систему:

$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=2;\ y_2=1$

при $y=3$: $x=3-2=1$; при $y=1$: $x=3-1=2$

Для первой системы решения (1; 2), (2; 1)
Решим вторую систему:

$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y+3=0 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 1 - 3 = -2 < 0$ Решений нет.

Решениями исходной системы будут решения системы (1).
Решения (1; 2), (2; 1).

б) $\begin{cases} 3(x-y)^2 + 2(x+2y)^2 = 5 \\ 2(x+2y) - x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(x-y)^2 + 2(x+2y)^2 = 5 \\ 2(x+2y) - (x-y) = 1 \end{cases}$

Введем новые переменные $p = x - y$ и $t = x + 2y$.

Система примет вид: $\begin{cases} 3p^2 + 2t^2 = 5 \\ 2t - p = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(2t-1)^2 + 2t^2 = 5 \\ p = 2t - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 7t^2 - 6t - 1 = 0 \\ p = 2t - 1 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 9 + 7 = 16;\ t_1 = \frac{3+4}{7} = 1;\ t_2 = \frac{3-4}{7} = -\frac{1}{7}$

при $t = 1$: $p = 2 - 1 = 1$; при $t = -\frac{1}{7}$: $p = -\frac{2}{7} - 1 = -\frac{9}{7}$

То есть (1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x - y = -\frac{9}{7} \\ x + 2y = -\frac{1}{7} \end{cases}$

Решим первую систему:

$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1 \\ y + 1 + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Решим вторую систему:

$\begin{cases} x - y = -\frac{9}{7} \\ x + 2y = -\frac{1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x = y - \frac{9}{7} \\ y - \frac{9}{7} + 2y = -\frac{1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x = y - \frac{9}{7} \\ 3y = \frac{8}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{19}{21} \\ y = \frac{8}{21} \end{cases}$

Решения: (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; \frac{8}{21}\right)$.

в) $\begin{cases} 5(x+y) + 4xy = 32 \\ xy(x+y) = 12 \end{cases}$

Введем переменные $t = x + y$ и $p = xy$.

Система примет вид

$\begin{cases} 5t + 4p = 32 \\ pt = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} 4p = 32 - 5t \\ pt = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 8 - \frac{5}{4}t \\ \left(8 - \frac{5}{4}t\right)t = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 8 - \frac{5}{4}t \\ \frac{5}{4}t^2 - 8t + 12 = 0 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 16 - 15 = 1;\ t_1 = \frac{4+1}{\frac{5}{4}} = 4;\ t_2 = \frac{4-1}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$

при $t=4$: $p=8-\frac{5}{4}\cdot 4=3$; при $t=\frac{12}{5}$: $p=8-\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{4}=5$

Итак, имеем (1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=\frac{12}{5} \\ xy=5 \end{cases}$

Решим систему (1): $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y \\ (4-y)y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=4-y \\ y=1,\ y=3 \end{cases}$ $\begin{matrix} y_1=3 \\ y_2=1 \end{matrix}$

Для $y=1$: $x=4-1=3$; Для $y=3$, $x=4-3=1$;

Решения системы (1) (3; 1), (1; 3)

Решим систему (2):

$$\begin{cases} x+y=\frac{12}{5} \\ xy=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{12}{5}-y \\ \left(\frac{12}{5}-y\right)y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{12}{5}-y \\ y^2-\frac{12}{5}y+5=0 \end{cases}$$

$$D=\frac{144}{25}-20=\frac{144-500}{25}<0$$

Решений нет.

Решениями исходной системы будут решения системы (1).

Решения: (3; 1), (1; 3).

г) $\begin{cases} 2(x+y)^2+3(x+2y)=5 \\ 3(x+2y)-2(x+y)=5 \end{cases}$

Введем переменные $t=x+y$ и $p=x+2y$.

Система примет вид: $\begin{cases} 2p^2+3t=5 \\ 3t-2p=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2p^2+3t=5 \\ 3t=5+2p \end{cases}$ $\begin{cases} 2p^2+5+2p=5 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases}$

$$\begin{cases} 2p(p+1)=0 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases} \quad \begin{cases} p=0,\ p=-1 \\ t=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}p \end{cases}$$

при $p=0$: $t=\frac{5}{3}+0=\frac{5}{3}$; при $p=-1$: $p=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$

То есть (1) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$ или (2) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Решим систему (1): $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} -x-y=0 \\ x+2y=\frac{5}{3} \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases} -x-y=0 \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Решим систему (2): $\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -x-y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Заменим второе уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} -x-y=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

Решения: $\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$, (–3; 2).

130.

а) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-y^2=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ (x+y)(x-y)=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ 6(x-y)=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$

Заменим первое уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} 2x=8 \\ x-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

Решение: (4; 2).

б) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2=5 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=y+1 \\ y^2+y-2=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y_1=1 \\ y_2=-2 \end{matrix}$

при $y=1$: $x=1+1=2$

при $y=-2$, $x=-2+1=-1$

Решения (2; 1), (–1; –2)

в) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-y^2=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ (x-y)(x+y)=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ 2(x+y)=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$

Заменим первое уравнение на сумму первого и второго

$\begin{cases} 2x=6 \\ x+y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Решение (3; 1).

г) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ (5-y)^2+y^2=17 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{cases} x=5-y \\ y^2-5y+4=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y_1=4 \\ y_2=1 \end{matrix}$

при $y=1$: $x=5-1=4$

при $y=4$, $x=5-4=1$

Решения (1; 4), (4; 1).

131.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^4-y^4=15 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ (x^2-y^2)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 3(x^2+y^2)=15 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=3+y^2 \\ 2y^2+3=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=3+y^2 \\ y^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Решения (2; 1), (2; –1), (–2; 1), (–2; –1).

б) $\begin{cases} x^2-2y^2=1 \\ x^4+3y^4=129 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ (2y^2+1)^2+3y^4=129 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ 7y^4+4y^2-128=0 \end{cases}$ - биквадратное уравнение.

$\frac{D}{4}=4+896=900$

$(y^2)_1=\frac{-2+30}{7}=4$

$(y^2)_2=\frac{-2-30}{7}=-\frac{32}{7}$, чего быть

не может, тт.к $y^2 \ge 0$

Итак $\begin{cases} x^2=2y^2+1 \\ y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 2 \end{cases}$

Решения (3; 2), (3; –2), (–3; 2), (–3; –2).

в) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=15 \\ x^4-y^4=80 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\frac{3y^2+15}{2} \\ \left(\frac{3y^2+15}{2}\right)^2-y^4=80 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2=\frac{3y^2+15}{2} \\ \frac{9y^4+90y^2+225}{4}-y^4=80 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=\frac{3y^2+15}{2} \\ \frac{9y^4+90y^2+225-4y^4-320}{4}=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{3y^2+15}{2} \\ y^4+18y^2-19=0 \text{ - биквадратное уравнение} \end{cases}$$

$\dfrac{D}{4} = 81+19 = 100;\ \left(y^2\right)_1 = \dfrac{-9+10}{1} = 1;\ \left(y^2\right)_2 = -9-10 = -19,$

чего быть не может, т.к. $y^2 \geq 0$.

Итак $\begin{cases} x^2 = \dfrac{3y^2+15}{2} \\ y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Решения (3; 1), (3; –1), (–3; 1), (–3; –1).

г) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^4+y^4=82 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 10-y^2 \\ \left(10-y^2\right)^2+y^4=82 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 10-y^2 \\ y^4-10y^2+9=0 \text{ - биквадратное уравнение} \end{cases}$$

по теореме Виета: $\left(y^2\right)_1 = 9;\ \left(y^2\right)_2 = 1$

Рассмотрим две системы

$(1)\begin{cases} x^2 = 10-y^2 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ и $(2)\begin{cases} x^2 = 10-y^2 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Решения (1)
(1; 3), (1; –3), (–1; 3), (–1; –3).

Решения (2)
(3; 1), (-3; 1), (3; -1), (–3; –1).

Решения исходной системы
(1; 3), (1; –3), (–1; 3), (–1; –3), (3; 1), (-3; 1), (3; -1), (–3; –1).
Ответ, приведенный в задачнике, неверен.

132.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ xy=20 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ y=\dfrac{20}{x};\ x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-\dfrac{400}{x^2}=9 \\ y=\dfrac{20}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x^4-9x^2-400}{x^2}=0 \\ y=\dfrac{20}{x};\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^4 - 9x^2 - 400 = 0 \\ y = \dfrac{20}{x};\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$D = 81 + 1600 = 1681 = (41)^2$$

$$\left(x^2\right)_1 = \frac{9+41}{2} = 25$$

$$\left(x^2\right)_2 = \frac{9-41}{2} = -\frac{32}{2} < 0,$$

чего быть не может, т.к. $x^2 \geq 0$.

$$\begin{cases} x^2 = 25 \\ y = \dfrac{20}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \dfrac{20}{x} \end{cases}$$

при $x = 5$ $y = \dfrac{20}{5} = 4$; при $x = -5$ $y = \dfrac{20}{-5} = -4$.

Ответ: (5; 4), (–5; –4).

б) $\begin{cases} xy = 2 \\ 9x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x},\ x \neq 0 \\ 9x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 13 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x},\ x \neq 0 \\ \dfrac{9x^4 - 13x^2 + 4}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ 9x^4 - 13x^2 + 4 = 0, x \neq 0 \end{cases}$$

$$D = 169 - 144 = 25;\ \left(x^2\right)_1 = \frac{13+5}{18} = 1;\ \left(x^2\right)_2 = \frac{13-5}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 = 1 \text{ или } x^2 = \dfrac{4}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ x = 1, x = -1, x = \dfrac{2}{3}, x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

при $x = 1$, $y = 2$; при $x = -1$, $y = -2$;

при $x = \dfrac{2}{3}$, $y = 3$;

при $x = -\dfrac{2}{3}$, $y = -3$;

Решения (1; 2), (–1; –2), ($\dfrac{2}{3}$; 3), ($-\dfrac{2}{3}$; –3).

Опечатка в ответе задачника.

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x = \dfrac{8}{y},\ y \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 + \dfrac{64}{y^2} - 20 = 0 \\ x = \dfrac{8}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{y^4 - 20y^2 + 64}{y^2} = 0 \\ x = \dfrac{8}{y} \end{cases}$

$$\begin{cases} y^4 - 20y^2 + 64 = 0, y^2 \neq 0 \\ x = \dfrac{8}{y} \end{cases} \quad \begin{aligned} &D = 100 - 64 = 36 \\ &\left(y^2\right)_1 = 10 + 6 = 16 \\ &\left(y^2\right)_2 = 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y^2 = 16 \text{ или } y^2 = 4 \\ x = \dfrac{8}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, y = -4, y = 2, y = -2 \\ x = \dfrac{8}{y} \end{cases}$$

при $y = 4; x = 2$

при $y = -4;\ x = -2$

при $y = 2;\ x = 4$

при $y = -2;\ x = -4$

Решения (2; 4), (–2; –4), (4; 2), (–4; –2).

Опечатка в ответе задачника.

г) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 34 \\ xy = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - \dfrac{400}{x^2} = 34 \\ y = \dfrac{20}{x}, x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^4 - 34x^2 - 400}{x^2} = 0 \\ y = \dfrac{20}{x},\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 - 17x^2 - 200 = 0, x^2 \neq 0 \\ y = \dfrac{20}{x} \end{cases}$$

$D = 289 + 800 = 1089 = 33^2$

$\left(x^2\right)_1 = \dfrac{17 + 33}{2} = 25$

$\left(x^2\right)_2 = \dfrac{17 - 33}{2} < 0,$

что не верно, т.к. $x^2 \geq 0$.

$$\begin{cases} x^2 = 25 \\ y = \dfrac{20}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \dfrac{20}{x} \end{cases}$$

при $x = 5,\ \ y = 4$

при $x = -5,\ \ y = -4$

Решения: (5; 4), (–5; –4)

а) $\begin{cases} x^2 - 2y = 3 \\ x^2 y = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3 + 2y \\ (3 + 2y)y - 27 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3 + 2y \\ 2y^2 + 3y - 27 = 0 \end{cases}$

$D = 9 + 216 = 225 = 15^2$

$y_1 = 3;\ y_2 = -\dfrac{9}{2}$

$$\begin{cases} x^2 = 3 + 2y \\ y = 3; y = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

при $y=3;\ x^2=9;\ x=\pm 3$

при $y=-\frac{9}{2};\ x^2=-6<0,$ – не верно, т.к. $x^2 \ge 0.$

Решения (3; 3), (–3; 3).

б) $\begin{cases} x^2+y=10 \\ x^4+x^2y=90 \end{cases}$ $\begin{cases} y=10-x^2 \\ x^4+x^2(10-x^2)=90 \end{cases}$ $\begin{cases} y=10-x^2 \\ x^2=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=\pm 3 \end{cases}$

Решения (3; 1), (–3; 1).

в) $\begin{cases} x+y^2=2 \\ 2y^2+x^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=2-x \\ 4-2x+x^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=2-x \\ (x-1)^2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$

Решения (1; 1), (1; –1).

г) $\begin{cases} x^2+y^4=5 \\ xy^2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^4=5 \\ y^2=\frac{2}{x},\ x\ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+\frac{4}{x^2}=5 \\ y^2=\frac{2}{x},\ x\ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^4-5x^2+4}{x^2}=0 \\ y^2=\frac{2}{x} \end{cases}$

$\begin{cases} x^4-5x^2+4=0, x^2\ne 0 \\ y^2=\frac{2}{x} \end{cases}$

по теореме Виета: $(x^2)_1=4;\ (x^2)_2=1$

$\begin{cases} x^2=4,\ x^2=1 \\ y^2=\frac{2}{x} \end{cases}$

Рассмотрим 4 системы

1\. $\begin{cases} x=2 \\ y^2=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=-2 \\ y^2=-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=-1 \\ y^2=-2 \end{cases}$

Вторая и четвертая системы решений не имеют.

Решения первой: (2; 1), (2; –1)

третьей: $(1;\sqrt{2}), (1;-\sqrt{2})$

Решения: (2; 1), (2; –1), $(1;\sqrt{2}), (1;-\sqrt{2})$.

134.

а) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases} 3x^2+3x=6 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x=2 \\ 2(x^2+x)-y^2-y=4 \end{cases}$

по теореме Виета:

$\begin{cases} x^2+x-2=0 \\ 4-y^2-y=4 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{matrix}$ $\begin{cases} x=1;\ x=-2 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1;\ x=-2 \\ y=0;\ y=-1 \end{cases}$

Решения: (1; 0), (1; –1), (–2; 0), (–2; –1).

б) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y=31 \\ x^2+y^2-2x-y=15 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на (–1) и заменим суммой полученного и второго.

$\begin{cases} -4y=-16 \\ x^2+y^2-2x-y=15 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $\begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{matrix}$

$\begin{cases} y=4 \\ x=-1,\quad x=3 \end{cases}$

Решения: (–1; 4), (3; 4).

в) $\begin{cases} x^2+y^2-5x+y=2 \\ 5x^2+5y^2+x+5y=36 \end{cases}$

Умножим первое уравнение на –5.

$\begin{cases} -5x^2-5y^2+25x-5y=-10 \\ 5x^2+5y^2+x+5y=36 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2-5x+y=2 \\ 5y^2+5x^2+x+5y=36 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=2+5x-y \\ 5(x^2+y^2)+x+5y=36 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+y^2=2+5x-y \\ 10+25x-5y+x+5y=36 \end{cases}$; $\begin{cases} 26x=26 \\ x^2+y^2=2+5x-y \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ 1+y^2=2+5-y \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} 3x^2+y^2+3x+y=18 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x^2+4x=24 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} x=2 \\ 4-y^2+2-y=6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ 9-y^2-3-y=6 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$.

Ответ: (2; 0); (2; –1); (–3; 0); (–3; –1).

135.

а) $\begin{cases}(x+y)^2-(x-y)-8=0\\(x+y)^2+(x-y)-10=0\end{cases}$

Введем новые переменные t=x+y, p=x–y

$\begin{cases}t^2-p-8=0\\t^2+p-10=0\end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases}t^2-p-8=0\\2t^2=18\end{cases}$ $\begin{cases}p=t^2-8\\t^2=9\end{cases}$ $\begin{cases}p=1\\t=\pm3\end{cases}$

Для пары (3; 1): $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=3-y\\3-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

Для пары (–3; 1): $\begin{cases}x+y=-3\\x-y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3-y\\-3-2y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

Решения (2; 1); (–1; –2).

б) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}\\x-y=6\end{cases}$

Пусть p=$\frac{x}{y}$. Первое уравнение примет вид:

p+$\frac{1}{p}=\frac{10}{3}$; $\frac{3p^2-10p+3}{3p}$=0; 3p^2–10p+3=0; p≠0; $\frac{D}{4}$=25–9=16;

p$_1$=$\frac{5+4}{3}$=3; p$_2$=$\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$.

при p=3: $\begin{cases}\frac{x}{y}=3\\x-y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=3y,\ y\neq0\\2y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=9\\y=3\end{cases}$

при p=$\frac{1}{3}$: $\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\\x-y=6\end{cases}$ $\begin{cases}y=3x,\ y\neq0\\-2x=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=-9\\y=-3\end{cases}$

Решения (9; 3), (–3; –9).

в) $\begin{cases}2x+y+(x-2y)^2=3\\x^2-4xy+4y^2=9-3(2x+y)\end{cases}$ $\begin{cases}(2x+y)+(x-2y)^2=3\\(x-2y)^2=9-3(2x+y)\end{cases}$

Пусть p=2x+y, t=x–2y

Тогда система примет вид: $\begin{cases} p+t^2=3 \\ t^2=9-3p \end{cases}$ $\begin{cases} p=3-t^2 \\ t^2=9-9+3t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} p=3 \\ t=0 \end{cases}$

Возвращаясь к x и y: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x=2y \end{cases}$ $\begin{cases} 5y=3 \\ x=2y \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{3}{5} \\ x=\frac{6}{5} \end{cases}$

Решение (1,2; 0,6)

г) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4} \\ x+y=10 \end{cases}$ Пусть $\frac{x}{y}=p$. Первое уравнение примет вид:

$p+\frac{1}{p}=\frac{17}{4}$.

Решим его.

$\frac{4p^2+4-17p}{p}=0$, $4p^2-17p+4=0$, $p\neq 0$, $D=289-64=225$,

$p_1=\frac{17+15}{8}=4$; $p_2=\frac{17-15}{8}=\frac{1}{4}$;

Для p=4: $\begin{cases} \frac{x}{y}=4 \\ x+y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4y,\ y\neq 0 \\ 5y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$

Для $p=\frac{1}{4}$: $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{1}{4} \\ x+y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4x,\ y\neq 0 \\ 5x=10 \end{cases}$ $\begin{cases} y=8 \\ x=2 \end{cases}$

Решения (8; 2); (2; 8).

136.

а) $\begin{cases} x^2-3x-2y=4 \\ x^2+x-3y=18 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2 \\ x^2+x-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{9}{2}x+6=18 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{11}{2}x-12=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2 \\ x^2-11x+24=0 \end{cases}$ D=121–96=25, $x_1=\dfrac{11+5}{2}=8$, $x_2=\dfrac{11-5}{2}=3$,

при x=8, $y=\dfrac{64}{2}-\dfrac{3\cdot 8}{2}-2=18$. при x=3, $y=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}-2=-2$.

Решения (8; 18); (3; –2).

б) $\begin{cases} xy+x=56 \\ xy+y=54 \end{cases}$

Умножим второе на (–1)

$\begin{cases} xy+x=56 \\ -xy-y=-54 \end{cases}$

Заменим второе уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} xy+x=56 \\ y=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2)+x=56 \\ y=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-56=0 \\ y=x-2 \end{cases}$

D=1+224=225, $x_1=\dfrac{1+15}{2}=8$, $x_2=\dfrac{1-15}{2}=-7$.

при x=8; y=8–2=6; при x=–7; y=–7–2=–9.

Решения (8; 6); (–7; –9).

в) $\begin{cases} x^2+2x+3y=3 \\ x^2+x+2y=4 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на (–1) и заменим его суммой первого и второго: $\begin{cases} x^2+2x+3y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x-3-3x=3 \\ y=-1-x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-6=0 \\ y=-1-x \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=3$; $x_2=-2$.

при x=3: y=–4; при x=–2: y=1.

Решения (3; –4); (–2; 1).

г) $\begin{cases} 3x-xy=10 \\ y+xy=6 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго.

$\begin{cases} 3x+y=16 \\ y+xy=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=16-3x \\ 16-3x+x(16-3x)=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=16-3x \\ 3x^2-13x-10=0 \end{cases}$

D=169+120=289, $x_1=\frac{13+17}{6}=5$, $x_2=\frac{13-17}{6}=-\frac{2}{3}$;

при x=5; y=1; при x=$-\frac{2}{3}$; y=18. Решения (5; 1); ($-\frac{2}{3}$; 18).

137. а) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^2+2xy+y^2=1-xy \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-2 \\ (x+y)^2=1-xy \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2-y \\ -2y-y^2=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2-y \\ y^2+2y-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $y_1=1$, $y_2=-3$,
при y=–3; x=–2+3=1, при y=+1; –2–1=–3.
Решения (–3; 1); (1; –3).

б) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x^2-4xy+y^2=2x+3y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ (2x-y)^2=2x+3y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=y+3 \\ 4y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{9}{4} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$

Решение ($\frac{9}{4}$; $\frac{3}{2}$).

в) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=x-y \\ x-3y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3y)^2=x-y \\ (x-3y)=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=1 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=y+1 \\ y+1-3y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1 \\ -2y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Решение (2; 1).

г) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x^2+4y+4y^2=2y+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ (x+2y)^2=2y+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2y+4x=4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y=2-x \\ 3x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ Ответ: ($\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$).

138.

а) $\begin{cases} xy-2x+3y=6 \\ 2xy-3x+5y=11 \end{cases}$ $\begin{cases} xy-2x+3y=6 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-y-2y+2+3y=6 \\ x=y-1 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x=y-1 \end{cases}$ при y=2, x=2–1=1, при y=–2, x=–2–1=–3.

Решения (1; 2), (–3; –2).

б) $\begin{cases} y^2+3x-y=1 \\ y^2+6x-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x=1+y-y^2 \\ y^2+2+2y-2y^2-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x=1+y-y^2 \\ y^2=1 \end{cases}$

при у=1; х=$\frac{1}{3}$; при у=–1; х=–$\frac{1}{3}$.

Решения ($\frac{1}{3}$; 1); (–$\frac{1}{3}$; –1).

в) $\begin{cases} x^2+3x-4y=20 \\ x^2-2x+y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+3x-8x+4x^2+20=20 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2-5x=0 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=2x-x^2-5 \end{cases}$ при х=0; у=–5; при х=1; у=2–1–5=–4.

Решения (0; –5); (1; –4).

г) $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ xy-2x-2y+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy-2(x+y)+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy-10+2xy+4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)=5-xy \\ xy=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y+2=0 \end{cases}$

по теореме Виета: y_1=2, y_2=1. при у=2; х=3–2=1; при у=1; х=3–1=2.
Решения (1; 2); (2; 1).

139.

а) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \frac{x-2}{y-3}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ x-2=y-3, y\neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)^2=1 \\ y-3=x-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=\pm 1 \\ y=x+1 \end{cases}$

при х–2=1; х=3; у=3+1=4; при х–2=–1; х=1; у=1+1=2.
Решения (3; 4), (1; 2).

б) $\begin{cases} (x-3)(y-2)=3 \\ \frac{y-2}{x-3}=3 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3)(y-2)=3 \\ (y-2)=3(x-3), x\neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(x-3)^2=3 \\ y=3x-7 \end{cases}$ $\begin{cases} x-3=\pm 1 \\ y=3x-7 \end{cases}$

при х-3=1; х=4; у=12–7=5; при х–3=–1; х=2; у=6–7=–1.
Решения (4; 5), (2; –1).

в) $\begin{cases} \frac{x+1}{y-3}=1 \\ (x+1)(y-3)=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1=y-3, y\neq 3 \\ (y-3)^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-4 \\ y-3=\pm 2 \end{cases}$

при у–3=2; у=5; х=5–4=1; при у–3=–2; у=1; х=–3.
Решения (1; 5), (–3; 1).

г) $\begin{cases} (x+3)(y-1)=8 \\ \frac{x+3}{y-1}=2 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+3)(y-1)=8 \\ (x+3)=2(y-1), y\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (y-1)^2=4 \\ x+3=2(y-1), y\neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y-1=\pm 2 \\ x=2y-5 \end{cases}$$

при $y-1=2$; $y=3$; $x=1$; при $y-1=-2$; $y=-1$; $x=-7$.
Решения (1; 3), (–7; –1).

140.

а) $\begin{cases} (x+2y)^2+(y-2x)^2=90 \\ (x+2y)+(y-2x)=12 \end{cases}$

Пусть $x+2y=t$, $y-2x=p$. Система примет вид:

$$\begin{cases} t^2+p^2=90 \\ t+p=12 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2+144+t^2-24t=90 \\ p=12-t \end{cases} \quad \begin{cases} t^2-12t+27=0 \\ p=12-t \end{cases}$$

$t_1=9$, $t_2=3$,
при $t=9$; $p=3$ (1); при $t=3$; $p=9$ (2);

Рассмотрим первую пару

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ y-2x=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=9-2y \\ 5y=21 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0{,}6 \\ y=4{,}2 \end{cases}$$

Рассмотрим вторую пару

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ y-2x=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-2y \\ 5y=15 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$$

Решения (–3; 3), (0,6;4,2).

б) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=15 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=56 \end{cases}$

Пусть $x+y=p$, $\dfrac{x}{y}=t$. Система примет вид: $\begin{cases} p+t=15 \\ pt=56 \end{cases} \quad \begin{cases} p=15-t \\ t^2-15t+56=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $t_1=8$, $t_2=7$,
при $t=8$; $p=7$ (1), при $t=7$; $p=8$ (2).
Рассмотрим (1)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=8 \\ x+y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8y,\ y\neq 0 \\ 9y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{56}{9} \\ y=\dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Рассмотрим (2)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=7 \\ x+y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7y,\ y\neq 0 \\ 8y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$$

Решения: $(\frac{56}{9}; \frac{7}{9})$, (7; 1).

в) $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9 \\ \frac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$ Пусть x+y=p, $\frac{x}{y}$=t. Система примет вид:

$\begin{cases} p+t=9 \\ pt=20 \end{cases}$ $\begin{cases} p=9-t \\ t^2-9t+20=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $t_1=5$, $t_2=4$,
при t=5, p=4 (1), при t=4, p=5 (2).
рассмотрим (1)

$\begin{cases} \frac{x}{y}=5 \\ x+y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5y, y\neq 0 \\ 6y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

Рассмотрим (2)

$\begin{cases} \frac{x}{y}=4 \\ x+y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4y \\ 5y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Решения: $(\frac{10}{3}; \frac{2}{3})$; (4; 1).

г) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=16 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y-x}{xy}=2 \\ \frac{(y-x)(y+x)}{xy\cdot xy}=16 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y-x}{xy}=2 \\ \frac{x+y}{xy}=8 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго

$\begin{cases} \frac{2}{x}=10 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x}=5 \\ \frac{1}{y}=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$

Решение $(\frac{1}{5}; \frac{1}{3})$.

141.

а) $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y \\ (x-y)^2-2y=3-2x \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y \\ (x-y)^2+2x=3+2y \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)-35=0 \\ (x-y)^2+2(x-y)-3=0 \end{cases}$

Пусть x+y=p, x–y=t; $\begin{cases} p^2+2p-35=0 \\ t^2+2t-3=0 \end{cases}$

по теореме Виета: $p_1=5$, $p_2=-7$, $t_1=1$, $t_2=-3$; $\begin{cases} p=5, p=-7 \\ t=1, t=-3 \end{cases}$

Всевозможные пары: (5, 1) (1), (–7; 1) (2), (5; –3) (3), (–7; –3) (4).

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ -2y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-7-y \\ -2y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5-y \\ -2y=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-7-y \\ -2y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

Решения (3; 2), (–3; –4), (1; 4), (–5; –2).

б) $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y \end{cases}$ $\begin{cases} 12(x+y)^2+(x+y)-2{,}5=0 \\ 6(x-y)^2+(x-y)-0{,}125=0 \end{cases}$

Пусть p=x+y, t=x–y. Система примет вид

$\begin{cases} 12\mathrm{p}^2+\mathrm{p}-2{,}5=0 \\ 6t^2+t-0{,}125=0 \end{cases}$

Найдем p: D=1+120=121

$p_1=\frac{-1+11}{24}=\frac{5}{12}$; $p_2=\frac{-1-11}{24}=-\frac{1}{2}$

Найдем *t*: D=1+3=4

$t_1=\frac{-1+2}{12}=\frac{1}{12}$; $t_2=\frac{-1-2}{12}=-\frac{1}{4}$

$\begin{cases} p=\frac{5}{12}, p=-\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{4}, t=\frac{1}{12} \end{cases}$

Получим 4 случая:

1) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{12} \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=\frac{1}{6} \\ y=x+\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{12} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{12} \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=\frac{1}{2} \\ y=x-\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=-\frac{3}{4} \\ y=x+\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{8} \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{2} \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=-\frac{5}{12} \\ y=x-\frac{1}{12} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{5}{24} \\ y=-\frac{7}{24} \end{cases}$

Решения: $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{5}{24}; -\frac{7}{24}\right)$

142.

$$\begin{cases} \frac{5}{x^2-xy}+\frac{4}{y^2-xy}=-\frac{1}{6} \\ \frac{7}{x^2-xy}-\frac{3}{y^2-xy}=\frac{6}{5} \end{cases}$$

Пусть $\frac{1}{x^2-xy}$=p, $\frac{1}{y^2-xy}$=t.

Система примет вид

$$\begin{cases} 5p+4t=-\frac{1}{6} \\ 7p-3t=\frac{6}{5} \end{cases} \begin{cases} p=-\frac{1}{30}-\frac{4}{5}t \\ -\frac{7}{30}-\frac{28}{5}t-3t=\frac{6}{5} \end{cases} \begin{cases} p=-\frac{1}{30}-\frac{4}{5}t \\ -\frac{43}{5}t=\frac{43}{30} \end{cases} \begin{cases} p=\frac{1}{10} \\ t=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

То есть $\begin{cases} x^2-xy=10 \\ y^2-xy=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)(x-y)=4 \\ y(x-y)=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=\pm 2 \\ y(x-y)=6 \end{cases}$

1) $\begin{cases} x-y=2 \\ y\cdot 2=6 \end{cases}$ $\begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix}$; 2) $\begin{cases} x-y=-2 \\ y(-2)=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

Решения (5; 3); (–5; –3).

б) $\begin{cases} \frac{4}{x+y-1}-\frac{5}{2x-y+3}+\frac{5}{2}=0 \\ \frac{3}{x+y-1}+\frac{1}{2x-y+3}+\frac{7}{5}=0 \end{cases}$

Пусть a=$\frac{1}{x+y-1}$, b=$\frac{1}{2x-y+3}$. Система примет вид:

$$\begin{cases} 4a-5b+\frac{5}{2}=0 \\ 3a+b+\frac{7}{5}=0 \end{cases} \begin{cases} 4a-5(-3a-\frac{7}{5})=-\frac{5}{2} \\ b=-3a-\frac{7}{5} \end{cases} \begin{cases} 19a=-\frac{19}{2} \\ b=-3a-\frac{7}{5} \end{cases} \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{10} \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x-y+3=10 \end{cases}$

Заменим первое уравнение суммой первого и второго:

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Решение (2; –3).

§ 7. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций

143.

Пусть скорости поездов равны u и v соответственно, тогда скорость их сближения равна u+v, значит $\frac{700}{u+v}$=5.

Если 2-й поезд отправится на 7 часов раньше первого, то в момент начала движения 1-го поезда между ними будет 700–7v километров, отсюда 2-е уравнение: $\frac{700-7v}{u+v}$=2. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{700}{u+v} = 5 \\ \frac{700-7v}{u+v} = 2 \end{cases} \begin{cases} 700 = 5u + 5v \\ 700 = 2v + 9v \end{cases} \begin{cases} u = 140 - v \\ 700 = 2u + 9v \end{cases}$$

700=280–2v+9v, 7v=420 ⇒ v=60⇒ u=80.

Ответ: 60 км/ч, 80 км/ч.

144.

Пусть u –скорость лодки, v – скорость течения реки, тогда имеем систему: $\begin{cases} \frac{14}{u+v} = 2 \\ \frac{14}{u-v} = 2{,}8 \end{cases} \begin{cases} 14 = 2u + 2v \\ 70 = 144 - 14v \end{cases} \begin{cases} u = 7 - v \\ 70 = 144 - 14v \end{cases}$

70=98–14v–14v, 28v=28⇒ v=1⇒u=6.

Ответ: 6 км/ч, 1 км/ч.

145.

Пусть u – скорость лодки в стоячей воде, v – скорость течения реки. Получим систему: $\begin{cases} \frac{10}{u-v} = \frac{5}{4} \\ \frac{9}{u+v} = \frac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} 8 = u - v \\ 12 = u + v \end{cases} \begin{cases} 2u = 20 \\ v = 4 - 8 \end{cases} \begin{cases} u = 10 \\ v = 2 \end{cases}$

Ответ: 10 км/ч, 2 км/ч.

146.

Пусть a и b искомые числа, тогда: $\begin{cases} a + b = 12 \\ ab = 35 \end{cases} \begin{cases} a = 12 - b \\ ab = 35 \end{cases}$

$(12-b)b=35$, $b^2-12b+35=0$
по теореме Виета: $b_1=5$, $b_2=7$.
Т. к. $a=12-b$, то $a_1=7$, $a_2=5$.
Ответ: 5 и 7.

147.

Пусть a и b – искомые числа, тогда: $\begin{cases} a+b=46 \\ a^2+b^2=1130 \end{cases}$ $\begin{cases} a=46-b \\ a^2+b^2=1130 \end{cases}$

$(46-b)^2+b^2=1130$, $2b^2-92b+2116-1130=0$. $b^2-46b+493=0$.

$D=(-46)^2-4\cdot 1\cdot 493=144$,

$b_1=\dfrac{46+12}{2}=29$, $b_2=\dfrac{46-12}{2}=17$.

$a_1=46-29=17$; $a_2=46-17=29$

Ответ: 17 и 29.

148.

Пусть a и b – искомые числа, тогда: $\begin{cases} a-b=24 \\ a\cdot b=481 \end{cases}$ $\begin{cases} a=24+b \\ a\cdot b=481 \end{cases}$

$b^2+24b-481=0$. $D_1=144+481=625$. $b_1=-12-25=-37$, $b_2=-12+25=13$.

Т. к. по условию задачи b натуральное число, то b_1 не подходит, значит $b=13 \Rightarrow a=37$.

Ответ: (37, 13).

149.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда:

$\begin{cases} a-b=16 \\ ab+553=a^2+b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=16+b \\ ab+553=a^2+b^2 \end{cases}$

$b^2+16b=256+b^2+32b+b^2-553$. $b^2+16b-297=0$. $D_1=64+297=361$.

$b_1=-8-19=-27$, $b_2=-8+19=11$. Т. к. $b \in N$, то $b=11 \Rightarrow a=27$.

Ответ: (27, 11).

150.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда:

$\begin{cases} a+b=50 \\ ab+11=a^2-b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=50-b \\ 50b-b^2+11=2500+b^2-b^2-100b \end{cases}$

$b^2-150b+2489=0$. $D_1=75^2-2489=3136=56^2$.

$b_1=75-56=19$, $b_2=75+56=131$. Тогда $a_1=31$, $a_2<0 \Rightarrow a=31$, $b=19$.

151.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-значное число, тогда

$\begin{cases} 10a+b=4(a+b) \\ 10a+b=3ab \end{cases}$ $\begin{cases} 6a-3b=0 \\ 10a+b-3ab=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=2a \\ 10a+2a-6a^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=2a \\ 2a=a^2 \end{cases}$

Решениями полученной системы является пара чисел (0, 0), (2, 4), но поскольку число 0 не принято считать двузначным, то ответом задачи является число 24.

Ответ: 24.

152.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-значное число, тогда

$$\begin{cases} 10a+b=6a+6b \\ 10a+b-ab=34 \end{cases} \begin{cases} 4a=5b \\ 40a+4b-4ab-136=0 \end{cases}$$

$50b+4b-5b^2-136=0$. $5b^2-54b+136=0$. $D=729-680=49=7^2$.

$b_1=\dfrac{27-7}{5}=\dfrac{20}{5}=4$, $b_2=\dfrac{27+7}{5}=\dfrac{39}{5}$.

По смыслу задачи $b\in N \Rightarrow b=4 \Rightarrow a=5$.

Ответ: 54.

153.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-значное число, тогда

$$\begin{cases} a+b=12 \\ 10a+b+36=10b+a \end{cases} \begin{cases} a=12-b \\ 9a+36=9b \end{cases}$$

$108-9b+36=9b$.

$18b=144$.

$b=8 \Rightarrow a=4$.

Ответ: 48.

154.

Пусть $\dfrac{a}{b}$ – искомая дробь, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{1}{2} \\ a^2+b^2=136 \end{cases} \begin{cases} 2a+2=b+1 \\ a^2+b^2=136 \end{cases} \begin{cases} b=2a+1 \\ a^2+b^2=136 \end{cases}$$

$a^2+4a^2+4a+1-136=0$. $5a^2+4a-135=0$. $D_1=16-4\cdot5(-135)=2716$.

В условии задачи опечатка.

155.

Пусть a и b – стороны прямоугольника, тогда

$$\begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \begin{cases} a=14-b \\ a^2+b^2=100 \end{cases}$$

$196+b^2-28b+b^2=100$. $b^2-14b+48=0$. $D_1=49-48=1$.

$b_1=6$, $b_2=8$, тогда $a_1=8$, $a_2=6$.

Ответ: 6 и 8 см.

156.

Пусть a и b – катеты, тогда

$$\begin{cases} a+b=49 \\ a^2+b^2=1681 \end{cases} \begin{cases} a=49-b \\ a^2+b^2-1681=0 \end{cases}$$

$2b^2-98b+2401-1681=0$. $b^2-49b+360=0$. $D=2401-1440=961=31^2$.

$b_1=49-31=18$, $b_2=49+31=60$.

$b_1 = \dfrac{49+31}{2} = 40$; $b_2 = \dfrac{49-31}{2} = 9$;

$a_1 = 49-40 = 9$; $a_2 = 49-9 = 40$;

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 9 = 180$ (м^2).

Ответ: 180 см^2.

157.

Пусть a и b –катеты, c – гипотенуза, тогда:

$$\begin{cases} a-b=23 \\ a^2+b^2=1369 \end{cases} \begin{cases} a=23+b \\ a^2+b^2-1369=0 \end{cases}$$

$529+2b^2+46b-1369=0$. $b^2+23b-420=0$. $D=529+1680=2209=47^2$.

$b_1 = \dfrac{-23+47}{2} = 12$;

$b_2 = \dfrac{-23-47}{2} = -35$ – не подходит по смыслу задачи;

$a = 23+12 = 35$; $c = \sqrt{35^2+12^2} = 37$; $p=12+35+37=84$ (дм).

Ответ: 84 дм.

158.

Пусть a и b – катеты, тогда

$$\begin{cases} a+b+37=84 \\ a^2+b^2=1369 \end{cases} \begin{cases} a=47-b \\ a^2+b^2-1369=0 \end{cases}$$

$2209+2b^2-94b-1369=0$. $b^2-47b+420=0$. $D=2209-1680=529=23^2$.

$b_1=\dfrac{47-23}{2}=12$, $b_2\dfrac{47+23}{2}=35$. $a_1=35$, $a_2=12$.

$S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\cdot 35\cdot 12=210$ (см^2).

Ответ: 210 см^2.

159.

Пусть u – скорость лодки в стоячей воде и v – скорость течения реки, тогда $\begin{cases} \dfrac{20}{u-v}+\dfrac{20}{u+v}=7 \\ \dfrac{2}{u-v}=\dfrac{5}{u+v} \end{cases}$

По смыслу задачи на u–v и u+v не равны нулю. поэтому можно умножить обе части каждого из уравнений на $u^2–v^2$, получаем:

$$\begin{cases} 20u+20v+20u-20v=7u^2-7v^2 \\ 2u+2v=5u-5v \end{cases} \quad \begin{cases} 7u^2-7v^2-40u=0 \\ 7v=3u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\frac{7}{3}v \\ 7u^2-7v^2-40u=0 \end{cases} \qquad \frac{7^3v^2}{9}-7v^2-\frac{7\cdot 40v}{3}=0.$$

$49v^2–9v^2–120v=0$. $v(v–3)=0$. По смыслу задачи $v\neq 0 \Rightarrow v=3$.

Ответ: 3 км/ч.

160.

Пусть u – скорость первого пешехода, v – второго, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{24}{u}=\frac{24}{v}-2 \\ \frac{24}{u+2}=\frac{24}{v+1}-2 \end{cases}$$

По смыслу задачи ни один из знаменателей не равен нулю, поэтому умножим 1-е уравнение на uv, и 2-е на (u+2)(v+1), получим равносильную систему: $\begin{cases} 24v-24u+2uv=0 \\ 24v+24-24u-42+24v+24+4v+u=0 \end{cases}$

Учитывая 1-е уравнение системы, 2-е можно переписать в виде:

24–42+24+4v+4=0, т. е. получим систему:

$$\begin{cases} 24v-24u+2uv=0 \\ 4v+2u-20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u=10-2v \\ 24v-24u+2uv=0 \end{cases}$$

$24v–240+48v+20v–4v^2=0$; $v^2–23v+60=0$; $D=529–240=289=17^2$;

$v_1=\frac{23-17}{2}=\frac{6}{2}=3$, $v_2=\frac{23+17}{2}=\frac{40}{2}=20$; $u_1=4$, $u_2<0$.

Ответ: 4 км/ч, 3 км/ч.

161.

Пусть в первом зале x мест в ряду, а во втором – y, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{350}{x}=\frac{480}{y}+5 \\ y=x+10 \end{cases}$$

По смыслу задачи и x и y отличны от нуля, поэтому:

$$\begin{cases} 350y-480x-5xy=0 \\ y=x+10 \end{cases}$$

$350x+3500–480x–5x^2–50x=0$; $x^2+36x–700=0$; $D=1296+2800=64^2$;

$x_1 = \frac{-36+64}{2} = 14$;

$x_2 = \frac{-36-64}{2} = -50$ – не подходит по смыслу задачи.

$y = 14 + 10 = 24$.

Ответ: 14 и 24 места.

162.

Пусть в красном зале x рядов, а в синем – y, тогда получим систему:

$\begin{cases} x = y + 2 \\ \frac{320}{x} = \frac{360}{y} - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 2 \\ 320y - 360x + 4xy = 0 \end{cases}$

$320y-360y-720+4y^2+8y=0$; $y^2-18y-180=0$; $\frac{D}{4}=16+180=196=14^2$;

$y_1=4+14=18$, $y_2<0$; $x_1=20$.

Ответ: 20 – в красном, 18 – в синем.

163.

Пусть x человек должно было сдавать экзамен по математике, тогда каждому человеку предполагалось выдать $\frac{400}{x}$ листов бумаги, получили уравнение: $\frac{400}{x}+1=\frac{400}{x-20}$.

$400x-8000+x^2-20x-400x=0$; $x^2-20x-8000=0$; $\frac{D}{4}=100+8000=8100=90^2$.

$x_1=10+90=100$, $x_2<0$.

Так как отсеялось 20 человек, то экзамен по математике сдавало 100 – 20 = 80 человек.

Ответ: 80 человек.

164.

Пусть 1-й комбайн работая один может выполнить задание за x часов, а второй за y, примем объем всей работы за 1, тогда получим систему:

$\begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 6 \\ x = y - 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 6 \\ x = y - 5 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 6x + 6y \\ y = x + 5 \end{cases}$

$x^2+5x=6x+6x+30$; $x^2-7x-30=0$; $D=49+120=169=13^2$;

$x_1 \frac{7+13}{2}=10$, $x_2<0$.

Ответ: за 10 часов.

165.

Пусть 1-я бригада может выполнить работу за x часов, а вторая – за y. Примем весь объем работы за 1. Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 8 \\ x = y - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 8x + 8y \\ y = x + 12 \end{cases}$$

$x^2+12x=8x+8x+96$; $x^2-4x-96=0$; $D_1=4+96=10^2$; $x_1=2+10=12$, $x_2<0$.

Ответ: 12 часов.

166.

Пусть 1-му экскаватору требуется x часов, а 2-му – y часов. Приняв весь объем работы за 1 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{15}{4} \\ x = y - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4xy = 15x + 15y \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$4x^2 - 16x - 15x - 15x + 60 = 0$, $2x^2 - 23x + 30 = 0$,

$D = 529 - 4 \cdot 2 \cdot 30 = 289$

$x_1 = \dfrac{23+17}{4} = 10;\quad x_2 = \dfrac{23-17}{4} = \dfrac{3}{2}$

$y_1 = 10 - 4 = 6;\ \ y_2 = \dfrac{3}{2} - 4 < 0$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: за 10 ч. и 6 ч.

167.

Пусть 1-й кран наполняет чан за x часов, а 2-й – за y, тогда

$$\begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ \dfrac{xy}{x+y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y \\ xy = x + y \end{cases}$$

$2y^2=3y$; $y(2y-3)=0$; $y=\dfrac{3}{2}=2x=3$. $x = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$

Ответ: первый – за 3, второй – за $\dfrac{3}{2}$ часа.

168.

Пусть x часов потребовалось бы 1-й машинистке и y ч. – второй. Примем весь объем работ за 1 и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{20}{3} \\ x = y - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3xy = 20x + 20y \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$3y^2–9y=20y–60+20y$; $3y^2–49y+60=0$; $D=2401–720=1681=41^2$;

$y_1=\dfrac{49-41}{5}=\dfrac{4}{3}$, $y_2=\dfrac{49+41}{6}=15$; $x_1<0$, $x_2=12$.

Ответ: 12 часов – первой, 15 – второй.

169.

Пусть 1-й тракторист вспахивает поле за x часов, а второй – за y. Приняв весь объем работы за 1, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 48 \\ \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{y}} = 100 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 48x + 48y \\ x + y = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 9600 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

$200y–y^2–9600=0$; $y^2–200y+9600=0$; $D_1=10000–9600=400=20^2$;

$y_1=100–20=80$, $y_2=120$; $x_1=120$, $x_2=80$.

Ответ: 120 часов: 80 часов.

170.

Пусть первый рабочий может выполнить задание за x часов, а второй – за y. Приняв весь объем работ за 1 получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 2 \\ \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{x}} + \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{y}} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy = 4x + 4y \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 20y - 3y^2 = 40 - 6y + 4y \\ 2x = 20 - 3y \end{cases}$$

$3y^2–22y+40=0$; $D = 484 - 4\cdot 3\cdot 40 = 4$

$y_1=\dfrac{22+2}{6}=4$, $y_2=\dfrac{22-2}{6}=\dfrac{10}{3}$; $x_1=4$, $x_2=5$.

Т. к по условию задачи $x\neq y$, то

ответ: 5 ч., 3ч. 20 мин.

171.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда получим:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ 10a + b - 9 = 10b + a \end{cases} \quad \begin{cases} 9a - 9b = 9 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 + b \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

$1+b^2+2b+b^2=13$; $2b^2+2b-12=0$;

$b^2+b-6=0$. По т. Виета $b_1=-3$, $b_2=2$.

По смыслу задачи $b>0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=3$, искомое число $10 \cdot 3 + 2 = 32$.

Ответ: 32.

172.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда получим систему:

$$\begin{cases} 10a+b+10b+a=143 \\ a^2+b^2=97 \end{cases} \quad \begin{cases} 11a+11b=143 \\ a^2+b^2=97 \end{cases} \quad \begin{cases} a=13-b \\ 169+b^2-26b+b^2=97 \end{cases}$$

$b^2-13b+36=0$

по теореме Виета: $b_1=4$, $b_2=9$; $a_1=9$, $a_2=4$.

Ответ: 94; 49.

173.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда

$$\begin{cases} b(10a+b)=376 \\ 10a+b-10b-a=45 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=5 \\ 10ab+b^2-376=0 \end{cases}$$

$50b+11b^2-376=0$; $\frac{D}{4}=625+4136=4761=69^2$;

$b_1=\frac{-25+69}{11}=4$, $b_2<0$; $a_1=9$.

Ответ: 94.

174.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое число, тогда

$$\begin{cases} 3ab=10a+b \\ 10a+b+18=10b+a \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=-2 \\ 3ab=10a+b \end{cases} \quad \begin{cases} a=b-2 \\ 3b^2-6b=10b-20+b \end{cases}$$

$3b^2-17b+20=0$; $D=289-240=49=7^2$;

$b_1=\frac{17-7}{6}=\frac{5}{3}$, $b_2=4$;

$a_1<0$, $a_2=2$.

Ответ: 24.

175.

Пусть a и b – искомые натуральные числа, тогда: $\begin{cases} ab=720 \\ a=3b+3 \end{cases}$

$3b^2+3b-720=0$; $b^2+b-240=0$; $D=1+960=961=31^2$

$b_1=\frac{-1+31}{2}=15$, $b_2<0$; $a_1=48$.

Ответ: 48 и 15.

176.

Пусть m и n – искомые натуральные числа, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 1000 \\ m = 2n + 5 \end{cases}$$

$4n^2+20n+25-n^2-1000=0$; $3n^2+20n-975=0$; $D_1=100+2925=3025=55^2$

$n_1=\dfrac{10+55}{3}=15$, $n_2<0$; $m_1=35$.

Ответ: 35 и 15.

177.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a+b) + 3 \\ 10a + b = 3ab + 5 \end{cases} \begin{cases} 6a - 3 = 3b \\ 10a + b = 3ab + 5 \end{cases} \begin{cases} b = 2a - 1 \\ 10a + 2a - 1 = 6a^2 - 3a + 5 \end{cases}$$

$2a^2-5a+2=0$; $D=25-16=9^2-3^2$

$a_1=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}$, $a_2=2$; $b_2=3$.

Ответ: 23.

178.

Пусть $\overline{ab}$ – искомое 2-е число, тогда

$$\begin{cases} 10a + b = 7(a+b) + 6 \\ 10a + b = 3ab + a + b \end{cases} \begin{cases} 3a - 6b = 6 \\ 9a = 3ab \end{cases} \begin{cases} a = 2 + 2b = 8 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ответ: 83.

179.

Пусть имеется x рельсов по 25 м и y рельсов по 12,5 м, тогда

$$\begin{cases} 25x + \dfrac{y}{2} \cdot 12{,}5 = 20000 \\ 12{,}5y + \dfrac{2}{3}x \cdot 25 = 20000 \end{cases} \begin{cases} 100x + 25y = 80000 \\ 75y + 100x = 120000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x = 80000 - 25y \\ 75y + 80000 - 25y = 12000 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{80000 - 25y}{100} \\ y = \dfrac{40000}{50} \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 600 \\ y = 800 \end{cases}$ Общее количество: 600 + 800 = 1400 (штук)

Ответ: 1400 штук.

180.

Пусть u – скорость велосипедиста, v – скорость мотоциклиста, тогда

$$\begin{cases}\frac{1}{60}v-\frac{1}{60}u=0{,}60\\ \frac{120}{u}=\frac{120}{v}+3\end{cases}\quad \begin{cases}v-u=36\\ 40v=40u+uv\end{cases}\quad \begin{cases}u=v-36\\ 40v=40v-1440+v^2-36v\end{cases}$$

$v^2-36v-1440=0$; $D=1296-4\cdot1\cdot(-1440)=84^2$;

$v_1=\frac{36+84}{2}=60$; $v_2<0$ – не подходит по условию задачи.

$u=60-36=24$ (км/ч).

Ответ: 60 км/ч, и 24 км/ч.

181.

Пусть u м/с – скорость 1-й модели, v м/с – 2-й, тогда имеем систему:

$$\begin{cases}60=21u+6v\\ 45u+30v=180\end{cases}\quad \begin{cases}20=7u+2v\\ 12-3u=2v\end{cases}\quad \begin{cases}20=7u+12-34\\ v=\frac{12-34}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}u=2\\ v=3\end{cases}$$

Ответ: 2 м/с, 3 м/с.

182.

Пусть u и v – скорости лыжников, тогда:

$$\begin{cases}\frac{2}{u}=\frac{2}{v}+0{,}1\\ \frac{4}{v}=\frac{2}{u}\end{cases}\quad \begin{cases}v=2u\\ 2v=2u+0{,}1uv\end{cases}$$

$4u=2u+0{,}1\cdot2u^2$; $u^2-10u=0$;

$u_1=0$ – не подходит по смыслу задачи.

$u_2=10$ (км/ч); $v=2\cdot10=20$ (км/ч).

Ответ: 10 и 20 км/ч.

183.

Пусть скорость велосипедиста v км/ч и t – время, через которое из A выехал мотоциклист, тогда получим систему

$$\begin{cases}\frac{20}{v}=\frac{20}{50}+t\\ t+\frac{70}{50}+\frac{6}{10}+\frac{70-\frac{10}{3}v}{50}=\frac{10}{3}\end{cases}\quad \begin{cases}t=20(\frac{1}{v}-\frac{1}{50})\\ 50t+70+30+70-\frac{10}{3}v=\frac{100}{3}\end{cases}$$

$15t-v+1=0$; $\frac{300}{v}-6-v+1=0$; $v^2+5v-300=0$; $D=25+1200=1225=35^2$;

$v_1=\frac{-5+35}{2}=15$ (км/ч), $v_2=\frac{-5-35}{2}=-20$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 15 км/ч.

184.

Пусть вторая встреча произошла на расстоянии *a* км. от пункта А. Тогда расстояние от места второй встречи до пункта В – (a + 4) км. $\Rightarrow$

Скорость 1-го пешехода $v_1 = \frac{a}{1} = a$ (км/ч).

Скорость 2-го пешехода $v_2 = \frac{a+4}{2,5} = \frac{2(a+4)}{5}$ (км/ч).

АВ = 2a + 4

2-й пешеход пришел в пункт В на 1,5 ч. позже, чем 1-й пешеход в пункт А, поэтому $\frac{2AB}{v_2} - \frac{2AB}{v_1} = 1,5$ ч., т.е.

$$\frac{2(2a+4)\cdot 5}{2(a+4)} - \frac{2(2a+4)}{a} = 1,5 \Rightarrow 9a^2 - 20a - 64 = 0$$

$\Rightarrow a_1 = 4;\ \ a_2 = -\frac{16}{9}$ – не подходит по смыслу задачи.

$v_1 = a = 4$ (км/ч); $v_2 = \frac{2(a+4)}{5} = 3,2$ (км/ч).

Ответе: $v_1 = 4$ (км/ч), $v_2 = 3,2$ (км/ч).

185.

Пусть v км/ч – скорость поезда, выходящего из А и S км – расстояние между А и В, тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{2v} = \frac{S}{2(v+40)} + 2 \\ \frac{S}{v+(v+40)} = \frac{15}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} S = \dfrac{4}{\frac{1}{v} - \frac{1}{v+40}} \\ \frac{S}{2v+40} = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{4}{40}}{\frac{v(v+40)}{2v+40}} = \frac{15}{4} \quad \frac{\frac{v(v+40)}{10}}{2v+40} = \frac{15}{4}$$

4v(v+40)=150(2v+40); $4v^2+160v-300v-6000=0$;

$4v^2-140v-6000=0$;

$D_1=70^2+24000=4900+24000=28900=170^2$

$v_1=\frac{70+170}{4} = \frac{240}{4}$=60 км/ч, $v_2<0$.

v+40=100 км/ч. $S = \frac{15(v+20)}{2} = \frac{15\cdot(60+20)}{2} = 600$ (км).

Ответ: 60 и 100 км/ч, 600 км.

186.

Пусть x м/с и y м/с – скорость точек. $x > y$ Примем за начальный момент времени – совпадения точек. тогда через 1 минуту, точка с большей скоростью пройдет на 1 круг больше, т.е. получили систему

$$\begin{cases}\frac{60}{y}-\frac{60}{x}=5\\60x=60y+60\end{cases}\quad\begin{cases}12x-12y=xy\\x=y+1\end{cases}\quad\begin{cases}12y+12-12y=y(y+1)\\x=y+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2+y-12=0\\x=y+1\end{cases}\quad\begin{cases}y=3,\ y=-4\\x=3+1=4\end{cases}$$

$y=-4$ – не подходит.

Ответ: 3м/с и 4 м/с.

187.

Пусть на реке он плыл x часов, а пешком шел y часов, тогда получим:

$$\begin{cases}x-y=4\\(\frac{90}{x})\text{—}=(\frac{10}{y})x\end{cases}\quad\begin{cases}x=y+4\\\frac{9y}{x}=\frac{x}{y}\end{cases}\quad\frac{9y}{y+4}=\frac{y+4}{y}$$

$9y^2=y^2+8y+16$; $y^2-y-2=0$.

По т. Виета $y_1=2$, $y_2=-1$.

По смыслу задачи $y>0$, поэтому $y=2\Rightarrow x=6$.

Ответ: 6 часов по реке и 2 – пешком.

188.

Пусть y км/ч – скорость катера, x км/ч – скорость течения, тогда получим:

$$\begin{cases}\frac{96}{x+y}+\frac{96}{y-x}=14\\(x+y)=\frac{4}{3}(y-x)\end{cases}\quad\begin{cases}48(y-x)+48(x+y)=7(y-x)(y+x)\\(x+y)=\frac{4}{3}(y-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}48(y-x)+64(y-x)=\frac{28}{3}(y-x)^2\\(x+y)=\frac{4}{3}(y-x)\end{cases}\quad\begin{cases}y-x=12\\y+x=\frac{4}{3}(y-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y-x=12\\y+x=16\end{cases}\quad\begin{cases}y=14\\x=2\end{cases}$$

Теперь нетрудно вычислить расстояние до места встречи по формуле:

$\frac{96}{x+y}$ – столько времени был катер в пути до поворота.

$\frac{96}{x+y}\cdot x$ – столько за это время проплыл катер.

$96-\frac{96\cdot x}{x+y}$ – такое расстояние между ними.

$\frac{96-\frac{96x}{x+y}}{y}$ – они проплывут его за столько времени.

$\left(\frac{96}{x+y}+\frac{96-\frac{96x}{x+y}}{y}\right)x$ – то, что надо найти.

$$\left(\frac{96}{2+14}+\frac{96-\frac{96\cdot 2}{2+14}}{14}\right)\cdot 2=24 \text{ (км)}$$

Ответ: 24 км.

189.

пусть 1-му для уборки требуется x часов, а второму – y часов. Тогда

$$\begin{cases} x-y=4 \\ \frac{2}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+4 \\ 6y+4x=xy \end{cases}$$

$6y+4y+16=y^2+4y$; $y^2-6y-16=0$.

По т. Виета $y_1=8$, $y_2=-2$. По смыслу задачи $y>0$, поэтому $y=8 \Rightarrow x=12$.

Ответ: 12 часов и 8 часов.

190.

Пусть бригаде учеников требуется x часов, тогда бригаде слесарей – y часов. Примем весь объем работ за 1, получим:

$$\begin{cases} x-y=15 \\ 18\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{y}=0,6 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-15 \\ 18y+6x=0,6xy \end{cases}$$

$18x-270+6x=0,6x^2-9x$; $x^2-55x+450=0$;

$D=55^2-4\cdot 450=35^2$

$x_1=\frac{55+35}{2}=45$; $x_2=\frac{55-35}{2}=10$;

$y_1=45-15=30$ (ч);

$y_2=10-15<0$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 45 часов.

191.

Пусть 1-му требуется x дней, а 2-му – y. Приняв весь объем работ за 1, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 7\cdot\frac{1}{x}+(7-\frac{3}{2})\frac{1}{y}=1 \end{cases} \begin{cases} x-y=3 \\ 14y+14x-3x=2xy \end{cases} \begin{cases} x=3+y \\ 14y+11x=2xy \end{cases}$$

$14y+33+11y=5y+2y^2$; $2y^2-19y-33=0$; $D=361+466=625=25^2$

$y_1=\frac{19+25}{4}=11$, $y_2<0$, $x_1=14$.

Ответ: 14 дней – первому, 11 дней – второму.

192.

Пусть для выполнения работы 1-й бригаде требуется x дней, а 2-й – y дней, тогда, приняв всю работу за 1, получим:

$$\begin{cases} \frac{18}{x}+\frac{18}{y}=1 \\ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}+(40-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}})\cdot\frac{1}{y}=1 \end{cases}$$

$\frac{1}{x}$ – часть работы, которую 1-я бригада выполняет за 1 день.

$$\begin{cases} 18y+18x=xy \\ \frac{2}{3}+(40-\frac{2x}{3})\frac{1}{y}=1 \end{cases} \begin{cases} 18y+18x=xy \\ \frac{2}{3}+\frac{40}{y}-\frac{2x}{3y}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18y+18x=xy \\ 2y+120-2x=3y \end{cases} \begin{cases} 18y+18x=xy \\ y=120-2x \end{cases}$$

$2160-36x+18x=120x-2x^2$; $2x^2-138x+2160=0$; $x^2-69x+1080=0$;

$D=4761-4320=441=21^2$; $x_1=\frac{69-21}{2}=24$, $x_2=\frac{69+21}{2}=45$.

$y_1=72$, $y_2=30$.

Ответ: 24 – первой и 72 – второй или 45 – первой и 30 – второй.

Опечатка в ответе задачника.

193.

Пусть бассейн наполняется за x часов, а опустошается за y часов, тогда

$$\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{1}{3(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})}=8 \end{cases} \begin{cases} x-y=2 \\ \frac{xy}{3(x-y)}=8 \end{cases} \begin{cases} x-y=2 \\ xy=48 \end{cases} \begin{cases} x=2+y \\ xy=48 \end{cases}$$

$y^2+2y-48=0$; $D_1=1+48=49=7^2$; $y_1=-1+7=6$, $y_2<0 \Rightarrow x=8$.

Ответ: за 8 – наполняет, за 6 – опустошает.

194.

Пусть u и v – скорости точек, тогда имеем систему:

$$\begin{cases}(60-3u)^2+(80-3v)^2=4900\\(60-5u)^2+(80-5v)^2=2500\end{cases}$$

$$\begin{cases}3600+9u^2+9v^2-360u-480v+6400-4900=0\\25u^2+25v^2-600u-800v+7500=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}9(u^2+v^2-40u-40v)-120v+5100=0\\u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300\end{cases}$$

$$\begin{cases}-144u-72v-2700-120v+5100=0\\u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300\end{cases}$$

$$\begin{cases}-144u-192v+2400=0\\u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300\end{cases}$$

$$\begin{cases}3u+4v=50\\u^2+v^2-40u-40v=-16u-8v-300\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=\dfrac{50-4v}{3}\\u^2+v^2-24u-32v+300=0\end{cases}$$

$2500+16v^2-400v+9v^2-3600+288v-288v+2700=0$; $25v^2-400v+1600=0$;
$v^2-16v+64=0$; $(v-8)^2=0 \Rightarrow v=8 \Rightarrow u=6$.
Ответ: 6 и 8 м/с.

195.

Пусть вкладчик первоначально положил x рублей под y% . Тогда получим

$$\begin{cases}\dfrac{x}{100}\cdot y=200\\ \dfrac{(x+\dfrac{xy}{100}+1800)(y+100)}{100}=4400\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy=20000\\20000+200y+1800y+100x+20000+180000=440000\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy=20000\\20y+x=2200\end{cases} \quad \begin{cases}x=2200-20y\\xy=20000\end{cases}$$

$-20y^2+2200y-20000=0$; $y^2-110y+1000=0$; $\dfrac{D}{4}=2025=45^2$

$y_1=55-45=10$, $y_2=55+45=100$. $x_1=2000$, $x_2=200$.
Ответ: 2000 р. под 10%/год или 200 р. под 100%/год.
Опечатка в ответе задачника.

196.

Пусть взяли x г. 40% раствора и y г. 10%-го, тогда

$$\begin{cases} x+y=800 \\ \dfrac{x}{100}\cdot 40+\dfrac{y}{100}\cdot 10=\dfrac{800}{100}\cdot 21{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=800 \\ 4x+y=1700 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=920 \\ y=800-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=300 \\ y=500 \end{cases}$$

Ответ: 300г – 40%-го раствора и 400 – 10%.

197.

Пусть было x л 40%-го и y л 60%-го раствора, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{100}\cdot 40+\dfrac{y}{100}\cdot 60=\dfrac{x+y+5}{100}\cdot 20 \\ \dfrac{x}{100}\cdot 40+\dfrac{y}{100}\cdot 60+\dfrac{5}{100}\cdot 80=\dfrac{x+y+5}{100}\cdot 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=x+y+5 \\ 4x+6y+40=7x+7y+35 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y \\ 3x+y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y \\ 15-6y+y-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: 1 литр 40%-го и 2 л 60%-го раствора.

198.

Пусть m кг – масса 3-го слитка, и ω – %-е содержание в нем меди, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{5}{100}\cdot 30+\dfrac{m}{100}\cdot \omega=\dfrac{5+m}{100}\cdot 56 \\ \dfrac{3}{100}\cdot 30+\dfrac{m}{100}\cdot \omega=\dfrac{3+m}{100}\cdot 60 \end{cases} \quad \begin{cases} 150+\omega m=280+56m \\ 90+\omega m=180+60m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega m=130+56m \\ 90+130+56m=180+60m \end{cases} \quad \begin{cases} m=10(\text{ђ‹}) \\ \omega=69(\%) \end{cases}$$

Процентное содержание меди в сплаве всех трех слитков вычислим по формуле: $100\%\dfrac{\dfrac{5}{100}\cdot 30+\dfrac{3}{100}\cdot 30+\dfrac{10}{100}\cdot 69}{5+3+10}=51\dfrac{2}{3}\%$.

Глава 3. Числовые функции

§ 9. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции

199.

а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.

200.

а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

201.

а) Знаменатель не нулевой при любых x $(-\infty; +\infty)$;
б) Знаменатель не равен 0 ни при каких x. $(-\infty; +\infty)$;
в) Из тех же соображений $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

202.

а) $x\neq7$, т. е. $(-\infty; 7)\cup(7; +\infty)$; б) $4x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-\frac{1}{4}$; $(-\infty; -\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4}; +\infty)$;

в) $x+3\neq0\Leftrightarrow x\neq-3$; $(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$;

г) $8+5x\neq0\Leftrightarrow 5x\neq-8\Leftrightarrow x\neq-\frac{8}{5}$; $(-\infty; -\frac{8}{5})\cup(-\frac{8}{5}; +\infty)$.

203.

а) $x-2\neq0$, т. е. $x\neq2$. $(-\infty; 2)\cup(2;+\infty)$;

б) $2x+1\neq0$, т. е. $x\neq-\frac{1}{2}$. $(-\infty; -\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}; +\infty)$;

в) $3-x\neq0$, т. е. $x\neq3$. $(-\infty; 3)\cup(3;+\infty)$;

г) $2+3x\neq0$, т. е. $x\neq-\frac{2}{3}$. $(-\infty;-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3}; +\infty)$.

204.

а) $x(x+1)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq-1$. $(-\infty;-1)\cup(-1; 0)\cup(0; +\infty)$;
б) $x^2(x-5)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq5$. $(-\infty;0)\cup(0; 5)\cup(5;+\infty)$;
в) $x(7-x)\neq0$, т. е. $x\neq0$, $x\neq7$. $(-\infty; 0)\cup(0; 7)\cup(7; +\infty)$;
г) $x^2(6+x)\neq0 \Leftrightarrow x\neq0$, $x\neq-6$. $(-\infty; -6)\cup(-6; 0)\cup(0; +\infty)$.

205.

а) $(x-1)(x+2)\neq0$, т. е. $x\neq1$, $x\neq-2$. $(-\infty; -2)\cup(-2; 1)\cup(1; +\infty)$;

б) $(x+50)(2x+7)\neq0$, т. е. $x\neq-50$, $x\neq-\frac{7}{2}$. $(-\infty; -50)\cup(-50; -\frac{7}{2})\cup(-\frac{7}{2}; +\infty)$.

в) $(x+12)(6x-3)\neq0$, т. е. $x\neq-12$, $x\neq\frac{1}{2}$. $(-\infty; -12)\cup(-12; \frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}; +\infty)$;

г) $(5x-4)(x-13)\neq0$, т. е. $x\neq\frac{4}{5}$, $x\neq13$. $(-\infty; \frac{4}{5})\cup(\frac{4}{5}; 13)\cup(13; +\infty)$.

206.

а) $x^2-5x+4\neq0$

по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=1$. $x\neq4$, $x\neq1$. $(-\infty;\,1)\cup(1;\,4)\cup(4;\,+\infty)$;

б) $x^2+2x-3\neq0$

по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=-3$. $x\neq1$, $x\neq-3$, $(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,1)\cup(1;\,+\infty)$;

в) $2x^2-9x+7\neq0$, $D=81-56=25$ $x_1\,\frac{9+5}{4}=\frac{7}{2}$; $x_2=\frac{9-5}{4}=1$

$x\neq1$, $x\neq\frac{7}{2}$

$(-\infty;\,1)\cup(1;\,\frac{7}{2})\cup(\frac{7}{2};\,+\infty)$;

г) $3x^2-x-10\neq0$, $D=1+120=121$

$x_1=\frac{1+11}{6}=2$; $x_2=\frac{1-11}{6}=-\frac{5}{3}$

$x\neq2$; $x\neq\frac{5}{3}$ $(-\infty;\,-\frac{5}{3})\cup(-\frac{5}{3};\,2)\cup(2;\,+\infty)$.

207.

Функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно.

а) $x-3\geq$, $x\geq3$; б) $x+11\geq0$, $x\geq-11$; в)$x+4\geq0$, $x\geq-4$; г) $2-x\geq0$, $x\leq2$

208.

а) $x^2+13>0$ всегда; б) $x^2+1>0$ всегда;

в) $x^2+24>0$ всегда; г) $22+x^2>0$ всегда.

а)–г) $(-\infty;\,+\infty)$.

209.

а) $x^2-9\geq0$, $x^2\geq9$, $|x|\geq3$, $x\geq3$, $-3\geq x$. $(-\infty;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$;

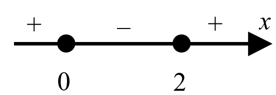
б) $7-x^2\geq0$, $x^2\leq7$, $|x|\leq\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}\leq x\leq\sqrt{7}$;

в) $x^2-144\geq0$, $x^2\geq144$, $|x|\geq12$, $x\geq12$, $x\leq-12$;

г) $20-x^2\geq0$, $x^2\leq20$, $|x|\leq\sqrt{20}$, $-\sqrt{20}\leq x\leq\sqrt{20}$.

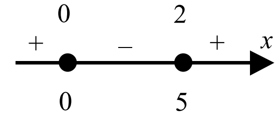
210.

а) $2x-x^2\leq0$, $x^2-2x\leq0$, $x(x-2)\leq0$, $0\leq x\leq2$



б) $\frac{1}{3}x^2-3\geq0$, $x^2-9\geq0$, $x\geq3$, $x\leq-3$ (см. 209а)

в) $x^2-5x\geq0$, $x(x-5)\geq0$, $x\geq5$, $x\leq0$

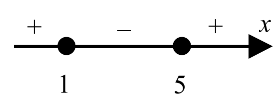


г) $\frac{1}{5}x^2-5\geq0$, $x^2\geq25$, $x\geq5$, $x\leq-5$

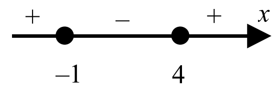
211.

а) $x^2-6x+5\geq0$

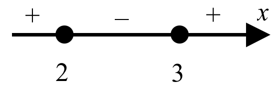
по теореме Виета:



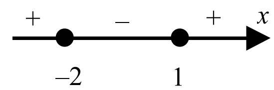
$x_1=5$, $x_2=1$, $(x-5)(x-1)\geq0$, $x\geq5$, $x\leq1$;
б) $-x^2+3x+4\geq0$
$x^2-3x-4\leq0$
по теореме Виета:
$x_1=4$, $x_2=-1$, $(x-4)(x+1)\leq0$, $-1\leq x\leq4$;



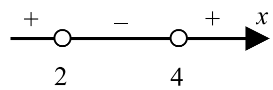
в) $x^2-5x+6\geq0$
по теореме Виета:
$x_1=3$, $x_2=2$, $(x-2)(x-3)\geq0$, $x\geq3$, $x\leq2$;



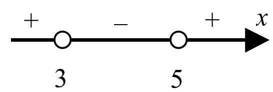
г) $-2+x+x^2\geq0$
$x^2+x-2\geq0$
по теореме Виета:
$x_1=1$, $x_2=-2$, $(x-1)(x-2)\geq0$, $x\geq1$, $x\leq-2$.



212.
а)$x-2>0$, $x>2$;
б) $x^2-6x+8>0$
по теореме Виета:
$x_1=4$, $x_2=2$, $(x-2)(x-4)>0$
$x>4$, $x<2$;



в) $x+3>0$, $x>-3$;
г) $x^2-8x+15>0$
по теореме Виета:
$x_1=5$, $x_2=3$, $(x-3)(x-5)>0$, $x>5$, $x<3$.



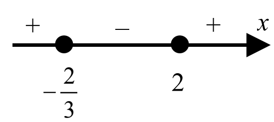
213.
а) $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$; $\begin{cases}2-x\geq0\\x+2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq2\\x>-2\end{cases}$ $-2<x\leq2$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{4x+6}}{\sqrt{3x+4}}$; $\begin{cases}4x+6\geq0\\3x+4>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq-\dfrac{3}{2}\\x>-\dfrac{4}{3}\end{cases}$ $x>-\dfrac{4}{3}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$ $\begin{cases}x+1\geq0\\x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq-1\\x>-3\end{cases}$ $x\geq-1$;

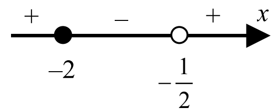
г) $y=\dfrac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{4x+8}}$ $\begin{cases}5-3x\geq0\\4x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\leq5\\4x>-8\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq\dfrac{5}{3}\\x>-2\end{cases}$ $-2<x\leq\dfrac{5}{3}$.

214.
а) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{3x+2}}$

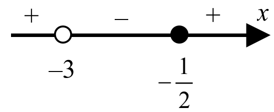


$\frac{2-x}{3x+2} \geq 0$; $\frac{x-2}{x+\frac{2}{3}} \leq 0$; $-\frac{2}{3}<x\leq 2$

б) $y=\sqrt{\frac{3x+6}{2x+1}}$

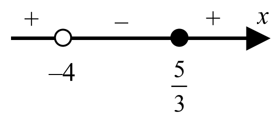


$\frac{3x+6}{2x+1} \geq 0$; $\frac{x+2}{x+\frac{1}{2}} \geq 0$; $x>-\frac{1}{2}$, $x\leq -2$



в) $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$; $\frac{2x+1}{x+3} \geq 0$; $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+3} \geq 0$

$x\geq -\frac{1}{2}$, $x<-3$;



г) $y=\sqrt{\frac{5-3x}{2x+8}}$; $\frac{5-3x}{2x+8} \geq 0$; $\frac{3(x-\frac{5}{3})}{2(x+4)} \leq 0$;

$\frac{x-\frac{5}{3}}{x+4} \leq 0$; $-4<x\leq \frac{5}{3}$.

215.

а) $y=x^2$; б) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{-x}}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x+10}}$.

216.

а) $y=\frac{1}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-1}}$; б) $y=\sqrt{(x+1)(6-x)}$;

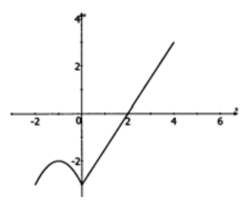
в) $y=\sqrt{x(3-x)}$; г) $y=\sqrt{(-5-x)(x+2)}$.

217.

а) $y=x$; б) $y=x^2$.

218.

а)



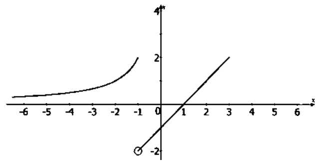
219.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ если } \le -1 \\ x-1, \text{если } \ -1 < x \le 3 \end{cases}$$

а) D (f)=(–∞; 3];

б) f(–2)=1, f(–1)=2, f(8)=–1, f(3)=2, f(7) – не существует.

в)



г) E(f)=(–2; 2].

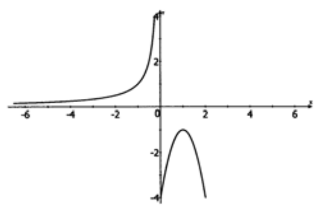
220.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{если } x<0 \\ -3x^2+6x-4, \text{если } \le x \le 2 \end{cases}$$

а) D(f)=(–∞; 2]; б) f(–3)=$\frac{1}{3}$; f(–1)=1; f(0)=–4; f(2)=–3·4+12–4=–4;

f(5) – не существует.

в)



г) E(f)=[–4; –1]∪(0; +∞).

221.

а) f(x)=$\begin{cases} x^2, \text{если} -2 \le x \le 1 \\ x+1, \text{если } 0 < x < 3 \end{cases}$. Найдем f(1). С одной стороны f(1)=1, с другой – 2. Задание некорректно.

б) f(x)= $\begin{cases} \sqrt{x}, \text{если } 0 \le x \le 4 \\ x^2, \text{если } x \ge 4 \end{cases}$

Подозрения вызывает только точка x=4. С одной стороны f(4)=2, с другой – 16. Задание некорректно.

222.

а) y=$\dfrac{1}{(x+1)(x^2-7x-8)}$; $(x+1)(x^2-7x-8)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=8$, $x_2=-1$, $(x+1)^2(x-8)\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 8$;

б) y=$\dfrac{x+1}{(x^2-9)(x^2+x-2)}$; $(x^2-9)(x^2+x-2)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=1$, $x_2=-2$, $(x-3)(x+3)(x-1)(x+2)\neq 0$.
$(-\infty; -3)\cup(-3; -2)\cup(-2; 1)\cup(1; 3)\cup(3; +\infty)$;

в) y=$\dfrac{x}{(x^2-1)(x^2-2x-15)}$; $(x^2-1)(x^2-2x-15)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=5$, $x_2=-3$, $(x-1)(x+1)(x+3)(x-5)\neq 0$,
$(-\infty; -3)\cup(-3; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; 5)\cup(5; +\infty)$;

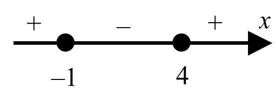
г) y=$\dfrac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$; $(x+5)(x^2-5x-6)\neq 0$;

по теореме Виета: $x_1=6$, $x_2=-1$, $(x+5)(x-6)(x+1)\neq 0$, $x\neq -5$, $x\neq -1$, $x\neq 6$.

223.

а) y=$\dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x+2}$ $\begin{cases} 3x-2\geq 0 \\ x^2-x+2\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq \dfrac{2}{3} \\ (-\infty;+\infty) \end{cases}$ D=1–8=–7<0; $x\geq \dfrac{2}{3}$;

б) y=$\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$ $\begin{cases} x^2-3x-4\geq 0 \\ 16-x^2\neq 0 \end{cases}$



по теореме Виета:, $x_1=4$, $x_2=-1$

$\begin{cases} (x-4)(x+1)\geq 0 \\ x\neq \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x\leq -1,\ x\geq 4 \\ x\neq \pm 4 \end{cases}$

$x<-4$, $-4<x\leq -1$, $x>4$;

в) y=$\dfrac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 3-2x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $-2\leq x<\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{3}{2}<x$;

г) y=$\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$ $\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ 1-2x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x|\leq 2 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $-2\leq x\leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<x<2$.

224.

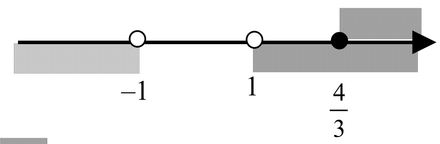
а) y=$\dfrac{3-2x}{\sqrt{5x+2}}$; 5x+2>0; $x>-\dfrac{2}{5}$;   б) y=$\dfrac{4x+5}{\sqrt{2-4x}}$; 2–4x>0; $x<\dfrac{1}{2}$;

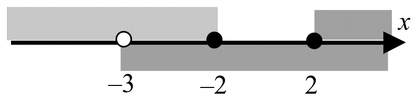
в) y=$\dfrac{4-3x}{\sqrt{x+3}}$; x+3>0; x>–3;   г) y=$\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x}}$; 4–x>0; x<4.

225.

а) y=$\frac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{x^2-1}}$; $\begin{cases}3x-4\ge 0\\ x^2-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge \frac{4}{3}\\ x^2>1\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge \frac{4}{3}\\ x>1, x<-1\end{cases}$ x≥$\frac{4}{3}$;

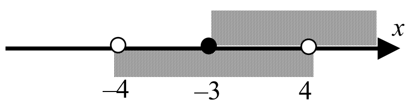




б) y=$\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+3}}$

$\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ x+3>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2\ge 4\\ x>-3\end{cases}$

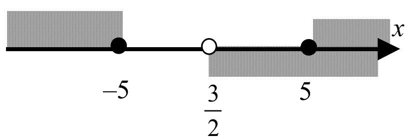
$\begin{cases}|x|\ge 2\\ x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 2,\quad x\le -2\\ x>-3\end{cases}$ –3<x≤–2, x≥2;



в) y=$\frac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{16-x^2}}$

$\begin{cases}2x+6\ge 0\\ 16-x^2>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -3\\ |x|<4\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge -3\\ -4<x<4\end{cases}$ –3≤x<4;

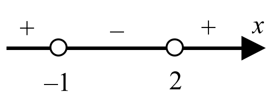


г) y=$\frac{\sqrt{2x^2-50}}{\sqrt{2x-3}}$

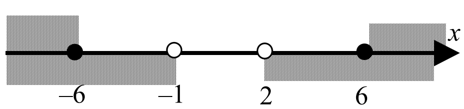
$\begin{cases}2x^2-50\ge 0\\ 2x-3>0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2\ge 25\\ x>\frac{3}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge 5,\quad x\le -5\\ x>\frac{3}{2}\end{cases}$ x≥5.

226.



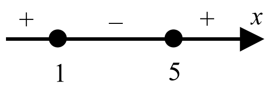
а) y=$\frac{\sqrt{x^2-36}}{\sqrt{x^2-x-2}}$



$\begin{cases}x^2-36\ge 0\\ x^2-x-2>0\end{cases}$

$$\begin{cases} |x| \geq 6 \\ (x-2)(x+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 6, x \leq -6 \\ x > 2, x < -1 \end{cases}$$ x≥6, x≤–6;

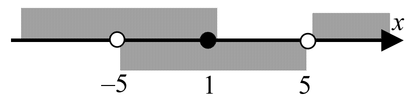


б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{25-x^2}}$; $\begin{cases} x^2-6x+5 \geq 0 \\ 25-x^2 > 0 \end{cases}$

по теореме Виета:

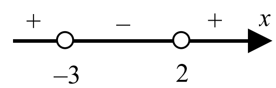
$x_1=5$, $x_2=+1$

$\begin{cases} (x-1)(x-5) \geq 0 \\ |x| < 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1, x \geq 5 \\ -5 < x < 5 \end{cases}$



–5<x≤1;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{6-x-x^2}}$

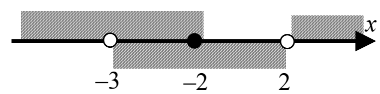


$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 6-x-x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^2+x-6 < 0 \end{cases}$

по теореме Виета:

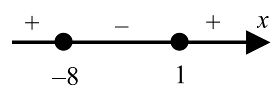
$x_1=2$, $x_2=-3$

$\begin{cases} |x| \geq 2 \\ (x-2)(x+3) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2, x \leq -2 \\ -3 < x < 2 \end{cases}$



–3<x≤–2;

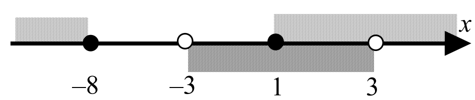
г) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+7x-8}}{\sqrt{9-x^2}}$; $\begin{cases} x^2+7x-8 \geq 0 \\ 9-x^2 > 0 \end{cases}$



по теореме Виета:

$x_1=1$, $x_2=-8$

$\begin{cases} (x-1)(x+8) \geq 0 \\ |x| < 3 \end{cases}$



$\begin{cases} x \geq 1, x \leq -8 \\ -3 < x < 3 \end{cases}$

1≤x<3.

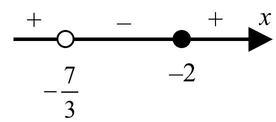
227.

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+1}}{x^2-x-2}$; $\begin{cases} 7x+1 \geq 0 \\ x^2-x-2 \neq 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=2, \quad x_2=-1$

$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{7} \\ x \ne 2, x \ne -1 \end{cases}$ $-\dfrac{1}{7} \le x < 2$, $x > 2$;

б) f(x)=$\sqrt{\dfrac{3x+7}{x+2}}$; $\dfrac{3x+7}{x+2} \ge 0$



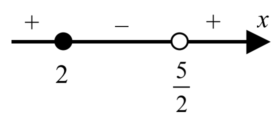
$\dfrac{x+\frac{7}{3}}{x+2} \ge 0$; $x \le -\dfrac{7}{3}$, $x > -2$.

Опечатка в ответе задачника.

в) f(x)=$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+4}$; $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x^2-5x+4 \ne 0 \end{cases}$

по теореме Виета: $x_1=4$, $x_2=1$; $\begin{cases} x \ge 2 \\ x \ne 1, x \ne 4 \end{cases}$; $2 \le x \le 4$, $x > 4$;

г) f(x)=$\sqrt{\dfrac{x-2}{5-2x}}$; $\dfrac{x-2}{5-2x} \ge 0$

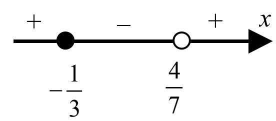


$\dfrac{x-2}{x-\frac{5}{2}} \le 0$; $2 \le x < \dfrac{5}{2}$.

228.

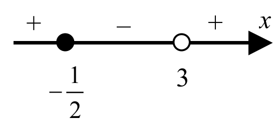
а) f(x)=$\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-3}}$; $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ x > 3 \end{cases}$; $x > 3$;

б) f(x)=$\sqrt{\dfrac{3x+1}{7x-4}}$; $\dfrac{3x+1}{7x-4} \ge 0$



$\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x-\frac{4}{7}} \ge 0$; $x > \dfrac{4}{7}$, $x \le -\dfrac{1}{3}$;

в) f(x)=$\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$; $\dfrac{2x+1}{x-3} \ge 0$



$\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x-3} \ge 0$; $x > 3$, $x \le -\dfrac{1}{2}$;

г) f(x)=$\dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{7x-4}}$; $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ 7x-4 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{4}{7} \end{cases}$ x> $\dfrac{4}{7}$.

229.

а) y= $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{9-x} \cdot \sqrt{(x-5)(x-7)}$;

б) y= $\dfrac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{10-x} \cdot \sqrt{(x-3)(x-6)}}{x-3}$;

в) y= $\dfrac{1}{\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{x^2-1}}$;

г) y= $\dfrac{\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{(x+2)(x-1)}}{\sqrt{x+5} \cdot (x+2)}$.

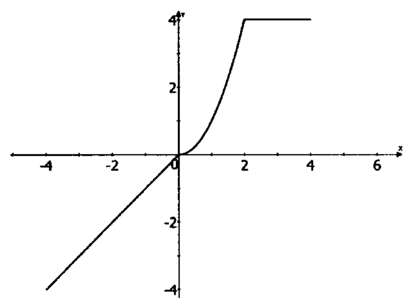
230.

y=f(x)= $\begin{cases} x, \text{если } x \le 0 \\ x^2, \text{если } 0 < \text{x} < 2 \\ 4, \text{если } \ 2 \le x \le 4 \end{cases}$

а) D(f)=(–∞; 4];

б) f(–2)=–2; f(0)=0, f(2)=4, f(4)=4, f(8) – не существует;

в)



г) E(f)=(–∞; 4].

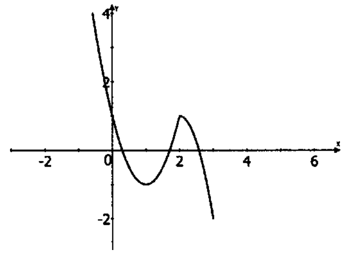
231.

y=f(x)= $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 1, \text{если } \ x \le 2 \\ -3(x-2)^2 + 1, \text{если } \ 2 < x \le 3 \end{cases}$

а) D(f)=(–∞; 3];

б) f(0)=1, f(2)=1, f(3)=–2, f(4), f(5) – не существует;

в)



г) E(f)=[–2; +∞).

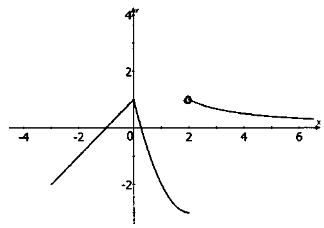
232.

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1, \text{если} -3 \le x \le 0 \\ x^2-4x+1, \text{если } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x}, \text{если } x > 2 \end{cases}$$

а) D(f)=[–3; +∞);

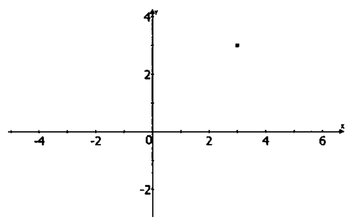
б) f(–5) – не существует; f(–2)=–1, f(0)=1, f(2)=–3, f(4)=$\frac{1}{2}$;

в)

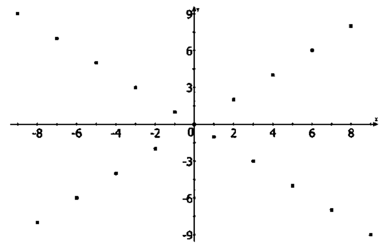


г) E(f)=[–3; 1].

233.



234.



§ 10. Способы задания функций

235.

а) Да, является. б) Да, является. На горизонтальной оси стоит у.
в) Да, является. г) Нет, не является.

236.

б), в) и г).

237.

а) Является, y=x+2; б) да, является. y=2|x|–2;
в) нет, не является; г) да, является. y=$\frac{|x-2|-|x+2|}{2}$.

238.

а) Задает. y=x^2. б) Не задает.
в) Задает. y=$\sqrt{x+4}$. г) Задает. y=$-(x+2)^2+4=-x^2-4x$.

239.

а) f(x)=–2x–2; (опечатка в ответе задачника)
б) f(x)=$(x+2)^2-2=x^2+4x+2$;
в) f(x)=$\frac{3}{2}$x+2; (опечатка в ответе задачника)
г) f(x)=$-(x-2)^2+4=-x^2+4x$.

240.

а) f(x)=$\frac{2}{x}$;
б) f(x)=$-\sqrt{x+5}$ +2;
в) f(x)=$\sqrt{x+2}$ –1; (опечатка в ответе задачника)
г) y=$-\frac{3}{x}$. (опечатка в ответе задачника)

241.

а) $S(1)=90$ (км); $S(2,5)=225$ (км); $S(4)=360$ (км);

б) $1800=90t$; $t=20$ (ч); в) 15 мин.=0,25 ч. $S=90\cdot0,25=22,5$ (км);

г) 450 м=0,45 км; $t=0,005$ ч.

242.

а) $t(36)=3$; $t(2,7)=\frac{9}{40}$; $t(144)=12$;

б) $\frac{S}{12}=4,5$; $S=54$;

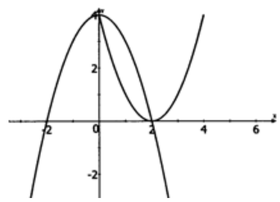
в) 150 м=0,15 км; $t(0,15)=\frac{0,15}{12}=\frac{0,05}{4}=\frac{5}{400}$ ч.;

г) 45 с$=\frac{3}{4}$ мин.$=\frac{3}{240}$ ч. $\frac{3}{240}=\frac{S}{12}$. $S=\frac{3}{20}=0,15$ (км)=150 м.

243.

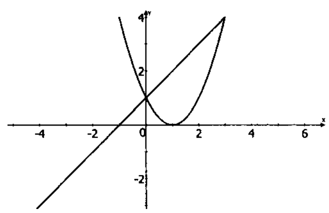
а) $-x^2+4=(x-2)^2$

Строим график правой и левой части.



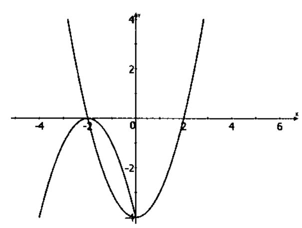
Абсциссы точек пересечения: 0; 2. Решения: 0; 2.

б) Строим график обеих частей.



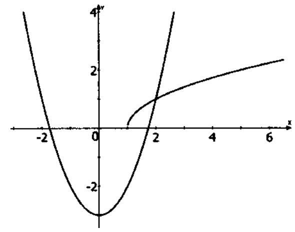
Абсциссы точек пересечения: 0; 3.

в) $x^2-4=-(x+2)^2$



Абсциссы точек пересечения: 0; −2.

г) $x^2-3=\sqrt{x-1}$



Абсциссы точек пересечения: 2.

244.

а) S(1)=6; S(2,5)=22,5; S(4)=48;

б) $240=2t^2+4t$; $t^2+2t-120=0$; $D = 4-4\cdot1(-120) = 22^2$

$t_1=\frac{-2+22}{2}=10$; $t_2=\frac{-2-2}{2}=-12$ – не подходит по смыслу задачи.

Итак, $t = 10$ (ч.)

в) 45 мин.=0,75 ч.=$\frac{3}{4}$ ч. $S=2\cdot\frac{9}{16}+4\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{16}+3=4\frac{1}{8}$ (км);

г) 350 м=0,35 км; $2t^2+4t=0,35$; $2t^2+4t-0,35=0$

$\frac{D}{4}=4+0,7=4,7$

$t_1=\frac{-2+\sqrt{4,7}}{2}$ (ч.); $t_2=\frac{-2-\sqrt{4,7}}{2}$ (ч.) – не подходит по смыслу.

245.

а) $V=\frac{1}{3}Sh$; $S=\frac{3V}{h}$; $h=\frac{3V}{S}$;

б) $V=\frac{1}{3}\cdot2\cdot1,4=\frac{2,8}{3}$ м^3;

в) 45 дм^3=0,045 м^3; $S=\frac{3\cdot0,045}{0,4}=\frac{3\cdot0,45}{4}=\frac{1,35}{4}$ м^2;

г) 2500 см^2=0,25 м^2; $h=\frac{3\cdot5}{0,25}=60.$ (м).

246.

а) $y=2x^2-1$; б) $y=-3(x+1)^2$; в) $y=-3x^2+4$; г) $y=3(x-2)^2$.

247.

а) f(1)=1; б) f(8)=2; в) f(5)=2; г) f(12)=3.

Опечатка в ответе задачника.

248.

а) f(73)=9. Опечатка в ответе задачника.

б) f(–6)=6; в) f(–3)=9; г) f(12)=4.

249.

Область значений – множество {0, 1, 4, 5, 6, 9}, вследствие того, что квадраты целых чисел оканчиваются всегда на одну из этих цифр.

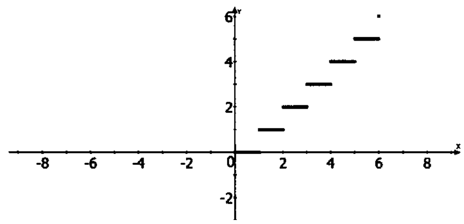
250.

а) y= f(x)= $\begin{cases} 4, \text{если } x \le -5 \\ (x+3)^2, \text{если } -5 < x < -2 \\ x+3, \text{если } x \ge -2 \end{cases}$

Опечатка в ответе задачника.

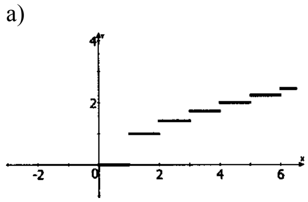
б) y= f(x)= $\begin{cases} (x+2)^2+1, \text{если -4} \le x \le -1 \\ 2\,|\,x\,|, \text{если} -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}+2, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$.

251.

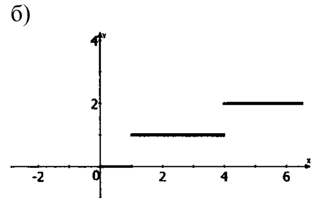


252.

а)



б)



§ 11. Свойства функций

253.

а) $f(x)=y=5x$.

Возьмем произвольные x_1, x_2, такие что $x_1<x_2$. Тогда, умножая неравенство на 5, получаем: $f(x_1)=5x_1<5x_2=f(x_2)$

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=2x+3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x \Leftrightarrow 2x_1+3<2x_2+3$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=2x-3$.

Возьмем произвольные x_1, x_2: $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-3<2x_2-3$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x}{2}+4$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}<\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2}+4<\frac{x_2}{2}+4$

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

254.

а) $f(x)=y=x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=2x^3$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=x^3+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=\frac{x^3}{2}$. Для произвольных x_1 и x_2, таких что $x_1<x_2$, имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow \frac{x_1^3}{2}<\frac{x_2^3}{2}$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

255.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\geq 0$.

Для произвольных положительных (точнее неотрицательных) x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $f(x)=y=-\frac{1}{x}$, $x<0$.

Для произвольных отрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}>-\frac{1}{x_2}$. $f(x_1)< f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $f(x)=y=-\frac{1}{x}$, $x>0$.

Для произвольных положительных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$; $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$. $f(x_1)< f(x_2)$. Функция возрастает.

г) $f(x)=y=3x^2$, $x\geq 0$.

Для произвольных неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует $x_1^2<x_2^2$; $3x_1^2<3x_2^2$. То есть $f(x_1)< f(x_2)$. Функция возрастает.

256.

а) $f(x)=-5x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow -5x_1>-5x_2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=5-2x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow -2x_1>-2x_2$. $5-2x_1>5-2x_2$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=-7x+1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow -7x_1>-7x_2$. $-7x_1+1>-7x_2+1$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=4-\frac{x}{3}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow -\frac{x_1}{3}>-\frac{x_2}{3}\Leftrightarrow 4-\frac{x_1}{3}>4-\frac{x_2}{3}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

257.

а) $f(x)=y=-x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=-3x^3$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -3x_1^3>-3x_2^3$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=-\frac{x^3}{5}$. Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -\frac{x_1^3}{5}>\frac{x_2^3}{5}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=-x^3+7$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3+7>-x_2^3+7$, $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

258.

а) $f(x)=y=x^2$, $x\le 0$.

Для отрицательных (точнее неположительных) x_1 и x_2, $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2$

$f(x_1) > f(x_2)$. Функция убывает.

б) $f(x)=y=-2x^2$, $x\ge 0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow$

$-2x_1^2>-2x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$. Функция убывает.

в) $f(x)=y=3x^2$, $x\le 0$.

Для неположительных x_1 и x_2 из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow 3x_1^2>3x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$. Функция убывает.

г) $f(x)=y=-3x^2$, $x\ge 0$.

Для неотрицательных x_1 и x_2, из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow$

$-3x_1^2>-3x_2^2$. $f(x_1)> f(x_2)$.

Функция убывает.

259.

а) Не ограничена ни сверху, ни снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу, то есть ограничена.

260.

а) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена и сверху и снизу , то есть ограничена.

261.

а) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

б) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

в) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

г) Ограничена сверху, не ограничена снизу.

262.

а) Функция возрастающая, значит наименьшее значение будет при наименьшем значении аргумента, а наибольшее – при наибольшем значении аргумента.

$y_{\min} = y(0)=3$. $y_{\max} = y(1)=5$.

б) $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 0$;

в) $y_{\min} = y(0) = 1$. Функция неограничена сверху.

г) Наименьшего значения нет. $y_{\max} = y(2) = 2$.

263.

$y=\sqrt{x}$

а) $x\in[0; +\infty)$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

Наибольшего значения нет, так как функция сверху неограничена.

б) $x\in[0; 3]$. $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(3) = \sqrt{3}$;

в) $x\in[1; 4]$. $y_{\min} = y(1) = 1$, $y_{\max} = y(4) = 2$;

г) $x\in(0; 2]$. Наименьшего значения нет. $y_{\max} = \sqrt{2}$.

264.

а) $y=\sqrt{x-4}$. $y_{\min} = 0$. Сверху функция неограничена.

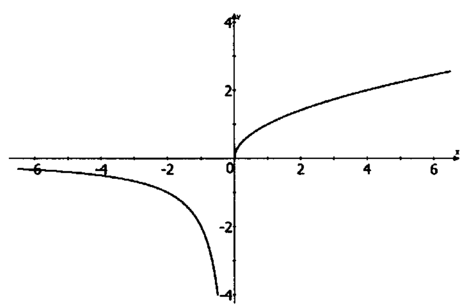
б) $y=3-\sqrt{x}$. $y_{\max} = 3$. Снизу функция неограничена.

в) $y=\sqrt{x}+2$. $y_{\min} = y(0) = 2$. Сверху функция неограничена.

г) $y=4-\sqrt{x}$. $y_{\max} = y(0) = 4$. Снизу функция неограничена.

265.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}, \text{если } x < 0 \\ \sqrt{x}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}.$$

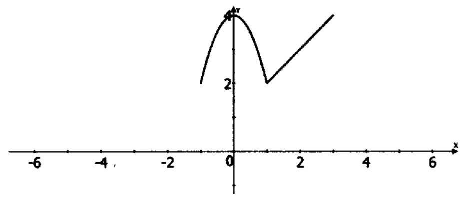


1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Убывает при x<0. Возрастает на [0; +∞).
3) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
4) Нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.
5) Непрерывна на (–∞; 0).
Непрерывна на (0; +∞).
6) E(f) =(–∞; +∞).

7) На $(-\infty; 0)$ выпукла вверх.
На $[0; +\infty)$ выпукла вверх.

266.

$$f(x)=\begin{cases}4-2x^2, \text{если } -1 \le x \le 1\\ x+1, \text{если } 1 < x \le 3\end{cases}$$



1) D(f)=[–1; 3].
2) Возрастает на [–1; 0] и на [1; 3]. Убывает на [0; 1].
3) Ограничена.
4) Наибольшее значение $f_{\max} = 4$. Наименьшее: $f_{\min} = 2$
5) Непрерывна на [–1; 3].
6) E(f)=[2; 4].
7) Выпукла вверх на [–1; 1].
На [1; 3] функцию можно считать как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

267.
а) $y=x^3+3x$.
Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
$x_1<x_2$; $3x_1<3x_2$, $x_1^3<x_2^3$.
Сложим эти неравенства: $x_1^3+3x_1<x_2^3+3x_2$; $f(x_1)<f(x_2)$.
Функция возрастает.
б) $y=x^4+3x$, $x\ge0$.
Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^4<x_2^4$ и $3x_1<3x_2$.
Сложим эти неравенства.
$x_1^4+3x_1<x_2^4+3x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.
в) $y=2x^3+x$.
Возьмем произвольные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^3+x_1<2x_2^3+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.
г) $y=2x^4+x$, $x \ge 0$.
Возьмем произвольные неотрицательные x_1 и x_2. Пусть $x_1<x_2$.
Тогда $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow 2x_1^4<2x_2^4$. Сложим последнее неравенство с неравенством $x_1<x_2$. $2x_1^4+x_1<2x_2^4+x_2$. $f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

268.

а) $y=\frac{x-5}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}-\frac{8}{x+3}=1-\frac{8}{x+3}$, $x>-3$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-3; +\infty)$ имеем:

$x_1<x_2$

$0<x_1+3<x_2+3$

$-\frac{8}{x_1+3}<-\frac{8}{x_2+3}\Leftrightarrow 1-\frac{8}{x_1+3}<1-\frac{8}{x_2+3}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

б) $y=\frac{2-x}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}+\frac{1}{1-x}=1-\frac{1}{1-x}$; $x<1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-\infty; 1)$ имеем:

$1-x_1>1-x_2>0$

$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2}$; $1-\frac{1}{1-x_1}<1-\frac{1}{1-x_2}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

в) $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$; $x>1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(1; +\infty)$ имеем:

$0<x_1-1<x_2-1$

$\frac{2}{x_1-1}>\frac{2}{x_2-1}$; $1-\frac{2}{x_1-1}<1-\frac{2}{x_2-1}$.

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

Задание некорректно.

г) $y=\frac{6-x}{2-x}=\frac{2-x}{2-x}+\frac{4}{2-x}$, $x<2$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$, из промежутка $(-\infty; 2)$ имеем:

$2-x_1>2-x_2>0$

$\frac{4}{2-x_1}<\frac{4}{2-x_2}$; $1+\frac{4}{2-x_1}<1+\frac{4}{2-x_2}$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

269.

а) $y=-x^3-2x$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:

1. $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -x_1^3<-x_2^3$

2. $-2x_1>-2x_2$

Складывая неравенства, получаем $-x_1^3-2x_1>-x_2^3-2x_2$;

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $y=x^6-0,5x$, $x\leq 0$.

Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:
$x_1^6>x_2^6$; $-0,5x_1>-0,5x_2$
Складывая эти неравенства, получаем
$x_1^6-0,5x_1>x_2^6-0,5x_2$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
в) $y=x^4-5x$, $x\le 0$.
Для произвольных неположительных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем:
$x_1^4>x_2^4$;
$-5x_1>-5x_2$
Сложим эти неравенства.
$x_1^4-5x_1>x_2^4-5x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.
г) $y=-3x^5-x$.
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ имеем: $-3x_1^5>-3x_2^5$; $-x_1>-x_2$
Сложим эти неравенства.
$-3x_1^5-x_1>-3x_2^5-x_2$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

270.

а) $y=\frac{x-5}{4-x}=-(\frac{5-x}{4-x})=-(\frac{4-x}{4-x}+\frac{1}{4-x})=-1-\frac{1}{4-x}=-1+\frac{1}{x-4}$, $x>4$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(4;+\infty)$ имеем:
$0<x_1-4<x_2-4$;

$\frac{1}{x_1-4}>\frac{1}{x_2-4}$; $-1+\frac{1}{x_1-4}>-1+\frac{1}{x_2-4}$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

б) $y=\frac{2-3x}{2+x}=-(\frac{3x-2}{2+x})=-(\frac{3x+6}{x+2}+\frac{8}{x+2})=-2+\frac{8}{x+2}$, $x<-2$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(-\infty;-2)$ имеем:
$x_1+2<x_2+2<0$;

$\frac{8}{x_1+2}>\frac{8}{x_2+2}$; $-2+\frac{8}{x_1+2}>-2+\frac{8}{x_2+2}$.

$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

в) $y=\frac{x+3}{1-x}=-(\frac{-3-x}{1-x})=-(\frac{1-x}{1-x}+\frac{-4}{1-x})=-1+\frac{4}{1-x}$, $x>1$.

Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(1;+\infty)$ имеем:
$1-x_1>1-x_2$

$\frac{4}{1-x_1}<\frac{4}{1-x_2}$; $-1+\frac{4}{1-x_1}<-1+\frac{4}{1-x_2}$;

$f(x_1)<f(x_2)$ – функция возрастает задача некорректна.

Функция убывает.

г) $y=\frac{6-3x}{3+x}=-(\frac{3x-6}{3+x})=-(\frac{3x+9}{x+3}-\frac{15}{x+3})=-3+\frac{15}{x+3}$, $x<-3$.

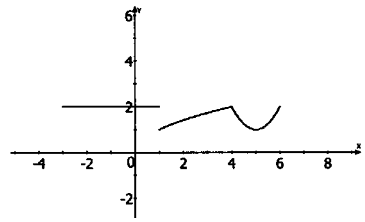
Для произвольных x_1 и x_2, $x_1<x_2$ из промежутка $(-\infty; -3)$ имеем:
$x_1+3<x_2+3<0$;
$\frac{15}{x_1+3}>\frac{15}{x_2+3}$; $-3+\frac{15}{x_1+3}>-3+\frac{15}{x_2+3}$.
$f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

271.
а) $y=x^2+4x-3$. Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{4}{2}=-2$. $y_{\min}=y_0=4-8-3=-7$. Наибольшего не существует.
б) $y=-4x^2-12x+1$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{-12}{-8}=-\frac{3}{2}$. $y_{\max}=y_0=-4\cdot\frac{9}{4}+12\cdot\frac{3}{2}+1=10$.
Наименьшего не существует.
в) $y=9x^2+6x-5$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$. $y_{\min}=y_0=9\cdot\frac{1}{9}-6\cdot\frac{1}{3}-5=-6$.
Наибольшего не существует.
г) $y=-x^2+8x-12$.
Пусть (x_0, y_0) – вершина параболы.
$x_0=-\frac{-8}{-2}=4$. $y_{\max}=y_0=-16+32-12=4$. $y_{\min}$ не существует.

272.
а) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1]$.
y будет наименьшим (наибольшим) при $|x|$ наименьшем (наибольшем)
$|x|_{наим}=0$; $|x|_{наиб}=5$; $y_{наим}=3$; $y_{наиб}=8$.
б) $y=-|4x|+1$, $x\in(-6; 2]$.
y будет наибольшим (наименьшим) при $|4x|$ наименьшем (наибольшем).
$|4x|_{наиб}$ – не существует; $|4x|_{наим}=0$
$y_{наим}$ – не существует; $y_{наиб}=1$.
в) $y=-|2x|-1$, $x\in[-1; 1]$.
y будет наибольшим при $|2x|$ наименьшем $|2x|_{наим}=0$, $y_{наим}=-3$.
г) $y=|x|+3$, $x\in[-5; 1)$.
y будет наибольшим (наименьшим) при $|x|$ наибольшем (наименьшем)
$|x|_{наиб}=5$, $y_{наиб}=8$, $|x|_{наим}=0$, $y_{наим}=3$.

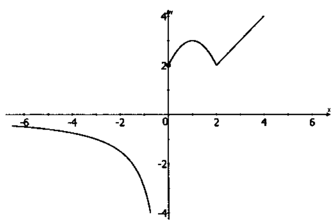
273.

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{если } -3\le x\le 1\\ \sqrt{x}, \text{если } 1<x\le 4\\ (x-5)^2+1, \text{если } 4<x\le 6\end{cases}$$



1) D(f) =[–3; 6]
2) На [–3; –1] постоянна.
На [3; 4] и на [5; 6] возрастает.
На [4; 5] убывает.
3) Ограничена.
4) $y_{наиб}$=2, $y_{наим}$=1.
5) Непрерывна на [–3; 1).
Непрерывна на (1; 6].
6) E(f)=[1; 2].
7) На [1; 4] выпукла вверх. На [4; 6] выпукла вниз.
На [–3; 1] можно считать выпуклой как вверх так и вниз.

274.



$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}, \text{если } x<0\\ -x^2+2x+2, \text{если } 0\le x\le 2\\ x, \text{если } 2<x\le 4\end{cases}$$

1) D(f) =[–∞; 4]
2) На [–∞; 0] и на [1; 2] убывает.
На [0; 1] и на [2; 4] возрастает.
3) Ограничена сверху, неограничена снизу.
4) $y_{наиб}$=4; $y_{наим}$ – не существует.
5) Непрерывна на (–∞; 0). Непрерывна на (0; 4].
6) E(f)=(–∞; 0)∪[2; 4].
7) На [–∞; 0] и на [0; 2] выпукла вверх.
На [2; 4] выпукла как вверх, так и вниз.

§ 12. Четные и нечетные функции

275.

а) Да, симметрично. б) Да, симметрично.
в) Нет, не симметрично. г) Нет, не симметрично.

276.

а) Нет, не симметрично. б) Нет, не симметрично.

в) Нет, не симметрично. г) Нет, не симметрично.

277.

а) $f(x)=3x^2+x^4$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=3(-x)^2+(-x)^4=3x^2+x^4=f(x)$. Функция четная.
б) $f(x)=4x^6-x^2$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=4(-x)^6-(-x)^2=4x^6-x^2=f(x)$. Функция четная.
в) $f(x)=2x^8-x^6$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=2(-x)^8-(-x)^6=2x^8-x^6=f(x)$. Функция четная.
г) $f(x)=5x^2+x^{10}$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=5(-x)^2+(-x)^{10}=5x^2+x^{10}=f(x)$. Функция четная.

278.

а) $f(x)=x^2(2x^2-x^3)$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^2(2(-x)^2-(-x)^3)=x^2(2x^2+x^3)$.
В точке $x=1$ $f(x)=1(2-1)=1$; $f(-x)=1(2+1)=3$; $f(x)\neq f(-x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.
Функция ни четная, ни нечетная. Задание не корректно.

б) $f(x)=\frac{x^4+1}{2x^3}$; $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\frac{(-x)^4+1}{2(-x)^3}=-\frac{x^4+1}{2x^3}=-f(x)$. Функция нечетная.

в) $f(x)=x(5-x^2)$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=-x(5-(-x)^2)=-x(5-x^2)=-f(x)$. Функция нечетная.

г) $f(x)=\frac{3x}{x^6+2}$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.

$f(-x)=\frac{3(-x)}{(-x)^6+2}=-\frac{3}{x^6+2}=-f(x)$. Функция нечетная.

279.

$f(x)=x^2+x$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x^2)-x=x^2-x$, при $x=1:\ f(1)=2,\ f(-1)=0$
$f(-x)\neq f(x)$? $f(-x)\neq -f(x)$. Функция ни четная, ни нечетная.

280.

а) $f(x)=y=x^2$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Функция четная.
б) $f(x)=y=x^7$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^7=-x^7=f(x)$. Функция нечетная.
в) $f(x)=y=x^6$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.
$f(-x)=(-x)^6=x^6=f(x)$. Функция четная.
г) $f(x)=y=x^3$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрично.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = f(x)$. Функция нечетная.

281.

а) $f(x) = y = |x|$, $x \in [-1; 1]$; $D(f) = [-1; 1]$ – симметрично.
$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Функция четная.
б) $f(x) = y = x^5$, $x \in [-3; 3)$; $D(f) = [-3; 3)$ – не симметрично.
Функция ни четная, ни нечетная.
в) $f(x) = y = |x|$, $x \in [-2; 2)$; $D(f) = (-2; 2)$ – не симметрично.
Функция ни четная, ни нечетная.
г) $f(x) = x^5$, $x \in [-4; 4]$; $D(f) = [-4; 4]$ – симметрично.
$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$. Функция нечетная.

282.

а) $f(x) = y = 2x^3$, $x \in [-2; 2]$; $D(f) = [-2; 2]$ – симметрично.
$f(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3 = -f(x)$. Функция нечетная.
б) $f(x) = y = -x^2$, $x \in [-1; 0]$; $D(f) = [-1; 0]$ – не симметрично.
Функция ни четная, ни нечетная.
в) $f(x) = -x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$; $D(f) = (-\infty; \infty)$ – симметрично.
$f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$. Функция четная.
г) $f(x) = y = 2x^3$, $x \in [-3; 3)$; $D(f) = [-3; 3)$ – не симметрично.
Функция ни четная, ни нечетная.

283.

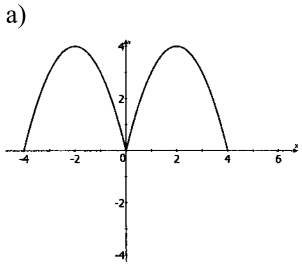
а) Четная. б) Нечетная.
в) Нечетная. г) Четная.

284.

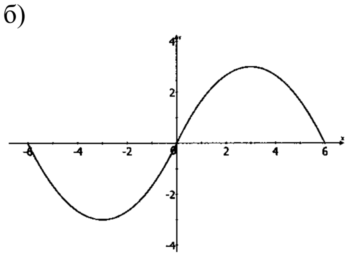
а) Нечетная. б) Ни четная, ни нечетная.
в) Четная. г) Ни четная, ни нечетная.

285.

а)

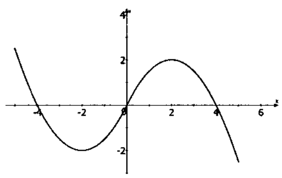


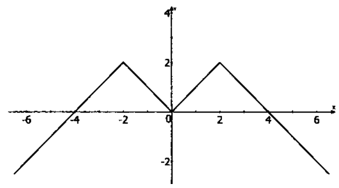
б)



в)

г)





286.

а) График f(x) симметричен относительно оси ординат. Значит направления монотонности при $x>0$ и $x<0$ противоположны.
То есть при $x<0$ функция убывает.
б) Из тех же соображений, что и в п. а) функция возрастает при $x<0$.
в) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$, и рассмотрим $f(x_1)$ и $f(x_2)$
$f(x_1)=-f(-x_1)$; $f(x_2)=-f(-x_2)$.
Но $0<-x_2<-x_1$, а функция возрастает при $x>0$.
Значит, $f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow -f(-x_1)<-f(-x_2)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Функция возрастает при $x<0$.
г) Возьмем произвольные x_1 и x_2, $x_1<x_2<0$.
Так как функция нечетная, то $f(-x_1)=-f(x_1)$; $f(-x_2)=-f(x_2)$.
Так как $0<-x_2<-x_1$, и функция убывает при $x>0$, то $f(-x_1)>f(-x_2)$;
$-f(x_1)<-f(-x_2)$. $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает при $x<0$.

287.

а) Можно. б) Нельзя.

288.

а) Можно. б) Нельзя. Ответ в задачнике неверен.

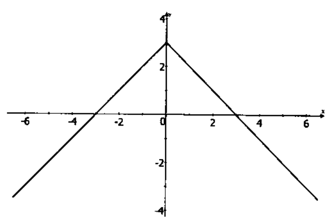
289.

а) Нельзя. Ответ в задачнике неверен. б) Можно.

290.

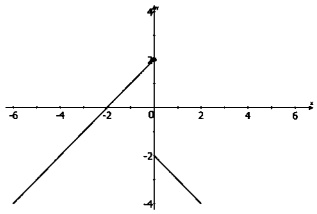
а) Нельзя. б) Можно.

291.



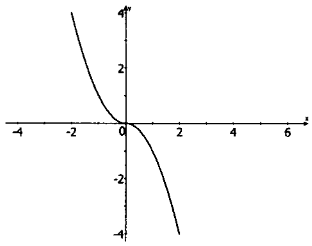
Четная.

292.



Ни четная, ни нечетная.

293.



Нечетная.

294.

а) f(x)=y=$\sqrt{x+1}$; D(f)=[–1; +∞) – не симметрично.
Ни четная, ни нечетная.

б) f(x)=y=$\frac{x-2}{x^2-1}$; D(f)=[–∞; –1)∪(–1; 1)∪(1; +∞) – симметрично.

f(–x)=$\frac{-x-2}{(-x)^2-1}=\frac{-x-2}{x^2-1}$.

При x=2, f(–x)=–4, f(x)=0. f(–x)≠ f(x), f(–x)≠ –f(x).
Ни четная, ни нечетная.

в) f(x)=y=$\sqrt{x-5}$; D(f)=[5; +∞) – не симметрично.
Ни четная, ни нечетная.

г) f(x)=y=$\frac{x+2}{x^2-16}$; D(f)=[–∞; –4)∪(–4; 4)∪(4; +∞) – симметрично.

Возьмем x=2. f(2)=$\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$.

f(–2)=0, f(2)≠ f(–2), f(–2)≠– f(2). Функция ни четная, ни нечетная.

295.

а) f(x)=$4x-2x^3+6x^5$. D(f)=(–∞; +∞) – симметрично.
f(–x)=$4(-x)-2(-x)^3+6(-x)^5=-(4x-2x^3+6x^5)$= –f(x). Функция нечетная.

б) f(x)=y=$\frac{x-2}{x^2+4}$; D(f)=(–∞; +∞) – симметрично.

Возьмем x=2. f(2)=0; f(–2)=$-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$.

f(–2)≠f(2), f(–2)≠– f(2). Функция ни четная, ни нечетная.

в) f(x)=$\sqrt{x}$; D(f)=[0; +∞) – не симметрично.

Функция ни четная, ни нечетная.

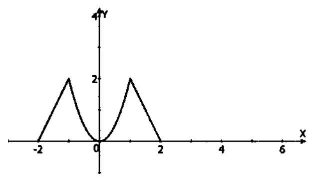
г) f(x)=y=$\frac{x^2+8}{x^2-9}$; D(f)=(–∞; –3)∪(–3; 3)∪(3; +∞) – симметрично.

f(–x)=$\frac{(-x)^2+8}{(-x)^2-9}=\frac{x^2+8}{x^2-9}$=f(x). Функция четная.

296.

f(x)=$4x^4-x^3+2x^2-x+5$. f(x)= $f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=4x^4+2x^2+5$ – четная, $f_2(x)=-x^3-x$ – нечетная.

297.



f(x)=$\begin{cases} 2x+4, \text{ если } -2 \le x \le -1 \\ 2x^2, \text{ если } -1 < x \le 1 \\ -2x+4, \text{ если } 1 < x \le 2 \end{cases}$

1) D(f)=[–2; 2].

2) Четная.

3) Возрастает на [–2; –1] и на [0; 1].

Убывает на [–1; 0] и на [1; 2].

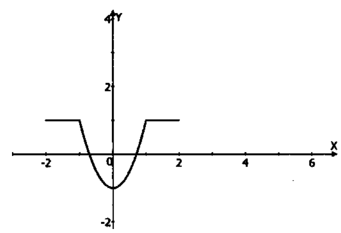
4) Ограничена. 5) $y_{наим}=0$; $y_{наиб}=2$.

6) Непрерывна. 7) E(f)=[0; 2].

8) На [–1; 1] выпукла вниз. На [–2; 1] и на [1; 2] функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

298.

f(x) $\begin{cases} 1, \text{ если } -2 \le x \le -1 \\ 2x^2-1, \text{ если } -1 < x \le 1 \\ 1, \text{ если } 1 < x \le 2 \end{cases}$



1) D(f)=[–2; 2].

2) Четная.

3) Возрастает на [0; 1]. Убывает на [–1; 0].

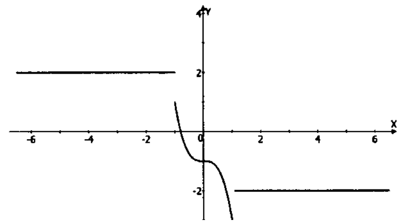
Постоянна на [–2, –1] и на [1; 2]

4) Ограничена.

5) $y_{наим}$=–1; $y_{наиб}$=1.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[–1; 1].
8) На [–1; 1] выпукла вниз. На [–2; –1] и на [1; 2] функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

299.

$$f(x)=\begin{cases} 2, \text{если } x \le -1 \\ -2x^3-1, \text{если } -1 < x \le 1 \\ -2, \text{если } x > 1 \end{cases}$$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Убывает на [–1; 1].
На (–∞; –1] и на (1; +∞) функция постоянна.
4) Ограничена.
5) $y_{наим}$=–3; $y_{наиб}$=2.
6) Непрерывна на (–∞; –1), на (–1; 1) и на (1; +∞).
7) E(f)=[–3; 1]∪{2}.
8) На (–1; 0) выпукла вниз. На (–∞; –1] и на [1; +∞) функцию можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

300.
а) Четная.
$h(-x)=f(-x)\ g^2(-x)=f(x)\ (-g(x))^2=f(x)\ g^2(x)=h(x)$;
б) h(–x)=f(–x)–g(–x)=f(x)– g(x)=h(x), четная;
в) h(–x)=f(–x)+g(–x)=–f(x)– g(x)=–h(x), нечетная;
г) h(–x)=f(–x)· g(–x)=–f(x)·(–g(x))=f(x)g(x)=h(x), четная.

301.
$h(x)=3+x^2$.

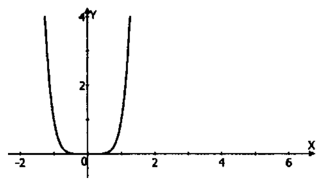
302.
$h(x)=-4-3x^2$. Ответ в задачнике неверен.

303.
а) $h(x)=3-2x^2$.   б) $h(x)=-3+2x^2$.

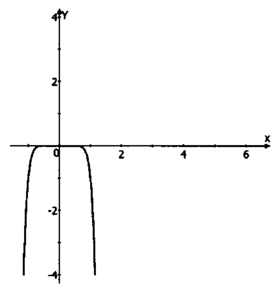
304.
а) $h(x)=1+x^2$;
б) не существует, т.к. f(0) должно быть равным 0 (в данном случае).

§ 13. Функции $y = x^n$ ($n \in N$), их свойства и графики

305.

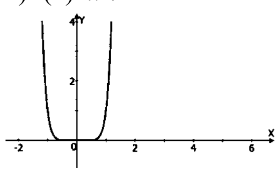


а) $f(x)=y=x^6$.
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(0; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; 0)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует. 6) Функция непрерывна.
7) $E(f)=[0; +\infty)$. 8) Выпукла вниз.

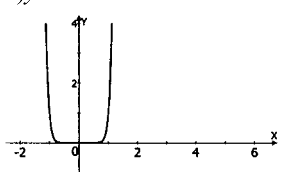


б) $f(x)=-x^{10}$.
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена сверху, не ограничена снизу.
5) $y_{\text{наиб}}=0$, $y_{\text{наим}}$ – не существует.
6) Функция непрерывна.
7) $E(f)=(-\infty; 0]$. 8) Выпукла вверх.

в) $f(x)=x^8$.



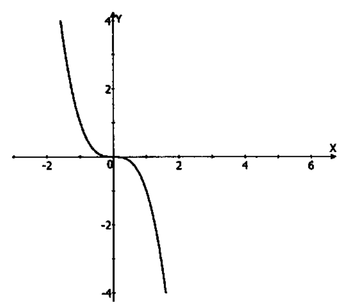
Свойства в точности такие же, что и в пункте а).
г) $y=x^{12}$.

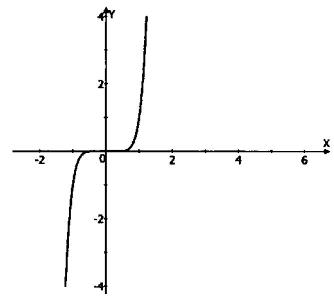


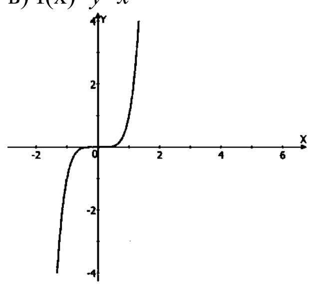
Свойства в точности такие же, что и в пункте а).

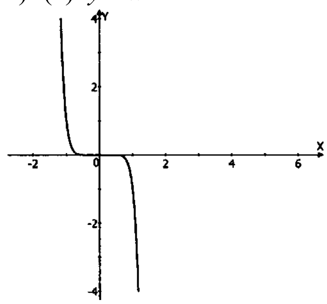
306.

а) $f(x)=y=-x^3$
1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Нечетная.



3) Убывает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=(–∞; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0].
Выпукла вверх на [0; +∞).
б) f(x)=y=x^7


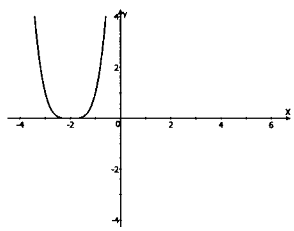
1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Нечетная.
3) Возрастает.
4) Не ограничена ни сверху, ни снизу.
5) $y_{наиб}$, $y_{наим}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=(–∞; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0].
Выпукла вверх на [0; +∞).
в) f(x)=$y=x^5$


Свойства в точности те же. что и в предыдущем пункте.
г) f(x)=$y=-x^9$


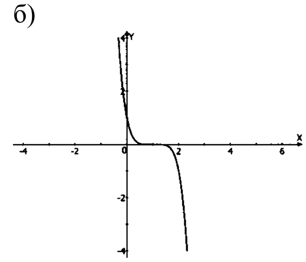
Свойства в точности те же. что и в пункте а.

307.

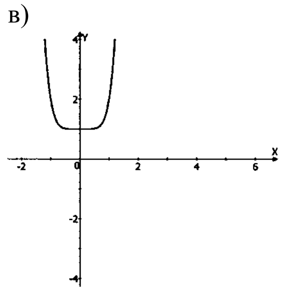
а)



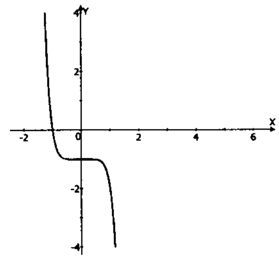
б)



в)

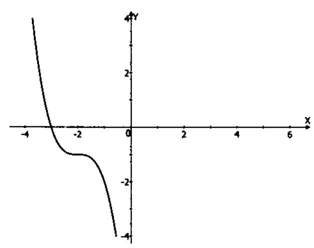


г)

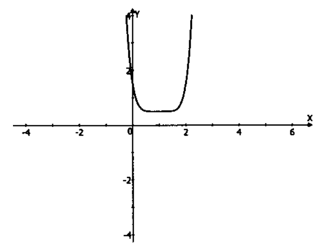


308.

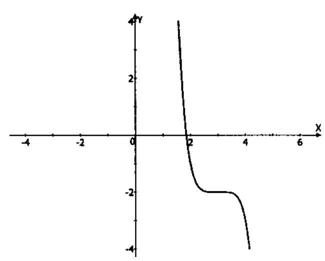
а)



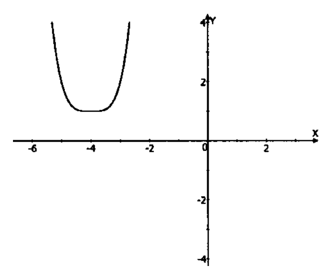
б)



в)



г)



309.

а) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=1$; б) $y_{\text{наим}}=\frac{1}{64}$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует;

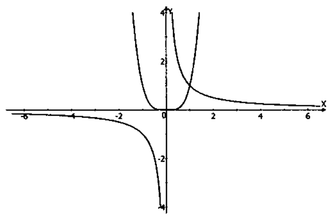
в) $y_{\text{наим}}=0$, $y_{\text{наиб}}=64$; г) $y_{\text{наим}}=729$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.

310.

а) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}=1$; б) $y_{\text{наиб}}=0$, $y_{\text{наим}}$ – не существует;
в) $y_{\text{наим}}$ – не существует, $y_{\text{наиб}}=243$; г) $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}$ – не существует.

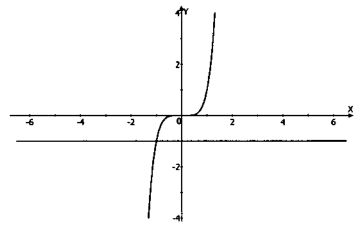
311.

а)



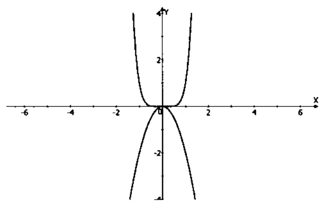
Точка пересечения (1; 1);

б)



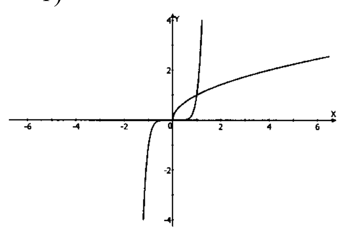
Точка пересечения (−1; −1);

в)



Точка пересечения (0; 0).

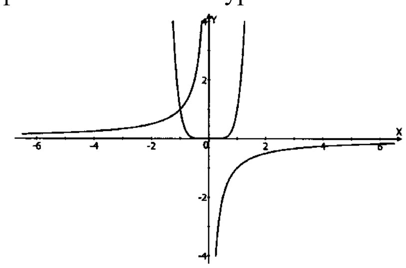
г)



Точка пересечения (0; 0) и (1; 1).

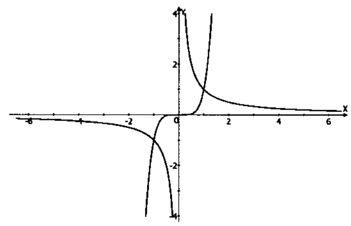
312.

а) Построим графики обеих частей уравнения.



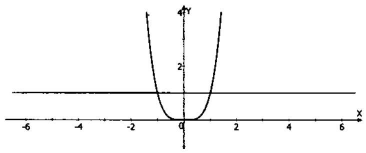
Точка пересечения (−1; 1). $x=-1$;

б)



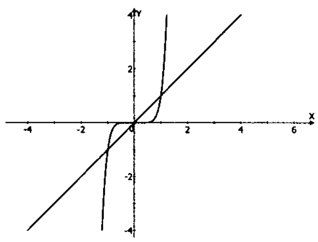
Точки пересечения (1; 1) и (–1; –1), x=1, x=–1;

в)



Точки пересечения (1; 1), (–1; –1), x=1, x=–1;

г)

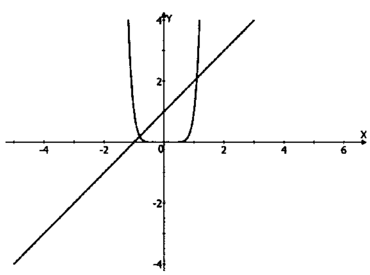


x=1, x=–1, x=0.

313.

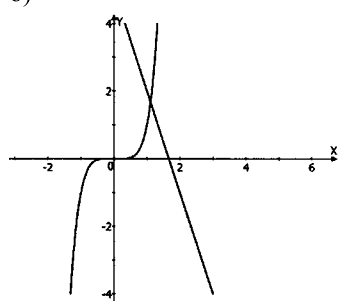
Будем определять количество решений по графикам.

а)



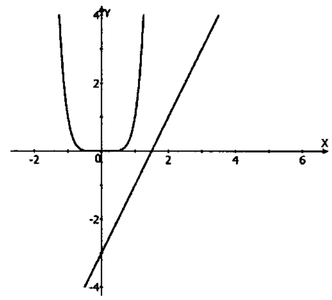
2 решения.

б)



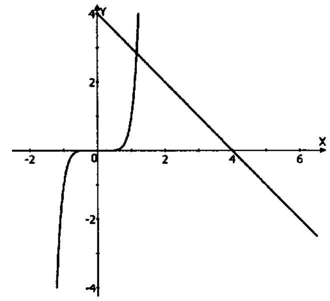
1 решение.

в)



Нет решений.

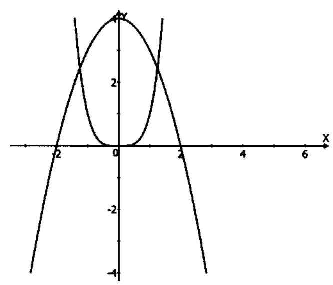
г)



1 решение.

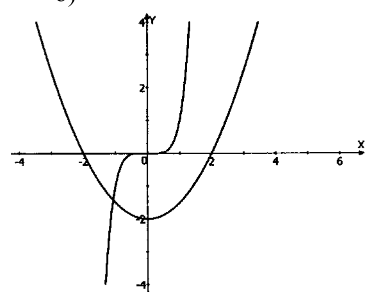
314.

а)



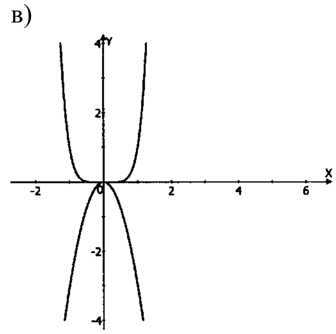
2 решения.

б)



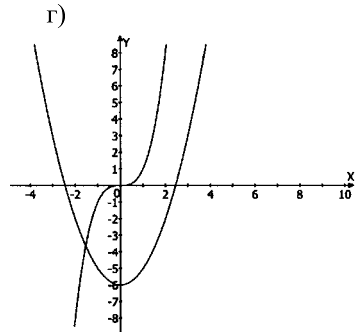
1 решение.

в)



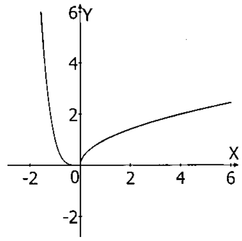
1 решение.

г)



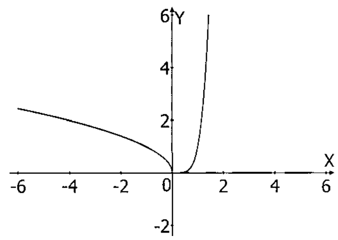
1 решение.

315.



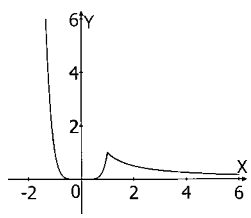
а) $f(x)=\begin{cases} x^4, \text{ если } x<0 \\ \sqrt{x}, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Убывает на (–∞; 0].
Возрастает на [0; +∞).
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла: вниз на (–∞; 0], вверх на [0; +∞).



б) $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, \text{ если } x<0 \\ x^5, \text{ если } x\ge 0 \end{cases}$

1) D(f)=[0; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает.
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз.



в) $f(x)=\begin{cases} x^6, \text{ если } x\le 1 \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x>1 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на [–∞; 0] и на [1; +∞).
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 1] и на [0; +∞).

г) $f(x)=\begin{cases} x^7, \text{ если } x\le -1 \\ -2-x, \text{ если } -1\le x\le 2 \end{cases}$

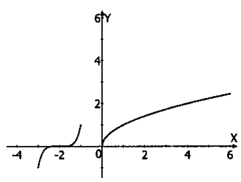
1) D(f)=(–∞; 2].

2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $(-\infty; -1]$. Убывает на $[-1; 2]$.
4) Не ограничена снизу, ограничена сверху.
5) $y_{наиб}=-1$,
6) Непрерывна на области определения.
7) $E(f)=(-\infty; -1]$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty; -1]$. На $[-1; 2]$ можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

316.
Если точка принадлежит графику, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^2$.
а) $256=2^n$, $n=8$; б) $-128=-2^n$, $n=7$;
в) $243=3^n$, $n=5$; г) $256=-4^n$, $n=4$.

317.
Если график проходит через заданную точку, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y=x^n$.
а) $1=(-1)^n$, n – четное. Функция четная.
б) $-1=(-1)^n$, n – нечетное. Функция нечетная.
в) $1=1^n$, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.
г) $-1=1^n$, чего быть не может. Задание некорректно.

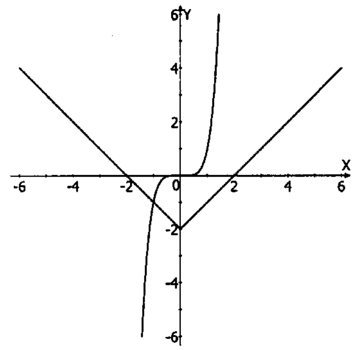
318.



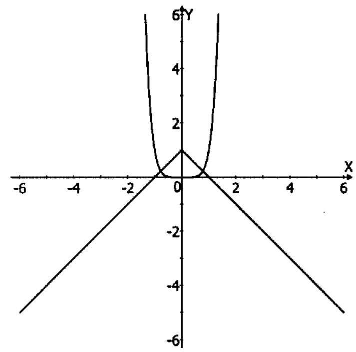
p>Q.

319.
k=L.

320.
а) б)

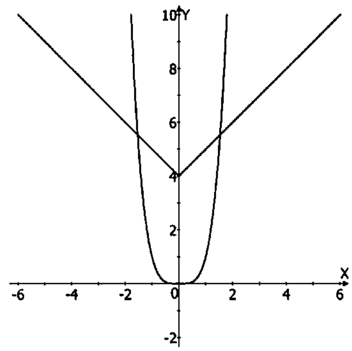


1 решение.



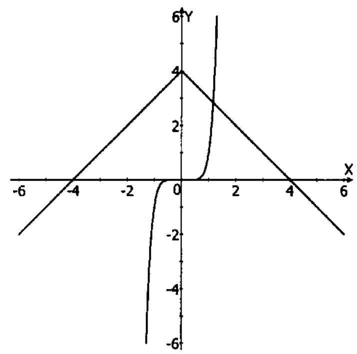
2 решения.

в)



2 решения.

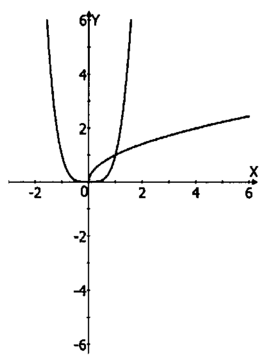
г)



1 решение.

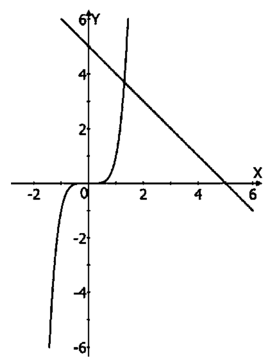
321.

а) $x^4 \le \sqrt{x}$



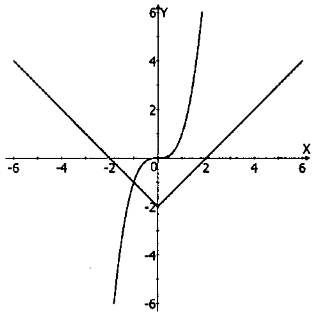
$0 \le x \le 1$;

б) $x^5 < 5 - x$.



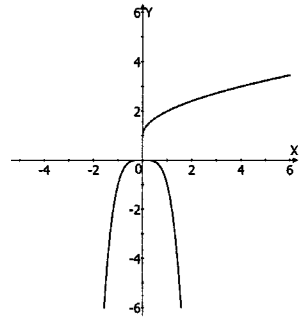
$x < 1$;

в) $x^3 \geq |x| - 2$.



$x \geq -1$.

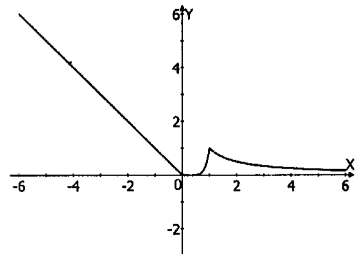
г) $-x^4 < \sqrt{x} + 1$.



$x \geq 0$.

322.

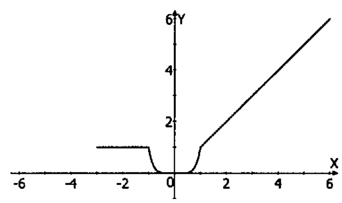
$$f(x)=\begin{cases} |x|, \text{ если } x \leq 0 \\ x^7, \text{ если } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$.
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна.
7) E(f)=$[0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на [0; 1] и на $[1; +\infty)$. На $(-\infty; 0]$ выпукла как вверх, так и вниз.

323.

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } -3 \leq x \leq -1 \\ x^6, \text{ если } -1 < x \leq 1 \\ x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

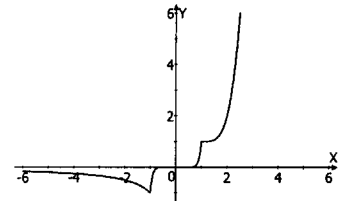


1) D(f)=$[-3; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[0; +\infty)$. Убывает на $[-1; 0]$. Постоянна на $[-3; -1]$
4) Не ограничена сверху, ограничена снизу.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=$[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на [–1; 1]. На [–3; –1] и на [1; +∞) можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

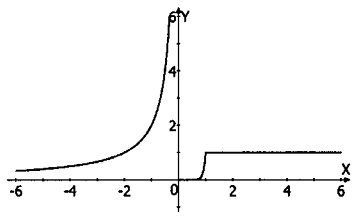
324.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{если } x<-1\\ x^{11}, \text{если } -1\le x\le 1\\ (x-1)^4+1, \text{ если } 1<x\le 3\end{cases}$$



1) D(f)=(–∞; 3].
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–1; +∞). Убывает на (–∞; –1].
4) Ограничена снизу, ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=–1, $y_{наиб}$ =17. 6) Непрерывна на области определения.
7) E(f)=[–1; 17].
8) Выпукла вниз на [0;1] и на [1;3). Выпукла вверх на [–∞;–1] и на [–1;0].

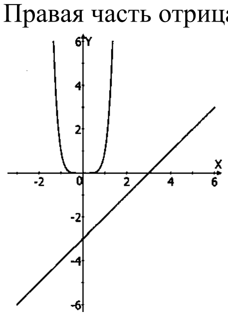
325.



$$f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{x}, \text{если } x<0\\ x^{12}, \text{если } 0\le x\le 1\\ 1, \text{если } x>1\end{cases}$$

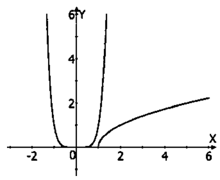
1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на (–∞; 0) и на [0; 1]. На [1; +∞) постоянна.
4) Ограничена снизу, неограничена сверху.
5) Непрерывна на (–∞; 0) и на (0; +∞).
6) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0] и на [0; 1].
На [1; +∞) можно считать функцию как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

326.
а) $x^4+x^2+1=0$; $x^4=-x^2-1$.
Правая часть отрицательна, левая – неотрицательна. Корней нет.



б) $x^6-x+3=0$; $x^6=x-3$.
Точек пересечения нет. Корней нет.
в) $x^4+x^2-2x+3=0$
$x^4+1+(x-1)^2=0$

$x^4+1=-(x-1)^2$.
Правая часть не положительна, левая – положительна.
Корней нет.



г) $x^6-\sqrt{x-1}=0$
$x^6=\sqrt{x-1}$.

Точек пересечения нет. Корней нет.

327.

$y=f(x)$, $f(x)=x^7$; $f(2x)\cdot f(\frac{x}{2})=(2x)^7\cdot(\frac{x}{2})^7=x^{14}=(x^7)^2=(f(x))^2$.

328.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^4$; $f(4x)\cdot f(-\frac{x}{4})=-(4x)^4\cdot -(\frac{-x}{4})^4=x^8=(x^4)^2=(f(x))^2$.

329.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{10}$; $f(x^2)\cdot f(x^{-1})=(x^2)^{10}\cdot(x^{-1})^{10}=x^{20}\cdot x^{-10}=x^{10}=f(x)$.

330.

$y=f(x)$, $f(x)=-x^3$;

$(f(x))^9: f(-\frac{1}{2}x^4)=(-x^3)^9: -(-\frac{1}{2}x^4)^3=-x^{27}: \frac{x^{12}}{8}=-8x^{15}=-(2x^5)^3=f(2x^5)$.

§ 14. Функции $y = x^{-n}$, ($n \in N$), их свойства и графики

331.

а) $f(x)=x^{-4}$, $A(\frac{1}{2}; 16)$, $B(-2; \frac{1}{8})$

$16=(\frac{1}{2})^{-4}$ – верно. А принадлежит графику.

$\frac{1}{8}=(-2)^{-4}$ – неверно. В не принадлежит графику.

б) $f(x)=x^{-5}$. А (0; 0), В (–1; –1)
$0=0^{-5}$ – неверно. А не принадлежит графику.
$-1=-1^{-5}$ – верно. Принадлежит графику.

в) $f(x)=x^{-6}$, $A(\sqrt{2}; \frac{1}{8})$, $B(\frac{1}{2}; 64)$

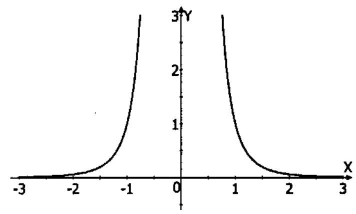
$\frac{1}{8}=(\sqrt{2})^{-6}$ – верно. A принадлежит графику.

$64=(\frac{1}{2})^{-6}$ – верно. B принадлежит графику.

г) $f(x)=x^{-7}$. A(–1; 1), B (1; –1); $1=-1^{-7}$ – неверно; $-1=1^{-7}$ – неверно. Ни A, ни B не принадлежат графику.

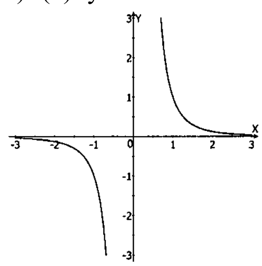
332.

а) $f(x)=y=\frac{1}{x^4}$.

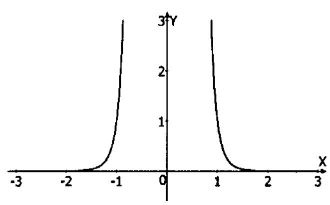


1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(0; +\infty)$.
8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

б) $f(x)=y=x^{-3}$.

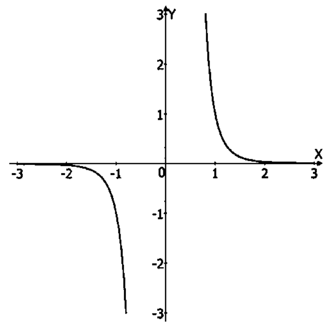


1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Нечетная.
3) Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
8) Выпукла вверх на $(-\infty; 0)$, вниз на $(0; +\infty)$.



в) $f(x)=y=x^{-8}$.
1) $D(f)=(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2) Четная.
3) Возрастает на $(-\infty; 0)$.
Убывает на $(0; +\infty)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.
7) $E(f)=(0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на (–∞; 0) и на (0; +∞).

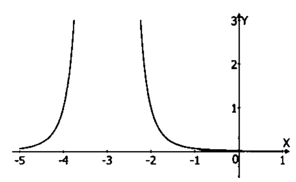


г) $f(x)=y=\frac{1}{x^5}$.

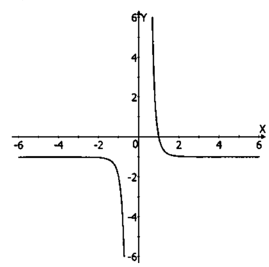
1) D(f)=(–∞; 0)∪(0; +∞).
2) Нечетная.
3) Убывает на (–∞; 0) и на (0; +∞).
4) Не ограничена ни снизу, ни сверху.
5) $y_{наим}$, $y_{наиб}$ – не существуют.
6) Непрерывна на (–∞; 0) и на (0; +∞).
7) E(f)=(–∞; 0)∪(0; +∞).
8) Выпукла: вверх на (–∞; 0), вниз на (0; +∞).

333.

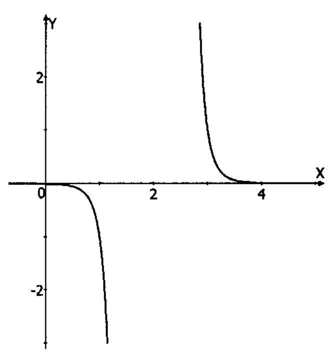
а)



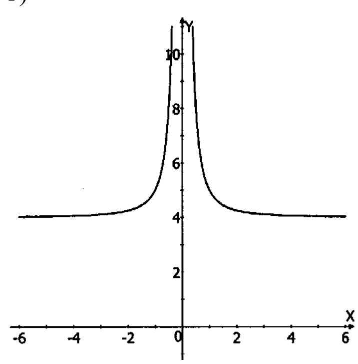
б)



в)



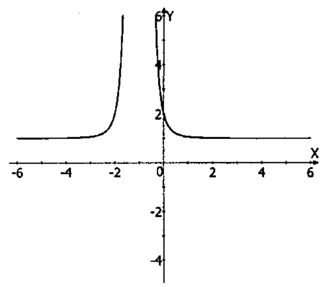
г)

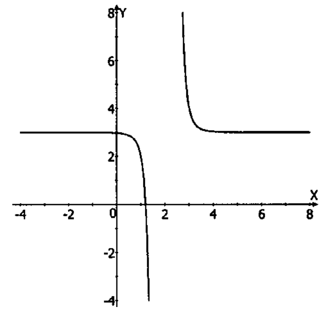


334.

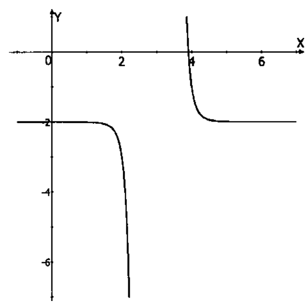
а)

б)

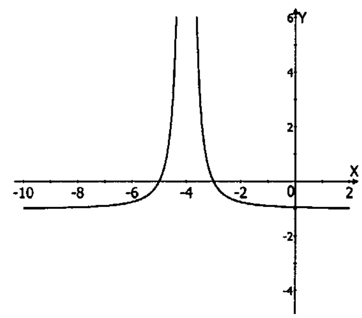




в)



г)



335.

$f(x)=y=x^{-4}$.

а) $y_{наиб}=f(\frac{1}{2})=16$ на $[-\frac{1}{2}; 1]$, $y_{наим}=1$;

б) на $(-\infty; -2]$ $y_{наиб}=\frac{1}{16}$, $y_{наим}$ – не существует;

в) на $(-3; -1]$ $y_{наиб}=1$, $y_{наим}$ – не существует;

г) на $[3; +\infty)$ $y_{наиб}=f(3)=\frac{1}{81}$, $y_{наим}$ – не существует.

336.

$f(x)=y=x^{-5}$

а) на $[-2; -1]$ $y_{наиб}=f(-2)=-\frac{1}{32}$, $y_{наим}=f(-1)=-1$;

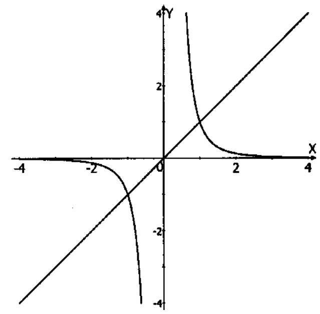
б) на $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ $y_{наиб}$ – не существует, $y_{наим}=f(-\frac{1}{2})=-32$;

в) на $(\frac{1}{2}; 4]$ $y_{наиб}$ –не существует, $y_{наим}=f(4)=\frac{1}{1024}$;

г) на [2; +∞) $y_{наиб}=f(2)=\frac{1}{32}$, $y_{наим}$ – не существует.

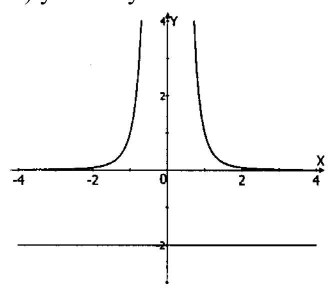
337.

а) y=x и $y=\frac{1}{x^3}$



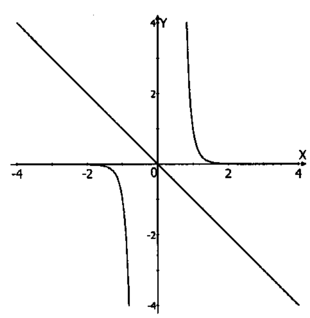
Точки пересечения (1; 1) и (–1; –1);

б) $y=x^{-4}$ и y=–2



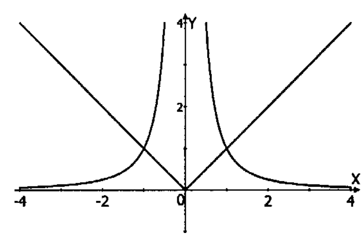
Точек пересечения нет;

в) $y=x^{-7}$ и y=–x



Точек пересечения нет;

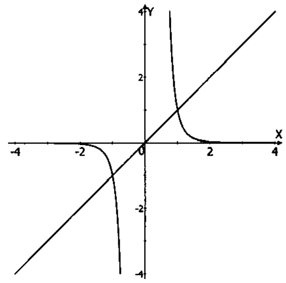
г) $y=\frac{1}{x^2}$ и y=|x|



Точки пересечения (1; 1) и (–1; 1);

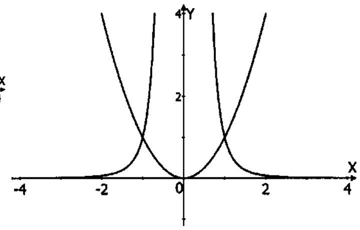
338.

а) $x^{-5}=x$



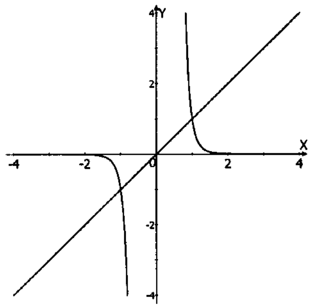
$x=1$, $x=-1$;

б) $\frac{1}{x^4}=x^2$



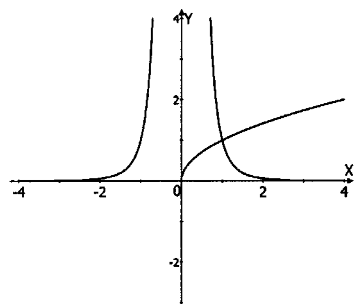
$x=1$, $x=-1$;

в) $\frac{1}{x^7}=x$



$x=1$, $x=-1$;

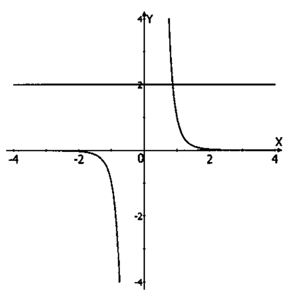
г) $x^{-4}=\sqrt{x}$



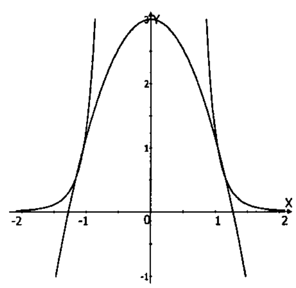
$x=1$.

339.

а) $\begin{cases} y=\frac{1}{x^5} \\ y=2 \end{cases}$



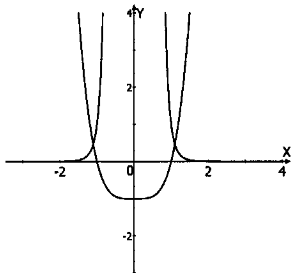
б) $\begin{cases} y=x^{-6} \\ y=3-2x^2 \end{cases}$



1 решение;

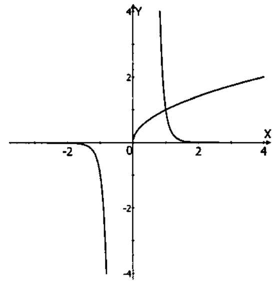
4 решения;

в) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^8} \\ y = x^4 - 1 \end{cases}$



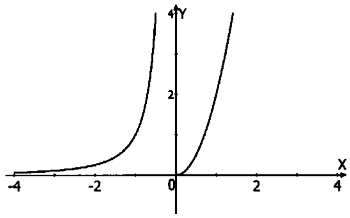
2 решения;

г) $\begin{cases} y = x^{-7} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$



1 решение.

340.

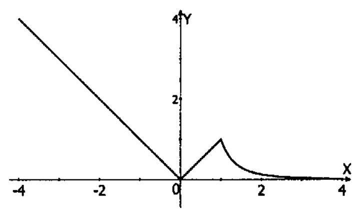


f(x)= $\begin{cases} x^{-2}, \text{если } x < 0 \\ 2x^2, \text{если } x \ge 0 \end{cases}$

1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная .
3) Возрастает на (–∞; 0) и на [0; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (–∞; 0) и на (0; +∞).
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на (–∞; 0) и на (0; +∞).

341.

f(x)= $\begin{cases} |x|, \text{если } x \le 1 \\ x^{-3}, \text{если } x > 1 \end{cases}$

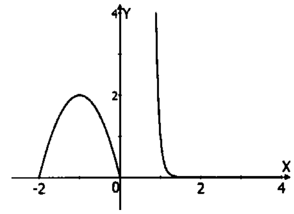


1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [0; 1].
Убывает на (–∞; 0) и на [1; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на D(f).

7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла вниз на [1; +∞).
На (–∞; 1] можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

342.

f(x)= $\begin{cases} -2(x+1)^2+2, \text{если } -2 \le x \le 0 \\ x^{-12}, \text{если } x > 0 \end{cases}$



1) D(f)=[–2; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–2; –1].
Убывает на [–1; 0] и на (0; +∞).
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=0, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (0; +∞) и на [–2; 0).
7) E(f)=[0; +∞).
8) Выпукла: вверх на [–2; 0], вниз на (0; +∞).

343.

$y=x^{-n}$

а) (2; $\frac{1}{256}$); $\frac{1}{256}=2^{-n}$, n=8;

б) (–2; $-\frac{1}{32}$); $-\frac{1}{32}=-2^{-n}$, n=5;

в) (7; $\frac{1}{343}$); $\frac{1}{343}=7^{-n}$, n=3;

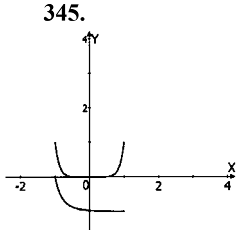
г) ($\frac{1}{5}$; 625); 625=$\frac{1}{5}^{-n}$, n=4.

344.

$y=x^{-n}$

а) (–1; 1);
$1=-1^{-n}$, n – четное. Функция четная.
б) (–1; –1);
$-1=-1^{-n}$, n – нечетное. Функция нечетная.
в) (1; 1);
$1=1^{-n}$, n –любое. Функция либо четная, либо нечетная.
г) (1; –1);
$-1=1^{-n}$, таких n не существует. Задание некорректно.

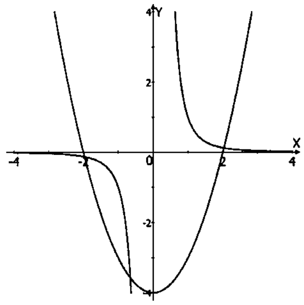
345.

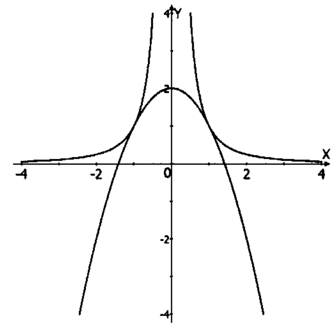


P=Q.

346.

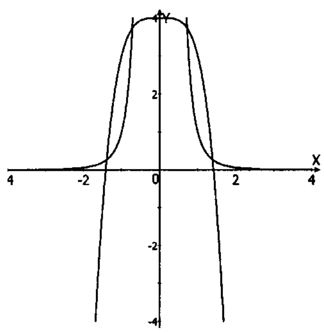
а) $\begin{cases} y = x^{-3} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$
б) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

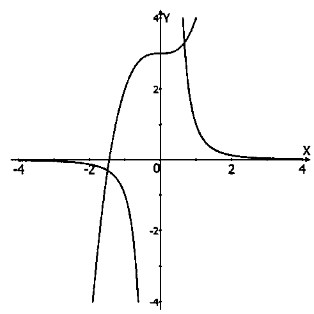




3 решения.
2 решения.

в) $\begin{cases} y = x^{-4} \\ y = 4 - x^4 \end{cases}$
г) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^3} \\ y = x^3 + 3 \end{cases}$

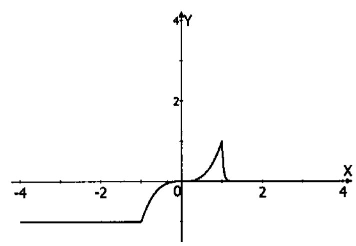




4 решения.
2
решения.

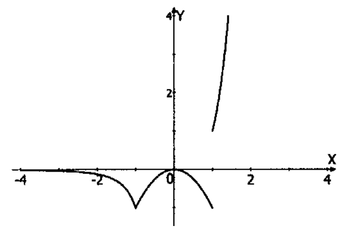
347.

а) f(x)= $\begin{cases} -1, \text{ если } x \le -1 \\ x^3, \text{ если -1} < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^{28}}, \text{ если } x > 1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [–1; 1].
Убывает на [1;+∞).
На (–∞; –1] постоянна.
4) Ограничена.
5) $y_{наим}$=–1, $y_{наиб}$ =1.
6) Непрерывна на D(f).
7) E(f)=[–1; 1].
8) Выпукла: вверх на [–1; 0], вниз на [0; 1] и на [1; +∞).
На (–∞; –1) можно считать выпуклой как вверх, так и вниз.

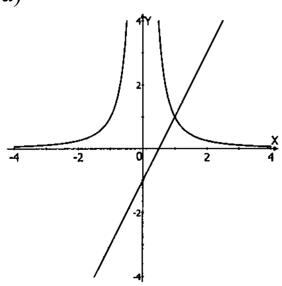
б) $f(x)=\begin{cases} x^{-3}, \text{если } x \le -1 \\ -x^2, \text{если -1} < x \le 1 \\ x^4, \text{если } x > 1 \end{cases}$



1) D(f)=(–∞; +∞).
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на [1; +∞) и на [1; 0].
Убывает на (–∞; –1] и на [0; 1].
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}$=–1, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на (–∞; 1) и на (1; +∞).
7) E(f)=[–1; 0]∪[1; +∞).
8) Выпукла: вверх на (–∞; –1] и на [–1; 1], вниз на (1; +∞).

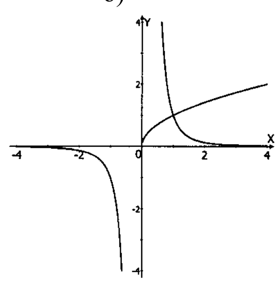
348.

а)



x<0, 0<x<1;

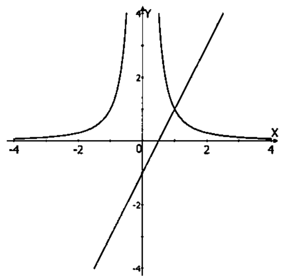
б)

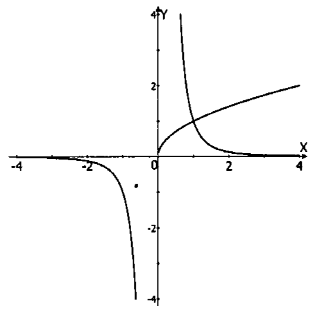


x≥1;

в)

г)





$x \geq 1$; $0<x<1$.

349.

$y=f(x)$, $f(x)=x^5$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-10}$;

$\frac{(f(2x))^2}{32} = \frac{((2x)^5)^2}{32} = 32 \cdot x^{10} = 32 \cdot (g(x))^{-1}$.

350.

$y=f(x)$, $f(x)=x^{-3}$; $y=g(x)$, $g(x)=x^4$;

$(f(x^2))^2=((x^2)^{-3})^2=(x^{-6})^2=x^{-12}=(x^4)^{-3}=g(x)^{-3}$.

351.

$y=f(x)$, $f(x)=x^2$; $y=g(x)$, $g(x)=x^{-4}$

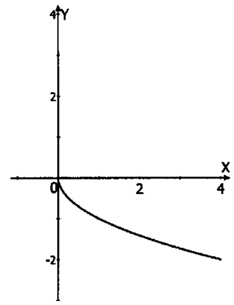
$\frac{16}{f(x^2)} = \frac{16}{(x^2)^2} = \frac{16}{x^4} = (\frac{2}{x})^4 = \left((\frac{2}{x})^{-4}\right)^{-1} = (g(\frac{2}{x}))^{-1}$

§ 15. Как построить график функции *y* = *mf*(*x*), если известен график функции *y* = *f*(*x*)

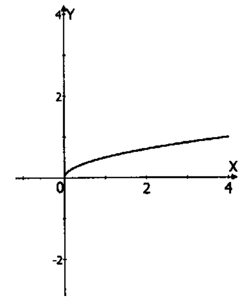
352.

$y=f(x)$, $f(x)=\sqrt{x}$

а) б)



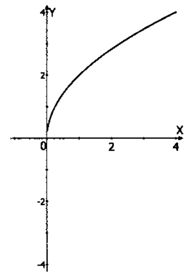
Y
X
4
2
0
2
4
-2



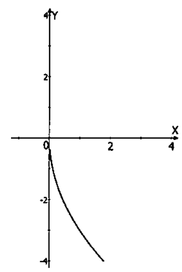
Y
X
4
2
0
2
4
-2

в)

г)



Y
X
4
2
0
2
4
-2
-4

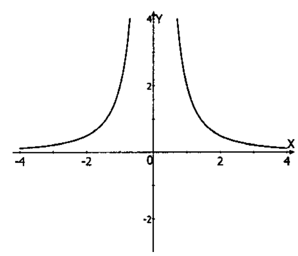


Y
X
4
2
0
2
4
-2
-4

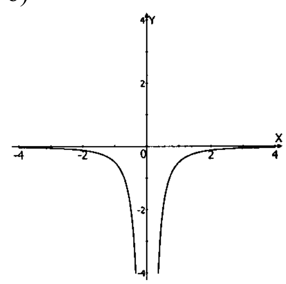
353.

а)

б)



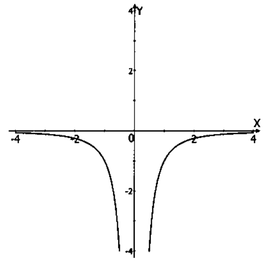
Y
X
4
2
-4
-2
0
2
4
-2

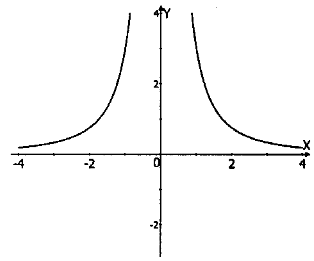


Y
X
4
2
-4
-2
0
2
4
-2
-4

в)

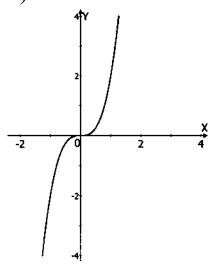
г)

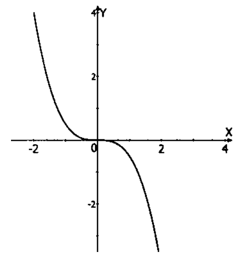




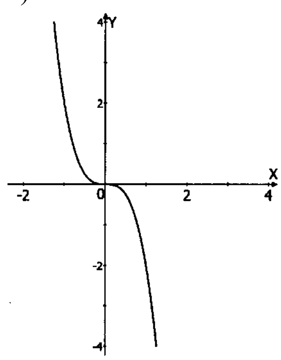
354.

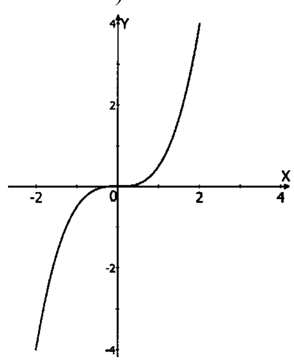
а) б)





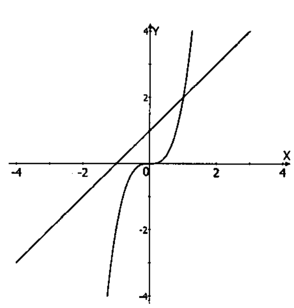
в) г)



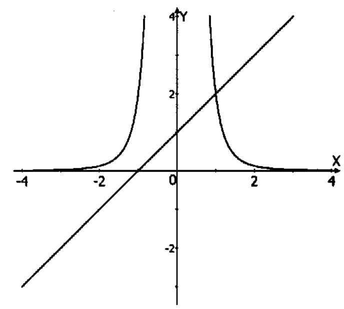


355.

а) б)

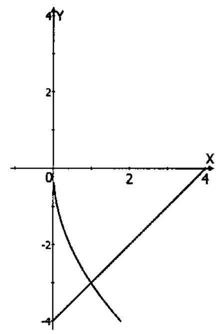


x=1.



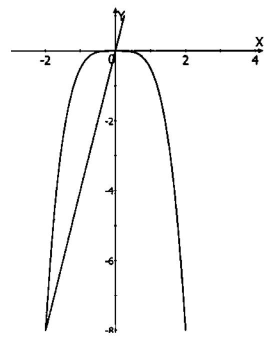
x=1.

в)



x=1;

г)

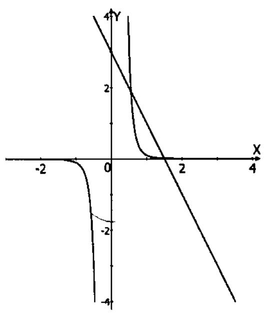


x=–2, x=0.

Опечатка в ответе задачника

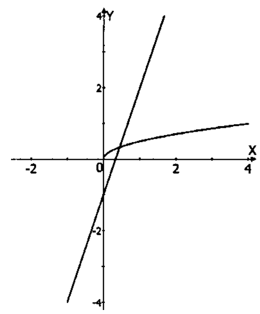
356.

а) $\frac{0,1}{x^5}$ =3–2x.



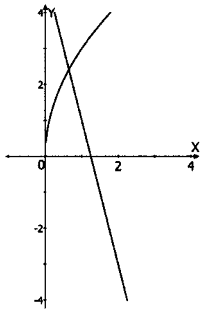
2 решения.

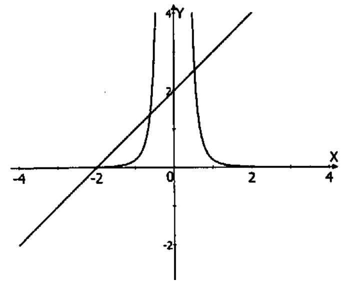
б) 0,5 $\sqrt{x}$ =3x–1.



1 корень.

в) $3\sqrt{x}=5-4x$.　　　　　г) $0{,}2x^{-4}=2+x$.





1 корень.　　　　　　　　　3 корня.

357.

$y=3x^4$

а) на $[-\frac{1}{2}; 1]$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=3$; б) на $[-1; 2)$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует;

в) на $[-1; -\frac{1}{2}]$ $y_{наим}=\frac{3}{16}$, $y_{наиб}=3$; г) на $[-1; 2]$ $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=48$.

358.

$y=-2\sqrt{x}$

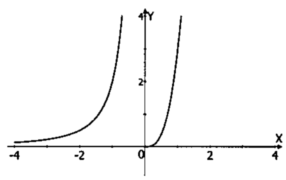
а) на отрезке $[0; 4]$ $y_{наим}=-4$, $y_{наиб}=0$;

б) на $[0; 9]$ $y_{наим}$ – не существует, $y_{наиб}=0$;

в) на $[\frac{1}{4}; \frac{9}{4}]$ $y_{наим}=-3$, $y_{наиб}=-1$;

г) на $(1; 1{,}96]$ $y_{наим}=-2{,}8$, $y_{наиб}$ – не существует.

359.



$$f(x)=\begin{cases}2x^{-2}, \text{если } x<0\\ 3x^3, \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.

2) Ни четная, ни нечетная.

3) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[0; +\infty)$.

4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.

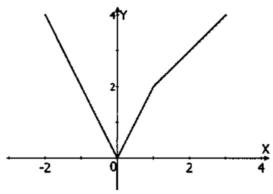
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.

6) Непрерывна на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

7) $E(f)=[0; +\infty)$.

8) Выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и на $[0; +\infty)$.

360.

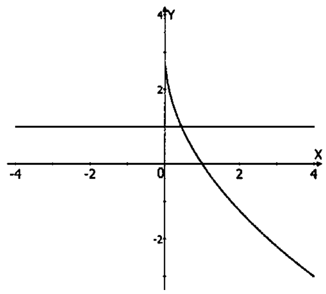


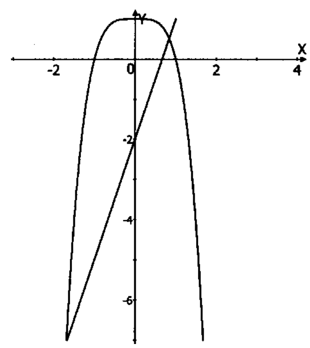
$$f(x)=\begin{cases} 2|x|, \text{если } x \le 1 \\ x+1, \text{если } x > 1 \end{cases}$$

1) $D(f)=(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[0; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; 0)$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на $D(f)$.
7) $E(f)=[0; +\infty)$.
8) Можно считать функцию как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз на $(-\infty; +\infty)$.

361.

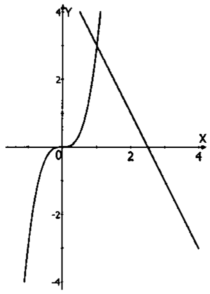
а) $\begin{cases} y=-3\sqrt{x}+3 \\ y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=1-x^4 \\ y=3x-2 \end{cases}$



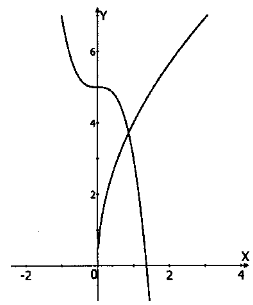


Одно решение. 2 корня.

в) $\begin{cases} y=3x^3 \\ y=5-2x \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=4\sqrt{x} \\ y=5-2x^3 \end{cases}$



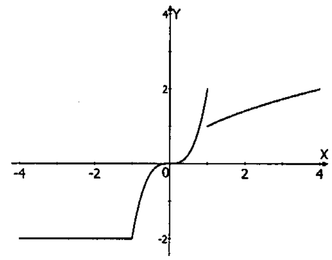
1 корень.



1 корень.

362.

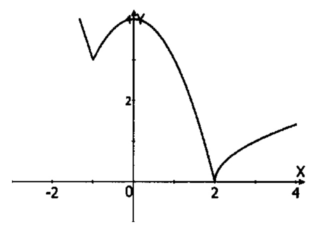
$$f(x)=\begin{cases} -2, \text{ если } x \le -1 \\ 2x^3, \text{ если } -1 < x \le 1 \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[-1; 1]$ и на $(1; +\infty)$.
На $(-\infty; -1]$ постоянна.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}=-2$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$.
7) E(f)=$[-2; +\infty)$.
8) Выпукла: вверх на $[-1; 0]$ и на $(1; +\infty)$, вниз на $[0; 1]$.
На $(-\infty; -1]$ можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

363.

$$f(x)=\begin{cases} 3|x|, \text{ если } x \le -1 \\ 4-x^3, \text{ если } -1 < x \le 2 \\ \sqrt{x-2}, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$



1) D(f)=$(-\infty; +\infty)$.
2) Ни четная, ни нечетная.
3) Возрастает на $[-1; 0]$ и на $[2; +\infty)$.
Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 2]$.
4) Ограничена снизу, не ограничена сверху.
5) $y_{наим}=0$, $y_{наиб}$ – не существует.
6) Непрерывна на D(f). 7) E(f)=$[0; +\infty)$.
8) Выпукла: вверх на $[-1; 2]$ и на $[2; +\infty)$.

На $(-\infty; -1]$ можно считать функцию выпуклой как вверх, так и вниз.

364.

а) $2x^3 \geq 3-x$; $2x^3-2 \geq 3-x-2$; $2(x^3-1)+(x-1) \geq 0$; $2(x-1)(x^2+x+1)+(x-1) \geq 0$

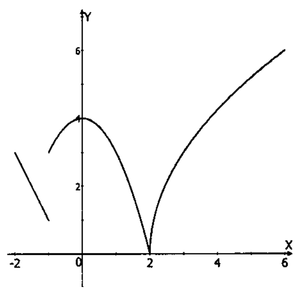
$(x-1)(2x^2+2x+3) \geq 0$; $2x^2+2x+3>0$, так как D=1–6=–5<0.

Разделим обе части на это выражение $(x-1) \geq 0$; $x \geq 1$;

б) $-x^4 < \sqrt{x}$; $-x^4 \leq 0 \leq \sqrt{x}$.

Единственная точка, где $\sqrt{x} = -x^4$ – есть 0. В остальных точках, принадлежащих области определения, неравенство верно. $x>0$.

365.



$$f(x)=\begin{cases} -1-2x, \text{ если } x \leq -1 \\ 4-x^2, \text{ если } -1 < x \leq 2 \\ 3\sqrt{x-2}, \text{ если } 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

а)

б) При a<0 нет корней.

При a=0 или a>6 – 1 корень.

При 0<a<1 или 4<a≤6 – 2 корня.

При a=4 или 1≤a≤3 – 3 корня.

При 3<a<4 – 4 корня.

Домашняя контрольная работа.

ВАРИАНТ 1.

1. $f(x)=y=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x-12}}$; $x^2+4x-12>0$; $\dfrac{D}{4}=4+12=16$;

$\left[\begin{array}{l} x_1=-2+4=2 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$; $(x+6)(x-2)>0$; $x>2$, $x<-6$. $D(f)=(-\infty; -6)\cup(2; +\infty)$.

2. $y=f(x)$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-7}} \cdot \sqrt{\dfrac{x-4}{x-5}}$;

3. $E(f)=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

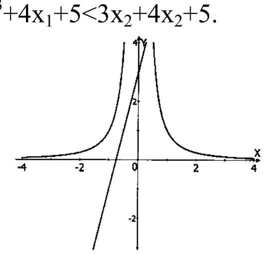
4. $f(x)=y=3x^3+4x+5$, $x \in [0; +\infty)$.

Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $[0; +\infty)$, такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3<3x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^3+4x_1<3x_2^3+4x_2 \Leftrightarrow 3x_1^3+4x_1+5<3x_2+4x_2+5$.

$f(x_1)<f(x_2)$. Функция возрастает.

5. $h(x)=-2x-1$.

6. $x^{-2}=4x+3$.

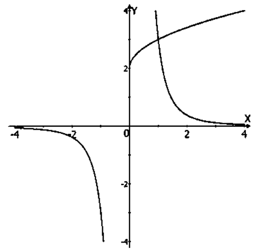


Один корень.

7. $f(x)=y=(x+2)^4-2$ на $[-1; 4]$

$y_{наим}=f(-1)=-1$; $y_{наиб}=f(4)=6^4-2=1294$.

8.



а) $x=1$;

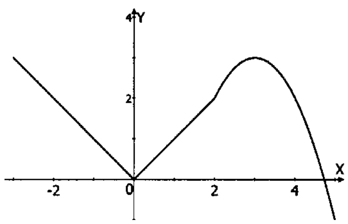
б) $0<x\le1$;

в) $x>1$.

9. $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=x^4$

$$\frac{f(4x)}{f(x^2)}=\frac{(4x)^{-2}}{(x^2)^{-2}}=\frac{x^{-2}}{16x^{-4}}=\frac{x^2}{16}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^4}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{x^2}{2})^4}=\frac{1}{4}\sqrt{y(\frac{x}{2})}$$

10. $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{если } x<2\\(-x-3)^2, \text{если } x\ge2\end{cases}$



При $p>3$ – одно решение.

При $p=3$ и $p=0$ – 2 решения.

При $0<p<3$ – 3 решения.

При $p<0$ – одно решение.

ВАРИАНТ 2.

1. $f(x)=y=\dfrac{6}{\sqrt{-x^2+5x-24}}$; $-x^2+5x-24>0$; $x^2-5x+24<0$;

$D=25-24\cdot4=25-96=-71<0$.

Таких x не существует. $D(f)=\varnothing$.

2. y=f(x); f(x)=$\sqrt{\frac{3-x}{x+4}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

3. E(f)={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

4. $f(x)=y=-x^4-x^2+8$, $x\in[0; +\infty)$.

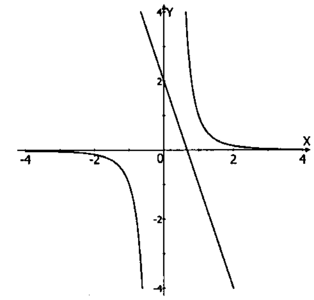
Возьмем произвольные x_1 и x_2 из [0: +∞), такие, что $x_1<x_2$. Тогда $x_1^4<x_2^4\Leftrightarrow-x_1^4<-x_2^4$; $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow-x_1^2>-x_2^2$

Складывая два последних неравенства, получим:

$-x_1^4-x_1^2>-x_2^4-x_2^2$; $-x_1^4-x_1^2+8>-x_2^4-x_2^2+8$; $f(x_1)>f(x_2)$. Функция убывает.

5. $h(x)=-(x+1)^2+1$

6. $x^{-3}=2-3x$.

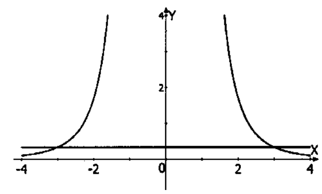


Корней нет.

7. $f(x)=y=(1-x)^3+3$ на отрезке [2; 3]

$y_{наим}=f(3)=-5$; $y_{наиб}=f(2)=2$.

8.

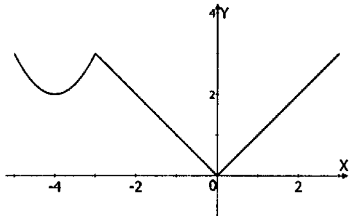


а) x=3, x=–3; б) x>3, x<–3; в) 0<x≤3; –3≤x<0.

9. $f(x)=x^4$, $g(x)=x^{-1}$

При x<0, $\sqrt{4\sqrt{f(x)}}+2(g(x))^{-1}=2\sqrt{x^2}+2(x^{-1})^{-1}=2|x|+2x=-2x+2x=0$.

10. f(x)= $\begin{cases}(x+4)^2+2, \text{если } x<-3\\ |x|, \text{если } x\ge-3\end{cases}$



При $p<0$ корней нет.
При $p=0$ – один корень.
При $0<p<2$ – 2 корня.
При $p=2$ и $p\geq3$ – 3 корня.
При $2<p<3$ – 4 корня.

Глава 4. Прогрессии

§ 17. Определение числовой последовательности и способы ее задания

366.

а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

367.

а) Нет, не является. б) Нет, не является.
в) Нет, не является. г) Да, является.

368.

Пусть x – число минут, а y – число капель, упавших на землю.
Тогда моделью задачи будет функция $y=5x$, $x\in N$.
Эта математическая модель является числовой последовательностью.

369.

а) Да, $y_n=n^2$; $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=9$, $y_4=16$, $y_5=25$.
б) Да, $y_n=n^3$; $y_1=1$, $y_2=8$, $y_3=27$, $y_4=64$, $y_5=125$.
в) Да, $y_n=7$; $y_1=7$, $y_2=7$, $y_3=7$, $y_4=7$, $y_5=7$.
г) Нет.

370.

а) $y_n=n^2$.
б) Последовательность четных чисел.
в) $y_1=0$, $y_n=y_{n-1}+5$.

371.

Последовательность натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, 25 ...
$y_6=30$, $y_{21}=105$, $y_n=5n$.

372.

Последовательность натуральных чисел, кратных семи: 7, 14, 21, 28, 35 ...
$y_8=56$, $y_{10}=70$, $y_{37}=259$, $y_n=7n$.

373.

$a_1=1$, $a_2=8$, $a_3=27$, $a_4=64$, $a_5=125$, $a_n=n^3$.

374.

$c_1=2$, $c_2=4$, $c_3=8$, $c_4=16$, $c_n=2^n$.

375.

а) За y_{31} следует y_{32}, за y_n – y_{n+1}, за y_{n+9} – y_{n+10}, за y_{2n} – y_{2n+1};

б) члену y_{91} предшествует y_{90}, y_{639} – y_{638},

y_{n-1} – y_{n-2},

y_{3n} – y_{3n-1}.

376.

а) $a_{639}, a_{640}, a_{641}, a_{642}, a_{643}, a_{644}$; б) $a_{1003}, a_{1004}, a_{1005}, a_{1006}, a_{1007}$;

в) $a_{n+4}, a_{n+5}, a_{n+6}, a_{n+7}, a_{n+8}, a_{n+9}$; г) a_{n-1}, a_n, a_{n+1}.

377.

а) $a_n=4n+1$; $a_1=5$, $a_2=9$, $a_3=13$, $a_4=17$, $a_5=21$;

б) $c_n=-7n+3$; $c_1=-4$, $c_2=-11$, $c_3=-18$, $c_4=-25$, $c_5=-32$;

в) $b_n=5n+2$; $b_1=7$, $b_2=12$, $b_3=17$, $b_4=22$, $b_5=27$;

г) $a_n=-3n-7$; $a_1=-10$, $a_2=-13$, $a_3=-16$, $a_4=-19$, $a_5=-22$.

378.

а) $a_n=\frac{1}{n+5}$; $a_1=\frac{1}{6}$, $a_2=\frac{1}{7}$, $a_3=\frac{1}{8}$, $a_4=\frac{1}{9}$, $a_5=\frac{1}{10}$;

б) $d_n=\frac{-2}{3-n}$; $d_1=-1$, $d_2=-2$, d_3 – не существует; $d_4=2$; $d_5=1$

в) $c_n=\frac{3}{2n+4}$; $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{3}{8}$, $c_3=\frac{3}{10}$, $c_4=\frac{1}{4}$, $c_5=\frac{3}{14}$;

г) $a_n=\frac{-3}{4n-1}$; $a_1=-1$, $a_2=-\frac{3}{7}$, $a_3=-\frac{3}{11}$, $a_4=-\frac{1}{5}$, $a_5=-\frac{3}{19}$.

379.

а) $x_n=n^2+1$; $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=10$, $x_4=17$, $x_5=26$;

б) $y_n=-n^3-10$; $y_1=-11$, $y_2=-18$, $y_3=-37$, $y_4=-74$, $y_5=-135$;

в) $z_n=-n^3+5$; $z_1=4$, $z_2=-3$, $z_3=-22$, $z_4=-59$, $z_5=-120$;

г) $w_n=n^2-15$; $z_1=-14$, $z_2=-11$, $z_3=-6$, $z_4=1$, $z_5=10$.

380.

а) $y_n=n$; б) $y_n=n-3$; в) $y_n=n+5$; г) $y_n=-n$.

381.

а) $y_n=2n-1$; б) $y_n=3n$; в) $y_n=2n+2$; г) $y_n=4n$.

382.

а) $y_n=n^2$; б) $y_n=(n+1)^2$;

в) $y_n=n^2+1$; г) $y_n=n^3$.

383.

а) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=1$, $x_4=4$, $x_5=1$, $x_6=4$;

б) $x_1=-5$, $x_2=5$, $x_3=15$, $x_4=25$, $x_5=35$, $x_6=45$;

в) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=7$, $x_5=9$, $x_6=11$;
г) $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$, $x_5=-3$, $x_6=1$.

384.
а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=6$, $x_4=24$, $x_5=120$, $x_6=720$;
б) $x_1=-3$, $x_2=3$, $x_3=-3$, $x_4=3$, $x_5=-3$, $x_6=3$;
в) $x_1=-512$, $x_2=-256$, $x_3=-128$, $x_4=-64$, $x_5=-32$, $x_6=-16$;
г) $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=100$, $x_4=1000$, $x_5=10000$, $x_6=100000$.

385.
а) $y_n=3n+4$; $y_{n+1}=3(n+1)+4=3n+4+3>3n+4=y_n$.
Последовательность возрастающая.
б) $y_n=5n-3$; $y_{n+1}=5(n+1)-3=5n-3+5>5n-3=y_n$.
Последовательность возрастающая.
в) $y_n=7n-2$; $y_{n+1}=7(n+1)-2=7n-2+7>7n-2=y_n$.
Последовательность возрастающая.
г) $y_n=4n-1$; $y_{n+1}=4(n+1)-1=4n-1+4>4n-1=y_n$.
Последовательность возрастающая.

386.
а) $y_n=-2n-3$; $y_{n+1}=-2(n+1)-3=-2n-3-2<-2n-3=y_n$.
Последовательность убывающая.
б) $y_n=-3n+4$; $y_{n+1}=-3(n+1)+4=-3n+4-3<-3n+4=y_n$.
Последовательность убывающая.
в) $y_n=4-5n$; $y_{n+1}=4-5(n+1)=4-5n-5<4-5n=y_n$.
Последовательность убывающая.
г) $y_n=-n+8$; $y_{n+1}=-(n+1)+8=-n+8-1<-n+8=y_n$.
Последовательность убывающая.

387.
$x_1=4$, $x_2=9$, $x_3=25$, $x_4=49$, $x_5=121$, $x_6=169$, $x_7=289$.

388.
а) $x_n=(-2)^n$; $x_1=-2$, $x_2=4$, $x_3=-8$, $x_4=16$, $x_5=-32$;
б) $c_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n$; $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=2$, $x_4=-2$, $x_5=2$;
в) $b_n=2(-3)^{n-1}$; $b_1=2$, $b_2=-6$, $b_3=18$, $b_4=-54$, $b_5=162$;
г) $d_n=(-2)^n+(-2)^{n+1}$; $d_1=-1$, $d_2=2$, $d_3=-4$, $d_4=8$, $d_5=-16$.

389.
а) $y_n=(-1)^n+(-2)^{n+1}$, $y_2=-7$, $y_4=-31$, $y_6=-127$;
б) $x_n=(-2)^{n+1}-(-2)^{n-1}$, $x_2=-8+2=-6$, $x_4=-32+8=-24$, $x_6=-128+32=-96$;
в) $z_n=(-2)^n-(-2)^{n+1}$, $z_2=4+8=12$, $z_4=16+32=48$,
$z_6=164+128=192$ – ответ в задачнике неверен;
г) $w_n=(-1)^{n+1}-(-2)^n$, $w_2=-1-4=-5$, $w_4=-1-16=-17$,

$w_6=-1-64=-65$ – ответ в задачнике неверен.

390.

а) $y_n=(-1)^n+2^n$, $y_1=1$, $y_3=7$, $y_5=31$;
б) $x_n=(-2)^n+16$, $x_1=14$, $x_3=8$, $x_5=-16$;
в) $y_n=(-2)^n+4^n$, $y_1=2$, $y_3=4$ – ответ в задачнике неверен; $y_5=-12$;
г) $y_n=(-1)^n-1$, $y_1=-2$, $y_3=-2$, $y_5=-2$.

391.

а) $x_n=\frac{1}{2n-1}$; б) $x_n=\frac{n}{n+1}$; в) $x_n=\frac{1}{n^2}$; г) $x_n=\frac{1}{n(n+10)}$.

392.

а) $x_n=(-1)^n\frac{2n}{3n-1}$; б) $x_n=\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; в) $(-1)^{n+1}\frac{2^n}{5n}$; г) $(-1)^n\frac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$.

393.

$x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_n=2\,(x_{n-2}+x_{n-1})$; $x_3=-10$, $x_4=-24$, $x_5=-68$, $x_6=-184$.

394.

а) $x_{n+1}=x_n$, $x_1=2$; б) $x_n=x_{n-1}+2$, $x_1=2$;
в) $x_n=x_{n-1}-2$, $x_1=9$; г) $x_n=-x_{n-1}$, $x_1=5$.

395.

а) $x_n=3x_{n-1}$, $x_1=2$; б) $x_n=x_{n-1}+7$, $x_1=1$;
в) $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$, $x_1=\frac{1}{2}$; г) $x_n=-3x_{n-1}$, $x_1=3$;

396.

а) 1; 1,7; 1,73; 1,732; б) 2, 1,8;1, 74; 1,733.

397.

a_n – последовательность
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=0{,}1+0{,}11+0{,}111+0{,}1111+0{,}11111+0{,}111111+0{,}1111111=$
$=0{,}7654321$.

398.

$x_n=\frac{n+1}{3n+2}$;

а) $\frac{5}{14}$; $\frac{5}{14}=\frac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 15n+10=14n+14$; $n=4$;

б) $\frac{14}{41}$; $\frac{14}{41}=\frac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow 42n+28=41n+41$; $n=13$;

в) $\frac{6}{13}$; $\frac{6}{13}=\frac{n+1}{3n+2}\Leftrightarrow$18n+12=13n+13;

5n=1, т. е. n=$\frac{1}{5}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n\in N$;

г) $\frac{8}{23}$; $\frac{n+1}{3n+2}=\frac{8}{23}$; 23n+23=24n+16; n=7.

399.

a_n(2n–1)(3n+2)

а) 0=(2n–1)(3n+2)

n=$\frac{1}{2}$ или n=–$\frac{2}{3}$, чего, очевидно, быть не может, так как $n\in N$.

Такого n не существует, значит 0 – не член последовательности.

б) 24=(2n–1)(3n+2)

$6n^2+n-26=0$;

D=1+624=625;

$n_1=\frac{-1+25}{12}=2$;

$n_2=\frac{-1-25}{2}<0$ – не подходит, так как n–натуральное.

Итак, n=2. 24 – второй член последовательности.

в) 153=(2n–1)(3n+2);

$6n^2+n-155=0$;

$D=1+3720=3721=61^2$;

$n_1=\frac{-1+61}{12}=5$;

$n_2=\frac{-1-61}{12}<0$, не подходит, так как $n\in N$.

Итак, n=5.

153 – пятый член последовательности.

г) –2=(2n–1)(3n+2)

Оба множителя в правой части положительны (так как $n\in N$), а левая часть отрицательна. Такого быть не может.

Таких n нет, (–2) – не член последовательности.

400.

а) $x_1=3$, $x_n=x_{n-1}+5$; $x_n=3+5(n-1)=5n-2$;

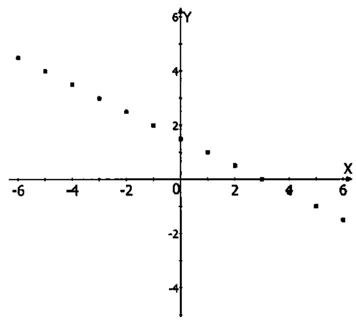
б) $x_1=2$, $x_n=3\cdot x_{n-1}$; $x_n=2\cdot 3^{n-1}$;

в) $x_1=11$, $x_n=x_{n-1}-4$; $x_n=11-4(n-1)=15-4n$;

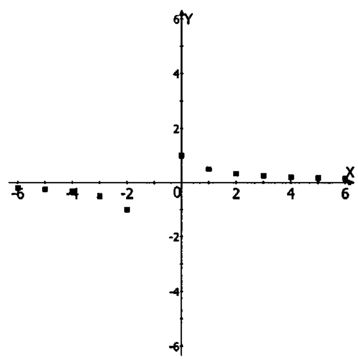
г) x_1=3, $x_n\,\frac{x_{n-1}}{2}$; $x_n=\frac{3}{2^{(n-1)}}$.

401.

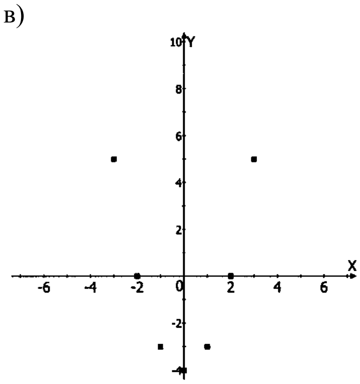
а)



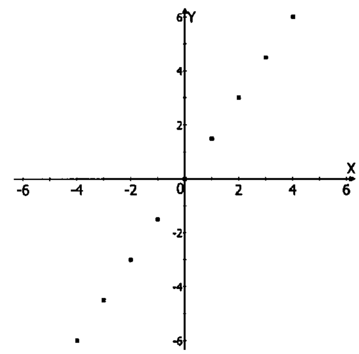
б)



в)



г)



402.

а) $x_n=2n-5$, A=10; $2n-5>10$; $2n>15$

$n>\frac{15}{2}$; Начиная с n=8;

б) $x_n=3^{n-1}$, A=27,

$3^{n-1}>27$,

$n-1>3$,

$n>4$.

Начиная с n=5;

в) $x_n=n^2-17$, A=–2

$n^2-17>-2$,

$n^2>15$,

$n>\sqrt{15}$ ($n<-\sqrt{15}$ отбрасываем, так как $n\in N$).

Начиная с n=4;

г) $x_n=2^{n-5}$, A=1,5,

$2^{n-5}>1,5$,

$2^{n-5}>\frac{3}{2}$,

$2^{n-4}>3$.

Начиная с n=6.

403.

а) $x_n=3-2n$, A=–9,

$3-2n<-9$,

$2n<12$,

$n>6$.

Начиная с n=7;

б) $x_n=3^{4-n}$, A=0,5,

$3^{4-n}<0,5$.
Начиная с n=5.
в) $x_n=2-3n^2$, A=–25,
$2-3n^2<-25$,
$3n^2<28$,
$n^2>\frac{28}{3}$.
Начиная с n=4;
г) $x_n=2^{5-n}$, A=1,
$2^{5-n}<1$,
$5-n<0$,
$n>5$.
Начиная с n=6.

404.

а) $a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$;

$a_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}>1-\frac{1}{n}=a_n$;

$a_{n+1}>a_n$. Последовательность возрастает.

б) $b_n=1-\frac{1}{2n}$;

$b_{n+1}=1-\frac{1}{2(n+1)}>1-\frac{1}{2n}=b_n$;

$b_{n+1}>b_n$. Последовательность возрастает.

в) $c_n=1-\frac{1}{2^n}$;

$c_{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}>1-\frac{1}{2^n}=c_n$;

$c_{n+1}>c_n$. Последовательность возрастает.

г) $d_n=\frac{5n}{n+1}=\frac{5n+5-5}{n+1}=5-\frac{5}{n+1}$;

$d_{n+1}=5-\frac{5}{n+2}>5-\frac{5}{n+1}=d_n$;

$d_{n+1}>d_n$. Последовательность возрастает.

405.

а) $a_n=\frac{1}{2n}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2n}=a_n$;

$a_{n+1}<a_n$.
Последовательность убывает.

б) $c_n=1+\frac{1}{3n}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{3n+3}<\frac{1}{3n}=c_n$;

$c_{n+1}<c_n$.
Последовательность убывает.

в) $b_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$;

$b_{n+1}=1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}=b_n$;

$b_{n+1}<b_n$.
Последовательность убывает.

г) $d_n=\frac{1}{3^n}$;

$d_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{1}{3^n}=d_n$;

$d_{n+1}<d_n$.
Последовательность убывает.

§ 18. Арифметическая прогрессия

406.
а) Да, является. б) Да, является.
в) Да, является. г) Нет, не является.

407.
а) Да, является.
б) Нет, не является.
в) Нет, не является.
г) Нет, не является.

408.
а) $a_1=3$; $d=-4$;
б) $a_1=7$; $d=-3$;
в) $a_1=0{,}7$; $d=0{,}2$;
г) $a_1=-1$; $d=0{,}1$.

409.
а) $a_1=3$; $d=7$,
$a_1=3$, $a_2=10$, $a_3=17$, $a_4=24$, $a_5=31$, $a_6=38$;

б) $a_1=10$; $d=-2,5$,
$a_1=10$, $a_2=7,5$, $a_3=5$, $a_4=2,5$, $a_5=0$, $a_6=-2,5$;
в) $a_1=-21$; $d=3$,
$a_1=-21$, $a_2=-18$, $a_3=-15$, $a_4=-12$, $a_5=-9$, $a_6=-6$;
г) $a_1=-17,5$; $d=-0,5$.
$a_1=-17,5$, $a_2=-18$, $a_3=-18,5$, $a_4=-19$, $a_5=-19,5$, $a_6=-20$.

410.
а) $a_1=-2$; $d=4$, $n=5$; -2; 2; 6; 10; 14;
б) $a_1=1$; $d=-0,1$, $n=7$; 1; $0,9$; $0,8$; $0,7$; $0,6$; $0,5$; $0,4$;
в) $a_1=2$; $d=3$, $n=6$; 2; 5; 8; 11; 14; 17
г) $a_1=-6$; $d=1,5$, $n=4$; -6; $-4,5$; -3; $-1,5$.

411.
а) $a_1=\frac{3}{7}$; $d=\frac{1}{7}$, $n=5$
$\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$; 1;
б) $a_1=13$; $d=-\sqrt{5}$, $n=4$
13; $13-\sqrt{5}$; $13-2\sqrt{5}$; $13-3\sqrt{5}$;
в) $a_1=7,5$; $d=0,5$, $n=4$
$7,5$; 8; $8,5$; 9;
г) $a_1=-1,7$; $d=0,15$, $n=5$
$-1,7$; $-1,55$; $-1,4$; $-1,25$; $-1,1$.

411.
а) $a_1=\frac{3}{7}$; $a_2=\frac{4}{7}$; $a_3=\frac{5}{7}$; $a_4=\frac{6}{7}$; $a_5=1$;
б) $a_1=13$, $a_2=13-\sqrt{5}$; $a_3=13-2\sqrt{5}$; $a_4=13-3\sqrt{5}$;
в) $a_1=7,5$; $a_2=8$; $a_3=8,5$; $a_4=9$;
г) $a_1=-1,7$; $a_2=-1,55$; $a_3=-1,4$; $a_4=-1,25$; $a_5=-1,1$.

412.
а) $d=a_2-a_1=3-1=2$; $a_{10}=a_1+9d=1+9\cdot 2=19$;
б) $d=a_2-a_1=6+\sqrt{5}-\sqrt{5}=6$; $a_{10}=a_1+9d=\sqrt{5}+9\cdot 6=54+\sqrt{5}$;
в) $d=a_2-a_1=90-100=-10$; $a_{10}=a_1+9d=100+9\cdot(-10)=10$;
г) $d=a_2-a_1=3-\sqrt{2}-3=-\sqrt{2}$; $a_{10}=a_1+9d=3+9(-\sqrt{2})=3-9\sqrt{2}$.

413.
Такие натуральные числа, представляются в виде $n=3+5k$, где $k=1, 2, 3 \ldots$, так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=3$; $d=5$. Опечатка в ответе задачника.

414.

Такие натуральные числа, представляются в виде n=11k, где k=1, 2, 3 ... , так что они составляют арифметическую прогрессию: $a_1=11$; d=11.

415.

Данные числа не являются арифметической прогрессией, так как $a_2-a_1=3^2-3^1$, а $a_3-a_2=3^3-3^2=18$, и $3\neq18$.

416.

а) $x_1=4$; d=3; б) не является арифметической прогрессией; в) не является арифметической прогрессией; г) $x_1=1$; d=4.

417.

а) $a_n=2n+1$; $a_n=(n-1)\cdot2+3=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=3$ и d=2;

б) $a_n=0{,}5n-4$; $a_n=(n-1)\cdot0{,}5-3{,}5=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-3{,}5$ и d=0,5;

в) $a_n=-3n+1$; $a_n=(n-1)\cdot(-3)-2=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-2$ и d=-3;

г) $a_n=-\frac{1}{3}n-1$; $a_n=(n-1)(-\frac{1}{3})-\frac{4}{3}=(n-1)\cdot d+a_1$, где $a_1=-\frac{4}{3}$ и $d=-\frac{1}{3}$.

418.

а) $a_n=3n-1$; б) $a_n=n-0{,}5$; в) $a_n=-2n+9$; г) $a_n=-\frac{n}{7}-\frac{6}{7}$.

419.

а) $a_n=-6n+10$; б) $a_n=-0{,}2n-0{,}5$; в) $a_n=5n-12$; г) $a_n=\sqrt{5}\,n-3\sqrt{5}$.

420.

$a_6=a_1+5d=4+5\cdot3=19$; б) $a_{15}=a_1+14d=-15+14(-5)=-85$;

в) $a_{17}=a_1+16d=-12+16\cdot2=20$; г) $a_9=a_1+8d=101+8\cdot\frac{1}{2}=105$.

421.

а) $a_5=a_1+4d$, $d=\frac{a_5-a_1}{4}=\frac{40-12}{4}=7$;

б) $a_{16}=a_6+10d$, $d=\frac{a_{16}-a_6}{10}=\frac{30-(-30)}{10}=6$;

в) $a_{11}=a_1+10d$, $d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{-28-(-8)}{10}=-2$; опечатка в ответе задачника

г) $a_{36}=a_{11}+25d$, $d=\frac{a_{36}-a_{11}}{25}=\frac{54{,}6-4{,}6}{25}=2$.

422.

а) $a_7=a_1+6d$, $a_1=a_7-6d=9-6\cdot 2=-3$;
б) $a_{37}=a_1+36d$, $a_1=a_{37}-36d=-69-36(-2,5)=21$;
в) $a_{26}=a_1+25d$, $a_1=a_{26}-25d=-71-25(-3)=4$;
г) $a_{14}=a_1+13d$, $a_1=a_{14}-13d=-6\sqrt{5}-13(-\sqrt{5})=7\sqrt{5}$.

423.

а) $a_1=1$; $d=3$; б) $a_1=-\frac{4}{3}$; $d=-\frac{1}{3}$; в) $a_1=2,9$; $d=-0,1$; г) $a_1=3$; $d=-2$.

424.

У данной прогрессии $a_1=9$ и $d=2$, тогда если $a_n=29$, то $29=9+2(n-1)$, $29=7+2n$, $n=11$.

425.

а) $a_1=-1,5$; $d=0,5$, так что $4,5=a_1+12d$, то есть 4,5 - 13-й член прогрессии;
б) $a_1=7,5$; $d=3,5$, так что если $43,5=a_1+nd$, то $n=\frac{43,5-a_1}{d}=\frac{36}{3,5}=\frac{72}{7}$, так что 43,5 - не является членом прогрессии.

426.

$41=-7+12\cdot 4=a_1+12d$, так что 41 - 13-й член данной прогрессии.

427.

23; 19; 15.

428.

а) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=1+10\cdot 2=21$;
б) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-1\frac{1}{2}+20\cdot(-3,75)=-76,5$;
в) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=\frac{2}{3}+16\cdot\frac{3}{4}=12\frac{2}{3}$;
г) $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=0,2+12\cdot\frac{1}{3}=4,2$.

429.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, так что $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$;
а) $n=\frac{(67-1)\cdot 3}{2}+1=100$; б) $n=\frac{5-0}{0,5}+1=11$;
в) $n=\frac{10,5-(-6)}{0,75}+1=23$; г) $n=\frac{100-(-4,5)}{5,5}+1=20$.

430.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$; $a_1=a_n-(n-1)d$:

а) $a_1=-10-14\cdot2=-38$; б) $a_1=10\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{4}=9$;

в) $a_1=9,5-16\cdot(-0,6)=19,1$; г) $a_1=-2,94-14\cdot(-0,3)=1,26$.

431.

$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) $d=\frac{39-3}{11-1}=3,6$; б) $d=\frac{-18,4-(-0,2)}{15-1}=-1,3$;

в) $d=\frac{1\frac{1}{4}-5\frac{5}{8}}{36-1}=-\frac{1}{8}$; г) $d=\frac{0-3,6}{37-1}=-0,1$.

432.

$b=a_1+(n-1)d$, $n=\frac{b-a_1}{d}+1$, если b - является членом прогрессии:

а) $n=\frac{21,2-5}{0,3}+1=55$; б) $n=\frac{0,65-3}{-0,35}+1\approx7,7$ - так b - не является членом прогрессии;

в) $n=\frac{44-(-7)}{5,1}+1=11$; г) $n=\frac{-0,01-(-0,13)}{0,02}+1=7$.

433.

а) $a_n=a_1+(n-1)d$, $a_n=2+(n-1)(-0,1)=2,1-0,1n$, $a_n<0$ при $2,1-0,1<0$, $n>21$, $n=22$;

б) $a_n=16,3-0,4n$, $a_n<0,9$, при $16,3-0,4n<0,9$, $n>38,5$, $n=39$;

в) $a_n=120-10n$, $a_n<15$, при $120-10n<15$, $n>10,5$, $n=11$;

г) $a_n=-0,25-0,75n$, $a_n<-16,3$, при $-0,25-0,75n<-16,3$, $n>21,4$, $n=22$.

434.

а) $a_n=-12+(n-1)\cdot3=-15+3n$, $a_n>141$, при $-15+3n>141$, $n>52$, $n=53$;

б) $a_n=-10+5,5n$, $a_n>0$, при $-10+5,5n>0$, $n>\frac{20}{11}$, $n=2$;

в) $a_n=1,8+2,2n$, $a_n>14,7$, при $1,8+2,2n>14,7$, $n>\frac{129}{22}$, $n=6$;

г) $a_n=13,8+0,7n$, $a_n>22,9$, при $13,8+0,7n>22,9$ $n>13$, $n=14$.

435.

$\begin{cases} a_1 + a_5 = 14 \\ a_2 a_4 = 45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 14 \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 + 2d = 7 \\ (7 - d)(7 + d) = 45 \end{cases}$,

$\begin{cases} a_1 = 7 - 2d \\ 49 - d^2 = 45 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 = 7 - 2d \\ d^2 = 4 \end{cases}$, так как d>0 по условию, то d=2.

Тогда $a_6=a_1+5d=3+10=13$.

436.

$\begin{cases} a_2 + a_5 = 18 \\ a_2 \cdot a_3 = 21 \end{cases}$, $\begin{cases} a_2 + a_2 + 3d = 17 \\ a_2(a_2 + d) = 21 \end{cases}$, $\begin{cases} 2a_2 + 3d = 17 \\ a_2(a_2 + d) = 21 \end{cases}$,

так как a_2 - натуральное число, то $a_2=3$ и d=4, тогда $a_1=-1$ и прогрессия: -1, 3, 7, 11, 15 ...

437.

$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -21 \\ a_2 + a_3 + a_4 = -6 \end{cases}$, и a_1, a_2, a_3, a_4 - арифметическая прогрессия, так что

$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = -21 \\ a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 + d = -7 \\ a_1 + 2d = -2 \end{cases}$, $a_1=-12$, d=5,

эти числа: -12, -7, -2, 3. (опечатка в ответе задачника)

438.

$S_n=\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

а) $S_{30}=\frac{-1+86}{2} \cdot 30=1275$; б) $S_{20}=\frac{41-16}{2} \cdot 20=250$;

в) $S_{10}=\frac{-13-5}{2} \cdot 10=-90$; г) $S_{25}=\frac{17+31}{2} \cdot 25=600$.

439. а) $S_{50}=\frac{2+147}{2} \cdot 50=3725$; б) $S_{50}=\frac{0{,}5-97{,}5}{2} \cdot 50=-2425$;

в) $S_{50}=\frac{-10+137}{2} \cdot 50=3175$; г) $S_{50}=\frac{-1{,}7-8{,}1}{2} \cdot 50=245$.

440.

$S_n=\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n=\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, $S_{100}=100a_1+4950d$:

а) $S_{100}=100 \cdot (-12)+4950 \cdot 2=8700$; б) $S_{100}=100 \cdot (1{,}5)+4950 \cdot 0{,}5=262$;
в) $S_{100}=100 \cdot 73+4950(-1)=2350$; г) $S_{100}=100 \cdot (-1{,}7)+4950 \cdot (8{,}1)=-40265$.

441.

$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$:

а) $S_{16}=\frac{-3\cdot 2+15\cdot 1{,}5}{2}\cdot 16=132$; б) $S_{25}=\frac{2\cdot 121+24\cdot(-3{,}1)}{2}\cdot 25=2095$;

в) $S_{40}=\frac{2\cdot(-2{,}5)+39\cdot(-0{,}5)}{2}\cdot 40=-490$; г) $S_{100}=\frac{2\cdot 4{,}5+99\cdot 0{,}4}{2}\cdot 100=2430$.

442.

$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=15(a_1+a_{30})$:

а) $S_{30}=15(4+3+4\cdot 30+3)=1950$;
б) $S_{30}=15(0{,}5-3+0{,}5\cdot 30-3)=142{,}5$;
в) $S_{30}=15(-2+8-2\cdot 30+8)=-690$; г) $S_{30}=15(-2{,}5-6-2{,}5\cdot 30-6)=1342{,}5$

443.

a_1	d	a_n	n	S_n
7	4	55	13	403
2	2	80	40	1640
56	-3	26	11	451
2	5	87	18	801
9	2	21	7	105

444.

$a_4=10$, $a_{10}=19$, $a_{10}-a_4=6d=9$, $d=1{,}5$, $a_1=a_4-3d=10-3\cdot 1{,}5=5{,}5$,

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\frac{5{,}5+19}{2}\cdot 10=122{,}5$.

445.

а) $a_{12}=\frac{a_{11}+a_{13}}{2}=\frac{122}{2}=61$; б) $a_{18}+a_{20}=2\cdot a_{19}=2\cdot 5=10$;

в) $a_6+a_8=2a_7=2\cdot 4=8$; г) $a_{16}=\frac{a_{15}+a_{17}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$.

446.

а) $a_2+a_{19}=a_1+a_{20}=64$; б) $a_1+a_{19}=a_3+a_{17}=-40$;
в) $a_1+a_{16}=a_2+a_{15}=25$; г) $a_{10}+a_{16}=a_1+a_{25}=-10$.

447.

$a_{10}+a_{20}=\frac{a_9+a_{11}}{2}+\frac{a_{19}+a_{21}}{2}=\frac{44}{2}+\frac{104}{2}=74$.

448.

$a_{15}+a_{30}=\frac{a_{14}+a_{16}}{2}+\frac{a_{29}+a_{31}}{2}=\frac{-20}{2}+\frac{40}{2}=10.$

449.

Если x, 2x-1,5x - члены прогрессии, то

$\frac{x+5x}{2}=2x-1$, то есть 3x=2x-1, x=-1.

450.

Если 2y+5, y, 3y-8 - члены прогрессии, то

$\frac{2y+5+3y-8}{2}=y$, 5y-3=2y, y=1.

451.

Если 5t+2, 7t=1, 3t-6 - образуют прогрессию, то $\frac{5t+2+3t-6}{2}=7t+1$,

4t-2=7t+1, t=-1.

452.

а) $a_n=-\frac{n+1}{4}$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$;

б) $a_n=\frac{2\sqrt{3}-5n}{3}$, $a_1=\frac{2\sqrt{3}-5}{3}$, $d=-\frac{5}{3}$;

в) $a_n=\frac{3n-2}{5}$, $a_1=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{5}$; г) $a_n=\frac{\sqrt{7}n-5}{\sqrt{5}}$, $a_1=\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{5}}$, $d=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

453.

а) $d_1=\frac{a_{12}-a_5}{7}=\frac{29-15}{7}=2$, $a_1=a_5-4d=15-4\cdot2=7$,

$a_n=a_1+(n-1)d=7+(n-1)\cdot2=2n+5$;

б) $d=\frac{a_{19}-a_9}{10}=\frac{-4,5-(-30)}{10}=-1,5$, $a_1=a_9-8d=-30-8(-1,5)=-18$,

$a_n=a_1+(n-1)d=-18+(n-1)(-1,5)=-1,5n-16,5$;

в) $d=\frac{a_{15}-a_7}{8}=\frac{40-20}{8}=2,5$, $a_1=a_7-6d=20-6\cdot2,5=5$,

$a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)\cdot2,5=2,5n+2,5$;

г) $d=\frac{a_{16}-a_5}{11}=\frac{-7,5-0,2}{11}=-0,7$, $a_1=a_5-4d=-0,2-4(-0,7)=2,6$,

$a_n=a_1+(n-1)d=2,6+(n-1)(-0,7)=-0,7n+3,3$.

454.

а) d=$\frac{a_9-a_7}{2}=\frac{8-(-2)}{2}$=5, a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{8+(-2)}{2}$=3;

б) a_8=$\frac{a_9+a_7}{2}=\frac{4+(-4)}{2}$=0, d=$a_9$-$a_8$=-4;

в) a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-7+(-1)}{2}$=-4, d=$a_9$-$a_8$=-1-(-4)=3;

г) a_8=$\frac{a_7+a_9}{2}=\frac{-0{,}9+(-0{,}7)}{2}$=-0,8, d=$a_8$-$a_7$=-0,8-(-0,7)=-0,1.

455.

a_1=-8, a_4=-35, тогда d=$\frac{a_4+a_1}{3}=\frac{-35-(-8)}{3}$=-9 и

a_2=a_1+d=-17, a_3=a_4-d=-26.

-8, -17, -26, -35, d=-9.

456. a_n=a_1+(n-1)d:

а) a_7=-$\sqrt{2}$+6·(1+$\sqrt{2}$)=5$\sqrt{2}$+6; б) a_{15}=3-$\sqrt{5}$+14·2$\sqrt{5}$=27$\sqrt{5}$+3;

в) a_{12}=9$\sqrt{3}$-2+11·(2-$\sqrt{3}$)=20-2$\sqrt{3}$; г) a_9=$\frac{5\sqrt{3}-7}{3}$-8·$\frac{\sqrt{3}-2}{3}$=3-$\sqrt{3}$.

457.

n=$\frac{a_n-a_1}{d}$+1:

а) n=$\frac{6-\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$+1=7; б) n=$\frac{13\sqrt{2}-2-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$+1=8;

в) n=$\frac{13-5\sqrt{5}-5+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$+1=5; г) n=$\frac{1-\frac{5\sqrt{3}-7}{3}}{-\frac{\sqrt{3}-2}{3}}$+1=6.

458.

a_1=a_n-(n-1)d:

а) a_1=10$\sqrt{3}$-4-23·$\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{15-3\sqrt{3}}{2}$; б) a_1=28+27q-27(1+q)=1;

в) a_1=2$\sqrt{3}$+5-20$\frac{\sqrt{3}}{2}$=5-8$\sqrt{3}$; г) a_1=l-21(1-3l)=64l-21.

459.

d=$\frac{a_n-a_1}{n-1}$:

а) d=$\frac{-2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}-3}{2\cdot 17}$=-$\frac{2\sqrt{3}}{17}$; б) d=$\frac{m-5-3+7m}{8}$=m-1,

в) d=$\frac{0-\sqrt{5}+1}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{5}$; г) d=$\frac{2p+3-13+8p}{10}$=p-1.

460.

а) 13-0,4n=4,6, n=21; б) 5n-104=21, n=25;

в) 3n-5,7=69,4, n=$\frac{75{,}1}{3}$, так что b - не член прогрессии;

г) 21,3-1,7n=4,3, n=10.

461.

а) a_n<-41 при 12-3n<-41, n>$\frac{53}{3}$, n=18;

б) a_n<-7 при 3$\sqrt{3}$-n$\sqrt{3}$<-7, n>3+$\frac{7}{\sqrt{3}}$, n=8;

в) a_n<-10 при 117-5,5n<10, n<$\frac{107}{5{,}5}$, n=20;

г) a_n<-1 при 15$\sqrt{2}$-n($\sqrt{2}$-1)<-1, n>$\frac{15\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, n=49.

(опечатка в ответе задачника)

462.

а) a_n>$\sqrt{3}$ при 7n-121>$\sqrt{3}$, n>$\frac{121+\sqrt{3}}{7}$, n=18;

б) a_n>21 при n$\sqrt{2}$-4$\sqrt{2}$>21, n>$\frac{21+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, n=19;

в) a_n>2+3$\sqrt{5}$ при 5n-17,7>2+3$\sqrt{5}$, n>$\frac{19{,}7+3\sqrt{5}}{5}$, n=6;

г) a_n>5 при n($\sqrt{5}$-1)-3$\sqrt{5}$>5, n>$\frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, n=10.

463.

a_n=6n-306:

а) a_n>-12 при 6n-306>-12, n>49, n=50;

б) a_n>0 при 6n-306>0, n>51, n=52;

в) a_n≥0 при 6n-306≥300, n≥101, n=101;

г) a_n>-6 при 6n-306>-6, n>50, n=51.

464.

a_1=42, d=-0,5, a_n=a_1+(n-1)d=42+(n-1)(-0,5)=-0,5n+42,5:

а) $a_n>0$ при $-0{,}5n+42{,}5>0$, $n<85$, n=1, 2, ... , 84;
б) $a_n<0$ при $-0{,}5n+42{,}5<0$, $n>85$, n=86, 87, ...;
в) $a_n\in(-\infty, 3]$ при $-0{,}5n+42{,}5\le3$, $n\ge79$, n=79, 80, 81…;
г) $a_n\in[-4{,}5,\ 5{,}5]$ при $-4{,}5\le-0{,}5n+42{,}5\le5{,}5$; $-47\le-0{,}5n\le-37$; $74\le n\le94$, n=74, 75, ... , 93, 94.

465.

$$\begin{cases}\dfrac{a_9}{a_2}=5\\ \dfrac{a_{13}}{a_6}=2+\dfrac{5}{a_6}\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{a_1+8d}{a_1+d}=5\\ \dfrac{a_{13}-5}{a_1+d}=2\end{cases},\ \begin{cases}\dfrac{a_1+8d}{a_1+d}=5\\ \dfrac{a_1+12d-5}{a_1+d}=2\end{cases},$$

$$\begin{cases}a_1+8d=5a_1+5d\\ a_1+12d-5=2a_1+10d\end{cases},\ \begin{cases}4a_1=3d\\ a_1-2d+5=0\end{cases},\ \begin{cases}d=4\\ a_1=3\end{cases}.$$

466.

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=16\\ a_1-a_3=4\end{cases},\ \begin{cases}4a_1+6d=16\\ -2d=4\end{cases},\ \begin{cases}d=-2\\ a_1=7\end{cases}.$$

$a_1=7$, $a_2=5$, $a_3=3$, $a_4=1$.
Искомое число: 1357.

467.

$a_7=-100$, $a_9=-78$. Тогда $d=\dfrac{a_9-a_7}{2}=\dfrac{-78+100}{2}=11$

и $a_{15}=a_7+8D=-100+8\cdot11=-12$.
Далее $a_1=a_7-6\cdot d=-100=6\cdot11=-166$, $a_{20}=a_{15}+5d=-12+5\cdot11=43$.

Так что $S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\cdot20=\dfrac{-166+43}{2}\cdot20=-1230$.

468.
a_k - число штрафных очков за k-й промах
$a_1=1$, $a_2=1{,}5$, $a_3=2$, ...

Известно, что $S_n=7$, тогда $\dfrac{2\cdot a_1+(n-1)}{2}\cdot n=7$,

$n\cdot(2+0{,}5(n-1))=14$,
$0{,}5n^2+1{,}5n-14=0$, $n^2+3n-28=0$, n=4 (так как n>0).
Так что стрелок совершил 4 промаха, а значит попал в цель 21 раз.

469.
a_k - число капель, принятых в k-1 день:
$a_1=5$, $a_2=10$, ... , $a_n=40$, $a_{n+1}=40$, $a_{n+2}=40$, $a_{n+3}=40$, $a_{n+4}=35$, $a_{n+5}=30$, ... , $a_m=5$.

$n=\frac{a_n-a_1}{5}+1=8$.

Тогда $a_1=5$, $a_2=10$, ... , $a_8=40$, $a_9=40$, $a_{10}=40$, $a_{11}=40$,
$a_{12}=35$, $a_{13}=30$, ... , $a_m=5$.

$m=11+\frac{a_m-a_{11}}{-5}$, $m=18$.

Тогда общее число капель
$S=a_1+a_2+ ... +a_8+3\cdot40+a_{12}+ ... +a_{18}=$
$=2(a_1+ ... +a_7)+4\cdot40=(a_1+a_7)\cdot7+4\cdot40=40\cdot7+4\cdot40=440$.
Так что больной надо купить 2 пузырька с каплями.

470.

a_k - количество сантиметров, пройденное за k-ю минуту.
$a_1=30$, $a_2=35$, $a_3=40$, ...

$S_n=525$, тогда $\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=525$,

$(60+5(n-1))\cdot n=1050$, $5n^2+55n-1050=0$, $n^2+11n-210=0$, $n=10$ (так как $n>0$).
Так что за 10 минут улитка достигнет вершины дерева.

471.

a_k - количество метров, пройденных за k-й день.
$a_1=1400$, $a_2=1300$, $a_3=1200$, ...

$S_n=5000$, тогда $\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=5000$,

$n(2800+(n-1)(-100))=10000$, $100n^2-2900n+10000=0$,
$n^2-29n+100=0$, $n=4$ (так как $4<25$).
Так что за 4 дня альпинисты покорили высоту.

472.

Пусть a_k - количество у.е., заплаченных за k-е кольцо, тогда:
$a_1=26$, $a_2=24$, $a_3=22$, ...

Общая сумма $S=S_n+40=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n+40=n(26-(n-1))+40=40+24n-n^2$.

По условию $\frac{S}{n}=22\frac{4}{9}$, $\frac{40+27n-n^2}{n}=22\frac{4}{9}$, $9n^2-243n-360=-202n$,

$9n^2-243n-360=-202n$, $9n^2-41n-360=0$, $n=9$ (так как $n>0$). Так что было установлено 9 колец.

473.

Если $x-4$, $\sqrt{x-3}$, $x-6$ образуют арифметическую прогрессию, то

$\frac{x-4+x-6}{2}=\sqrt{x-3}$, x-5=$\sqrt{x-3}$, x^2-10x+25=x-3, x^2-11x+28=0,

x=4 и x=7, но x-5>0, так что x=7.

474.

Если $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ образуют прогрессию, то

а) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{b}$, $\frac{a+c}{2ac}=\frac{1}{b}$, ab+bc=2ac, ab+bc+ac;

б) ab+bc=2ac|:ac, $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}$=2. Что и требовалось доказать.

475.

Если $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{c+b}$ - образуют арифметическую прогрессию,

то $\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}}{2}=\frac{1}{a+c}$, $\frac{c+b+a+b}{2(a+b)(c+b)}=\frac{1}{a+c}$,

(2b+a+c)(a+c)=2(a+b)(b+c), 2ab+a^2+ac+2bc+ac+c^2=2ab+2ac+$2b^2$+2bc,

то есть $\frac{a^2+c^2}{2}$=b^2, так что a^2, b^2, c^2 - также образуют прогрессию,

что и требовалось доказать.

§ 19. Геометрическая прогрессия

476

а) b_1=-1, b_2=-3, b_3=-9, b_4=-27, b_5=-81, b_6=-243;

б) b_1=-2, b_2=1, b_3=-$\frac{1}{2}$, b_4=$\frac{1}{4}$, b_5=-$\frac{1}{8}$, b_6=$\frac{1}{16}$;

в) b_1=-1, b_2=3, b_3=-9, b_4=27, b_5=-81, b_6=243;

г) b_1=20, b_2=20$\sqrt{5}$, b_3=100, b_4=100$\sqrt{5}$, b_5=500, b_6=500$\sqrt{5}$.

477.

b_1=3, b_2=3^2=9, b_3=3^3=27, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем q=3.

478.

b_1=$\frac{1}{10}$, b_2=$\frac{1}{100}$, b_3=$\frac{1}{1000}$, ...

Это геометрическая прогрессия со знаменателем q=$\frac{1}{10}$.

479.
а), в) и г).

480.
а), в) и г).

481.
а) и г) - возрастающие, в) - убывающая.

482.
а) - возрастающая, б) - убывающая..

483.
а) $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $q=\frac{3}{4}$; в) $q=\frac{1}{3}$; г) $q=\frac{7}{2}$.

484.
а) $q=b_3:b_2=(-32):8=-4$; $b_1=b_2;q=-2$;

б) $q=b_5:b_4=(-\frac{1}{2}):1=-\frac{1}{2}$; $b_1=b_4;q^3=1:(-\frac{1}{2})^3=-8$;

в) $q=b_3:b_2=\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$; $b_1=b_2;q=3$;

г) $q=b_6:b_5=3:6=\frac{1}{2}$; $b_1=b_5;q^4=6:(\frac{1}{2})^4=96$.

485.
а) $b_4=b_1\cdot q^3=-2\cdot(-\frac{3}{2})^3=\frac{27}{4}$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2})^4=4\sqrt{6}$;

в) $b_4=b_1\cdot q^3=3\cdot(-\frac{3}{4})^3=-\frac{81}{64}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=5\sqrt{5}\cdot(5^{-\frac{1}{2}})^5=5^{-1}=\frac{1}{5}$.

486.
а) $b_n=5^{n-1}$, $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, $b_1=1$, $q=5$;

б) $b_n=\frac{3}{5}\cdot 2^n$, $b_n=\frac{6}{5}\cdot 2^{n-1}$, $b_1=\frac{6}{5}$, $q=2$;

в) $b_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$, $b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{4}$;

г) $b_n=\frac{5}{2^{n+1}}$, $b_n=\frac{5}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}$, $b_1=\frac{5}{4}$, $q=\frac{1}{2}$.

487.
$b_1=18$, $b_3=2$, тогда $b_2^2=b_1\cdot b_3=36$ и так как $b_2>0$ (по условию), то $b_2=6$.
То есть 18, 6, 2.

488.

а) $b_n=5\cdot2^{n-1}$, $640=5\cdot2^{n-1}$, $2^{n-1}=128$, n=7, так что A=640 - член прогрессии;

б) $b_n=-\frac{7}{5}(\sqrt{3})^n$, $-37{,}8=-\frac{7}{5}(\sqrt{3})^n$, $(\sqrt{3})^n=27$, n=6, так что A=-37,8 - член прогрессии;

в) $b_n=-2\cdot5^{\frac{n}{2}}$, $-1250=-2\cdot5^{\frac{n}{2}}$, $5^{\frac{n}{2}}=625$, n=8, так что $A=b_8$ - член прогрессии;

г) $b_n=3{,}5(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+3}$, $-0{,}218=3{,}5\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+3}$, $(-\sqrt{2})^{-n-3}=\frac{0{,}436}{7}$, n - не является натуральным числом, так что A - не член прогрессии.

489.

а) $b_n=4\cdot3^{n-1}$, $b_n>324$ при $4\cdot3^{n-1}>324$, $3^{n-1}>81$, n>5, n=6;

б) $b_n=3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}$, $b_n>14$ при $3{,}5\cdot(\sqrt{2})^{n-2}>14$, $(\sqrt{2})^{n-2}>4$, n>6, n=7;

в) $b_n=2\cdot5^{n-1}$, $b_4>253$ при $2\cdot5^{n-1}>253$, $5^{n-1}>\frac{253}{2}$, n=5;

г) $b_n=\frac{2}{5}(\sqrt{3})^{n+3}$, $b_n>84$ при $\frac{2}{5}(\sqrt{3})^{n+3}>210$, n=7.

490.

а) $b_n=3\cdot2^{n-1}$; б) $b_n=-2{,}5\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$; в) $b_n=2{,}5\cdot(-0{,}2)^{n-1}$; г) $b_n=3\sqrt{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$.

491.

а) $b_n=8\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$; б) $b_n=-\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}=(-\frac{1}{4})^n$;

в) $b_n=4\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$; г) $b_n=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^n$.

492.

а) $b_5=b_1\cdot q^4$;
б) $b_{41}=b_1\cdot q^{40}$;
в) $b_k=b_1\cdot q^{k-1}$;
г) $b_{2n}=b_1\cdot q^{2n-1}$.

493.

а) $b_4=b_1\cdot q^3=128\cdot(-\frac{1}{2})^3=-16$; б) $b_5=b_1\cdot q^4=270\cdot(\frac{1}{3})^4=\frac{10}{3}$;

в) $b_8=b_1\cdot q^7=\frac{1}{5}\cdot(\sqrt{5})^7=25\sqrt{5}$; г) $b_6=b_1\cdot q^5=625\cdot(-\frac{1}{5})^5=-\frac{1}{5}$.

494.

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$:

а) $b_{10}=b_1\cdot q^9=1\cdot 3^9=3^9$; б) $b_6=b_1\cdot q^5=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^5=-\frac{1}{486}$;

в) $b_5=b_1\cdot q^4=8\cdot\frac{1}{2}{}^4=\frac{1}{2}$; г) $b_5=b_1\cdot q^4=2{,}5\cdot(1{,}5)^4=\frac{405}{32}$.

495.

а) $\frac{1}{729}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$, $\frac{1}{729}=(\frac{1}{3})^n$, n=6;

б) $2=256\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$, $(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{128}$, n=8;

в) $4\cdot 10^{-3}=2{,}5\cdot(\frac{1}{5})^{n-1}$, $\frac{1}{625}=(\frac{1}{5})^{n-1}$, n=5;

г) $-2401=\frac{1}{343}\cdot(-7)^{n-1}$, $(-7)^{n-1}=-823543$, n=8.

496.

а) $b_n=3^{n-1}$, $3^{n-1}<729$ при $n\le 7$, n=1, 2, ... , 6, 7;

б) $b_n=3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$, $3(\frac{1}{2})^{n-1}<0{,}003$ при $(\frac{1}{2})^{n-1}<0{,}001$, n>10, n=11, 12, 13…;

в) $b_n=243\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$, $243(\frac{1}{3})^{n-1}<0{,}1$ при $(\frac{1}{3})^{n-1}<\frac{0{,}1}{243}$, n>8, n=9, 10, 11... ;

г) $b_n=16\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$, $16(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}<1$ при $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}<\frac{1}{2^4}$, n>9, n= 10, 11... .

497.

а) $q^2=\frac{b_7}{b_5}=\frac{192}{48}=4$, q>0, так что q=2 и $b_1=b_5:q^4=48:16=3$;

б) $q^3=b_5:b_2=\frac{81}{24}=\frac{27}{8}$, $q=\frac{3}{2}$ и $b_1=b_2:q=24:\frac{3}{2}=16$;

в) $q^3=b_6:b_3=-\frac{13}{32}:\frac{13}{4}=-\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=b_3:q^2=\frac{13}{4}:\frac{1}{4}=13$;

г) $q^2=b_5:b_3=48:12=4$, q<0, так что q=-2 и $b_1=b_3:q^2=12:4=3$.

498.

$b_1=1$, $b_4=\frac{1}{8}$, тогда $q=\sqrt[3]{b_4:b_1}=\frac{1}{2}$ и $b_2=\frac{1}{2}$, $b_3=\frac{1}{4}$. То есть 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

499.

P_k - периметр k-го вписанного треугольника

$P_1=3\cdot 32=96$, $P_2=3\cdot\frac{32}{2}=48$, $P_3=24$, ...

Так что P_1, P_2, P_3 ... - геометрическая прогрессия.

$P_n=96\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$.

500.

$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$:

а) $S_4=\frac{1(2^4-1)}{2-1}=15$; б) $S_4=\frac{3(4^4-1)}{4-1}=255$;

в) $S_4=\frac{1((\frac{1}{3})^4-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{27}$; г) $S_4=\frac{4\cdot((-\frac{1}{2})^4-1)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{4\cdot 2\cdot 15}{3\cdot 16}=\frac{5}{2}$.

501.

а) $S_6=\frac{18\cdot((\frac{1}{3})^6-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{18\cdot 3\cdot 728}{2\cdot 729}=\frac{728}{27}$;

б) $S_6=\frac{15\cdot((\frac{2}{3})^6-1)}{\frac{2}{3}-1}=\frac{15\cdot 3\cdot 665}{729}=\frac{3325}{81}$;

в) $S_6=\frac{-12\cdot((-\frac{1}{2})^6-1)}{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{12\cdot 2\cdot 63}{3\cdot 64}=-\frac{63}{8}$;

г) $S_6=\frac{-9\cdot((\sqrt{3})^6-1)}{\sqrt{3}-1}=-\frac{234}{\sqrt{3}-1}$.

502.

а) $S_6=\frac{5(2^6-1)}{2-1}=315$; б) $S_8=\frac{-1((-1,5)^8-1)}{-1,5-1}=\frac{1261}{128}$;

в) $S_{13}=\frac{-4((\frac{1}{2})^{13}-1)}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{8191}{1024}$; г) $S_8=\frac{4,5((\frac{1}{3})^8-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{1640}{243}$.

503.

а) b_1=3, q=2, $S_5=\frac{3(2^5-1)}{2-1}$=93;

б) b_1=-1, q=-2, $S_5=\frac{-1((-2)^5-1)}{-2-1}$=-11;

в) b_1=-3, q=$\frac{1}{2}$, $S_5=\frac{-3((\frac{1}{2})^5-1)}{\frac{1}{2}-1}$=-$\frac{93}{16}$;

г) $b_1=\sqrt{2}$, q=3, $S_5=\frac{\sqrt{2}(3^5-1)}{3-1}$=121$\sqrt{2}$.

504.

а) q=b_5:b_4=320:160=2, b_1=b_4:q^3=160:8=20, $S_5=\frac{20(2^5-1)}{2-1}$=620;

б) q=$\sqrt{b_9:b_7}=\sqrt{16:8}=\sqrt{2}$, b_1=b_7:q^6=8:2^3=1,

$S_5=\frac{1((\sqrt{2})^5-1)}{\sqrt{2}-1}$=(4$\sqrt{2}$ -1)($\sqrt{2}$ +1)=7+3$\sqrt{2}$; опечатка в ответе задачника.

в) q=$\sqrt{b_5:b_3}=\sqrt{\frac{1}{9}:1}=\frac{1}{3}$, b_1=b_3:q^2=1:($\frac{1}{3}$)^2=9,

$S_5=\frac{9\cdot((\frac{1}{3})^5-1)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{9\cdot3\cdot242}{2\cdot243}=\frac{121}{9}$;

г) q=$\sqrt[3]{b_7:b_4}=\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, b_1=b_4:q^3=3$\sqrt{3}$:3$\sqrt{3}$=1,

$S_5=\frac{1((\sqrt{3})^5-1)}{\sqrt{3}-1}=\frac{(9\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}$=13+4$\sqrt{3}$.

505.

b_1	q	n	b_n	S_n
15	$\frac{1}{3}$	3	$1\frac{2}{3}$	$21\frac{2}{3}$
16-3$\sqrt{23}$	$\frac{9+3\sqrt{23}}{7}$	3	18	25

$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	$6\frac{89}{96}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4	9	$4(3+\sqrt{3})$
15	$\frac{1}{3}$	6	$\frac{5}{81}$	$22\frac{38}{81}$

b_1	q	n	b_n	S_n
$\frac{15}{169}$	$\frac{13}{5}$	4	$\frac{39}{25}$	$\frac{10476}{4225}$
$2\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{7(\sqrt{6}+1)}{3}$

506.

а) $b_4=\sqrt{b_3\cdot b_5}=\sqrt{36\cdot 49}=42$; б) $b_4=-\sqrt{b_3\cdot b_5}=-\sqrt{36\cdot 49}=-42$;

в) $b_8=\sqrt{b_7\cdot b_9}=\sqrt{16\cdot 25}=20$; г) $b_8=-\sqrt{b_7\cdot b_9}=-\sqrt{16\cdot 25}=-20$.

507.

а) $b_3=\sqrt{b_4\cdot b_2}=\sqrt{16\cdot 4}=8$; $q=b_3:b_2=8:4=2$;

б) $b_6=-\sqrt{b_5\cdot b_7}=-\sqrt{3\cdot 12}=-6$; $q=b_6:b_5=-6:12=-\frac{1}{2}$;

в) $b_{26}=-\sqrt{b_{25}\cdot b_{27}}=-\sqrt{7\cdot 21}=-7\sqrt{3}$; $q=b_{26}:b_{25}=-\sqrt{3}$;

г) $b_7=\sqrt{b_6\cdot b_8}=\sqrt{15\cdot 5}=5\sqrt{3}$; $q=b_8:b_7=5:5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. опечатка в ответе задачника.

508.

Если t, 4t, 8 - члены прогрессии, то

$t\cdot 8=(4t)^2$, так что $t=\frac{1}{2}$.

509.

Если -81, 3y, -1 - члены прогрессии, то $(-81)\cdot(-1)=(3y)^2$, откуда $y=\pm 3$.

510.

Если x-1, $\sqrt{3x}$, 6x - члены прогрессии, то

$(x-1)6x=(\sqrt{3x})^2$, $(x-1)\cdot 6=3$, $x=\frac{3}{2}$.

511.

а) $b_1=\frac{6}{5}$, q=3; б) b_1=0,3, $q=(-\frac{1}{5})$;

в) $b_1=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$; г) $b_1=-\frac{4}{7}$, q=2.

512.

$b_1=4$, $b_3+b_5=80$, $q>1$, тогда $b_3+b_5=b_1(q^2+q^4)=80$,
то есть $q^2+q^4=20$, так что q=2 и $b_{10}=b_1\cdot q^9=4\cdot 2^9=2^{11}=2048$.

513.

$b_1=1$, $b_5=81$, тогда $q^4=b_5\cdot b_1=81$, $q=\pm 3$, так что $b_2=\pm 3$, $b_3=9$, $b_4=\pm 2\cdot 7$.
То есть 1, 3, 9, 27, 81 или 1, -3, 9, -27, 81.

514.

$\begin{cases} b_2 - b_3 = 18 \\ b_2 + b_3 = 54 \end{cases}$, тогда $b_2=36$, $b_3=18$, $q=b_3:b_2=\frac{1}{2}$ и $b_1=b_2:q=72$.

515.

$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14 \\ b_4 + b_5 + b_6 = 112 \end{cases}$, $\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 14 \\ b_1q^3(1+q+q^2) = 112 \end{cases}$, $q^3=8$, q=2, $b_1=2$.
Так что прогрессия: 2, 4, 8, 16, 32, 64.

516.

$\begin{cases} b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 216 \\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{364} \end{cases}$, $b_1>0$, $b_2>0$, $b_3>0$.

Тогда $\begin{cases} b_1^3q^3 = 216 \\ b_1\sqrt{1+q^2+q^4} = \sqrt{364} \end{cases}$, $\begin{cases} b_1 \cdot q = 6 \\ b_1\sqrt{1+q^2+q^4} = 2\sqrt{91} \end{cases}$,
$b_1=2$, q=3, $b_2=6$, $b_3=18$.

517.

$S_6^* = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_6^2 = b_1^2\,(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10}) = \frac{b_1^2(q^{12}-1)}{q^2-1}$:

а) $S_6^* = \frac{9(64-1)}{1}=567$; б) $S_6^* = \frac{5(46656-1)}{5}=46655$;

в) $S_6^* = \frac{243(\frac{1}{729}-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{729\cdot 728}{2\cdot 729}=364$;

г) $S_6^* = \dfrac{12(\frac{1}{64}-1)}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{24\cdot 63}{64} = \dfrac{189}{8}$.

518.

$S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q^n = \dfrac{S_n(q-1)}{b_1} + 1$:

а) $3^n = \dfrac{200(3-1)}{5} + 1$, $3^n = 81$, $n=4$;

б) $(\frac{1}{2})^n = \dfrac{-127\cdot(\frac{1}{2}-1)}{64\cdot(-1)} + 1$, $(\frac{1}{2})^n = \dfrac{1}{128}$, $n=7$;

в) $2^n = \dfrac{189\cdot(2-1)}{3} + 1$, $2^n = 64$, $n=6$;

г) $(\frac{1}{3})^n = \dfrac{121\cdot(\frac{1}{3}-1)}{27\cdot 3} + 1$, $(\frac{1}{3})^n = \dfrac{1}{243}$, $n=5$.

519.

а) $1+2+2^2+ \ldots +2^8 = S_9 = \dfrac{b_1(q^9-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((2^9-1)}{2-1} = 511$;

б) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^{10}} = S_{11} = \dfrac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot(-\frac{1}{2})^{11}-1)}{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{2049\cdot 2}{3\cdot 2048} = \dfrac{683}{1024}$;

в) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+ \ldots +\dfrac{1}{3^6} = S_6 = \dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((\frac{1}{3})^6-1)}{3(\frac{1}{3}-1)} = \dfrac{728\cdot 3}{3\cdot 729\cdot 2} = \dfrac{364}{729}$;

г) $1-3+3^2-3^3+ \ldots -3^9 = S_{10} = \dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \dfrac{1\cdot((-3)^{10}-1)}{-3-1} = \dfrac{3^{10}-1}{-4} = -14762$.

520.

а) $1+x+x^2+ \ldots +x^{100} = S_{101} = \dfrac{b_1(q^{101}-1)}{q-1} = \dfrac{1(x^{101}-1)}{x-1} = \dfrac{x^{101}-1}{x-1}$;

б) $x+x^3+x^5+ \ldots +x^{35} = S_{18} = \dfrac{b_1(q^{18}-1)}{q-1} = \dfrac{x(x^{36}-1)}{x^2-1}$;

в) $x^2-x^4+x^6- \ldots -x^{20} = S_{10} = \dfrac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = \dfrac{x^2(x^{20}-1)}{-x^2-1} = \dfrac{x^2(1-x^{20})}{1+x^2}$;

г) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^{40}}$ =S$_{40}$= $\frac{b_1(q^{40}-1)}{q-1}=\frac{1((\frac{1}{x})^{40}-1)}{x\cdot(\frac{1}{x}-1)}=\frac{1-x^{40}}{x^{40}(1-x)}$.

521.

а) 1+x+x^2+x^3=S$_4$= $\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1(x^4-1)}{x-1}=\frac{x^4-1}{x-1}$, ч.т.д.;

б) 1+x+x^4+x^6=S$_4$= $\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1(x^8-1)}{x^2-1}=\frac{x^8-1}{x^2-1}$, ч.т.д.;

в) 1-x+x^2-x^3=S$_4$= $\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1((-x)^4-1)}{-x-1}=\frac{1-x^4}{1+x}$, ч.т.д.;

г) 1-x^2+x^4-x^6=S$_4$= $\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{1((-x^2)^4-1)}{-x^2-1}=\frac{1-x^8}{x^2+1}$, ч.т.д.;

522.

а) (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)·S$_5$=(x-1)· $\frac{1(x^5-1)}{x-1}$ =x^5-1, ч.т.д.;

б) (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=(x+1)·S$_5$=(x+1)· $\frac{1\cdot((-x^5)-1)}{-x-1}$ =x^5+1, ч.т.д.;

в) (x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1)=(x^2+1)·S$_4$=(x^2+1)· $\frac{-1((-x^2)^4-1)}{-x^2-1}$ =x^8-1,

значит утверждение x^8+1=(x^2+1)(x^6-x^4+x^2-1) - неверно.

г)) (1-x^2)(x^4+x^2+1)=(1-x^2)·S$_3$=(1-x^2)· $\frac{1((x^2)^3-1)}{x^2-1}$ =1-x^6, ч.т.д.;

523.

Дана прогрессия b, b$_2$, ... , b$_{2n}$.

Тогда $\frac{b_2+b_4+...+b_{2n}}{b_1+b_3+...+b_{2n-1}}=\frac{q(b_1+...+b_{2n-1})}{b_1+...+b_{2n-1}}$ =q, ч.т.д.;

524.

b$_k$ - число бактерий после 20·k-минут

$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=4,...,\ b_k=2^{k-1}$

Тогда в сутках 20·3·24 - минут, то есть 20·k,

где k=72 и S$_k$= $\frac{b_1(q^k-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{72}-1)}{2-1}$ =2^{72}–1.

525.

b_k - количество денег, отданных богачом в k-й день (копеек).

Тогда $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$,... $b_{30}=2^{29}$.

Тогда богач отдал $S_{30}=\frac{b_1(q^{30}-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$ копеек

$\approx$1070000000 коп.$\approx$10 млн. руб.

А получил богач $S=30\cdot100000=3000000$=3 млн. руб.

Так что богач проиграл.

526.

$b_1, \dots, b_n$ - геометрическая прогрессия.

Тогда $b_k\cdot b_{n-k+1}=(b_1\cdot q^{k-1})\cdot(b_n:q^{n-(n-k+1)})=b_1\cdot b_n$ - что и требовалось доказать.

527.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.

$b_1=9$, b_1 b_2 ,b_3-16 - арифметическая прогрессия.

Тогда $b_1\cdot b_3=b_2^2$, то есть $9b_3=b_2^2$ и $\frac{b_1+b_9-16}{2}=b_2$, то есть $b_2=\frac{b_3-7}{2}$.

Так что $9b_3=(\frac{b_3-7}{2})^2$, $36b_3=b_3^2-14b_3+49$,

$b_3^2-50b_3+49=0$, $b_3=1$ или $b_3=49$.

Тогда $b_2=-3$ или $b_2=21$.

528.

$a_1+a_2+a_3=24$, a_1, a_2, a_3 - арифметическая прогрессия.

a_1, a_2+1, a_3+14 - геометрическая прогрессия.

Тогда поскольку $a_1+a_3=2a_2$, то $3a_2=24$, $a_2=8$.

Далее, $a_1+a_3=16$ и $a_1(a_3+14)=(a_2+1)^2=81$.

$\begin{cases}a_1+a_3=16\\a_1(a_3+14)=81\end{cases}$, $\begin{cases}a_1=16-a_3\\(16-a_3)(a_3+14)=81\end{cases}$, $\begin{cases}a_1=16-a_3\\a_3^2-2a_3-143=0\end{cases}$,

$\begin{cases}a_1=16-a_3\\a_3=13 \text{ или } a_3=-11\end{cases}$, $\begin{cases}a_3=13\\a_1=3\end{cases}$, $\begin{cases}a_3=-11\\a_1=27\end{cases}$.

Так что 27, 8, -11 или 3, 8, 13.

529.

b_1, b_2, b_3, ... - геометрическая прогрессия.

$b_1+b_2+b_3=91$, b_1+25, b_2+27, b_3+1 - арифметическая прогрессия.

Тогда $b_1+25+b_3+1=2(b_2+27)$, причем $b_1+25>b_2+27>b_3+1$.

Тогда $3b_2+28=91$, $b_2=21$.

Так что $b_1+b_3=70$ и $b_1b_3=b_2^2=441$, так что $b_1=7$, $b_3=63$ или $b_2=7$, $b_1=63$.

Так как $b_1+25>b_3+1$, то $b_1=63$, а $b_3=7$.

Тогда $q=b_2:b_1=\frac{1}{3}$. и $b_7=b_1\cdot q^6=63\cdot\frac{1}{3^6}=\frac{7}{81}$.

530.

b_1, b_2, b_3 - геометрическая прогрессия.
$b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3=a_7$, где a_1, a_2, ... , a_7 - арифметическая прогрессия.
$b_1+b_2+b_3=31$. Тогда $b_1(1+q+q^2)=31$.
$d=a_2-a_1=b_2-b_1$, $a_7=a_1+6d$, то есть
$b_3=b_1+6(b_2-b_1)$, $b_3=6b_2-5b_1$, $b_1(5-6q+q^2)=0$.
Тогда $5-6q+q^2=0$, $q=1$ или $q=5$.
Тогда $b_1=\frac{31}{1+q+q^2}$, $b_1=\frac{31}{3}$ или $b_1=1$.

Тогда $b_2=b_3=\frac{31}{3}$ или $b_2=5$, $b_3=25$.

Ответ: 1, 5, 25 или $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$, $\frac{31}{3}$.

Глава 5. Элементы теории тригонометрических функций

§ 21. Числовая окружность.

531.
Смотри рис. 1:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

532.
Смотри рис. 2:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

533.
Смотри рис. 3:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

534.
Смотри рис. 4:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

535.
Смотри рис. 5:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

536.
Смотри рис. 6:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

537.
Смотри рис. 7:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

538.
Смотри рис. 8:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

539.
Смотри рис. 9:
а) точка A; б) точка B; в) точка C; г) точка D.

540.
а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $\frac{5\pi}{6}$.

рис. 1

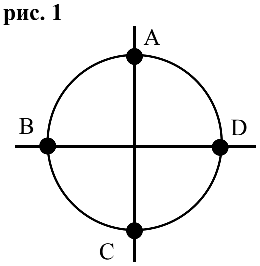


рис. 2

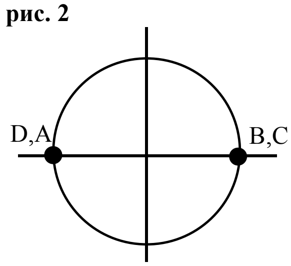


рис. 3

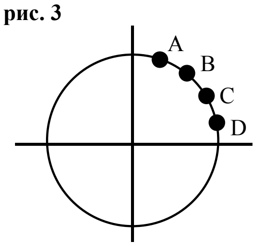


рис. 4

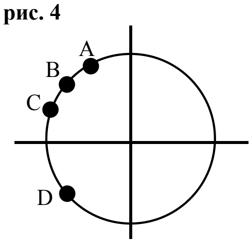


рис. 5

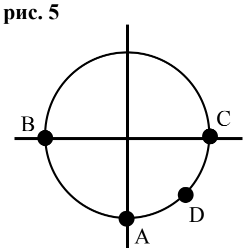


рис. 6

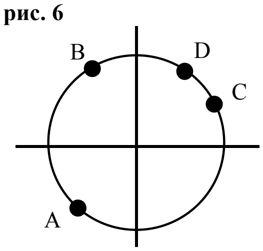


рис. 7

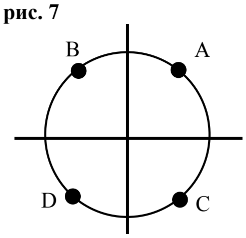


рис. 8

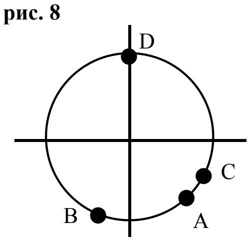
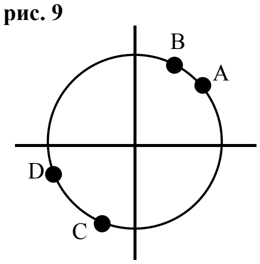


рис. 9



540.

а) Длина $AM = \frac{3\pi}{4}$;

б) Длина $BK = \frac{2\pi}{3}$;

в) Длина $MP = \frac{7\pi}{12}$;

г) Длина $KA = \frac{5\pi}{6}$.

541.

а) Длина $AM = \frac{\pi}{4}$;

б) Длина $CK = \frac{2\pi}{3}$;

в) Длина $MP = \frac{19\pi}{12}$;

г) Длина $PC = \frac{7\pi}{6}$.

542.

а) Нет, не совпадают, так как $12\frac{1}{3}\pi \neq \frac{31\pi}{3} + 2\pi n$,

n – целое.

б) Нет, не совпадают, так как $8\frac{1}{6}\pi \neq \frac{19\pi}{6} + 2\pi n$, n ∈ Z.

в) Да, совпадают, так как $12\frac{1}{4}\pi = \frac{9}{4}\pi + 10\pi$.

г) Нет, не совпадают., так как $19\frac{3}{4}\pi \neq 6{,}75\pi + 2\pi n$

543.

а) Симметрично относительно *OX* (диаметра, проходящего через точку *O*).

б) Совпадают.

в) Симметрично относительно центра.

г) Совпадают.

544.

а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi r$, $r \in$ Z.

б) 5 + 2πn , n ∈ Z.

в) $\frac{3\pi}{4}+2\pi l$, $l \in$ Z.

г)-3 + 2πk ,k∈Z .

545.

а) Да, можно.

б) Да, можно.

в) Да, можно (6,2 < 2π).

г) Нет, нельзя (6,3 > 2π).

546.

а) $\frac{23\pi}{12}$. б) $\frac{\pi}{12}$.

в) $\frac{\pi}{12}$. г) $\frac{23\pi}{12}$.

547.

а) $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$. б) $\frac{3\pi}{10}$.

в) $\frac{9\pi}{5}$. г) $\frac{17\pi}{10}$.

548.

а) $\frac{\pi}{12}$. б) $\frac{19\pi}{12}$.

в) $\frac{23\pi}{12}$. г) $\frac{5\pi}{12}$.

549.

а) 2π , – 2π; б) $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$;

в) π, – π; г) $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$;

550.

а) $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$ (в ответе задачника ошибка).

в) $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$. г) $\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$.

551.

а) $\frac{\pi}{3}$, б) $\frac{\pi}{2}$, в) $\frac{7\pi}{6}$,   г) $\frac{\pi}{3}$.

552.

а) $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. В четвертой.

б) $-\frac{3\pi}{2} < -5 < -2\pi$. В первой.

в) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$. Во второй.

г) $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$. В первой.

553.

а) $\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$. Во второй.

б) $5\pi < 17 < \frac{11\pi}{2}$. В третьей.

в) $\frac{19\pi}{2} < 31 < 10\pi$. В четвертой.

г) $30\pi < 95 < \frac{61\pi}{2}$. В первой.

§ 22. Числовая окружность в координатной плоскости

554.

а) M_1 $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

б) M_2 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) M_3 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

г) M_4 $(0; 1)$.

555.

а) M_1 $(0;1)$.
б) M_2 $(0; -1)$.
в) M_3 $(0; 1)$.
г) M_4 $(0; -1)$.

556.

а) M_1 (1; 0).
б) M_2 (–1; 0).
в) M_3 (1; 0).
г) M_4 (1; 0).

557.

а) M_1 (1; 0).
б) M_2 (0; 1).
в) M_3 (–1; 0).
г) M_4 (0; 1).

558.

а) $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

б) $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

в) $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

г) $M_4\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

559.

а) $M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

б) $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

г) $M_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

560.

а) 2π; -2π;

б) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

в) π; $-\pi$.

г) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

561.

а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) πk, $k\in Z$.

г) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

562.

а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

563.

а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

564.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

565.

а) $|0{,}7|<1$. Да, имеется.

б) $\left|\frac{\pi}{3}\right|>1$. Нет, не имеется.

в) $\left|\frac{\pi}{4}\right| < 1$. Да, имеется.

г) $|1{,}2| > 1$. Нет, не имеется.

566.

а) М $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

б) М $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) М $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

г) М $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

567.

а) М $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) М $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;

в) М $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) М $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

568.

а) $\frac{\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$.

б) $\frac{3\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

в) $\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.

г) $\frac{7\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}$.

569.

а) $\frac{\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}$.

б) $\frac{2\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}$.

в) $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$.
г) $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

570.
а) $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. б) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $k \in Z$.
в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $k \in Z$. г) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

571.
а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.
б) $\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.
в) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$.
г) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

572.
а) $x < 0$, $y > 0$. б) $x < 0$, $y < 0$.
в) $x > 0$, $y > 0$. г) $x > 0$, $y < 0$.

573.
а) $x > 0$, $y < 0$.
б) $x < 0$, $y > 0$.
в) $x > 0$, $y < 0$.
г) $x < 0$, $y < 0$.

§ 23. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

574.
а) $sin\ t = 0$, $cos\ t = 1$.
б) $sin\ t = 1$, $cos\ t = 0$.
в) $sin\ t = -1$, $cos\ t = 0$.
г) $sin\ t = -0$, $cos\ t = -1$.

575.
а) $sin\ t = 0$, $cos = 1$.
б) $sin\ t = -1$, $cos\ t = 0$.
в) $sin\ t = 1$, $cos\ t = 0$.

г) $sin\ t = 0$, $cos\ t = -1$.

576.

а) $sin\ t = \frac{1}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) $sin\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ t = -\frac{1}{2}$.

в) $sin\ t = \frac{1}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

г) $sin\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ t = \frac{1}{2}$.

577.

а) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $sin\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

г) $sin\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

578.

а) "+".
б) "–".
в) "–".
г) "–".

579.

а) "–".
б) "–".
в) "–".
г) "+".

580.

а) $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{2}$.

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1+1+1 = 1$.

581.

а) $2\sin 0+3\cos\frac{\pi}{2}-4\sin\frac{\pi}{2}=0+0-4=-4$.

б) $3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos(-\pi)-5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=2$.

582.

а) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$.

б) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

583.

$\sin t=\frac{3}{5}$

а) $\sin(t+2\pi)=\sin t=\frac{3}{5}$.

б) $\sin(t-\pi)=-\sin t=-\frac{3}{5}$.

в) $\sin(t-2\pi)=\sin t=\frac{3}{5}$.

г) $\sin(t+\pi)=-\sin t=-\frac{3}{5}$.

584.

$\cos t=-\frac{4}{5}$

а) $\cos(t+2\pi)=\cos t=-\frac{4}{5}$.

б) $\cos(t-\pi)=-\cos t=\frac{4}{5}$.

в) $\cos(t-2\pi)=\cos t=-\frac{4}{5}$.

г) $\cos(t+\pi)=-\cos t=\frac{4}{5}$.

585.

а) $tg\frac{5\pi}{4}=+1$.

б) $tg\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

в) $tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) $\text{tg}\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

586.

а) $ctg\frac{4\pi}{3}=+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) ctg 0 – не существует.

в) $ctg\frac{7\pi}{4}=-1$. г) $ctg\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

587.

а) $tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.б) $ctg\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=1$.

в) $ctg\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. г) $tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

588.

а) $tg\frac{\pi}{4}+ctg\frac{5\pi}{4}=1+1=2$.

б) $ctg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$.

в) $tg\frac{\pi}{6}-ctg\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

г) $tg\frac{9\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}=1+1=2$.

589.

а) $tg\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot ctg\frac{\pi}{6}=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$.

б) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}tg\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

в) $2\sin\pi+3\cos\pi+ctg\frac{\pi}{2}=0-3+0=-3$.

г) $2tg0+8\cos\frac{3\pi}{2}-6\sin\frac{\pi}{3}=0+0-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}$.

590.

а) $tg\frac{\pi}{5}\cdot ctg\frac{\pi}{5}=1$. б) $-4\text{tg}\,2{,}3\cdot\text{ctg}\,2{,}3=-4$.

в) $3tg\frac{\pi}{7}\cdot ctg\frac{\pi}{7}=3$. г) $7tg\frac{\pi}{12}\cdot ctg\frac{\pi}{12}=7$.

591.

$tgt=\frac{3}{4}$.

а) $tg(t+\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$. б) $tg(t-\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$.

в) $tg(t-4\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$. г) $tg(t+2\pi)=tg\,t=\frac{3}{4}$.

592.

а) $sin\ t=0$

$t=\pi k,\ k\in Z$.

б) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $t=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\sin t=1$. $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

593.

а) $\sin t=-1$

$t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

б) $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $t=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\sin t=-0{,}5$. $t=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

г) $\sin=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $t=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. $t=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

594.

а) $\cos t=0$; $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

б) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

в) $\cos t = \frac{1}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

595.

а) $\cos t = -0{,}5$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $\cos t = -1$; $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

596.

а) "+".
б) "–".
в) "+".
г) "–".

597.

а) "–".
б) "–".
в) "–".
г) "–".

598.

а) "–".
б) "+".
в) "+".
г) "+".

599.

Выражение имеет смысл только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно.
а) $\sin 11{,}2\pi < 0$.
Нет, не имеет.
б) $\cos 1{,}3\pi < 0$.
Нет, не имеет.
в) $\sin(-3{,}4\pi) > 0$.
Да, имеет.
г) $\cos(-6{,}9\pi) < 0$.

Нет, не имеет.

600.

$$\sin^2(1{,}5+2\pi k)+\cos^2 1{,}5+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sin^2(1{,}5)+\cos^2(1{,}5)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

601.

$$\cos 1+\cos(1+\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{6}=\cos 1-\cos 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

602.

$$\sin 2+\sin(2+\pi)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\frac{\pi}{12}=$$

$$=\sin 2-\sin 2+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\frac{\pi}{12}=1.$$

603.

$$tg 2{,}5\cdot ctg 2{,}5+\cos^2\pi-\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=1+1-1=1.$$

604.

а) $a=\sin\frac{7\pi}{10}, b=\sin\frac{5\pi}{6}$,

$a>b$, так как $\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{10}<\frac{5\pi}{6}<\pi$, а функция $\sin x$ – убывает на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

б) $a=\cos 2$, $b=\sin 2$.

$a<b$, так как $a<0$, $b>0$.

в) $a=\cos\frac{\pi}{8}$, $b=\cos\frac{\pi}{3}$

$a>b$, так как $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{3}$, а функция $\cos x$ убывает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

г) $a=\sin 1$, $b=\cos 1$.

$b=\cos 1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $a>b$, так как $\frac{\pi}{2}-1<1$, а функция

$y=\sin x$ – возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ, приведенный в задачнике, не верен.

605.

а) $\sin\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{7}, \sin\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{3}$.

б) $\cos\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{8}$.

606.

а) $\cos\frac{5\pi}{9} - tg\frac{25\pi}{18} = \cos\frac{5\pi}{9} - tg\frac{7\pi}{18}$,

$\cos\frac{5\pi}{9} < 0,\ tg\frac{7\pi}{18} > 0$, значит наше выражение имеет знак "–".

б) $tg1 - \cos 2$

$tg1 > 0,\ \cos 2 < 0$, значит наше выражение имеет знак "+".

в) $\sin\frac{7\pi}{10} - ctg\frac{3\pi}{5}$,

$\sin\frac{7\pi}{10} > 0,\ ctg\frac{3\pi}{5} < 0$, значит выражение имеет знак "+".

г) $\sin 2 - ctg\, 5{,}5$ $sin\ 2 > 0$, $ctg\ 5{,}5 < 0$, значит выражение имеет знак "+".

607.

а) $sin1 \cdot cos\ 2 \cdot tg\ 3 \cdot ctg\ 4$
$sin1 > 0$, $cos\ 2 < 0$, $tg\ 3 < 0$, $ctg4 > 0$.
Выражение имеет знак "+".
б) $sin(-5) \cdot cos(-6) \cdot tg(-7) \cdot ctg(-8)$,
$sin(-5) > 0$, $cos(-6) > 0$, $tg(-7) < 0$, $ctg(-8) > 0$.
Выражение имеет знак "–".

608.

а) $\sqrt{40}\sin t = \sqrt{10}$.

$\sin t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $2\sin t - \sqrt{3} = 0$

$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $6\sin t + \sqrt{27} = 0$.

$6\sin t = -3\sqrt{3}$; $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. $t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $2sin\ t + 1 = 0$

$sin\ t = -\frac{1}{2}$; $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.; $t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

609.

а) $\sqrt{50}\cos t = 5$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $2\cos t + \sqrt{3} = 0$

$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

в) $4\cos = \sqrt{12}$

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

г) $2\ cos\ t - 1 = 0$.

$\cos t = \frac{1}{2}$; $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

§ 24. Тригонометрические функции числового аргумента

610.

а) $1 - sin^2\ t = cos^2\ t$. б) $cos^2 t - 1 = - sin^2 t$.
в) $1 - cos^2 t = sin^2 t$. г) $sin^2 t - 1 = - cos^2 t$.

611.

а) $(1 - sin\ t)(1 + sin\ t) = 1 - sin^2 t = cos^2 t$.
б) $cos^2 t + (1 - sin^2 t) = 2cos^2 t$.
в) $(1 - cos\ t)(1 + cos\ t) = 1 - cos^2 t = sin^2 t$.
г) $sin^2 t + 2cos^2 t - 1 = 1 + cos^2 t - 1 = cos^2 t$.

612.

а) $sin^2 t + cos^2 t + 1 = 2$.
б) $1 - sin^2 t + cos^2 t = 2cos^2 t$.
в) $cos^2 t - (1 - 2sin^2 t) = cos^2 t + sin^2 t - 1 + sin^2 t = sin^2 t$.
г) $1 - (cos^2 t - sin^2 t) = sin^2 t + sin^2 t = 2sin^2 t$.

613.

а) $\frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = tg^2 t$.

б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

в) $1-\frac{1}{\sin^2 t}=\frac{\sin^2 t-1}{\sin^2 t}=-\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=-ctg^2 t$

г) $\frac{1-\cos^2 t}{1-\sin^2 t}=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=tg^2 t$.

614.

а) $cost \cdot tg\ t = cost \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = sin\ t,\ t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

б) $\sin t+\cos t \cdot tg\ t=\sin t+\sin t=2\sin t$, $t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

в) $\sin t \cdot ctg\ t=\sin t \cdot \frac{\cos t}{\sin t}=\cos t$, $t \neq \pi k$, $k \in Z$.

г) $2\sin t \cdot ctg\ t+\cos t=3\cos t$, $t \neq \pi k$, $k \in Z$.

615.

а) $\sin t \cdot \cos t \cdot \mathrm{ctg}\ t-1=\sin t \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin t}-1=\cos^2 t-1=-\sin^2 t$,

$t \neq \pi k$, $k \in Z$.

б) $\sin^2 t+\cos^2 t+\mathrm{tg}^2 t=1+\mathrm{tg}^2 t=1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}$.

в) $\sin^2 t-tg\ t \cdot ctg\ t=\sin^2 t-1=-\cos^2 t$, $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

г) $tg\ t \cdot ctg\ t+ctg^2 t=1+ctg^2 t=\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{1}{\sin^2 t}$,

$t \neq \pi k$, $k \in Z$.

616.

а) $\sin t=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, то есть $cos\ t<0$,

$\cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}=-\frac{3}{5}$,

$tg\ t=\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{4}{3}$; $ctg\ t=\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{3}{4}$.

б) $\sin t=\frac{5}{13}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, то есть $cos\ t>0$,

$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{12}{13}$,

$tg\ t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{5}{12}$; $ctg\ t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{12}{5}$.

в) $sin\ t = -0{,}6;\ -\frac{\pi}{2} < t < 0$, то есть $cos\ t > 0$,

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = 0{,}8$,

$tg\ t = -\frac{3}{4};\ ctg\ t = -\frac{4}{3}$.

г) $sin\ t = -0{,}28;\ \pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $cos\ t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} = -0{,}96$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{7}{24};\ ctg\ t = \frac{24}{7}$.

617.

а) $\cos t = 0{,}8,\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = 0{,}6$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{4};\ ctg\ t = \frac{4}{3}$.

б) $\cos t = -\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $\sin t > 0$

$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{12}{13}$

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{12}{5};\ ctg\ t = -\frac{5}{12}$.

в) $cos\ t = 0{,}6,\ \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $sin\ t < 0$,

$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -0{,}8$,

$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3};\ ctg\ t = -\frac{3}{4}$. Ошибка в ответе задачника.

г) $\cos t = -\frac{24}{25},\ \pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $sin\ t < 0$

$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\frac{7}{25}$,

$tg\ t = \frac{7}{24};\ ctg\ t = \frac{24}{7}$.

618.

а) $tg\ t = \frac{3}{4},\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$, то есть $cos\ t > 0$.

$\cos^2 t = \dfrac{1}{1+tg^2 t}$; $\cos t = \sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2 t}} = \dfrac{4}{5}$;

$sin\ t = tg\ t \cdot cos\ t = \dfrac{3}{5}$; $ctg\ t = \dfrac{4}{3}$.

б) $tg\ t = 2{,}4$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$, то есть $cos\ t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2 t}} = -\dfrac{5}{13}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = -\dfrac{12}{13}$; $ctg\ t = \dfrac{5}{12}$.

в) $tg\ t = -\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $cos\ t < 0$.

$\cos t = -\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2 t}} = -\dfrac{4}{5}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = \dfrac{3}{5}$; $ctg\ t = -\dfrac{4}{3}$.

г) $tg\ t = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $cos\ t > 0$.

$\cos t = \sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2 t}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin t = tg\ t \cdot \cos t = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $ctg\ t = -3$.

619.

а) $ctg\ t = \dfrac{12}{5}$, $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$, то есть $sin\ t < 0$.

$\sin t = -\sqrt{\dfrac{1}{1+ctg^2 t}} = -\dfrac{5}{13}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = -\dfrac{12}{13}$; $tg\ t = \dfrac{5}{12}$.

б) $ctg\ t = \dfrac{7}{24}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{\dfrac{1}{1+ctg^2 t}} = \dfrac{24}{25}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = \dfrac{7}{25}$; $tg\ t = \dfrac{24}{7}$.

в) $ctg\ t = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, то есть $sin\ t < 0$,

$\sin t = -\sqrt{\dfrac{1}{1+ctg^2 t}} = -\dfrac{12}{13}$; $\cos t = ctg\ t \cdot \sin t = \dfrac{5}{13}$; $tg\ t = -\dfrac{12}{5}$.

г) $ctg\ t = -\dfrac{8}{15}$, $\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $sin\ t > 0$,

$\sin t = \sqrt{\dfrac{1}{1+ctg^2 t}} = \dfrac{15}{17}$; $cos\ t = sin\ t \cdot ctg\ t = -\dfrac{8}{17}$; $tg\ t = -\dfrac{15}{8}$.

620.

а) $(sin\ t + cos\ t)^2 - 2sin\ t\ cos\ t =$
$= sin^2 t + cos^2 t + 2sin\ t\ cos\ t - 2sin\ t\ cos\ t = 1.$

б) $\dfrac{2-\sin^2 t-\cos^2 t}{3\sin^2 t+3\cos^2 t}=\dfrac{2-1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

в) $sin^4 t + cos^4 t + 2sin^2 t\ cos^2 t = (sin^2 t + cos^2 t)^2 = 1.$

г) $\dfrac{\sin^4 t-\cos^4 t}{\sin^2 t-\cos^2 t}=\dfrac{(\sin^2 t-\cos^2 t)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{\sin^2 t-\cos^2 t}=1$,

$t\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in$ Z.

621.

а) $(sin\ t + cos\ t)^2 + (sin\ t - cos\ t)^2 =$
$= sin^2\ t + cos^2\ t + 2sin\ t\ cos\ t + sin^2 t + cos^2 t - 2sin\ t\ cos\ t = 2.$

б) $(tg\ t + ctg\ t)^2 - (tg\ t - ctg\ t)^2 =$
$= tg^2 t + ctg^2 t + 2 - tg^2 t - ctg^2 t + 2 = 4.$

в) $sin\ t\ cos\ t \cdot (tg\ t + ctg\ t) = sin\ t\ cos\ t\ \left(\dfrac{\sin t}{\cos t}+\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)=$

$= sin\ t\ cos\ t\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cos t}=1$, $t\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in$ Z.

г) $sin^2 t\ cos^2 t\ (tg^2 t + ctg^2 t + 2) = sin^2 t\ cos^2 t\ (tg\ t\ + ctg\ t)^2 =$

$= sin^2 t\ cos^2 t\left(\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin t}\right)^2 = 1$, $t\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in$ Z.

622.

а) $\dfrac{\sin t}{1+\cos t}+\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\dfrac{\sin t(1-\cos t+1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\dfrac{2\sin t}{\sin^2 t}=\dfrac{2}{\sin t}$.

б) $(1 + tg\ t)^2 + (1 - tg\ t)^2 = 1 + tg^2\ t + 2\ tg\ t + 1 + tg^2\ t - 2tg\ t =$
$= 2(tg^2\ t + 1) = \dfrac{2}{\cos^2 t}$.

в) $\dfrac{\cos t}{1+\sin t}+\dfrac{\cos t}{1-\sin t}=\dfrac{\cos t(1-\sin t+1+\sin t)}{1-\sin^2 t}=\dfrac{2\cos t}{\cos^2}=\dfrac{2}{\cos t}$.

г) $(1 + ctg\ t)^2 + (1 - ctg\ t)^2 = 1 + ctg^2 t + 2ctg\ t + 1 + ctg^2 t - 2\ \mathrm{ctg}\ t =$
$= 2(ctg^2 t + 1) = \dfrac{2}{\sin^2 t}$.

623.

а) $\dfrac{1-\sin^2 t}{1-\cos^2 t}+tg\ t\cdot ctg\ t=\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1=\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

б) $ctg\,t+\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\dfrac{\cos t}{\sin t}+\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\dfrac{\sin^2 t+\cos t+\cos^2 t}{\sin t(1+\cos t)}=\dfrac{1}{\sin t}$.

в) $\dfrac{\cos^2 t-1}{\sin^2 t-1}+tg\,t\cdot ctg\,t=\dfrac{-\sin^2 t}{-\cos^2 t}+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}$.

г) $tg\,t+\dfrac{\cos t}{1+\sin t}=\dfrac{\sin t}{\cos t}+\dfrac{\cos t}{1+\sin t}=\dfrac{\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t(1+\sin t)}=$

$=\dfrac{1+\sin t}{\cos t(1+\sin t)}=\dfrac{1}{\cos t}$.

624.

$\dfrac{\sin t}{1+\cos t}+\dfrac{\sin t}{1-\cos t}=\dfrac{\sin t(1-\cos t+1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\dfrac{2\sin t}{\sin^2 t}=\dfrac{2}{\sin t}$.

а) -16.

б) $2\sqrt{3}$.

625.

а) $\dfrac{1-\cos^2 t}{\sin t}=\dfrac{\sin^2 t}{\sin t}=\sin t=\sin(t+4\pi)$.

б) $ctg\,t\cdot\sin t=\dfrac{\cos t}{\sin t}\cdot\sin t=\cos t=\cos(t-2\pi)$.

в) $tg\,t\cdot\cos(t+6\pi)=\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t=\sin t=\sin(t+2\pi)$.

г) $\sin^2(t+4\pi)+\cos^2(t+2\pi)-\sin^2(t-2\pi)-\cos^2(t-8\pi)=$

$=\sin^2 t+\cos^2 t-\sin^2 t-\cos^2 t=0$.

626.

а) $\dfrac{tg\,t}{tg\,t+ctg\,t}=\dfrac{tg\,t}{\dfrac{\sin t}{\cos t}+\dfrac{\cos t}{\sin t}}=\dfrac{tg\,t}{\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\sin t}}=$

$=\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t\cdot\sin t=\sin^2 t$.

б) $\dfrac{1+tg\,t}{1+ctg\,t}=\dfrac{1+tgt}{\dfrac{tgt+1}{tgt}}=tg\,t$.

в) $\dfrac{ctg\,t}{tg\,t+ctg\,t}=\dfrac{ctg\,t}{\dfrac{\sin t}{\cos t}+\dfrac{\cos t}{\sin t}}=\dfrac{ctg\,t}{\dfrac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin t}}=\dfrac{\cos t}{\sin t}\cdot\cos t\cdot\sin t=\cos^2 t$.

г) $\dfrac{1-ctg\,t}{1-tg\,t}=\dfrac{1-\dfrac{\cos t}{\sin t}}{1-\dfrac{\sin t}{\cos t}}=\dfrac{\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t}}{\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t}}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}=-ctg\,t$.

627.

$\sin(4\pi+t)=\dfrac{3}{5}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, то есть $\cos t > 0$,

$$tg(\pi-t)=tg(-t)=-tg\,t=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\frac{\sin(4\pi+t)}{\sqrt{1-\sin^2(4\pi+t)}}=-\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}.$$

628.

$\cos(2\pi-t)=\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2}<t<2\pi$, то есть $\sin t < 0$,

$$ctg(\pi-t)=ctg(-t)=-ctg\,t=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{\cos(-t)}{\sin t}=$$

$$=-\frac{\cos(2\pi-t)}{-\sqrt{1-\cos^2(2\pi-t)}}=-\frac{\frac{12}{13}}{-\sqrt{1-\frac{144}{169}}}=+\frac{12}{5}.$$

629.

$\cos t=-\dfrac{5}{13}$, $8{,}5 < t < 9\pi$, то есть $\sin t > 0$,

$$\sin(-t)=-\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\frac{12}{13}.$$

630.

$\sin t=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{9\pi}{2}<t<5\pi$, то есть $\cos t < 0$.

$$\cos(-t)+\sin(-t)=\cos t-\sin t=-\sqrt{1-\sin^2 t}-\sin t=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{7}{5}.$$

§ 25. Тригонометрические функции углового аргумента

631.

а) $\dfrac{2\pi}{3}$. б) $\dfrac{11\pi}{9}$.

в) $\dfrac{5\pi}{3}$. г) $4\dfrac{1}{4}\pi$.

632.

а) $\frac{7\pi}{6}$. б) $\frac{5\pi}{6}$.

в) $\frac{11\pi}{6}$. г) $\frac{11\pi}{3}$.

633.

а) $\frac{128\pi}{45}$. б) $\frac{43\pi}{36}$.

в) $\frac{35\pi}{18}$. г) $\frac{171\pi}{36}$.

634.

а) 135°. б) 660°. в) 216°. г) 920°.

635.

а) 480°. б) 315°. в) 324°. г) 555°.

636.

а) 300°. б) 675°. в) 375°. г) 280°.

637.

а) $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует; $ctg\,\alpha = 0$.
б) $\sin\alpha = 1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует; $ctg\,\alpha = 0$.
в) $\sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$; $tg\,\alpha = 0$; $ctg\,\alpha$ – не существует.
г) $\sin\alpha = -1$; $\cos\alpha = 0$; $tg\,\alpha$ – не существует; $ctg\,\alpha = 0$.

638.

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

в) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

г) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\,\alpha = -1$; $ctg\,\alpha = -1$.

639.

а) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\,\alpha = -\sqrt{3}$.

б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\,\alpha = \sqrt{3}$.

в) $sin\ \alpha = -\frac{1}{2}$; $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\ \alpha = -\sqrt{3}$.

г) $sin\ \alpha = -\frac{1}{2}$; $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $ctg\ \alpha = \sqrt{3}$.

640.

а) $sin\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) $sin\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

в) $sin\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г) $sin\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$; $tg\ \alpha = -\sqrt{3}$; $ctg\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

641.

а) $x = 5\ sin\ \alpha$. б) $x = 4\ cos\ \alpha$.

в) $x = \frac{3}{\cos\alpha}$. г) $x = \frac{1}{tg\alpha} = ctg\alpha$.

642.

а) $x = \frac{2}{\sin 30} = 4$. б) $x = 1 \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $x = \frac{2}{\sin 60} = \frac{4}{\sqrt{3}}$. г) $x = 5 \cdot \cos 60 = \frac{5}{2}$.

643.

а) Катеты: $a = c\sin\alpha = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $b = c\cos\alpha = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 18\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{2}c = 6$.

б) Катеты: $a = c\sin\alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $b = c\cos\alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 9$.

Радиус описанной окружности $r = \frac{1}{2}c = 3$.

в) Катеты: $a = c\sin\alpha = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$. $b = c\cos\alpha = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 2\sqrt{3}$.

Радиус описаной окружности $r = \frac{1}{2}c = 2$

г) Катеты: $a = c\sin\alpha = 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$. $b = c\cos\alpha = 60\cdot\frac{1}{2} = 30$.

Площадь: $S = \frac{ab}{2} = 450\sqrt{3}$.

Радиус описаной окружности $r = \frac{1}{2}c = 30$.

644.
sin 160, *sin* 40, *sin* 120, *sin* 80.

645.
cos 160, *cos* 120, *cos* 80, *cos* 40.

646.
sin 570, *sin* 210, *cos* 70, *sin* 110.

647.
ΔABC – прямоугольный (т.к. он вписан в окружность и одна его сторона является диаметром).
Тогда $AB = AC\cos\alpha = 2R\cos\alpha$.

648.
Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD разбивают этот четырехугольник на четыре треугольника: ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть α — угол между диагоналями, т.е. $\angle COB = \angle AOD = \alpha$ (как вертикальные).

$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\alpha$;

$S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\alpha$;

$S_{\Delta CDO} = \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin\alpha$;

$S_{\Delta DAO} = \frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin\alpha$;

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} + S_{\Delta CDO} + S_{\Delta DAO} =$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha(AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + AO \cdot OD) =$

$=\frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin\alpha$ (поскольку $BO + OD = BD$; $AO + OC = AC$).

Что и требовалось доказать.

649.

Из того, что сумма углов треугольника равна 180°, следует, что $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 45° - 30° = 105°$.

По теореме синусов имеем:

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, откуда $BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 8$ (см).

По теореме косинусов имеем:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$;

$64 = 32 + \mathrm{AC}^2 - 8\sqrt{2} \cdot \mathrm{AC} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$AC^2 - 8AC - 32 = 0$;

$D = 64 + 128 = 192 = \left(8\sqrt{3}\right)^2$;

$AC = \frac{8 \pm 8\sqrt{3}}{2}$, откуда $AC = 4(1 + \sqrt{3})$ (см).

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4((1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = 8((1 + \sqrt{3})$ (см^2).

Ответ: $AC = 4(1 + \sqrt{3})$ см; $S_{\Delta ABC} = 8(1 + \sqrt{3})$ см^2.

§ 26. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики

650.

Боковая сторона данного треугольника, прилежащая к углу в 60°, равна $\frac{5}{\sin 60°} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ (см), а прилежащая к углу в 45° равна $\frac{5}{\sin 45°} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 5\sqrt{2}$ (см). Угол при вершине треугольника, из которой опущена высота, равен 180° – 45 ° – 60° = 75°.

Следовательно, площадь треугольника равна:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{6}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{6}$ см^2.

651.

а) 0; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

652.

а) $y = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. $\qquad y = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = 0$

б) $y = -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

653.

Точка принадлежит графику тогда и только тогда, когда ее координаты (x, y) удовлетворяют уравнению $y = \sin x$.

а) $-1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ – верно.

Принадлежит.

б) $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{2}$ – неверно.

Не принадлежит.

в) $1 = \sin\pi$ – неверно.

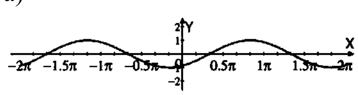
Не принадлежит.

г) $-1 = \sin\frac{3\pi}{2}$ – верно.

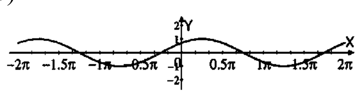
Принадлежит.

654.

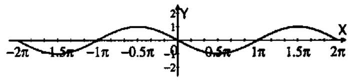
а)



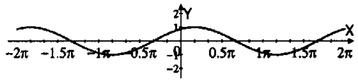
б)



в)

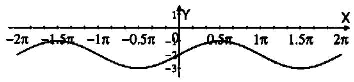


г)

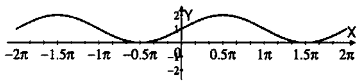


655.

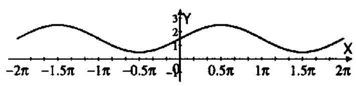
а)



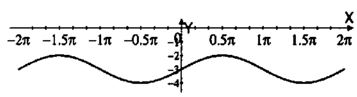
б)



в)

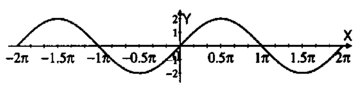


г)

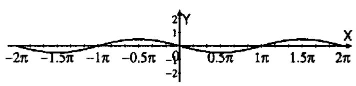


656.

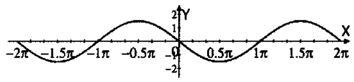
а)



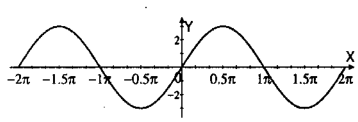
б)



в)

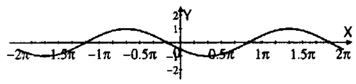


г)

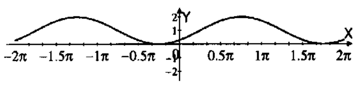


657.

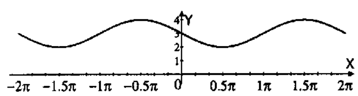
а)



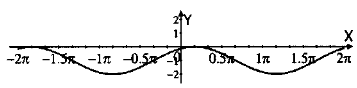
б)



в)



г)



658.

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; б) $f\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=0$; в) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

659.

Точка (x, y) принадлежит графику тогда, кода $y = cos\ x$.

а) $-1 = cos\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ – неверно. Не принадлежит.

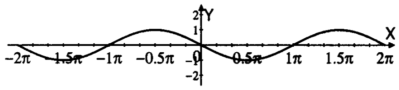
б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$ – верно. Принадлежит.

в) $-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$ – верно. Принадлежит.

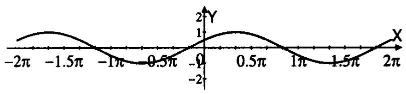
г) $1 = sin\ 2\pi$ – верно. Принадлежит.

660.

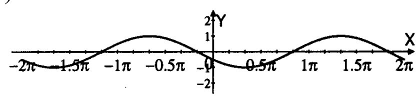
а)



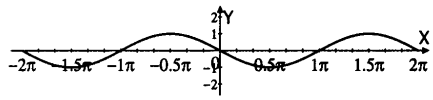
б)



в)

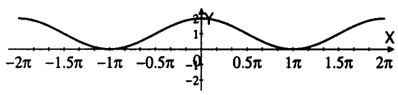


г)

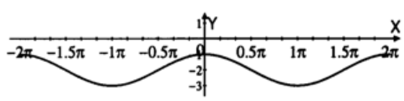


661.

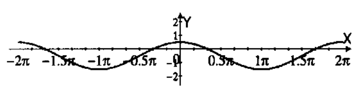
а)



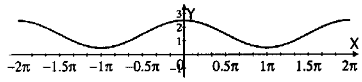
б)



в)

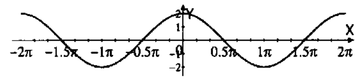


г)

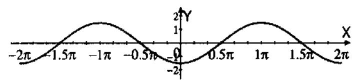


662.

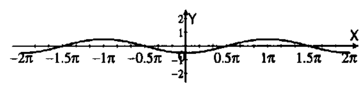
а)



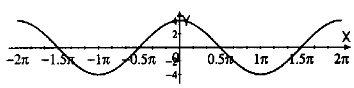
б)



в)

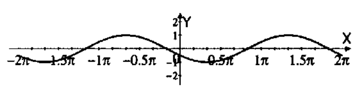


г)

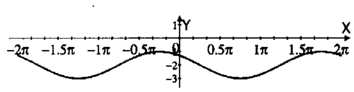


663.

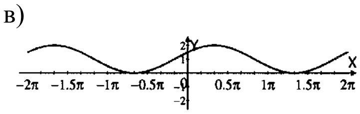
а)



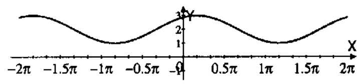
б)



в)

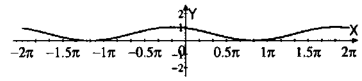


г)

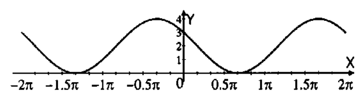


664.

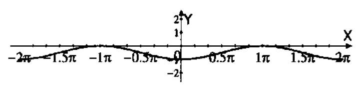
а)



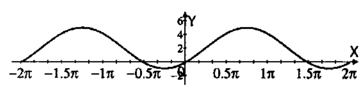
б)



в)

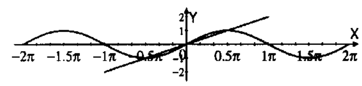


г)



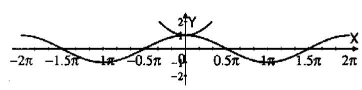
665.

а) $\sin x = \frac{2}{\pi} x$,



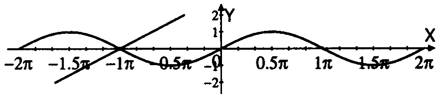
Решения: 0; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$.

б) $cos\, x = x^2 + 1$.



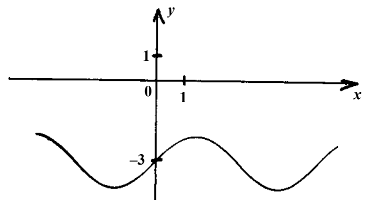
Решение: 0.

в) $sin\, x = x + \pi$.



Решение: $x = -\pi$.

г) $\sin x = 3 - \frac{4}{\pi} x$.



Решение: $x = \frac{\pi}{2}$.

666.

а) $f(x) = x^5 \sin x$

Рассмотрим: $f(-x) = (-x)^5 sin(-x) = x^5 sin\ x = f(x)$.

Причем, $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Функция четная.

б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - \cos x}$

Функция не определена в тех точках, где $x^2 = cos\ x$. Очевидно, что корни этого уравнения симметричны относительно O. (т.к. если x – корень, то $(-x)$ – тоже корень). Значит область определения симметрична относительно O.

$$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - \cos(-x)} = \frac{\sin^2(x)}{x^2 - \cos x} = f(x)$$

Функция четная.

в) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$,

$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$$f(-x) = \frac{\cos(-5x) + 1}{|-x|} = \frac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x),$$

Функция четная.

г) $f(x) = sin^2 x - x^4 + 3\ cos\ 2\ x$.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x) = sin^2(-x) - (-x)^4 + 3cos\ (-2x) = sin^2 x - x^4 + 3cos\ 2x = 0.$

667.

а) $f(x)=x-\sin x$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$

Функция нечетна.

б) $f(x)=x^3\cdot\sin x^2$

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x)=(-x)^3\cdot\sin(-x)^2=-(x^3\sin x)=-f(x)$.

Функция нечетна.

в) $f(x)=\dfrac{x^2\sin x}{x^2-9}$,

$D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2\sin(-x)}{(-x)^2-9}=-\dfrac{x^2\sin x}{x^2-9}=-f(x)$.

Функция нечетна.

г) $f(x)=\dfrac{x^3-\sin x}{2+\cos x}$,

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ – симметрична относительно O.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3-\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\dfrac{x^3-\sin x}{2+\cos(-x)}=-f(x)$.

Функция нечетна.

668.

$f(x)=2x^2-3x-2$, $-f(cos\ x)=-2cos^2x+3cos\ x+2=2(1-cos^2x)+3cos\ x=$
$=2sin^2x+3\ cos\ x$.

669.

$f(x)=5x^2+x+4$, $f(cos\ x)=5cos^2x+cos\ x+4=-5\ (1-cos^2x)+cos\ x+9=$
$=-5\ sin^2x+cos\ x+9$.

670.

$f(x)=2x^2-5x+1$, $f(2\ sin\ x)=2\cdot 4sin^2x-10\ sin\ x+1=8\ sin^2x-10\ sin\ x+1=$
$=8(sin^2x-1)-10\ sin\ x+9=-8\ cos^2x-10\ sin\ x+9=9-10\ sin\ x-8\ (1+tg^2x)$.

Домашняя контрольная работа.

ВАРИАНТ № 1.

1.

а) $\frac{9}{5}$; б) $\frac{6}{5}$.

2.

а) Третьей; б) Третьей.

3.

$\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$

4.

$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}ctg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

5.

$\sin\frac{12}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$; Знак "+".

6.

$$\frac{(\sin t+\cos t)^2}{1+2\sin t\cos t} = \frac{(\sin t+\cos t)^2}{\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t} =$$

$$= \frac{(\sin t+\cos t)^2}{(\sin t+\cos t)^2} = 1,\ t \ne \frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k \in Z.$$

7.

$$(\sin t+\cos t)^2+(\sin t-\cos t)^2 = \sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t +$$

$$+\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t = 2 .$$

8.

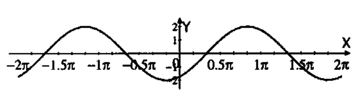
$\sin t = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, то есть $cos\ t < 0$,

$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{-5}{13}$,

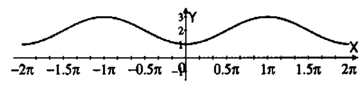
$tg\ t = \frac{-12}{5}$; $ctg\ t = \frac{-5}{12}$.

9.

а)



б)



10.

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

$f(\cos x) = \cos^2 x - 5\cos x + 4 = \cos^2 x - 1 - 5\cos x + 5 =$

$= 5 - 5\cos x - \sin^2 x$.

ВАРИАНТ №2.

1.

а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $\frac{\pi}{8}$.

2.

а) Четвертой. б) Третьей.

3.

$\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$

4.

$\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$.

5.

$\cos\frac{15}{8}$, $\sin\frac{11\pi}{15}$; $\cos\frac{15}{8} < 0$, $\sin\frac{11\pi}{15} > 0$. Знак "−".

6.

$\frac{(\sin t - \cos t)^2}{1 - 2\sin t\cos t} = \frac{(\sin t - \cos t)^2}{(\sin t - \cos t)^2} = 1$, $t \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in$ Z.

7.

Доказать: $(\sin t + \cos t)^2 - (\sin t - \cos t)^2 = 4\sin t\cos t$,

Доказательство:

$(\sin t + \cos t)^2 - (\sin t - \cos t)^2 = 1 + 2\sin t\cos t - 1 + 2\sin t\cos t = 4\sin t\cos t$.

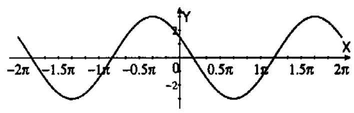
8.

$\cos t = -\frac{5}{13}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, то есть $\sin t < 0$,

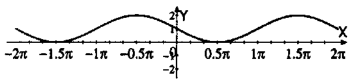
$$\sin t=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}^{2}\right)}=-\frac{12}{13},\ tg\ t=\frac{12}{5},\ ctg\ t=\frac{5}{12}.$$

9.

а)



б)



10. $f(x)=-x^2+4x+3$,

$f(\sin x)=-\sin^2 x+4\sin x+3=1-\sin^2 x+2+4\sin x=$

$=\cos^2 x+2+4\sin x$.