Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 10 класс

к учебнику «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс»
под ред. А.Н. Колмогорова, М.: «Просвещение», 2001 г.

учебно-практическое
пособие

Содержание

ГЛАВА 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГЛАВНОГО АРГУМЕНТА

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение)

1.

а) $45° = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$;

$36° = 36° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{5}$;

$180° = 180° \cdot \frac{\pi}{180°} = \pi$;

б) $120° = 120° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$;

$310° = 310° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{31\pi}{18}$;

$360° = 360° \cdot \frac{\pi}{180°} = 2\pi$;

в) $60° = 60° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$;

$72° = 72° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{6\pi}{16}$;

$270° = 270° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{3\pi}{2}$;

г) $150° = 150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$;

$216° = 216° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{6\pi}{5}$;

$90° = 90° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{2}$.

2.

а) $\frac{\pi}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$;

$\frac{\pi}{2} = 90°$;

$\frac{5\pi}{36} = 25°$;

б) $\frac{2\pi}{5} = 72°$;

$\frac{3\pi}{4} = 135°$;

$-\frac{\pi}{9} = -20°$;

в) $\frac{\pi}{6} = 30°$;

$\frac{3\pi}{5} = 108°$;

$\pi = 180°$;

г) $\frac{5\pi}{4} = 225°$;

$\frac{3\pi}{2} = 270°$;

$-\frac{7\pi}{12} = -105°$.

3.

а) $\sin 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$;

б) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\pi + ctg^2\frac{\pi}{6} = 2{,}5$;

в) $6\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 0 + tg^2\frac{\pi}{3} = 4$;

г) $3tg\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 3$.

4.

По определению $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\beta| \le 1$, для любых α и β

а) $\sin\alpha = -0{,}5 \le 1$; $\cos\beta = \sqrt{3} > 1$; $tg\gamma = -2{,}5$;

существуют α и γ; не существует такого значения β;

б) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 1$; $\cos\beta = -2{,}2 < -1$; $tg\gamma = 0{,}31$;

существует γ; не существует таких значений α и β

в) $\sin\alpha = 1{,}3 > 1$; $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{4} < 1$; $tg\gamma = 5{,}2$;

существуют β, γ; не существует такого значения α;

г) $\sin\beta = -\dfrac{7}{9} > -1$; $\cos\beta = \sqrt{2{,}5} > 1$; $tg\gamma = -7{,}5$;

существует значения α и γ; не существует такого значения β.

5.

Тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

а) $\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{24}{25}\right)^2 = 1$, существует такое α;

б) $0{,}4^2 + 0{,}7^2 = 0{,}65 \ne 1$, не существует такого α;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{6}{9} + \dfrac{3}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$, существует такое α;

г) $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, существует такое α.

6.

Тождество: $tg\beta \cdot ctg\beta = 1$

а) $-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 1$, существует такое β;

б) $\left(\sqrt{3} - 2\right)\cdot\left(\sqrt{3} + 2\right) = -1 \ne 1$, не существует такого β;

в) $2{,}4 \cdot \left(-\dfrac{5}{12}\right) = -1 \ne 1$, не существует такого β;

г) $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 1$, существует такое β.

7.

а) $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -0{,}6;$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3};\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{4};$

б) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{4};$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3};\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3};$

в) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{3};$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{14}}{7};\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2};$

г) $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{8}{17};$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{8}{15};\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{15}{8}.$

8.

а) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha;$

б) $\frac{1-2\cos^2\beta}{\cos\beta + \sin\beta} = \frac{(\sin\beta - \cos\beta)(\cos\beta + \sin\beta + \cos\beta)}{\cos\beta + \sin\beta} = \sin\beta - \cos\beta,$

если $\cos\beta + \sin\beta \neq 0$, т.е. $\beta \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z;$

в) $(\sin^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha) \cdot ctg\alpha = \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = tg\alpha;$

г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + tg^2 t = \frac{\sin^2 t - 1 + \sin^2 t\cos^2 t}{\cos^4 t} = -\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = -1.$

9.

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15} - \sin\frac{4\pi}{15}\cdot\sin\frac{\pi}{15}}{\cos 0{,}3\pi\cdot\sin 0{,}2\pi + \sin 0{,}3\pi\cdot\cos 0{,}2\pi} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2};$

б) $\dfrac{tg\dfrac{2\pi}{3}-tg\dfrac{5\pi}{12}}{1+tg\dfrac{2\pi}{3}\cdot tg\dfrac{5\pi}{12}}=tg\dfrac{\pi}{4}=1;$

в) $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{10}+tg\dfrac{3\pi}{20}}{1-tg\dfrac{\pi}{10}\cdot tg\dfrac{3\pi}{20}}=tg\dfrac{\pi}{4}=1;$

г) $\dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{18}\cdot\cos\dfrac{\pi}{9}-\sin\dfrac{\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{18}}{\sin\dfrac{5\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{12}-\cos\dfrac{5\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{-\cos\pi}=\dfrac{1}{2}.$

10.

а) При $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{3}{5};$

при $\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{12}{13};$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\dfrac{24}{25};$ $\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=-\dfrac{119}{169};$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{16}{65};$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\dfrac{33}{65};$

б) При $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-0{,}8;$

при $\beta\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\dfrac{15}{17};$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-0{,}96;$

$\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=\dfrac{161}{289};$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{84}{85};$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\dfrac{77}{85}.$

11.

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta);$

б) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos2\alpha}{\sin2\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\alpha;$

в) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha;$

г) $ctg^2\alpha(1-\cos2\alpha)+\cos^2\alpha=ctg^2\alpha\cdot2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha.$

12.

а) $\sin\dfrac{7\pi}{8}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{8};\quad\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3};$

$tg0{,}6\pi=-tg0{,}4\pi=-tg\dfrac{2\pi}{5};\quad ctg(-1{,}2\pi)=-ctg\dfrac{\pi}{5};$

б) $tg\dfrac{6\pi}{5}=tg\dfrac{\pi}{5};\quad\sin\left(-\dfrac{5\pi}{9}\right)=-\sin\dfrac{4\pi}{9}=-\cos\dfrac{\pi}{18};$

$\cos1{,}8\pi=\cos0{,}2\pi;\quad ctg0{,}9\pi=ctg(\pi-0{,}1\pi)=-ctg0{,}1\pi.$

13.

а) $8\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot tg\dfrac{4\pi}{3}\cdot ctg\dfrac{7\pi}{4}=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot(-1)=2\sqrt{3};$

б) $\cos^2(\pi-\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\sin\alpha=1;$

в) $10ctg\dfrac{3\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{4}=10ctg\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=5;$

г) $\dfrac{\sin^2(\pi-t)}{1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)}-\cos(2\pi-t)=\dfrac{\sin^2t}{1-\cos t}-\cos t=1.$

14.

а) $\sin\dfrac{7\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}=2\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — верно;

б) $\cos\dfrac{11\pi}{24}-\cos\dfrac{\pi}{8}=-2\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{7\pi}{24}=-\sin\dfrac{7\pi}{24}$ — верно;

в) $\sin\frac{11\pi}{18}+\sin\frac{7\pi}{18}=2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{9}=2\cos\frac{\pi}{9}$ — не верно;

г) $\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ — верно.

15.

а) $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ следовательно, $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\cos\frac{\alpha}{2}<0,\ \sin\frac{\alpha}{2}>0;$

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{26}}{26};\ \ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{5\sqrt{26}}{26};$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-5;$$

б) $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ следовательно, $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\alpha<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}>0,\ \sin\frac{\alpha}{2}>0;$

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5};\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10};$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10};\ \ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=3.$$

в) $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, следовательно, $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$ и $\cos\frac{\alpha}{2}<0,\ \sin\frac{\alpha}{2}>0;$

$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{7\sqrt{2}}{10};\ \ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10};$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\left(-\frac{10}{7\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{7}.$$

г) $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, следовательно, $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ и

$\cos\alpha<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}<0,\ \sin\frac{\alpha}{2}>0,\ \ \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{15}{17},$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17};\ \ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sqrt{17}}{17};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = -4.$$

16.

а) $\alpha = 0{,}19$ (рад);

$\sin\alpha \approx 0{,}1889;\ \ \cos\alpha \approx 0{,}9820;\ tg\alpha \approx 0{,}1923;\ ctg\alpha \approx 5{,}200;$

б) $\alpha = 1{,}37$ (рад);

$\sin\alpha \approx 0{,}9799;\ \ \cos\alpha \approx 0{,}1994;\ tg\alpha \approx 4{,}9131;\ ctg\alpha \approx 0{,}2035;$

в) $\alpha = 0{,}9$ (рад);

$\sin\alpha \approx 0{,}7833;\ \ \cos\alpha \approx 0{,}6216;\ tg\alpha \approx 1{,}2602;\ ctg\alpha \approx 0{,}7936;$

г) $\alpha = 1{,}2$ (рад);

$\sin\alpha \approx 0{,}9320;\ \ \cos\alpha \approx 0{,}3624;\ tg\alpha \approx 2{,}5722;\ ctg\alpha \approx 0{,}388.$

17.

а) $17° \approx 0{,}2967$ (рад);
$43°24' \approx 0{,}7575$ (рад);
$83°36' \approx 1{,}4591$ (рад);
$71°12' \approx 1{,}2601$ (рад);

б) $0{,}384$ (рад) $\approx 22°6''$;
$0{,}48$ (рад) $\approx 27°30'7''$;
$1{,}11$ (рад) $\approx 63°5'54''$;
$1{,}48$ (рад) $\approx 84°47'52''$.

18.

а) $l = \alpha\cdot R = 2-1 = 2$ (см);

б) $l = \frac{3\pi}{4}\cdot 6 = 4{,}5\pi$ (см);

в) $l = \alpha\cdot R = 0{,}1$ (м);

г) $l = \frac{9\pi}{10}\cdot 6 = 9\pi$ (м).

19.

а) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = 1$ (дм^2);

б) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{3\pi}{2}$ (см^2);

в) $S = \frac{\alpha R^2}{2} = 0{,}05$ (м^2);

г) $S = \frac{5\pi}{6}\cdot 3^2 = \frac{15\pi}{2}$ (м^2).

20.

а) l=2R=αR, следовательно α=2 (рад);

б) P=2R+l - есть периметр сектора, т.к. длина дуги равна *l,*
l=αR, таким образом 3l=P.

Следовательно, 3αR=2R+αR*,* α=1 (рад).

21.

а) $3\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos(3\alpha-\pi)=3\sin\dfrac{\pi}{4}-2\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+3tg\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin^2\dfrac{\pi}{3}+3tg\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{2}\right)=$

$=\sin^2\dfrac{\pi}{3}-3ctg\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{9}{4};$

в) $4\cos\left(3\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+ctg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=4\sin\dfrac{\pi}{6}+ctg\dfrac{\pi}{4}=3;$

г) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot tg^2\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot ctg^2 2\alpha=$

$=\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot ctg^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

22.

а) $\dfrac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot tg\alpha=tg\alpha;$

Если $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, то $\sin\alpha<0$ и

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13};$

$tg\alpha=-\dfrac{5}{13}:\dfrac{12}{13}=-\dfrac{5}{12};$

б) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{tg\alpha+1}{tg\alpha-1}=\dfrac{1+\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1}=9;$

в) $\dfrac{\cos\alpha+ctg\alpha}{ctg\alpha}=\dfrac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}=1+\sin\alpha;$

при $\alpha\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $\sin\alpha<0$ и $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3};$

$1+\sin\alpha=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3};$

г) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta=\sin^2\beta-\cos^2\alpha=-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)=-0{,}5.$

23.

а) при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\sin\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+tg^{-2}\alpha}};$$

б) при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}} -$$

$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2ctg\alpha;$$

в) при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

г) $\sqrt{\sin^2\alpha + tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha\left(1+tg^2\alpha\right)} =$

$$= tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{ctg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha\left(1+ctg^2\alpha\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}}, \text{ если } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

24.

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right);$

б) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} = 1 - tg\alpha \cdot tg\beta + 1 + tg\alpha \cdot tg\beta = 2;$

в) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = ctg\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right) = ctg\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right);$

г) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = \dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = ctg\beta - tg\alpha.$

25.

а) $\left(\sin^2 t+2\sin t\cdot\cos t-\cos^2 t\right)^2=\left(2\sin t\cdot\cos t-\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\right)^2=$

$=\sin^2 2t-2\sin 2t\cdot\cos 2t+\cos^2 2t=1-\sin 4t;$

б) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{2\sin 3\alpha(\sin 2\alpha-1)}{2\cos 3\alpha(\sin 2\alpha-1)}=tg3\alpha;$

в) $\dfrac{1-4\sin^2 t\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\dfrac{1-\sin^2 2t}{\cos 2t}=\dfrac{\cos^2 2t}{\cos 2t}=\cos 2t;$

г) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos 2\alpha}=tg2\alpha;$

26.

а) $\cos t=\dfrac{\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}=\dfrac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}};$

б) $\sin\beta=2\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{2\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\dfrac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2tg\frac{\beta}{2}}{1+tg^2\frac{\beta}{2}};$

27.

а) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4};$

б) $\left(\sin\dfrac{7\pi}{18}-\sin\dfrac{\pi}{18}\right):\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}=1;$

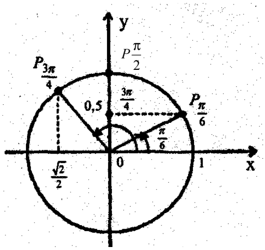
в) $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2=\left(\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}-\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2};$

г) $\dfrac{\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=-2\sin\dfrac{\pi}{2}=-2;$

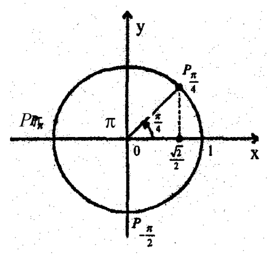
2. Тригонометрические функции и их графики

28.

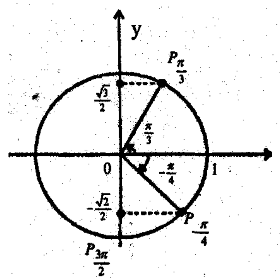
а)



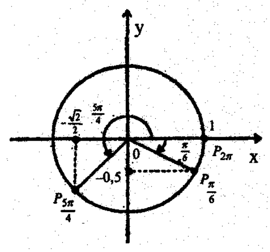
б)



в)



г)



29.

Точка $P\alpha$ имеет следующие координаты:

а) $(0;1)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $(-1;0)$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;-1)$;

в) $(0;-1)$; $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(-1;0)$;

г) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0;1)$.

30.

а) $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ — I четверть;

$\alpha \in \left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ — III четверть;

$\alpha \in \left(-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)$ — III четверть;

б) $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(-\dfrac{7\pi}{2}\pi;-3\pi\right)$ — II четверть;

в) $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ — IV четверть; г) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ — II четверть;

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ — IV четверть; $\alpha \in \left(-\frac{5\pi}{2};-2\pi\right)$ — IV четверть;

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ — II четверть; $\alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ — III четверть.

31.

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}tg2{,}3\pi = -\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{8}tg0{,}3\pi < 0;$

б) $\sin 1 \cdot \cos 3 \cdot ctg5 = \sin 1 \cdot (-\cos(\pi-3))(-ctg(2\pi-5)) =$
$= \sin 1 \cdot \cos(\pi-3) \cdot ctg(2\pi-5) > 0;$

в) $\sin 1{,}3\pi \cdot \cos\frac{7\pi}{9} \cdot tg2{,}9 = -\sin 0{,}3\pi \cdot \cos\frac{2\pi}{9} \cdot tg(\pi-2{,}9) < 0;$

г) $\sin 8 > 0,$ т.к. $2{,}5 < 8 < 3\pi;$ $\cos 0{,}7 > 0,$ т.к. $\frac{\pi}{2} > 0{,}7 > 0;$

$tg6{,}4 > 0,$ т.к. $2\pi < 6{,}4 < \frac{5\pi}{2};$ поэтому, $\sin 8 \cdot \cos 0{,}7 \cdot tg6{,}4 > 0$.

32.

а) $\sin 4\pi = 0; \cos 4\pi = 1;$ $\sin(-\pi) = 0; \cos(-\pi) = -1;$

б) $\sin\frac{5\pi}{2} = 1; \cos\frac{5\pi}{2} = 0;$ $\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = 1; \cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = 0;$

в) $\sin\pi = 0; \cos\pi = -1;$ $\sin(-2\pi) = 0; \cos(-2\pi) = 1;$

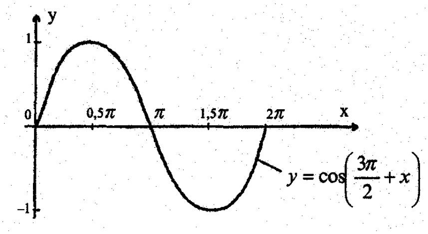
г) $\sin\frac{9\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1; \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

33.

а) $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x.$

Таким образом, график данной функции есть синусоида, т.е. имеет период 2π.



б) $y=-\sin(\pi+x)=\sin x$

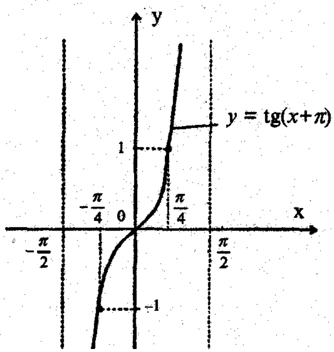
Смотри пункт а).

в) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

Смотри пункт а).

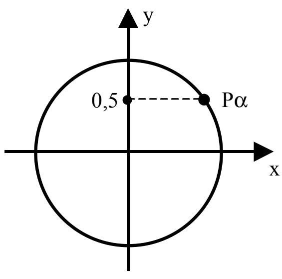
г) $y=tg(x+\pi)=tgx$

Таким образом, график данной функции есть график функции $y=tgx$, т.е. имеет период π.

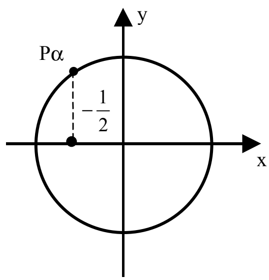


34.

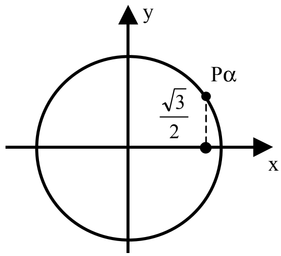
а) $P_\alpha(x;\, y)$, $y=0{,}5$, $x>0$



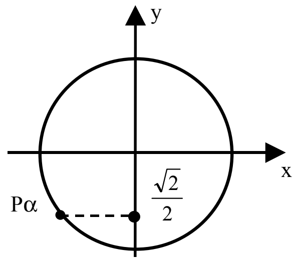
б) $x=-\frac{1}{2}$, $y>0$



в) $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad y>0$

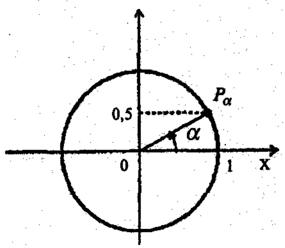


г) $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad x>0$

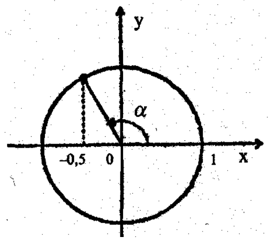


35.

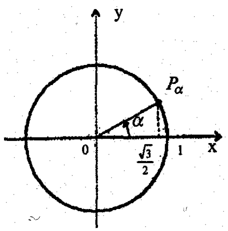
а)



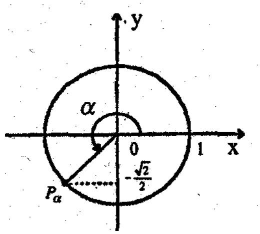
б)



в)



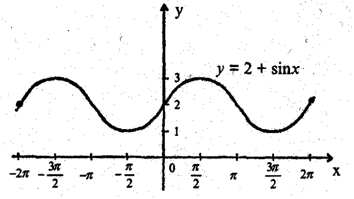
г)



36.

а) $y=sin\,x+2;\ D(y)=R;$

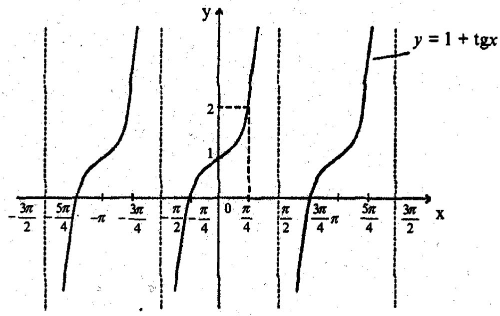
т.к. $sin\,x\in[-1;1],$ то $E(y)=[1;3]$



б) $y=1+tgx$;

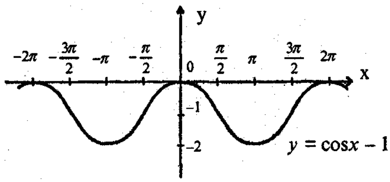
т.к. функция $y=tgx$ не определена в точках вида $\frac{\pi}{2}+\pi n$, то

$D(y)=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in Z\right\}; E(y)=R$



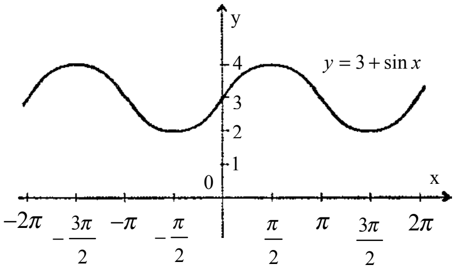
в) $y=\cos x-1;$

$D(y)=R;$ т.к. $\cos x\in[-1;1]$, то $E(y)=[-2;0]$



г) $y=3+\sin x;$

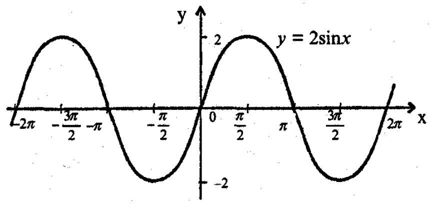
$D(y)=R;$ т.к. $\sin x\in[-1;1]$, то $E(y)=[2;4]$



37.

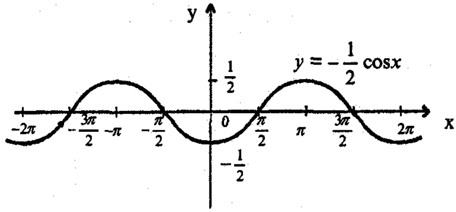
а) $y=2\sin x$;

$D(y)=R$; т.к. $\sin x\in[-1;1]$, то $E(y)=[-2;2]$



б) $y=-\frac{1}{2}\cos x;$

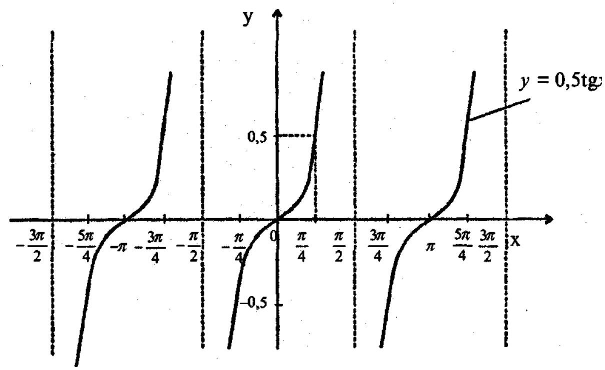
$D(y)=R;$ т.к. $\cos x\in[-1;1]$, то $E(y)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$



в) $y=0{,}5\cdot tgx;$

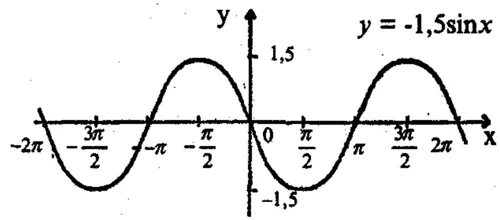
т.к. функция $y=tgx$ не определена в точках вида $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in z;$

$D(y)=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\};\ E(y)=R$



г) $y=-\frac{3}{2}\sin x;$

$D(y)=R;$ т.к. $\sin x\in[-1;1]$, то $E(y)=[-1{,}5;1{,}5]$



38.

а) $y = sin\,x;$

Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(\pi n;0),\ n \in Z; (0;0);$

б) $y = 1 + \cos x;$

Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(\pi + 2\pi n;0),\ n \in Z; (0;2);$

в) $y = \cos x;$

Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;0\right),\ n \in Z; (0;1);$

г) $y = \sin x - 1;$

Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;0\right),\ n \in Z; (0;-1);$

39.

а) $y = x^2 - 3x;$

пересечения с осью *OX:* (0;0) и (3;0);
пересечения с осью *OY:* (0;0);

б) $y = \sin x - 1{,}5;$

пересечения с осью *OX график функции не имеет;*
пересечения с осью *OY:* (0;-1,5);

в) $y = 2{,}5 + \cos x;$

пересечения с осью *OX график функции не имеет;*
пересечения с осью *OY:* (0;3,5);

г) $y = \frac{1}{x} + 1;$

пересечения с осью *OX*: (-1;0);
пересечения с осью *OY график функции не имеет.*

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

3. Функции и их графики

40.

а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $f(-1)=-2; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}; f(10)=10{,}1;$

б) $f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0; f(0)=\frac{3\sqrt{2}}{2}; f(\pi)=-\frac{3\sqrt{2}}{2};$

в) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; $f(0)=0; f(1)=2; f(2)=\sqrt{6};$

г) $f(x)=2-\sin 2x$; $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3; f(0)=2; f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}$.

41.

а) $f(x)=x^2+2x;$

$f(x_0)=x_0^2+2x_0;$

$f(t+1)=t^2+4t+3;$

б) $f(x)=tg2x;$

$f(a)=tg2a;$

$f(b-1)=tg(2b-2);$

в) $f(x)=\frac{1}{x}+1;$

$f(x_0)=\frac{1}{x_0}+1; x_0\neq 0;$

$f(a+2)=\frac{a+3}{a+2};$

г) $f(x)=2\cos\frac{x}{3};$

$f(z)=2\cos\frac{z}{3};$

$f(h+\pi)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{h}{3}\right).$

42.

Графиком функции называется фигура, у которой каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, поэтому:

а) и г) — являются графиками:

б) и в) — не являются графиками.

43.

а) $D(f)=R\setminus\{x: x^2+4x+3=0\}=R\setminus\{1;3\};$

б) $D(f)=\{x: x^2-9\geq 0\}=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty);$

в) $D(f)=R\setminus\{x: x^2+2x-8=0\}=R\setminus\{-4;2\};$

г) $D(f)=\{x: 36-x^2\geq 0\}=[-6;6].$

44.

а) $D(f)=R\setminus\{0\}$; б) $D(f)=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \middle| n\in Z\right\}$;

в) $D(f)=R\setminus\{\pi n|\ n\in Z\}$; г) $D(f)=R\setminus\{0\}$.

45.

а) y = 2cos (x- $\frac{\pi}{3}$); D(y) = R; E(y) = [-2; 2];

б) y = 2 + $\frac{4}{x-3}$; D(y) = R \{x: x-3=0} = R\{3};

E(y) =R \ {2}, т.к. $\frac{4}{x-3}\neq 0$;

в) y = $\frac{3}{x+1}$ – 1; D(y) = R \ {x: x+1=0} = R\{-1};

E(y) = R \ {-1}, т.к. $\frac{3}{x+1}\neq 0$;

г) y = 3+ 0,5 sin (x+ $\frac{\pi}{4}$); D(y) = R;

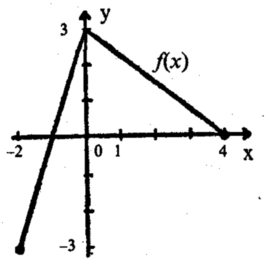
E(y) = $\left[\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$, т.к. sin (x + $\frac{\pi}{4}$) $\in$ [-1; 1].

46.

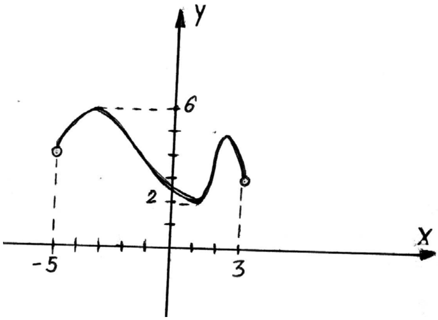
а) D(f) = [-5; 6];
б) D(f) = [-6; 4]; E(f) = [-2; 2];
в) D(f) = [-6; 1,5) $\cup$ (1,5; 6]; E(f) = [-3; 3);
г) D(f) = [-4; 3]; E(f) = (-1; 4].

47.

а) D(f) = [-2; 4]; E(f) = [-3; 3];



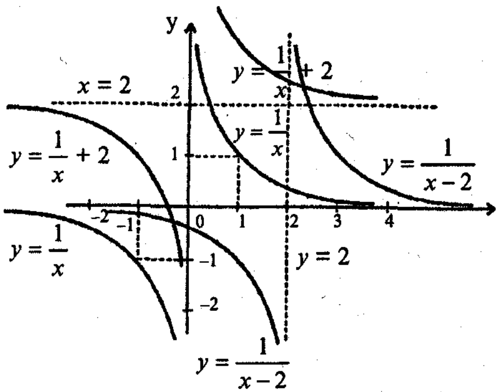
б) D(f) = [-5; 3]; E(f) = [2; 6];



48.

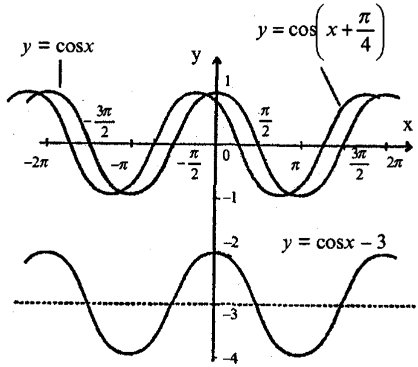
а) График функции у = $\frac{1}{x} + 2$ есть график функции у = $\frac{1}{x}$ со сдвигом на две единицы вверх вдоль оси OY.

График функции у = $\frac{1}{x-2}$ есть график функции у = $\frac{1}{x}$ со сдвигом на 2 единицы вправо по оси OX.



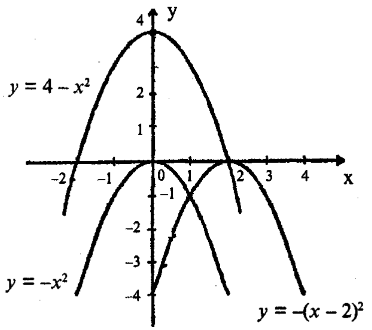
б) График функции у = cos x – 3 есть у = cos x со сдвигом на 3 единицы вниз по оси OY.

График функции у = cos(x + $\frac{\pi}{4}$) есть у = cos x со сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево по оси OX.



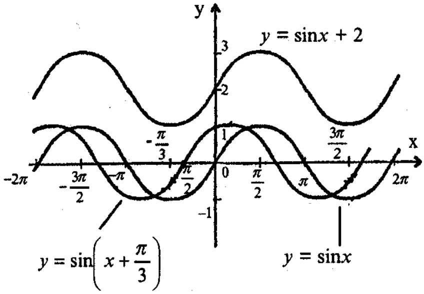
в) График функции y = 4-x^2 есть y = -x^2 со сдвигом на 4 единицы вверх по оси OY.

График функции y = - $(x-2)^2$ есть y = -x^2 со сдвигом на 2 единицы вправо по оси OX.



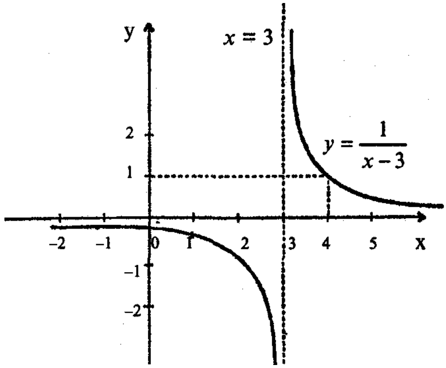
г) График функции y = sin x + 2 есть y = sin x со сдвигом на 2 единицы вверх по оси OY.

График функции y = sin (x + $\frac{\pi}{3}$) есть y = sin x со сдвигом на $\frac{\pi}{3}$ влево по оси OX.



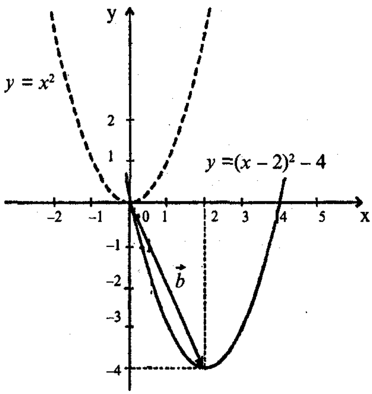
49.

а)



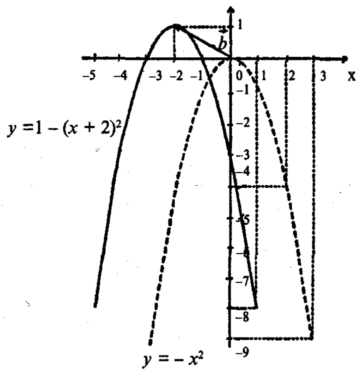
y
x = 3
2
1
$y = \frac{1}{x-3}$
–2
–1
0
1
2
3
4
5
x
–1
–2

б)



y
$y = x^2$
2
1
$y = (x-2)^2 - 4$
–2
–1
0
1
2
3
4
5
x
–1
$\vec{b}$
–2
–3
–4

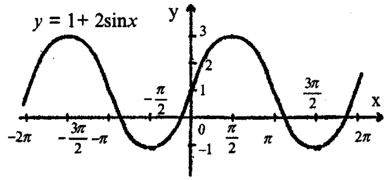
в)



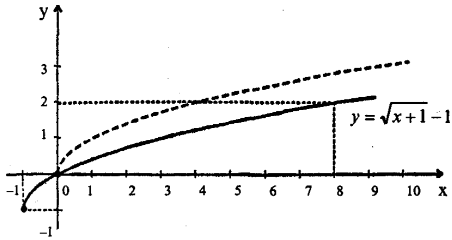
1
$\vec{b}$
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
x
–1
$y = 1 - (x+2)^2$
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8
–9
$y = -x^2$

50.

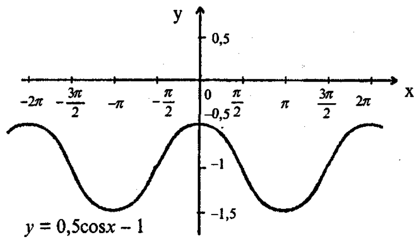
а)



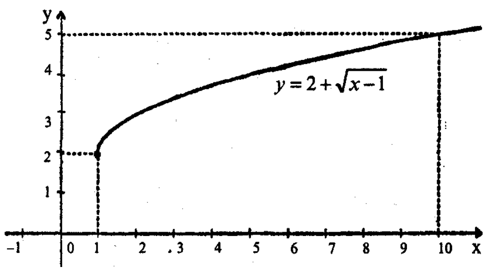
б)



в)



г)



51.

а) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ f(-2) = 2; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; f(0) = 0; f(5) = 5.

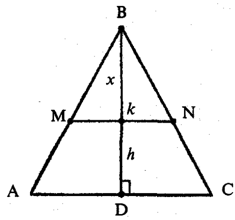
б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq -1; \\ 1 - x, & x < -1. \end{cases}$ f(-2) = 3; f(-1) = 0; f(0) = -1; f(4) = 15.

в) f(x)= $\begin{cases} \sin x, & x > 0; \\ \cos x - 1, & x \le 0. \end{cases}$ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$; f(0)=0; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

г) f(x)= $\begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ f(-1,7)=-1; f(- $\sqrt{2}$)=-1; f(0) = 0; f(3,8) = 1.

52.

а)



$\Delta MBN \sim \Delta ABC$ и коэффициент подобия

равен $\frac{x}{n}$, т.е.

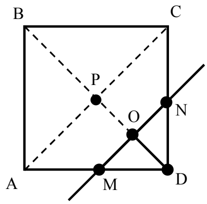
$\frac{S_{ABC}}{S_{MNB}} = \frac{x^2}{n^2}$; $S_{MNB} = \frac{bh}{2} * \frac{x^2}{h^2} = \frac{bx^2}{2h}$;

$S_{MNC} = S_{ABC} - S_{MNB} = \frac{bh}{2}(1 - \frac{x^2}{h^2})$, причем $x \in [0; h]$.

б) S(x) = $\frac{xR^2}{2}$;

в) $P(\alpha) = 2r + l = r(\alpha + 2)$;

г) |AC| =|BD| = a $\sqrt{2}$;



|PD| = $\frac{a\sqrt{2}}{2x}$; $\frac{S_{ACD}}{S_{MND}} = \frac{2a^2}{4x^2} = \frac{a^2}{2x^2}$;

т.е. $S_{MND} = x^2$;

$S_{MABCN} = S_{ABCD} - S_{MND} = a^2 - x^2$, причем $x \in [0; \frac{a\sqrt{2}}{2}]$.

53.

а) $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2 - x - 2}$; D(y): $\begin{cases} 3x - 2 \ge 0; \\ x^2 - x - 2 \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [\frac{2}{3}; 2) \cup (2; +\infty)$;

б) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{16 - x^2}$;

$D(y): \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0; \\ 16 - x^2 \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; +\infty)$;

в) y= $\frac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$; $D(y): \begin{cases} x + 2 \ge 0; \\ 3 - 2x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-2; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

г) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$; $D(y): \begin{cases} 4-x^2 \ge 0; \\ 1-2x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow D(y) = [-2;0,5) \cup (0,5;2].$

54.

а) y=1+sin²x; D(y)=R; E(y)=[1;2];

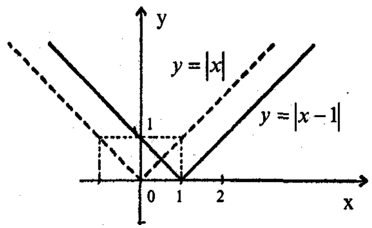
б) $y = \dfrac{x-1}{x}$; $D(y) = R / \{0\}$; $E(y) = R / \{1\}$, т.к. $\dfrac{1}{x} \ne 0.$

в) $y = \sqrt{x^2+4}$; D(y) = R; E(y)= [2;+∞);

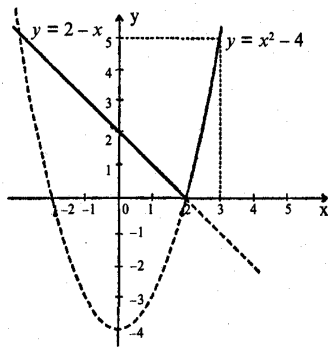
г) y=1,5-0,5cos²x; *D(y)=R; E(y)=*[1;1,5).

55.

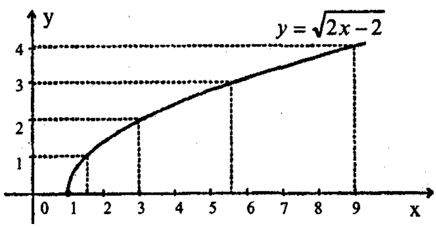
а)



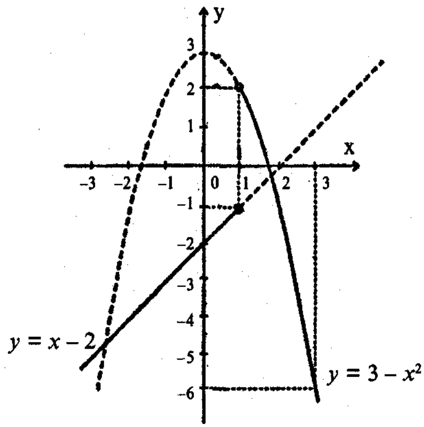
б)



в)

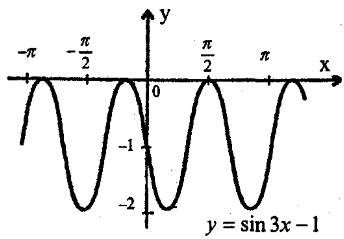


г)

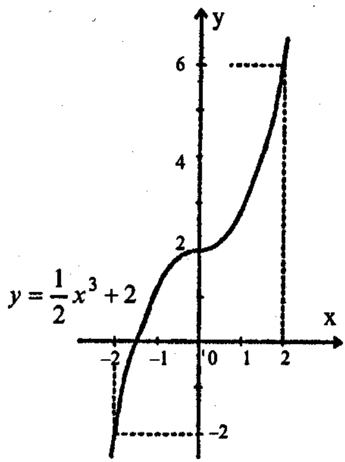

y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−3
−2
−1
0
1
2
3
$y = x - 2$
$y = 3 - x^2$

56.

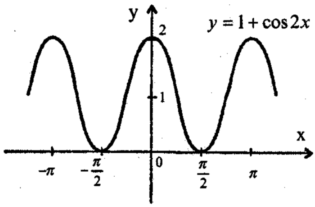
а)


y
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
0
−1
−2
$y = \sin 3x - 1$

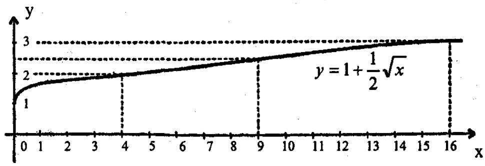
б)


y
x
6
4
2
−2
−2
−1
0
1
2
$y = \frac{1}{2}x^3 + 2$

в)



г)



4. Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций

57.

а) f(x)=3x^2-x^4; f(-x)=3(-x)^2-(-x)^4 = f(x);

б) f(x) $= x^5 \cdot \sin\frac{x}{2}$; $f(-x) = -x^5 \cdot (-\sin\frac{x}{2}) = f(x)$;

в) $f(x) = x^2 \cos x$; $f(-x) = (-x^2)\cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$;

г) $f(x) = 4x^6 - x^2$; $f(-x) = 4(-x)^6 - (-x)^2 = 4x^6 - x^2 = f(x)$.

И для всех f(x) (из пунктов а) б) в) г)) D(f)=R.

58.

а) $f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

D(f) = R/{0} – симметрична относительно (0;0);

f(-x)=$\frac{\cos(-5x)+1}{|-x|} = \frac{\cos 5x + 1}{|x|} = f(x)$;

б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$;

D(f)=R/{ ± 1} – симметрична относительно (0;0);

$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1} = f(x)$;

в) $f(x)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$;

D(f)=R/{0} – симметрична относительно (0;0);

$f(-x)=\dfrac{2\sin(-\frac{x}{2})}{(-x)^3}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}=f(x)$;

г) f(x)=$\dfrac{\cos x^3}{4-x^2}$;

D(f)=R/{± 2} – симметрична относительно (0;0);

$f(-x)=\dfrac{\cos(-x^3)}{4-(-x)^2}=\dfrac{\cos x^3}{4-x^2}=f(x)$.

59.

а) f(x)= $x^3\sin x^2$; f(-x)= $-x^3\sin(-x)^2$ = -f(x);
б) f(x)=$x^2(2x-x^3)$; f(-x) = $x^2(-2x+x^3)$= -f(x);
в) f(x)=$x^5\cos 3x$; f(-x)=$-x^5\cos(-3x)$=-f(x);
г)f(x)=$x(5-x^2)$; f(-x)=$-x(5-(-x)^2)$=-f(x).
И для всех f(x) (из пунктов а) б) в) г)) D(f)=R.

60.

а) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{2x^3}$;

D(f)=R/{0} – симметрична относительно точки (0;0);

$f(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{-2x^3}=-\dfrac{x^4+1}{2x^3}=-f(x)$;

б) f(x)=$\dfrac{\cos x^3}{x(25-x^2)}$;

D(f)=R/{0; ± 5} – симметрична относительно точки (0;0);

$f(-x)=\dfrac{\cos(-x^3)}{-x(25-x^2)}=-f(x)$;

в) $f(x)=\dfrac{3x}{x^6+2}$; $D(f)=R; f(-x)=\dfrac{-3x}{(-x)^6+2}=-\dfrac{3x}{x^6+2}=-f(x)$;

г) f(x)=$\dfrac{x^2\sin x}{x^2-9}$;

D(f)=R/{± 3} – симметрична относительно точки (0;0);

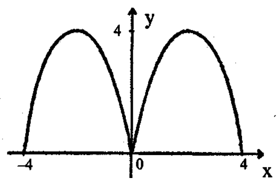
$$f(-x)=\frac{(-x)^2\sin(-x)}{(-x)^2-9}=-\frac{x^2\sin x}{x^2-9}=-f(x).$$

Поэтому, функции f(x) (из пунктов а) б) в) г)) являются нечетными.

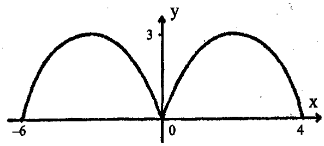
61.

1) f-четная:

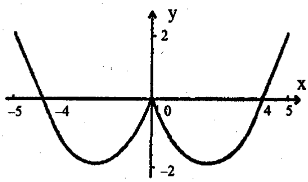
а)



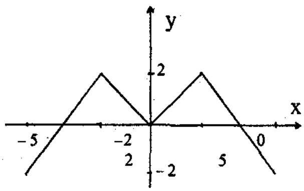
б)



в)



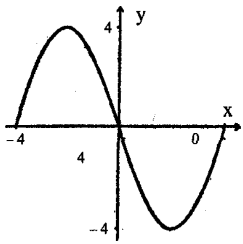
г)



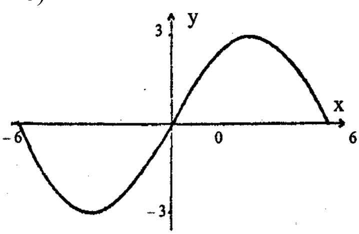
2)

f – нечетная:

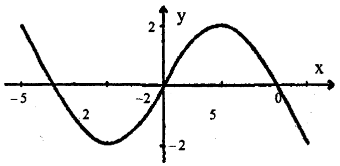
а)



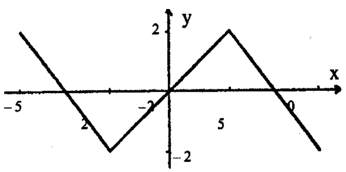
б)



в)



г)



62.

а) $f(x+T)=f(x+4\pi)=\sin(\frac{x}{2}+2\pi)=\sin\frac{x}{2}=f(x);$

б) $f(x+T)=f(x+\frac{\pi}{3})=2tg(3x+\pi)=2\ tg3x=f(x);$

в) $f(x+T)=f(x+\frac{\pi}{2})=3\cos(4x+2\pi)=3\cos 4x=f(x);$

г) $f(x+T)=f(x+3\pi)=ctg(\frac{x}{3}+\pi)=ctg\frac{x}{3}.$

Поэтому, число Т является периодом функции $f(x)$.

63.

Функции f(x) (из пунктов а) б) в) г)) есть линейные комбинации элементарных тригонометрических функций (sin x, cos x, tg x, ctg x), которые являются периодическими. Поэтому и функции f(x) являются периодическими.

64.

а) $y_1=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4};$

Наименьший положительный период функции y=sin x есть 2π, поэтому наименьший положительный период функции $y_1(x)$ равен

$T=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi;$

б) $y_1=3tg\frac{3x}{2};\ \ T=\frac{\pi}{3/2}=\frac{2\pi}{3};$

в) $y_1=4\cos 2x;\ \ T=\frac{2\pi}{2}=\pi;$

г) $y_1=5tg\frac{x}{3};\ \ T=\frac{\pi}{1/3}=3\pi.$

65.

а) $y=\sin x\ \cos x=\frac{\sin 2x}{2};\ \ T=\frac{2\pi}{2}=\pi;$

б) $y=\sin x\sin 4x-\cos x\cos 4x=-\cos 5x;\ \ T=\frac{2\pi}{5}=\frac{2}{5}\pi;$

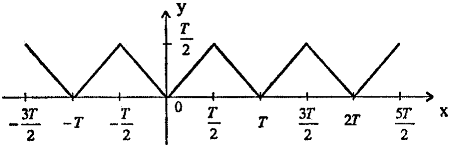
в) $y=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x;\ \ T=\frac{2\pi}{2}=\pi;$

г) $y=\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x=\sin 4x;\ \ T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};$

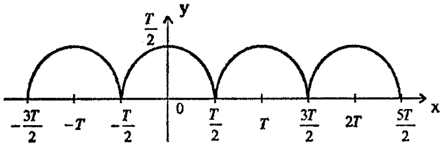
где Т – наименьший положительный период функции y(x).

66.

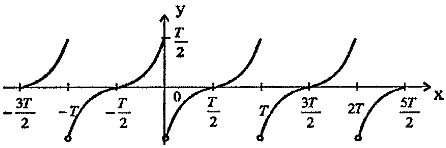
а)



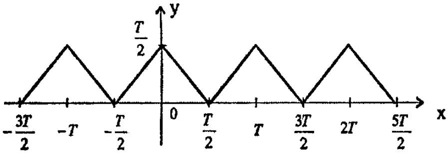
б)



в)

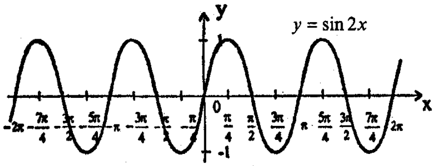


г)

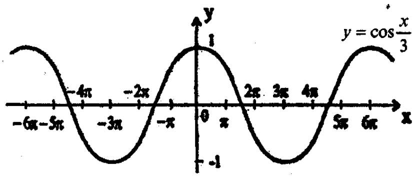


67.

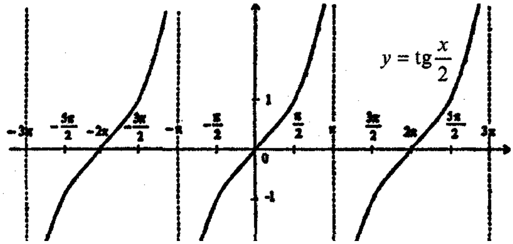
а) y= sin 2x; $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi;$



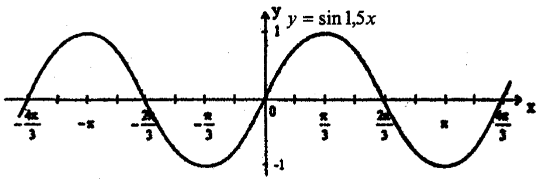
б) $y = \cos\dfrac{x}{3};\;\; T = \dfrac{2\pi}{1/3} = 6\pi;$



в) y= tg $\frac{x}{2}$; $T = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi$;



г) y=sin 1,5x; $T = \frac{2\pi}{1,5} = \frac{4}{3}\pi$;



где T — наименьший положительный период функции y(x).

68.

а) не прав, т.к. T должно удовлетворять равенству $f(x+t) = f(x)$ для $\forall x \in D(f)$;

б) не прав; в) не прав; г) не прав.

69.

а) y=sin x + ctg x - x; D(y) =R \ { $\pi n, n \in z$ };

y(-x)= -sin x - ctgx + x = -y(x) — функция нечетная;

б) $y = \frac{|x|}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cdot |x|}{\sin 2x}$; D(y)=R\ $\left\{\frac{\pi}{2} n, n \in z\right\}$;

y(-x)=- $\frac{2|x|}{\sin 2x} = -y(x)$ — функция нечетная;

в) y=x^4+tg^2x+xsinx; D(y)=R\ $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z\right\}$

y(-x)=$(-x)^4$+tg^2(-x)+(-x)sin(-x)=y(x) — функция четная;

г) $y = \frac{tgx - ctgx}{|x|}$; D(y)=R\ $\left\{\frac{\pi n}{2}, n \in z\right\}$;

y(-x)=$\frac{-tg+ctgx}{|-x|}=-y(x)$ функция нечетная.

70.

а) $y=\frac{\sin x}{x^3-1}$;

D(y)=R\ $\{1\}$ — несимметричная относительно нуля, поэтому y(x) — функция общего вида;

б) $y=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; D(y)=R\ $\{0\}$;

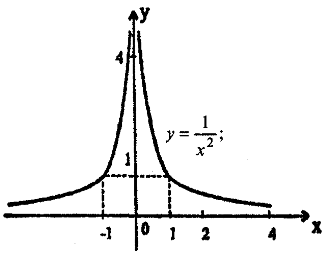
y(-x)=$\frac{-x-\sin x}{-x+\sin x}$=y(x) — функция является четной;

в) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$; D(y): $\begin{cases}1-x^2\geq 0\\1-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow$ D(y)=[-1;1) – не симметрична относительно нуля, т.е y(x) – функция общего вида.

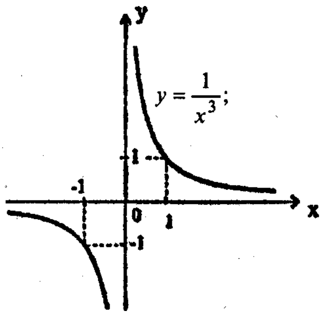
г) $y=\frac{x+tgx}{x\cos x}$; D(y)=R\ $\left\{0;\frac{\pi}{2}+\pi n\setminus n\in z\right\}$.

$y(-x)=\frac{-x-tgx}{-x\cdot\cos x}=\frac{x+tgx}{x\cos x}$=y(x) — функция является четной.

71.



а) из графика видим, что функция симметрична относительно оси OX, поэтому функция является четной.



б) Из графика видим, что функция симметрична относительно точки (0;0), поэтому функция является нечетной.

72.

а) $h(x)=f(x)g^2(x)$, где f - четная и g - нечетная функции;
$h(-x)=f(-x)\cdot g^2(x)= f(x)\cdot g^2(x)=h(x)$.
т.е. h(x) – четная функция;
б) h(x)=f(x)=g(x), где f и g четные функции,
h(-x)=f(-x)-g(x)=f(x)-g(x)=h(x),
т.е. h(x) – четная функция;
в) h(x)= f(x)+g(x), где f и g нечетные функции;
h(-x)=f(-x)+g(-x)=-(f(x)+g(x))=-h(x).
т.е. h(x)нечетная функция;
г) h(x)=f(x)g(x), где f и g нечетные функции;
h(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x)(-g(x))=f(x)g(x)=h(x),
т.е. h(x) – четная функция.

73.

а). $y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б). y=tgx·ctgx=1, причем D(y)=R\ $\left\{ \frac{\pi k}{2}, k \in Z \right\}$;

Очевидно, что $T = \frac{\pi}{2}$;

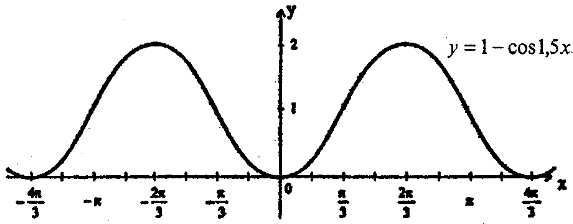
в) $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$; $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

г) $y = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 = 1 + \sin x$; $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$;

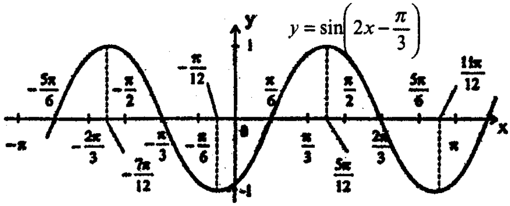
где T – наименьший положительный период функции y(x).

74.

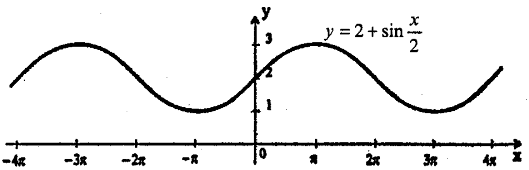
а)



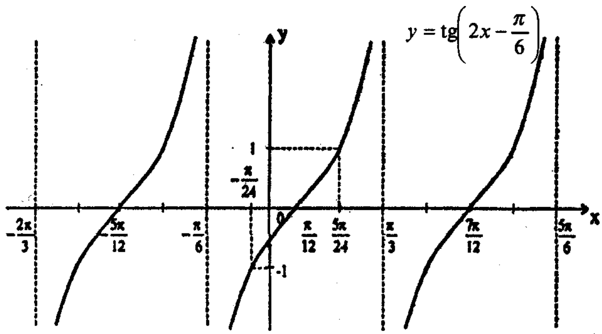
б)



в)



г)



75.

Допустим, функция $y=f(x)$ имеет период T, т.е $y(x \pm T)=y(x)$, тогда для функции $y_1=af(x)+b$:

$y_1(x\pm T)=a(y(x\pm T))+b=ay(x)+b=af(x)+b=y_1(x)$. Причем $D(y_1)=D(y)$. Поэтому $y_1(x)$ является периодической.

76.

а) $y=x^2-3$; при $x=1$ ($\in D(y)$):

$y(x+2)=y(3)=6\neq 1=y(2)$.

Т.е. $T=2$ не период функции $y(x)$;

б). $y=\cos x$; При $x=\pi$ ($\in D(y)$):

$y(x+2)=\cos(\pi+2)=-\cos 2\neq -1=\cos(\pi)=y(\pi)$.

Т.е. $T=2$ - не период функции $y(x)$;

в) $y=3x+5$ есть функция не периодическая, т.е. $T=2$ не период функции $y(x)$

г) $y=|x|$ есть функция не периодическая, т.е. $T=2$ — не период функции $y(x)$.

5. Возрастание и убывание функций. Экстремумы.

77.

а) $x\in[-7;-5]\cup[1;5]$ — промежуток возрастания ;

$x\in[-5;1]\cup[5;7]$ — промежуток убывания;

$x_{max1}=-5$; $y_{max1}=5$; $x_{max2}=5$; $y_{max2}=3$; $x_{min1}=1$; $y_{min1}=-3$;

б) $x\in[-6;-4]\cup[-2;4]$ — промежуток возрастания;

$x\in[-4;-2]\cup[4;5]$ — промежуток убывания;

$x_{max1}=-4$; $y_{max1}=3$; $x_{max2}=4$; $y_{max2}=5$; $x_{min1}=-2$; $y_{min1}=-2$;

в) $x\in[-3;3]$ — промежуток возрастания;

$x\in[-\infty;3]\cup[3;+\infty)$ — промежуток убывания;

$x_{max1}=3$; $y_{max1}=2$; $x_{min}=-3$; $y_{min}=-2$;

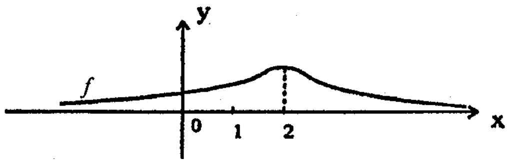
г) $x\in[-4;-2]\cup[0;2]\cup[4;6]$ – промежуток возрастания;

$x\in[-6;-4]\cup[-2;0]\cup[2;4]$ — промежуток убывания;

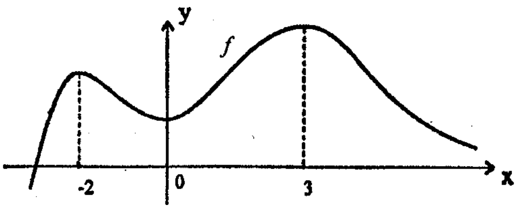
$x_{max1}=-2$; $y_{max1}=3$; $x_{max2}=2$; $y_{max2}=3$; $x_{min1}=-4$; $y_{min1}=-2$; $x_{min2}=0$; $y_{min2}=0$; $x_{min3}=4$; $y_{min3}=-2$;

78.

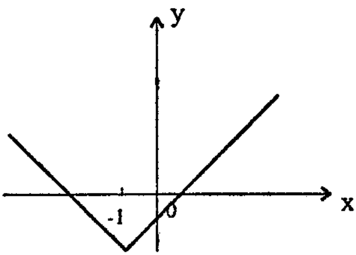
а)



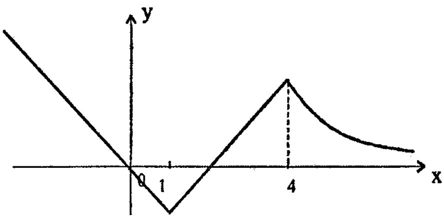
б)



в)

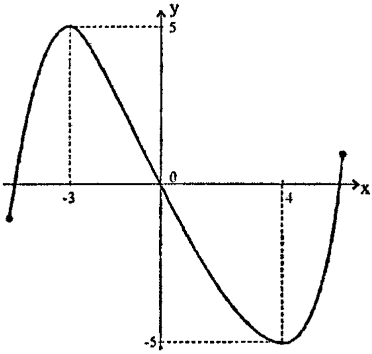


г)

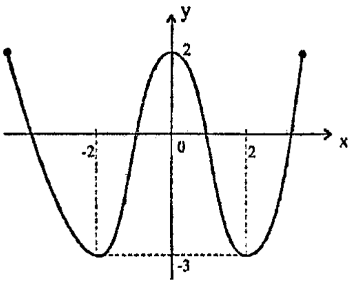


79.

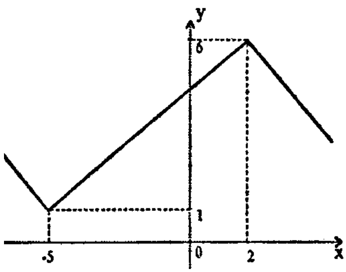
а)



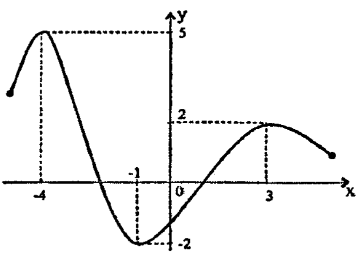
б)



в)

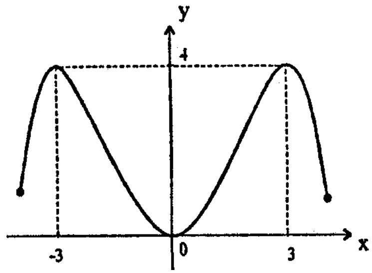


г)

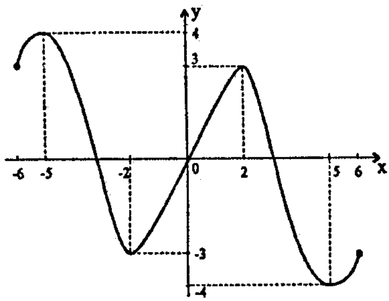


80.

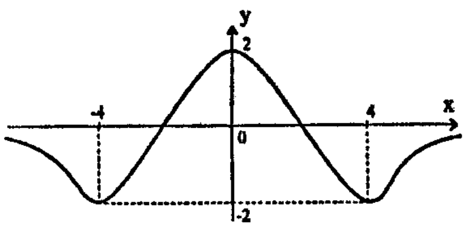
а)



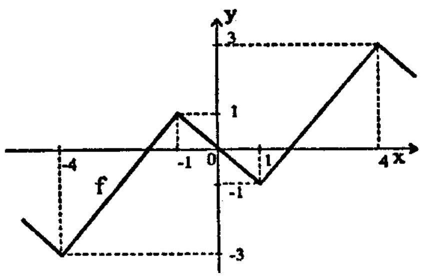
б)



в)



г)



81.

Пусть $x_2>x_1$, тогда $y(x_2)-y(x_1)=kx_2+b-kx_1-b=k(x_2-x_1)$.

а) $k>0$, то $y(x_2)-y(x_1)>0$, т.е. функция возрастает на R;

б) $k>0$, то $y(x_2)-y(x_1)<0$, т.е функция убывает на R.

(т.к. x_1, x_2 любые точки на R).

82.

а) $y=-x^2+6x-8=1-(x-3)^2$.

Очевидно, $x_{max}=3$, $y_{max}=1$.

Если $x\in(-\infty; 3]$, то функция возрастает;

Если $x\in[3;+\infty)$, то функция убывает.

б) $y=(x+2)^4+1$.

Очевидно, $y_{min}=1$ и $x_{min}=-2$.

При $x\in(-\infty;-2]$, функция убывает и

при $x\in[-2;+\infty)$ функция возрастает.

в) $y=x^2-4x=(x-2)^2-4$.

Очевидно, что $x_{min}=2$; $y_{min}=-4$

При $x\in(-\infty;2]$ функция убывает;

при $x\in[2;+\infty)$ функция возрастает.

г) $y=(x-3)^4$;

Очевидно, что $y_{min}=0$; $x_{min}=3$

При $x\in(-\infty;0]$ функция убывает;

при $x\in[0;+\infty)$ функция возрастает.

83.

а) $y=\frac{3}{x-2}$; $D(y)=R\setminus\{2\}$;

При $x_1<x_2<2$: $y(x_2)-y(x_1)=\frac{3(x_1-x_2)}{(x_2-2)(x_1-2)}<0$, т.е. на $(-\infty;2)$ функция убывает; аналогично на $(2;+\infty)$ функция убывает.

$y=\frac{3}{x-2}$ убывает на каждом из промежутков D(y), следовательно, она не имеет точек минимума и максимума;

б). $y=-(x+3)^5$; $D(y)=R$;

то для $x_1<x_2$: $(-x_1-3)^5<(-x_2-x_3)^5$, т.е.

$y(x_1)<y(x_2)$ — функция убывает на R. Следовательно, не имеет точек максимума и минимума;

в) $y=-\frac{1}{x+3}$; $D(y)=R\setminus\{-3\}$

x_1; $x_2\in R$: $x_1<x_2<-3$, то

$y(x_2)-y(x_1)=\dfrac{-x_2+x_1}{(x_1+3)(x_2+3)}<0$ функция возрастает на (-∞; -3).

Аналогично, она возрастает на (-3; +∞), т.к. $y=-\dfrac{1}{x+3}$ возрастает на D(y), то она не имеет точек максимума и минимума;

г) $y=(x-4)^3$; D(y)=R;

то для $x_1<x_2$: $(x_1-4)^3<(x_2<4)^3$;

$y(x_1)<y(x_2)$, т.е. функция возрастает на R и не имеет точек максимума и минимума.

84.

а) y=3sinx-1.

Имеем дело с синусоидой, поэтому, на $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ функция убывает;

на $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ $n\in Z$ функция возрастает;

$x_{\min}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $y_{\min}=-4$, $n\in Z$; $x_{\max}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $y_{\max}=2$, $k\in Z$;

б)y=-2cosx+1;

Функция убывает на [-π+2πn; 2πn] $n\in Z$;

Функция возрастает на [2πn; π+2πn] $n\in Z$;

$x_{\min}=2\pi n$, $y_{\min}=-1$; $x_{\max}=\pi+2\pi n$; $y_{\max}=3$, $n\in Z$

в) y=2cosx+1,

Функция убывает на [-π+2πn; 2πn] $n\in Z$;

Функция возрастает на [2πn; π+2πn]; $n\in Z$;

$x_{\min}=\pi+2\pi n$; $y_{\min}=-1$; $x_{\max}=2\pi n$; $y_{\max}=3$, $n\in Z$;

г) y=0,5sinx-1,5;

Функция убывает на $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$ $n\in Z$;

Функция возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$; $n\in Z$;

$x_{\min}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $y_{\min}=-2$; $x_{\max}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$; $y_{\max}=-1$, $n\in Z$;

85.

а) y=1+tgx; D(y)=R/$\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi n\,/\,n\in z\right\}$

Функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, n∈ Z;

Точек мах и min нет

б) y=sinx+1; D(y)=R;

Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ n∈ Z;

Функция убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$ n∈ Z;

$x_{\min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $y_{\min}=0$; $x_{\max}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $y_{мах}=2$; n∈ Z;

в) y=-tgx; D(y)=R/ $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n / n\in z\right\}$;

Функция убывает на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; n∈ Z;

точек мах и min нет;

г) y=cosx-1; D(y)=R;

Функция убывает на (2πn; π+2πn]; n∈ Z;

Функция возрастает на [π+2πn; 2π+2πn]; n∈ Z;

$x_{\min}=\pi+2\pi n$; $y_{\min}=-1$; $x_{мах}=2\pi+2\pi n$; $y_{мах}=0$, n∈ Z;

86.

а) Т.к. $0<\frac{2\pi}{9}<\frac{3\pi}{7}<\pi$, то $\cos\frac{2\pi}{9}>\cos\frac{3\pi}{7}$,

в силу убывания y=cos x на [0; π];

б) Т.к. $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{7}<\frac{7\pi}{9}<\frac{3\pi}{2}$, то $\sin\frac{5\pi}{7}>\sin\frac{7\pi}{8}$,

т.к. y=sinx ↓ на $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;

в) Т.к. $\frac{\pi}{2}<\frac{6\pi}{5}<\frac{9\pi}{7}<\frac{3\pi}{2}$, то $\text{tg}\frac{6\pi}{5}>tg\frac{9\pi}{7}$, т.к.

y=tgx ↑ на $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$,

г) Т.к. $-\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{8}<\frac{4\pi}{9}<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{3\pi}{8}>\sin\frac{4\pi}{9}$,

т.к. y=sinx ↑ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

87.

а) $\frac{\pi}{2} < \pi - 1{,}3 < 3{,}2 < 3{,}8 < \frac{3\pi}{2}$ и

y=sinx ↓ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$ sin 3,8<sin3,2<sin1,3;

б) 0<0,9<1,3<1,9<π и y=cosx ↓ на[0; π] ⇒ cos 1,9<cos1,3<cos0,9;

в) $-\frac{\pi}{2} < -0{,}3 < 0{,}5 < 1{,}4 < \frac{\pi}{2}$ и tgx ↑ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ tg(-0,3)<tg0,5<tg1,4;

г) $-\frac{\pi}{2} < -1{,}2 < 0{,}8 < 1{,}2 < \frac{\pi}{2}$ и y=sinx ↑ на

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ sin (-1,2) < sin 0,8 < sin 1,2.

88.

а) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$; D (y) = R \{2}.

$x_1 < x_2 < 2$, то $\frac{1}{(x_1-2)^2} < \frac{1}{(x_2-2)^2} \Rightarrow$ функция возрастает на (-∞;2);

Аналогично, функция убывает на (2;+∞);

Точек max и min нет.

б) $y = 4|x| - x^2$;

$$y = \begin{cases} 4x - x^2, x \geq 0; \\ -4x - x^2, x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} -(x-2)^2 + 4, x \geq 0; \\ -(x-2)^2 + 4, x < 0; \end{cases}$$

Т.е. функция возрастает при $x \in$ (0;-2]∪[0;2];

убывает при $x \in$ [-2;0]∪[2;+∞);

$x_{max} = 2$; $y_{max} = 4$; $x_{max} = -2$; $y_{max} = 4$;

$x_{min} = 0$; $y_{min} = 0$.

в) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$; D (y) = R / {-1}.

Если $x_1 < x_2 < -1$, то $\frac{1}{(x_1+1)^3} > \frac{1}{(x_2+1)^3}$, т.е. функция убывает на (-∞;-1);

Аналогично, функция убывает на (-1;+∞);

Точек max и min нет.

г) $y = x^2 - 2|x|$; $y = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, x \geq 0; \\ (x+1)^2 - 1, x < 0; \end{cases}$

Т.е. функция возрастает при $x \in [-1;0] \cup [1; +\infty)$;

убывает при $x \in (-\infty;-1] \cup [0;1]$;

$x_{min} = 1$; $y_{min} = -1$; $x_{min} = -1$; $y_{min} = -1$; $x_{max} = 0$; $y_{max} = 0$.