133.

а)Т.к. acrtg $x_1 = \alpha_1$; arctg $x_2 = \alpha_2$, то tg $\alpha_1 = x_1$ и tg $\alpha_2 = x_2$.

Т.к. функция y = tg x возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то arctg x_1 < arctg x_2;

б)Т.к. arcctg $x_1 = \alpha_1$; arcctg $x_2 = \alpha_2$, то ctg $\alpha_1 = x_1$ и ctg $\alpha_2 = x_2$,

т.к. функция y = ctg x убывает на $(0;\pi)$, то arcctg x_1 > acctg x_2.

134.

а) Т.к $-1 < -0{,}3 < \frac{\pi}{6} < 0{,}9 < 1$, то $\arcsin(-0{,}3) < \arcsin\frac{\pi}{6} < \arcsin 0{,}9$;

б) Т.к $-1 < -0{,}7 < -0{,}5 < \frac{\pi}{8} < 1$, то $\arcsin(-0{,}7) < \arcsin(-0{,}5) < \arcsin\frac{\pi}{8}$;

в) Т.к $-1 < -0{,}8 < -0{,}2 < 0{,}4 < 1$, то $\arccos 0{,}4 < \arccos(-0{,}2) < \arccos(-0{,}8)$;

г) Т.к $-1 < -0{,}6 < \frac{\pi}{5} < 0{,}9 < 1$, то $\arccos 0{,}9 < \arccos\frac{\pi}{5} < \arccos(-0{,}6)$.

135.

а) Т.к $-5 < 0{,}7 < 100$ и функция y = arctg x возрастает на R,
то arctg (-5) < arctg 0,7 < arctg 100;
б) Т.к $-5 < 1{,}2 < \pi$ и функция y = arcctg x убывает на R,
то arcctg π < arcctg 1,2 < arcctg (-5);
в) Т.к $-95 < 3{,}4 < 17$ и функция y = arctg x возрастает на R,
то arctg (-95) < arctg 3,4 < arctg 17;
г) Т.к $-7 < -2{,}5 < 1{,}4$ и функция y = arcctg x убывает на R,
то arcctg 1,4 < arcctg (-2,5) < arcctg (-7).

9. Решение простейших тригонометрических уравнений.

136.

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

г) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

137.

а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$;

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

в) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$;

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

г) $2\cos x - 1 = 0$;

$\cos x = \frac{1}{2}$;

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

138.

а) $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

г) $\sin x = -1$;

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

139.

а) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$;

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$;

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $2\sin x - 1 = 0$;

$\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

г) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

140.

а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

в) tg x = 1;

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, k ∈ Z;

г) tg x = 0;

$x = \pi k$, k ∈ Z.

141.

а) tg x + $\sqrt{3}$ = 0;

tg x = - $\sqrt{3}$;

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, k ∈ Z;

б) ctg x + 1 = 0;

ctg x = -1;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k ∈ Z;

в) $\sqrt{3}$ tg x – 1 = 0;

tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, k ∈ Z;

г) $\sqrt{3}$ ctg x – 1 = 0;

ctg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, k ∈ Z.

142.

а) sin 2x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, k ∈ Z;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, k ∈ Z;

б) cos $\frac{x}{3}$ = -$\frac{1}{2}$;

$x = 3\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, k ∈ Z;

$x = \pm 2\pi + 6\pi k$, k ∈ Z;

в) sin $\frac{x}{4}$ = $\frac{1}{2}$;

$x = 4\left((-1)^k \frac{2\pi}{3} + \pi k\right)$, k ∈ Z;

$x = (-1)^k \frac{8\pi}{3} + 4\pi k$, k ∈ Z;

г) cos 4x = 0;

$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, k ∈ Z;

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, k ∈ Z.

143.

а) sin x = -0,6;
$x = (-1)^{k+1}\arcsin 0{,}6 + \pi k$, k ∈ Z;
б) ctg x =2,5;
x = arcctg 0,4 + πk, k ∈ Z;
в) cos x = 0,3;
x = $\pm$arccos 0,3 +2πk, k ∈ Z;
г) tg x = -3,5;
x = -arctg (3,5) + πk, k ∈ Z.

144.

а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$-\frac{x}{3} = (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$;

$x = (-1)^{k+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi k$, $k \in Z$;

б) $\text{tg}\,(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\text{tg}\,4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$x = -\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$;

в) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = \pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n \in Z$;

г) $\text{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$;

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$;

$x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

145.

а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

$x = \frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $n \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 4\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3}+4\pi n, n \in z; \end{array}\right.$$

б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

$x = \frac{\pi}{12}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;

в) $\sqrt{3}\,\text{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = 3$;

$\text{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$x = 3\pi n$, $n \in Z$;

г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$;

$x = -\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k \in Z$.

146.

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right) = -1$;

$\frac{\pi}{6} - 2x = \pi+2\pi k$, $k \in Z$;

$x = \frac{7\pi}{12}+\pi k$, $k \in Z$;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$;

$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3} = (-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in Z$;

$x = \frac{4\pi}{3} + (-1)^k\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k \in Z$;

в) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ = -1;

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$ = arctg 1 + πn, n ∈ Z;

x = $\pi+2\pi n$, n ∈ Z;

г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right) = \sqrt{2}$;

$3x-\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, n ∈ Z;

x = $\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, n ∈ Z.

147.

а) sin 3x cos x – cos 3x sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

sin 2x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

x = $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, n ∈ Z;

б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}$ = 1;

$\cos\frac{x}{2}$ = -1;

x = $2\pi+4\pi n$, n ∈ Z;

в) sin 2x cos 2x = $-\frac{1}{4}$;

sin 4x = $-\frac{1}{2}$;

x = $(-1)^n\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, n ∈ Z;

г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

x = $\frac{3\pi}{5}+(-1)^k\frac{3\pi}{4}+3\pi n$, n ∈ Z.

148.

а) x = $\frac{9\pi}{2}$: $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ = -1, т.е. точка пересечения $\left(\frac{9\pi}{2};-1\right)$;

x = $\frac{9\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ = 1, т.е. точка пересечения $\left(\frac{9\pi}{2};1\right)$;

б) Имеем: $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ = -1;

x = $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, n ∈ Z.

Т.е. точка пересечения $\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+\pi n;-1\right)$, n ∈ Z;

Имеем: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ = -1; x = $-\frac{3\pi}{2}+4\pi n$, n ∈ Z,

т.е. точка пересечения $\left(-\frac{3\pi}{2}+4\pi n;-1\right)$, n ∈ Z;

в) Имеем: $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; x = $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, k ∈ Z,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k;1\right)$, k ∈ Z;

Имеем: $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$; x = $\frac{\pi}{2}+4\pi n$, n ∈ Z,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;1\right)$, n ∈ Z;

г) Имеем:

$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$; x = $\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, k ∈ Z,

т.е. точка пересечения $\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};0\right)$, k ∈ Z;

Имеем:

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$; x = $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, k ∈ Z,

т.е. точка пересечения $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;0\right)$, k ∈ Z.

149.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$; x = $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, n ∈ Z;

а) x = $\frac{\pi}{3}$ — наименьший положительный корень;

б) x = $-\frac{2\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$;

в) x = $-\frac{2\pi}{3}$ — наибольший отрицательный корень;

г) x = $-\frac{2\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$.

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; x = $-\frac{3\pi}{8}+\pi k$, k ∈ Z;

а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $-\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; в) $-\frac{3\pi}{8}$; г) $-\frac{3\pi}{8}$.

150.

На $(0;\pi)$ функция y=ctg x убывает. Следовательно, на $(0;\pi)$ существует единственное решение уравнения ctg t = a : arctg a и т.к. наименьший положительный период функции ctg t равен π, то общее решение: t = arctg a + πn, n $\in$ Z.

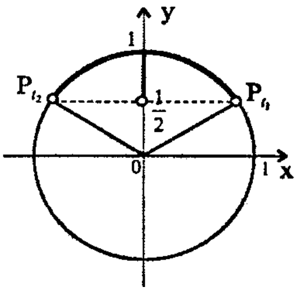
10. Решение простейших тригонометрических неравенств

151.

а) $t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

$t_2 = \frac{5\pi}{6}$; $\sin t > \frac{1}{2}$,

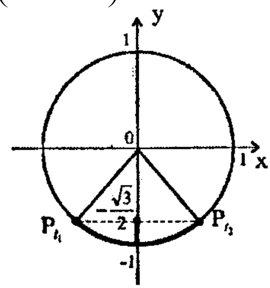
$t \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$, $t \in [0;\pi]$;



б) $t_1 = -\frac{2\pi}{3}$; $t_2 = -\frac{\pi}{3}$;

$\sin t \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

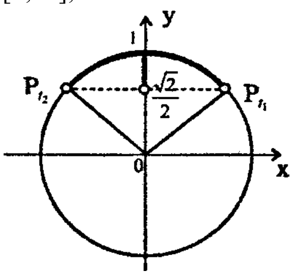
$t \in \left(-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right)$, $t \in [-\pi;0]$;



в) $t_1 = \frac{\pi}{4}$; $t_2 = \frac{3\pi}{4}$;

$\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$; $t \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$,

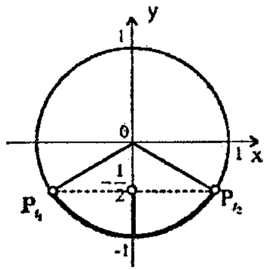
$t \in [0;\pi]$;



г) $t_1 = -\pi + \arcsin\frac{1}{2} = -\frac{5\pi}{6}$; $t_2 = -\frac{\pi}{6}$;

$\sin t < -\frac{1}{2}$; $t \in \left(-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right)$,

$t \in [-\pi;0]$.



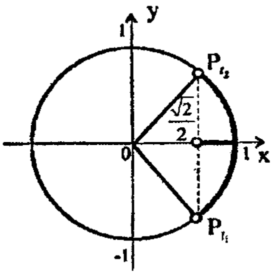
152.

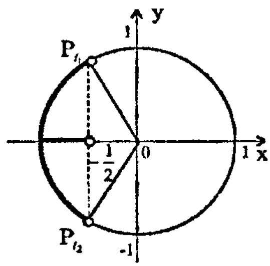
а) $t_1 = -\dfrac{\pi}{4}$; $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\cos t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $t \in \left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$,

б) $t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$; $t_2 = \dfrac{4\pi}{3}$; $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$;

$\cos t < -\dfrac{1}{2}$; $t \in \left(\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right)$,



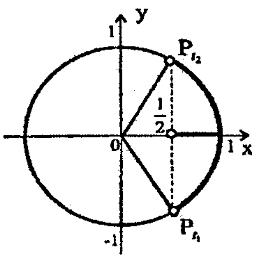


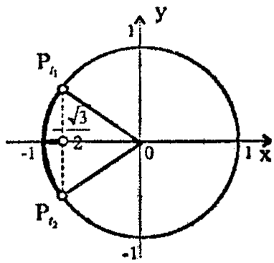
в) $t_1 = -\dfrac{\pi}{3}$; $t_2 = \dfrac{\pi}{3}$; $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\cos t > \dfrac{1}{2}$; $t \in \left(-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right)$,

г) $t_1 = \dfrac{5\pi}{6}$; $t_2 = \dfrac{7\pi}{6}$; $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$\cos t < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $t \in \left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}\right)$,





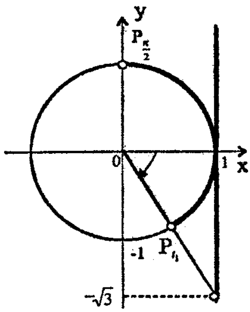
153.

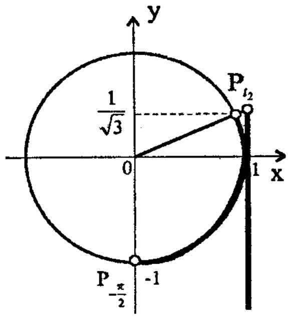
а) $t_1 = -\dfrac{\pi}{3}$; на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}$; $t \in \left(-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$

б) $t_1 = \dfrac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg} t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{6}\right)$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;



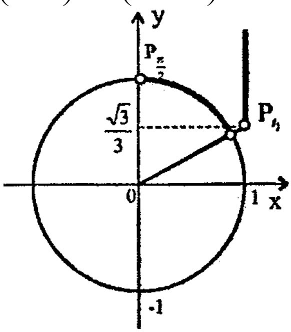


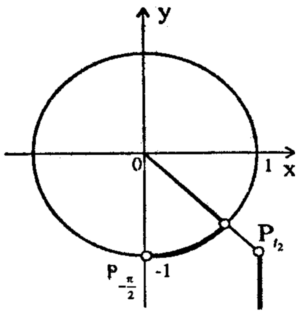
в) $t = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$t \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $t = -\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} t < -1$;

$t \in \left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.





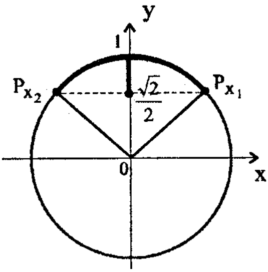
154.

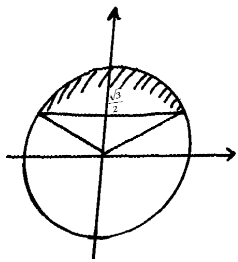
а) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{3\pi}{4}$; $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in Z$;

б) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{3}$; $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x \in \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$;



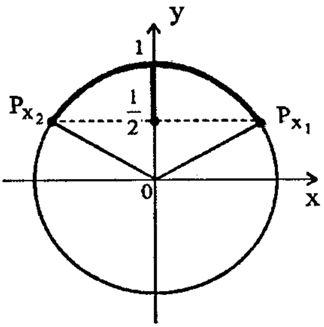


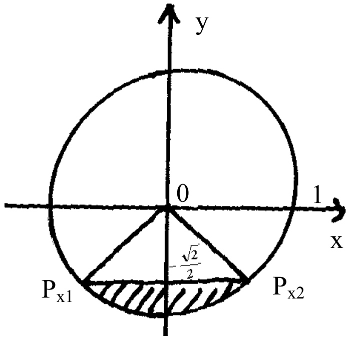
в) $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; $\sin x \geq \frac{1}{2}$;

$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$;

г) $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4}$; $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.





155.

а) $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi}{3}$; $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$;

б) $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{7\pi}{4}$; $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

в) $x_1 = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{\pi}{6}$; $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $x_1 = \frac{3\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

156.

а) $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right]$, $k \in Z$;

б) $x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

в) $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

г) $x = \operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} x < -1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

157.

а) $2\cos x - 1 \geq 0$; $\cos x \geq \frac{1}{2}$;

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

б) $2\sin x + \sqrt{2} \geq 0$; $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$; $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$,

$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

г) $3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geq 0$; $\operatorname{tg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$; то $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

158.

а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; $2x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

$x \in \left(-\frac{7\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

б) $\cos \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{3} \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi k; \frac{\pi}{2} + 6\pi k\right)$, $k \in Z$;

в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

$x \in \left(-\frac{4\pi}{3}+4\pi k;-\frac{2\pi}{3}+4\pi k\right)$, k ∈ Z;

г) tg 5x > 1; 5x $\in \left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, k ∈ Z;

$x \in \left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\right)$, k ∈ Z.

159.

а) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le 1$; $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$;

$x \in \left[\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, n ∈ Z;

б) $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) < 1$; $\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x \in \left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi n}{3}\right)$, n ∈ Z;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \ge 1$; $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in [4\pi n;\pi+4\pi n]$, n ∈ Z;

г) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$; $\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x \in \left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, n ∈ Z.

160.

а) $\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} \le \frac{1}{2}$; $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \le \frac{1}{2}$;

$x \in \left[-\pi+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, k ∈ Z;

б) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in \left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, k ∈ Z;

в) $4\sin 2x \cos 2x \ge \sqrt{2}$; $\sin 4x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x \in \left[\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2};\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right]$, k ∈ Z;

г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos x - \sin x \sin\frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x \in \left(\frac{17\pi}{24}+2\pi k;\frac{25\pi}{24}+2\pi k\right)$, k ∈ Z.

161.

а) $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{2}$; $x \in \left(\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, n ∈ Z;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) > 1$; $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x \in \left(\frac{11\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, n ∈ Z;

в) $\operatorname{ctg} 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x \in \left[\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right)$, n ∈ Z;

г) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right) > -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, n ∈ Z.

162.

а) $3\sin\frac{x}{4} \geq 2$; $\sin\frac{x}{4} \geq \frac{2}{3}$;

$x \in \left(4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi n;4\pi-4\arcsin\frac{2}{3}+8\pi n\right)$, n ∈ Z;

б) $4\cos\frac{x}{3} < -3$; $\cos\frac{x}{3} < -\frac{3}{4}$;

$x \in \left(3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+6\pi n;6\pi-3\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+6\pi n\right)$, n ∈ Z;

в) $5\operatorname{tg} 2x \leq 3$; $\operatorname{tg} 2x \leq \frac{3}{5}$;

$x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{1}{2}arctg\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{2}\right)$, n ∈ Z;

г) $\frac{1}{2}\sin 4x < -\frac{1}{5}$; $\sin 4x < -\frac{2}{5}$;

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\arcsin\frac{2}{5}}{4}+\frac{\pi n}{2};-\frac{\arcsin\frac{7}{5}}{4}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n \in Z.$$

163.

а) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$; $\quad \begin{cases} x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]; \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right);$

б) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \begin{cases} x\in\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right); \\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{3};0\right];$

в) $\operatorname{tg} x \geq -1$; $\quad \begin{cases} x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right); \\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right];$

г) $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \begin{cases} x\in\left(-\frac{5\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right); \\ x\in[0;\pi]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{8}\right).$

11. Примеры решения тригонометрических уравнений систем уравнений.

164.

а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $t = \sin x$; $2t^2 + t - 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=-1; \\ t=\frac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z; \\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in z; \end{array}\right.$$

б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; $t = \sin x$; $3t^2 - 5t - 2 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{3}; \\ t=2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in z; \\ \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in z$;

в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $t = \sin x$; $2t^2 - t - 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2}; \\ t = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in z; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z; \end{array}\right.$$

г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$; $t = \sin x$; $4t^2 + 11t - 3 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4}; \\ t = -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^{n}\arcsin\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in z; \\ \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in z$.

165.

а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; $t = \cos x$; $6t^2 + t - 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2}; \\ t = \frac{1}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z; \\ x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in z; \end{array}\right.$$

б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$; $t = \cos x$;
$2t^2 - 3t - 2 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2}; \\ t = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z; \\ \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in z$;

в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; $t = \cos x$; $4t^2 - 8t + 3 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}; \\ t = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z; \\ \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in z$;

г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$; $5\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$; $t = \cos x$;

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{5}; \\ t = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in z; \\ x = 2\pi n,\ n \in z. \end{array}\right.$$

166.

а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$; $t = \sin x$;
$2t^2 - t - 3 = 0$; $t = -1$; $t = 1{,}5$

1) $\sin x = -1$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $\sin x = 1{,}5$ – не имеет решений.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n / n \in Z\right\}$.

б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$; $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$; $t = \sin x$;
$t^2 - 3t + 2 = 0$; $t = 1$, $t = 2$;

1) $\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

2) $\sin x = 2$ – не имеет решений.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k / k \in Z\right\}$.

в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$; $t = \cos x$;
$t^2 - 4t + 3 = 0$; $t = 1$, $t = 3$;
1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k,\ k \in Z$;
2) $\cos x = 3$ – не имеет решений.
Ответ: $\{2\pi n/n \in Z\}$.
г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; $8\cos^2 x - \cos x - 9 = 0$; $t = \cos x$;

$8t^2 - t - 9 = 0$; $t = -1$, $t = \dfrac{9}{8}$;

1) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $\cos x = \dfrac{9}{8}$ – не имеет решений;

Ответ: $\{\pi + 2\pi n/n \in Z\}$.

167.

а) $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = t$; $3t^2 - 2t - 1 = 0$; $t = -1$, $t = \dfrac{1}{3}$;

1) $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{3}$; $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

Ответ: $\{-\dfrac{\pi}{4} + \pi n/n \in Z;\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n/n \in Z\}$.

б) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$; $\operatorname{tg} x \neq 0$; $\operatorname{tg} x = t$;

$t^2 + t - 2 = 0$; $t = -2$, $t = 1$;

1) $\mathrm{tg}x = -2$, $x = \mathrm{arctg}(-2) + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\{ \mathrm{arctg}(-2) + \pi n / n \in Z;\ \dfrac{\pi}{4} + \pi k / k \in Z\}$.

168.

а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; $2\cos x\left(\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;

$\cos x = 0$ или $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

1) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k / k \in Z;\quad \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k / k \in Z\right\}$.

б) $4\cos^2 x - 3 = 0$; $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$;

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ либо $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

1) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

Общая запись: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n / n \in Z\right\}$.

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x = 0$; $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x - \sqrt{3}) = 0$; $\mathrm{tg}x = 0$ либо $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$;

1) $\mathrm{tg}x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\{\pi k / k \in Z;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k / k \in Z\}$.

г) $4\sin^2 x - 1 = 0$; $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$ либо $\sin x = \frac{1}{2}$;

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

Общая формула: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

Ответ: $\{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n / n \in Z\}$.

169.

а) $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$; $3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 2 = 0$; $\mathrm{tg}x = t$;

$3t^2 + t - 2 = 0$; $t = -1$; $t = \frac{2}{3}$;

1) $\mathrm{tg}x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $t = \frac{2}{3}$, $x = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z;\quad \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n / n \in Z\right\}$.

б) $2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$;
$\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x + 2 = 0$; $\mathrm{tg}x = t$;
$t^2 - 3t + 2 = 0$; $t = 1$, $t = 2$;

1) $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = 2$, $x = \mathrm{arctg}2 + \pi n,\ n \in Z$;

Ответ: $\{\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z;\ \mathrm{arctg}2 + \pi n / n \in Z\}$.

в) $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
$2\mathrm{tg}^2 x - 9\mathrm{tg}x + 7 = 0$; $\mathrm{tg}x = t$;
$2t^2 - 9t + 7 = 0$; $t = 3{,}5$; $t = 1$;

1) $\mathrm{tg}x = 3{,}5$, $x = \mathrm{arctg}\frac{7}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

Ответ: $\left\{\mathrm{arctg}\frac{7}{2} + \pi n / n \in Z;\quad \frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z\right\}$.

г) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = \cos^2 x$; $2\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 1 = 0$; $\mathrm{tg}x = t$;

$2t^2 - t - 1 = 0$; $t = 1$, $t = -\frac{1}{2}$;

1) $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{2}$, $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k / k \in Z;\quad \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n / n \in Z\right\}$.

170.

а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$;
$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
$\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$;

1) $\mathrm{tg}x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = -3$, $x = \mathrm{arctg}3 + \pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z;\quad \mathrm{arctg}3 + \pi k / k \in Z\right\}$.

б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$; $1 + \cos 2x - 2\cos x = 0$;
$\cos x(\cos x - 1) = 0$; $\cos x = 0$ или $\cos x = 1$;

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k / k \in Z;\quad 2\pi n / n \in Z\right\}$.

в) $\sin 2x - \cos x = 0$; $2\sin x\cos x - \cos x = 0$;

$2\cos x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$;

$\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$;

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n / n \in Z;\quad 2\pi n / n \in Z\right\}$.

г) $\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$; $2\sin x\cos x + 4\cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$;
$\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0$;
Аналогично пункту а).

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z; \quad (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k / k \in Z\right\}$.

171.

а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; $2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

$2\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x - \sqrt{3}) = 0$; $\mathrm{tg}x = 0$ или $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$;

1) $\mathrm{tg}x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\{\pi n/n \in Z;\ \frac{\pi}{3} + \pi n/n \in Z\}$.

б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x = 2$; $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - \sqrt{3} = 0$, $\mathrm{tg}x = t$;

$\sqrt{3}\,t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0$, $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \sqrt{3}$;

1) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + \pi k / k \in Z; \quad \frac{\pi}{3} + \pi k / k \in Z\right\}$.

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k / k \in Z\right\}$.

г) $\mathrm{tg}x = 3\mathrm{ctg}x$; $\mathrm{tg}^2 x = 3$; $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$ либо $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$;

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi n / n \in Z\right\}$.

172.

а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; $2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$;
$3\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 1 = 0$;

1) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{3}$, $x = \mathrm{arctg}(-\frac{1}{3}) + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

Ответ: $\left\{\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n / n \in Z;\quad \frac{\pi}{4} + \pi k / k \in Z\right\}$.

б) $\sin^4\frac{x}{4} - \cos^4\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; $\left(\sin^2\frac{x}{4} - \cos^2\frac{x}{4}\right)\left(\sin^2\frac{x}{4} + \cos^2\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$;

Ответ: $\{\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi k / k \in Z\}$.

в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$; $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
$\mathrm{tg}^2 x - 6\mathrm{tg}x + 1 = 0$;
$\mathrm{tg}x = 3 - 2\sqrt{2}$ или $\mathrm{tg}x = 3 + 2\sqrt{2}$;
1) $\mathrm{tg}x = 3 - 2\sqrt{2}$, $x = \mathrm{arctg}(3 - 2\sqrt{2}) + \pi n,\ n \in Z$;
2) $\mathrm{tg}x = 3 + 2\sqrt{2}$, $x = \mathrm{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) + \pi k,\ k \in Z$;
Ответ: $\{\mathrm{arctg}(3 - 2\sqrt{2}) + \pi n/n \in Z;\ \mathrm{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) + \pi k/k \in Z\}$.

г) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; $2\sin\frac{x}{2}(2\sin\frac{x}{2} - 1) = 0$;

$\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\sin\frac{x}{2} = 1$;

1) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \pi n$, $x = 2\pi n,\ n \in Z$;

2) $\sin\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pi + 4\pi k,\ k \in Z$;

Ответ: $\{2\pi n/n \in Z;\quad \pi + 4\pi k/k \in Z\}$.

173.

а) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; $2\sin 2x\cos 2x + \sin^2 2x = 0$;
$\mathrm{tg}2x(2 + \mathrm{tg}2x) = 0$; $\mathrm{tg}2x = 0$ либо $\mathrm{tg}2x = -2$;

1) $\mathrm{tg}2x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}2x = -2$, $2x = \mathrm{arctg}(-2) + \pi k$, $x = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$;

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}n / n \in Z;\quad -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \frac{\pi}{2}k / k \in Z\right\}$.

б) $\frac{3}{5\mathrm{tg}x+8}=1$; 5tg$x$ + 8 = 3, $\mathrm{tg}\,x \neq -\frac{8}{5}$; tg$x$ = –1, $\mathrm{tg}x \neq -\frac{8}{5}$;

$\mathrm{tg}x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\{-\frac{\pi}{4} + \pi n / n \in Z\}$.

в) $\frac{5}{3\sin x+4} = 2$; 6sin$x$ + 8 = 5; $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k / k \in Z\}$.

г) $1 - \sin 2x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$; $1 - \sin 2x = 1 - \sin x$;

$2\sin x(\frac{1}{2} - \cos x) = 0$; $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$;

1) $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$;

2) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\{\pi k / k \in Z; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k / k \in Z\}$.

174.

а) $\cos 5x - \cos 3x = 0$; $-\sin x \sin 4x = 0$; $\sin x = 0$ либо $\sin 4x = 0$;

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin 4x = 0$, $4x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4}k$, $k \in Z$;

Ответ: $\{\frac{\pi}{4}k / k \in Z\}$.

б) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$; $2\cos 4x(\sin 3x - \frac{1}{2}) = 0$;

$\cos 4x = 0$ либо $\sin 3x = \frac{1}{2}$;

1) $\cos 4x = 0$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$, $k \in Z$;

2) $\sin 3x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k / k \in Z;\quad (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k / k \in Z\right\}$.

в)$\sin 5x - \sin x = 0$; $2\sin 2x\cos 3x = 0$; $\sin 2x = 0$ либо $\cos 3x = 0$;

1) $\sin 2x = 0$, $2x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in Z$;

2) $\cos 3x = 0$, $3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k$, $k \in Z$;

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}k \,/\, k \in Z;\quad \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k \,/\, k \in Z\right\}$.

г) $\cos 3x + \cos x = 4\cos 2x$; $2\cos 2x(\cos x - 2) = 0$; $\cos 2x = 0$;

$2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k \,/\, k \in Z\right\}$.

175.

а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi - y, \\ \cos x - \cos(\pi - x) = 1; \end{cases}$

$\cos x - \cos(\pi - x) = 1$; $2\cos x = 1$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$$\left[\begin{array}{l} y = \pi + \dfrac{\pi}{3} - 2\pi n = \dfrac{4\pi}{3} - 2\pi n, \quad n \in Z; \\ y = \pi - \dfrac{\pi}{3} - 2\pi n = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi n, \quad n \in Z; \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{4\pi}{3} - 2\pi n\right);\ \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi n\right) / n \in Z\right\}$.

б) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + y, \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right) + \sin^2 y = 2; \end{cases}$

$\cos^2(\dfrac{\pi}{2} + y) + \sin^2 y = 2$; $2\sin^2 y = 2$; $\sin^2 y = 1$;

$\sin y = -1$ либо $\sin y = 1$;

$y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ либо $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

если $y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n + \dfrac{\pi}{2} = 2\pi n$, $n \in Z$;

если $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k + \dfrac{\pi}{2} = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;

Ответ: $\{(2\pi n; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n);\ (\pi + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k)/n, k \in Z\}$.

в) $\begin{cases} x+y=\pi, \\ \sin x+\sin y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\pi-x, \\ \sin x+\sin(\pi-x)=1; \end{cases}$

$\sin x + \sin(\pi - x) = 1$; $2\sin x = 1$; $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$;

$y = \pi - (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \pi(n-1)$, $n \in Z$;, $n \in Z$;

Ответ: $\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \pi(n-1)/n \in Z\}$.

г) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x-\sin^2 y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{\pi}{2}-x, \\ \sin^2 x-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1; \end{cases}$

$\sin^2 x - \sin^2(\frac{\pi}{2} - x) = 1$; $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$; $-\cos 2x =1$;

$2x = \pi + 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi n = -\pi n$, $n \in Z$; $n \in Z$;

Ответ: $\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; -\pi n/n \in Z\}$.

176.

а) $\begin{cases} \sin x-\cos y=0, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=\cos y \\ \sin^2 x+\sin^2 x=2; \end{cases}$

$2\sin^2 x = 2$; $\sin^2 x = 1$; $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$,

либо $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$,

если $\sin x = 1$, то $\cos y = 1$, $y = 2\pi k$, $k \in Z$;

если $\sin x = -1$, то $\cos y = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

Ответ: $\{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k); (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi n)/n,k \in Z\}$.

б) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=\frac{1}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{\pi}{4}-x, \\ \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{6}; \end{cases}$

$\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{6}$; $\mathrm{tg}x\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}x}=\frac{1}{6}$;

$6\mathrm{tg}^2x-5\mathrm{tg}x+1=0$; $\mathrm{tg}x=t$; $6t^2-5t+1=0$; $t=\frac{1}{3}$ или $t=\frac{1}{2}$;

1) $t=\frac{1}{3}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$ и $y=\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}-\pi n,\ n\in Z$;

2) $t=\frac{1}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z$ и $y=\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}-\pi k,\ k\in Z$;

Ответ: $\left\{\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right);\right.$

$\left.\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}-\pi k\right)/\ n,k\in Z\right\}$.

в) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \sin^2 x-\cos^2 y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ (\sin x+\cos y)(\sin x-\cos y)=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \sin x-\cos y=1;\end{cases}$

$2\sin x=2$, $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$2\cos y=0$, $\cos y=0$, $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n;\right)/\ n,k\in Z\right\}$.

г) $\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{6},\\ \sin x\cos y=\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=y+\frac{\pi}{6},\\ 2\sin x\cos y=1;\end{cases}$

$2\sin(y+\frac{\pi}{6})\cos y=1$; $2(\sin y\cos\frac{\pi}{6}+\cos y\sin\frac{\pi}{6})\cos y=1$;

$\sqrt{3}\sin y\cos y+\cos^2 y=\cos^2 y+\sin^2 y$; $\mathrm{ctg}y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\sin y=0$;

$y=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$ либо $y=\pi n,\ n\in Z$;

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ или $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k;\right);\ \left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pi n;\right)/\ n,k\in Z\right\}$.

ГЛАВА II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ

12. Приращение функции

177.

а) Если $a = 15$ м – длина меньшей из сторон прямоугольника, $b = 20$ м – длина большей из сторон прямоугольника, тогда имеем:

1) $\Delta P = 2((a + \Delta a) + b) - 2(a + b) = 2\Delta a = 2\cdot 0{,}11 = 0{,}22$ м,

$\Delta S = (a + \Delta a)b - ab = \Delta a\cdot b = 0{,}11\cdot 20 = 2{,}2$ м^2;

2) $\Delta P = 2(a + (b + \Delta b)) - 2(a + b) = 2\Delta b = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$ м,

$\Delta S = a(b + \Delta b) - ab = a\Delta b = 15\cdot 0{,}2 = 3$ м^2;

б) $\Delta S = \pi(2 + 0{,}2)^2 - \pi\cdot 2^2 = 0{,}84\pi$ см$^2 \approx 2{,}6$ см^2,

$\Delta S = \pi(2 + \Delta R)^2 - \pi\cdot 2^2 = (4\Delta R + (\Delta R)^2)\pi = 4\pi\Delta R + \pi\,(\Delta R)^2$;

$\Delta S = \pi(2 + 0{,}1)^2 - \pi\cdot 2^2 = 0{,}41\pi$ см$^2 \approx 1{,}29$ см^2,

$\Delta S = \pi(2 + h)^2 - \pi\cdot 2^2 = 2\pi h + \pi h^2$;

178.

а) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{19}$; б) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -2{,}32$;

в) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0{,}03$; г) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0{,}205$.

179.

а) $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$;

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}\right) - \cos\dfrac{22\pi}{3} = \dfrac{1}{4}$;

б) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}6 - 2{,}5 = 0{,}1$;

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = -\dfrac{2}{5}$;

в) $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$;

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1$;

г) $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{1}{8}$; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \dfrac{1}{10}$.

180.

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - 1 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 = -6x_0\cdot\Delta x - 3(\Delta x)^2$;

б) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x) + b - ax_0 - b = a\Delta x$;

в) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = 4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$;

г) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.

181.

Средняя скорость равна:

а) $V_{ср} = \dfrac{S(3) - S(0)}{\Delta t} = 50\dfrac{км}{ч}$; б) $V_{ср} = \dfrac{S(5) - S(3)}{\Delta t} = 65\dfrac{км}{ч}$;

в) $V_{ср} = \dfrac{S(5{,}25) - S(3{,}25)}{\Delta t} = 65\dfrac{км}{ч}$; г) $V_{ср} = \dfrac{S(8) - S(0)}{\Delta t} = 57{,}5\dfrac{км}{ч}$;

182.

а) $\Delta x = x(2{,}5) - x(2) = 3{,}75$ – перемещение в положительном направлении оси OX;

Средняя скорость $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{3{,}75}{2{,}5 - 2} = 7{,}5$;

б) $\Delta x = x(8) - x(7) = -3$ – перемещение в отрицательном направлении оси OX;

Средняя скорость $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -3$;

в) $\Delta x = x(5) - x(4) = 3 + 12 \cdot 5 - 5^2 - 3 - 12 \cdot 4 + 4^2 = 3$ – перемещение в положительном направлении оси OX;

Средняя скорость $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 3$;

г) $\Delta x = x(8) - x(6) = 3 + 12 \cdot 8 - 8^2 - 3 - 12 \cdot 6 + 6^2 = -4$ – перемещение в отрицательном направлении оси OX;

Средняя скорость $V_{ср} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -2$.

183.

а) $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$,

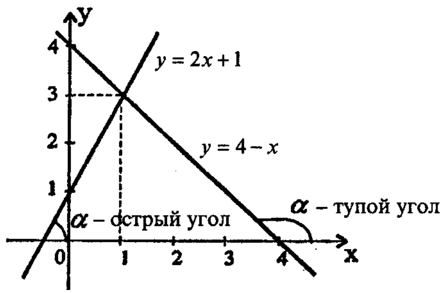
$y = y_0 + \mathrm{tg}\alpha(x - x_0)$;

Тогда т.(x_0,y_0) и т.$(x,y,)$ задают единственную прямую.

$y = 3 + \mathrm{tg}\alpha(x - 1)$;

$\mathrm{tg}\alpha = -1$, $x = 0$: $y = 3 + 1 = 4$;

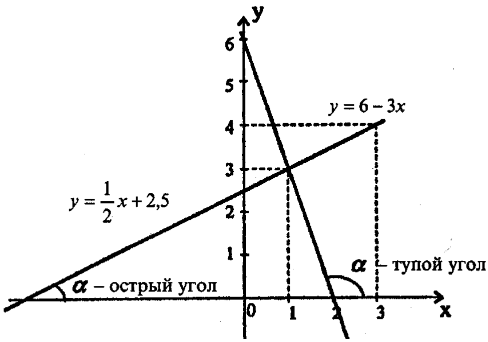
$\mathrm{tg}\alpha = 2$, $x = 0$: $y = 3 - 2 = 1$;



б) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $x = 3$:

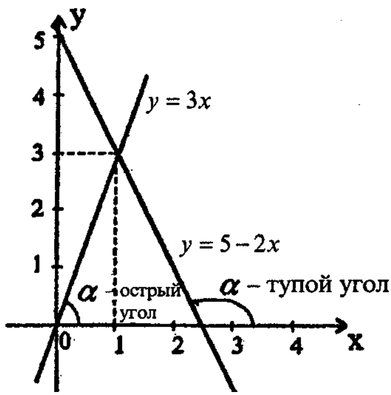
$y = 3 + \frac{1}{2}(3 - 1) = 3 + 1 = 4$;

$\mathrm{tg}\alpha = -3$, $x = 0$: $y = 3 + 3 = 6$;



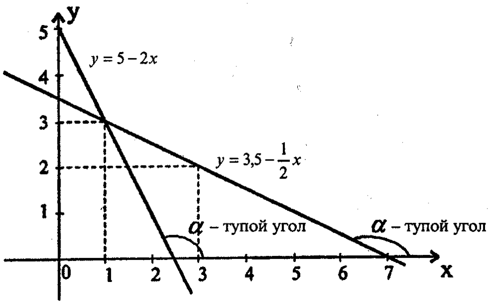
в) $\mathrm{tg}\alpha = 3$, $x = 0$: $y = 3 - 3 = 0$;

$\mathrm{tg}\alpha = -2$, $x = 0$: $y = 3 + 2 = 5$;



г) $\text{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $x = 3$: $y = 3 - 1 = 2$;

$\text{tg}\alpha = -2$, $x = 0$: $y = 3 + 2 = 5$;



184.

а) $k = \text{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{2} > 0$ – острый угол;

б) $k = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{3}{2} < 0$ – тупой угол;

в) $k = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{3}{2} > 0$ – острый угол;

г) $k = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{1}{2} < 0$ – тупой угол;

185.

$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = 12x \cdot \Delta x + 6(\Delta x)^2 = 6\Delta x(2x + \Delta x)$.

186.

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$
$= -x_0^3 - 3x_0^2 \cdot \Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 3x_0 + 3\Delta x + x_0^3 - 3x_0 =$
$= -3x_0^2 \cdot \Delta x - 3x_0(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 3\Delta x$;

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3(1 - x_0^2) - 3x_0\Delta x - (\Delta x)^2$;

б) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{(x_0 + \Delta x)^2 - 1} - \dfrac{1}{x_0^2 - 1} =$

$= \dfrac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)}$;

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{((x_0 + \Delta x)^2 - 1)(x_0^2 - 1)}$;

в) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2\Delta x=$
$=\Delta x(3x_0^2-2)+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3;$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2-2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2;$

г) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$

$$=\frac{x_0^2+1-(x_0+\Delta x)^2-1}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{2x_0+\Delta x}{((x_0+\Delta x)^2+1)(x_0^2+1)}.$$

187.

а) $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=V_0(t_0+\Delta t)-\frac{g}{2}(t_0+\Delta t)^2-V_0t_0+\frac{g}{2}t_0^2=$

$=V_0\Delta t-gt_0\Delta t-\frac{g}{2}(\Delta t)^2;$

Имеем: $V_{\text{ср}}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=V_0-gt_0-\frac{g}{2}\Delta t;$

б) $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=-a(t_0+\Delta t)+b-at_0-b=-a\Delta t;$

Имеем: $V_{\text{ср}}=-\frac{a\Delta t}{\Delta t}=-a;$

в) $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\frac{g}{2}(t_0+\Delta t)^2-\frac{g}{2}t_0^2=gt_0\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2;$

Имеем: $V_{\text{ср}}=\frac{gt_0\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{g}{2}\Delta t;$

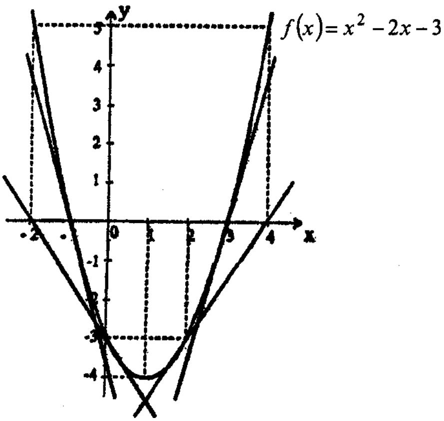
г) $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=a(t_0+\Delta t)-b-at_0+b=a\Delta t;$

Имеем: $V_{\text{ср}}=\frac{a\Delta t}{\Delta t}=a.$

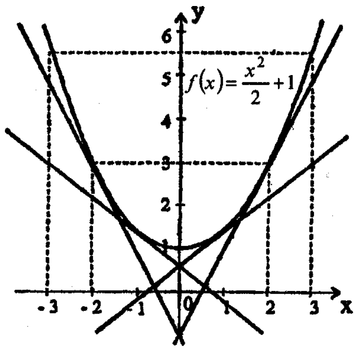
13. Понятие о производной

188.

а) Угловой коэффициент касательной к $f(x)=x^2-2x-3$ в точке $x_0=0$; k = –1 – отрицательный; в т.$x_0=3$; k = 2 – положительный.



б) Угловой коэффициент касательной к $f(x) = \dfrac{x^2}{2}+1$ в точке $x_0 = -2$;k=–1 – отрицательный; в т.$x_0 = 1$; k=2 – положительный.



189.

Пусть k – коэффициент; α – угол с OX:

а) $k(x_1) < 0$, $\alpha(x_1)$ – тупой;
$k(x_4) > 0$, $\alpha(x_4)$ – острый;
в т. x_2 и x_3 касательной не существует;
б) $k(x_1)$, $k(x_2)$, $k(x_3)$, $k(x_4) > 0$;
$\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$, $\alpha(x_4)$ – острые;
в) $k(x_1) < 0$, $\alpha(x_1)$ – тупой;
$k(x_3)$, $k(x_4) > 0$; $\alpha(x_3)$, $\alpha(x_4)$ – острые;
в т. x_2 касательной не существует;
г) $k(x_1)$, $k(x_2)$, $k(x_3)$, $k(x_4) < 0$;
$\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\alpha(x_3)$, $\alpha(x_4)$ – тупые углы.

190.

Функция возрастает на $[a;b]$, $[c,d]$; функция убывает на $[b;c]$, $[d;e]$; $k(b) = 0$, $k(x_2) < 0$, $k(c) = 0$, $k(x_3) > 0$, $k(d) = 0$, $k(x_1) > 0$, $k(x_4) < 0$.

191.

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 =$
$= 2\Delta x(2x_0 + \Delta x)$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x)$;

если $x_0 = 1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + \Delta x)$;

при $\Delta x = 0{,}5$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0{,}5) = 5$;

при $\Delta x = 0{,}1$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0{,}1) = 4{,}2$;

при $\Delta x = 0{,}01$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2(2 + 0{,}01) = 4{,}02$;

б) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 =$
$= \Delta x(2x_0 + \Delta x)$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

если $x_0 = 1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2 + \Delta x$; если $\Delta x = 0{,}5$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{5}{2}$;

если $\Delta x = 0{,}1$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2{,}1$; если $\Delta x = 0{,}01$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2{,}01$;

192.

а) $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 8x_0$ при $\Delta x \to 0$; если $x_0 = 2$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 16$ при $\Delta x \to 0$;

если $x_0 = -1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -8$ при $\Delta x \to 0$;

б) $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$ при $\Delta x \to 0$; если $x_0 = 1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3$ при $\Delta x \to 0$;

если $x_0 = -21$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 1323$ при $\Delta x \to 0$;

в) $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0$ при $\Delta x \to 0$; если $x_0 = 4$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 12$ при $\Delta x \to 0$;

если $x_0 = 1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3$ при $\Delta x \to 0$;

г) $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -2x_0$ при $\Delta x \to 0$;

если $x_0 = 1$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -2$ при $\Delta x \to 0$;

если $x_0 = 2$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -4$ при $\Delta x \to 0$;

193.

а) $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; $f'(x_0) = 3{x_0}^2$;

$f'(2) = 3\cdot 4 = 12$, $f'(-1{,}5) = 3\cdot 2{,}25 = 6{,}75$;

б) $f'(x) = (4-2x)' = -2$; $f'(x_0) = -2$; $f'(0{,}5) = f'(-3) = -2$;

в) $f'(x) = (3x-2)' = 3$; $f'(x_0) = 3$; $f'(5) = f'(-2) = 3$;

г) $f'(x) = (x^2)' = 2x$; $f'(x_0) = 2x_0$; $f'(2{,}5) = 2\cdot 2{,}5 = 5$, $f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2$;

194.

а) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0-\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x) - x_0^2 + 3x_0}{\Delta x} =$

$= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x - 3$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 2x_0 - 3$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x_0) = 2x_0 - 3$;

$f'(-1) = -2 - 3 = -5$; $f'(2) = 2\cdot 2 - 3 = 1$;

б) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2(x_0+\Delta x)^2 - 2x_0^3}{\Delta x} = \frac{6x_0^2\Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$

$= 6x_0^2 + 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 6{x_0}^2$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x_0) = 6{x_0}^2$; $f'(0) = 0$; $f'(1) = 6$;

в) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}\right) = -\frac{\Delta x}{\Delta x(x_0+\Delta x)x_0} = -\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -\frac{1}{x_0^2}$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$; $f'(-2) = -\frac{1}{4}$; $f'(1) = -1$;

г) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4 - (x_0+\Delta x)^2 - 4 + x_0^2}{\Delta x} = \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2x_0 - \Delta x$;

$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to -2x_0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x_0) = -2x_0$;

$f'(3) = -2\cdot 3 = -6$; $f'(0) = 0$;

195.

$k=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x;$

Используя то, что k=2x_0 и т. (x_0;x_0^2) принадлежит прямой, получим:

$x_0^2 = 2x_0\cdot x_0 + b = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2$;

$y = 2x_0\cdot x_0 - x_0^2$ – уравнение касательной к графику функции $y = x^2b$ в точке x_0;

а) $x_0 = -1$; $y = -2x - 1$;
б) $x_0 = 3$; $y = 2\cdot 3x - 3^2 = 6x - 9$;
в) $x_0 = 0$; $y = 2\cdot 0x - 0^2 = 0$;
г) $x_0 = 2$; $y = 2\cdot 2x - 2^2 = 4x - 4$;

196.

а) $V_{ср}(\Delta t)=\dfrac{-(t_0+\Delta t)^2+8(t_0+\Delta t)+t_0^2-8t_0}{\Delta t}=-2t_0-\Delta t+8$;

Имеем:

$V_{ср}\to -2t_0 + 8$ при $\Delta t\to 0$;

$V_{мгн}(t_0) = -2t_0 + 8$; $V_{мгн}(6) = -4$;

б) $V_{ср}(\Delta t)=\dfrac{3(t_0+\Delta t)^3+2-3t_0^3-2}{\Delta t}=-9t_0^2+9t_0\Delta t+3(\Delta t)^2$;

$V_{ср}\to -9t_0^2$ при $\Delta t\to 0$;

$V_{мгн}(t_0) = -9t_0^2$; $V_{мгн}(2) = 36$;

в) $V_{ср}(\Delta t)=\dfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\dfrac{(t_0+\Delta t)^2-t_0^2}{4\Delta t}=\dfrac{2t_0+\Delta t}{4}$;

$V_{ср}\to \dfrac{t_0}{2}$ при $\Delta t\to 0$;

$V_{мгн}(t_0)=\dfrac{t_0}{2}$; $V_{мгн}(4) = 2$;

г) $V_{ср}(\Delta t)=\dfrac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\dfrac{5(t_0+\Delta t)-3-5t_0+3}{\Delta t}=5$;

$V_{ср} = V_{мгн} = 5$ при любом значении t_0.

14. Понятие о непрерывности функции в предельном переходе

197.

а) непрерывна в т. x_1, x_2, x_3;

б) непрерывна в т. x_1 и x_3; в т. x_2 не является непрерывной;

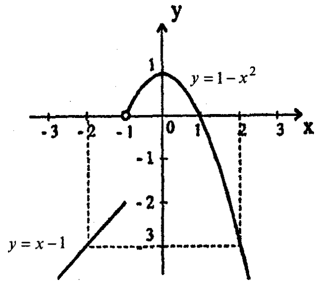
в) непрерывна в т. x_1, x_2; в т. x_3 не является непрерывной;

г) непрерывна в т. x_1, x_2, x_3;

198.

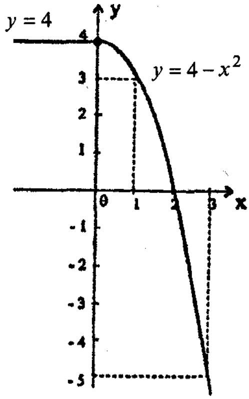
а) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le -1,\\ 1-x^2, & x>-1; \end{cases}$

Функция не является непрерывной в т. $x=-1$.



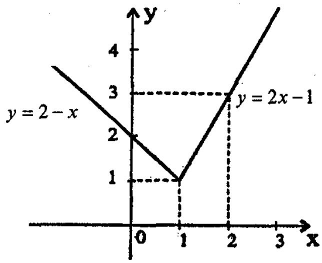
б) $f(x)=\begin{cases} 4, & x<0,\\ 4-x^2, & x\ge 0; \end{cases}$

Функция является непрерывной во всех точках области определения.



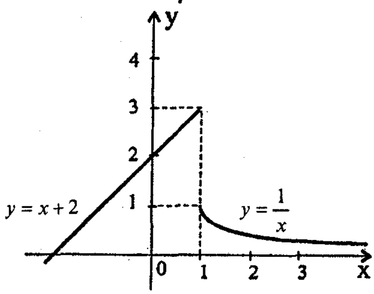
в) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le 1,\\ 2x-1, & x>0; \end{cases}$

Функция является непрерывной во всех точках области определения.



г) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1; \end{cases}$

Функция не является непрерывной в точке $x=1$.



199.

а) $f(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$;

Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $(-\infty; +\infty)$;

б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

Функция $f_1(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $(0; +\infty)$, а значит и на $[2;+\infty)$; функция $f_2(x) = x - 1$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$, а значит и на $[2;+\infty)$.

$f_2(x) = 0$ при $x = 1 \notin [2;+\infty)$, следовательно,

$f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ непрерывна на $[2;+\infty)$;

в) $f(x) = x^2 + 2x - 1$,

функция $f_1(x) = x^2 = x \cdot x$ является непрерывной на R, а следовательно, и на $[-10;20]$; функция $f_2(x) = 2x - 1$ непрерывна на R, следовательно, и на $[-10;20]$, а следовательно, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ непрерывна на $[-10;20]$;

г) $f(x) = 5x - \sqrt{x}$;

функция $f_1(x) = 5x$ непрерывна на R, а значит и на R^+;

функция $f_2(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на R^+, а значит, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ непрерывна на R^+.

200.

а) $f(x) = x^2 - 3x + 4 = f_1(x) + f_2(x)$,

где $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 4 - 3x$ – функции непрерывные;

если $x \to 0$, то $f_1(x) = x^2 \to 0$ и $f_2(x) = 4 - 3x \to 4$, тогда $f(x) \to 4$;

если $x \to 2$, то $f_1(x) \to 4$ и $f_2(x) \to -2$, тогда $f(x) \to 2$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ – функции непрерывные при $x \in R$;

если $x \to 1$, то $f_1(x) \to 1$ и $f_2(x) \to \dfrac{1}{2}$, то $f(x) \to \dfrac{1}{2}$;

если $x \to 4$, то $f_1(x) \to 4$ и $f_2(x) \to \dfrac{1}{17}$, то $f(x) \to \dfrac{4}{17}$;

в) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{2}$ – функция, непрерывная при $x \in R$;

если $x \to -2$, то $f(x) \to 5$; если $x \to 0$, то $f(x) \to 4$;

г) $f(x) = 4x - \dfrac{x^2}{4} = f_1(x) \cdot f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 4 - \dfrac{x}{4}$ – функции непрерывные при $x \in R$;

если $x \to -1$, то $f_1(x) \to -1$ и $f_2(x) \to 4{,}25$, тогда $f(x) \to -4{,}25$;
если $x \to 4$, то $f_1(x) \to 4$ и $f_2(x) \to 3$, тогда $f(x) \to 12$;

201.

а) $3f(x)g(x) \to 3\cdot1\cdot(-2) = -6$;

б) $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)} \to \dfrac{1-(-2)}{1-2} = -3$;

в) $4f(x) - g(x) \to 4\cdot1\cdot - (-2) = 6$;

г) $(3 - g(x))f(x) \to (3 - (-2))\cdot1 = 5$.

202.

а) $\dfrac{f(x)}{(g(x))^2} \to \dfrac{3}{(-0{,}5)^2} = 12$;

б) $(f(x) - g(x)^2 \to (3 - (-0{,}5))^2 = 12{,}25$;

в) $(f(x))^2 + 2g(x) \to 3^2 + 2(-0{,}5) = 8$;

г) $\dfrac{(g(x))^2}{f(x)-2} \to \dfrac{(-0{,}5)^2}{3-2} = 0{,}25$.

203.

а) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-3}$;

$f_1(x) = x^2 + 3x + 2$ при $x \to 4$ $\quad$ $f_1(x) \to 4^2 + 3\cdot4 + 2 = 30$;

$f_2(x) = x - 3$ при $x \to 4$ $\quad$ $f_2(x) \to 4 - 3 = 1$;

при $x \to 4$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \dfrac{30}{1} = 30$;

б) $f(x) = \dfrac{x^3-3x}{x^2-2x+7}$;

при $x \to -1$ $\quad$ $f_1(x) = x^3 - 3x \to (-1)^3 - 3(-1) = 2$;

при $x \to -1$ $\quad$ $f_2(x) = x^2 - 2x + 7 \to (-1)^2 - 2(-1) + 7 = 10$;

при $x \to -1$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$;

в) $f(x) = \dfrac{5-2x}{2+x}$;

при $x \to 2$ $\quad$ $f_1(x) = 5 - 2x \to 5 - 2\cdot2 = 1$;

при $x \to 2$ $\quad$ $f_2(x) = 2 + x \to 2 + 2 = 4$;

при $x \to 2$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \dfrac{1}{4}$;

г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x+3}$; $\dfrac{x^2 - 9}{x+3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = x - 3$,

т.е. функция $f(x)=\dfrac{x^2 - 9}{x+3}$ и $g(x)=x-3$ совпадают всюду, кроме $x=-3$;

при $x \to -1$ $g(x) = x - 3 \to -1 - 3 = -4$.

204.

Пусть H значение периметра квадрата, h – найденное значение периметра, A – значение стороны квадрата, a – измененное значение.

По условию:

$|A - a| \le 0{,}01$ дм; $|4A - 4a| \le 4\cdot 0{,}01$ дм; $|H - h| \le 0{,}04$ дм;

Значит, периметр найден с точностью до 0,04 дм.

205.

Используем те же обозначения, что и в задаче 204. Имеем:

$|H - h| \le 0{,}03$ дм; $|3A - 3a| \le 3\cdot 0{,}01$ дм; $|A - a| \le 0{,}01$ дм;

Сторону треугольника достаточно изменить с точностью до 0,01 дм.

206.

Пусть K – значение длины окружности, k – найденное значение длины окружности, R – точное значение радиуса, r – измеренное значение радиуса. Тогда:

$K = 2\pi R$, $k = 2\pi r$ дм; $|K - k| = |2\pi R - 2\pi r| \le 0{,}06$ дм;

$|R - r| \le \dfrac{0{,}03}{\pi}$ дм или $|R - r| \le 0{,}01$ дм.

Радиус необходимо измерить с точностью до 0,01 дм.

207.

а) При $x \to a$ $C \to C$, т.к. функция $f_1 = C$ непрерывна при каждом x;

$f(x) \to A$ при $x \to a$ по условию задачи, тогда

при $x \to a$ $Cf(x) \to C\cdot A$;

б) $f(x) \to A$ при $x \to a$ по условию, $g(x) \to B$ при $x \to a$ по условию, тогда $-g(x) \to -B$ при $x \to a$ и $f(x) - g(x) \to A - B$ при $x \to a$;

в) $(f(x))^2 - (g(x))^2 = (f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$;

при $x \to a$ $f(x) - g(x) \to A - B$ и $f(x) + g(x) \to A + B$,

тогда при $x \to a$ $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \to (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

г) $(f(x))^n = f(x)\cdot(f(x))^{n-1} = \ldots = \underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)}_{n\text{ раз}}$;

при $x \to a$ $f(x) \to a$ по условию, тогда при $x \to a$

$(f(x))^n = \underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)}_{n\text{ раз}} = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ раз}} = A^n$, где $n \in Z$;

15. Правила вычисления производных

208.

а) $f'(x) = (x^2 + x^3)' = 2x + 3x^2$;

б) $f'(x) = (\frac{1}{x} + 5x - 2)' = -\frac{x'}{x^2} + 5 = -\frac{1}{x^2} + 5$;

в) $f'(x) = (x^2 + 3x - 1)' = 2x + 3$;

г) $f'(x) = (x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

209.

а) $f'(x) = (x^3)'(4 + 2x - x^2) + x^3(4 + 2x - x^2)' =$
$= 3x^2(4 + 2x - x^2) + x^3(2 - 2x) = -5x^4 + 8x^3 + 12x^2$;

б) $f'(x) = (\sqrt{x})'(2x^2 - x) + \sqrt{x}(2x^2 - x)' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2 - x) + \sqrt{x}(4x - 1) = 5x\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$;

в) $f'(x) = (x^2)'(3x + x^3) + x^2(3x + x^3)' =$
$= 2x(3x + x^3) + x^2(3 + 3x^2) = 9x^2 + 5x^4$;

г) $f'(x) = (2x - 3)'(1 - x^3) + (2x - 3)(1 - x^3)' =$
$= 2(1 - x^3) - 3x^2(2x - 3) = -8x^3 + 9x^2 + 2$.

210.

а) $y'(x) = \frac{(1+2x)'(3-5x) - (1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} =$

$= \frac{2(3-5x) + 5(1+2x)}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}$;

б) $y'(x) = \frac{(x^2)'(2x-1) - x^2(2x-1)'}{(2x-1)^2} =$

$= \frac{2x(2x-1) - x^2\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$;

в) $y'(x) = \frac{(3x-2)'(5x+8) - (3x-2)(5x+8)'}{(5x+8)^2} =$

$$=\frac{3(5x+8)-5(3x-2)}{(5x+8)^2}=\frac{34}{(5x+8)^2};$$

г) $y'(x)=\dfrac{(3-4x)'\cdot x^2-(3-4x)(x^2)'}{(x^2)^2}=$

$$=\frac{-4x^2-2x(3-4x)}{x^4}=\frac{4x^2-6x}{x^3}.$$

211.

а) $y'(x)=(x^8)'-3(x^4)'-x'+5'=8x^7-12x^3-1;$

б) $y'(x)=\dfrac{1}{3}(x)'-4\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=$

$$=\frac{1}{3}+8x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

в) $y'(x)=(x^7)'-4(x^5)'+2x'-1'=7x^6-20x^4+2;$

г) $y'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2\right)'+3\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'+1'=\dfrac{1}{2}\cdot 2x-3\cdot 3x^{-4}=x-\dfrac{9}{x^4}.$

212.

а) $f'(x)=(x^2)'-3x'=2x-3;$

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4;$

$f'(2)=1;$

б) $f'(x)=x'-4\left(\sqrt{x}\right)'=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}};$

$f'(0{,}01)=1-\dfrac{2}{\sqrt{0{,}01}}=-19;$

$f'(4)=1-\dfrac{2}{2}=0;$

в) $f'(x)=x'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2};\ f'\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{3}{2};$

$f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1+\left(-\sqrt{3}\right)^2=4;$

г) $f'(x)=\dfrac{(3-x)'(2+x)-(3-x)(2+x)'}{(2+x)^2}=-\dfrac{5}{(2+x)^2};$

$f'(-3) = -5; f'(0) = -\frac{5}{4}$.

213.

а) $f'(x) = 2(x^2)' - x' = 4x - 1$;
$4x - 1 = 0$;
$x = 0{,}25$;
$f'(x) = 0$ при $x = 0{,}25$;

б) $f'(x) = -\frac{2}{3}(x^3)' + (x^2)' + 12' = -2x^2 + 2x$;
$-2x^2 + 2x = 0$;
$x(1 - x) = 0$;
$x = 0$ или $x = 1$;
$f'(x) = 0$ при $x = 0; 1$;

в) $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - 1{,}5(x^2)' - 4x' = x^2 - 3x - 4$;
$x^2 - 3x - 4 = 0$;
$x = -1$ либо $x = 4$;
$f'(x) = 0$ при $x = -1$; $x = 4$;

г) $f'(x) = 2x' - 5(x^2)' = 2 - 10x$;
$2 - 10x = 0$; $x = 0{,}2$;
$f'(x) = 0$ при $x = 0{,}2$.

214.

а) $f'(x) = 4x' - 3(x^2)' = 4 - 6x$;
$f'(x) < 0$: $4 - 6x < 0$;
$x > \frac{2}{3}$;

б) $f'(x) = (x^3)' + 1{,}5(x^2)' = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$;
$f'(x) < 0$: $3x(x + 1) < 0$; $x \in (-1; 0)$;

в) $f'(x) = (x^2)' - 5x' = 2x - 5$;
$f'(x) < 0$: $2x - 5 < 0$; $x \in (-\infty; 2{,}5)$;

г) $f'(x) = 4x' - \frac{1}{3}(x^3)' = 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$;
$f'(x) < 0$: $(2 - x)(2 + x) < 0$;
$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

215.

а) $f'(x) = \frac{(x^3 - 3x)'(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x)(1 + 4x^5)'}{(1 + 4x^5)^2} =$

$$=\frac{(3x^2-3)(1+4x^5)-(x^3-3x)\cdot 20x^4}{(1+4x^5)^2}=\frac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{(1+4x^5)^2};$$

б) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}+x^2\right)'\left(2-\sqrt{x}\right)+\left(\frac{3}{x}+x^2\right)\left(2-\sqrt{x}\right)'=$

$$=\left(-\frac{3}{x^2}+2x\right)\left(2-\sqrt{x}\right)+\left(\frac{3}{x}+x^2\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=-\frac{6}{x^2}+4x+\frac{3}{x\sqrt{x}}-2x\sqrt{x}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{2}=$$

$$=-\frac{6}{x^2}+4x+\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{5x\sqrt{x}}{2};$$

в) $f'(x)=\frac{(5-2x^6)'(1-x^3)-(5-2x^6)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}=$

$$=\frac{-12x^5(1-x^3)+3x^2(5-2x^6)}{(1-x^3)^2}=\frac{-12x^5+6x^8+15x^2}{(1-x^3)^2};$$

г) $f'(x)=(\sqrt{x})'(3x^5-x)+\sqrt{x}\,(3x^5-x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^5-x)+\sqrt{x}\,(15x^4-1)=$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,(11x^4-1).$$

216.

а) $f'(x)=(x^5)'-3\frac{1}{3}(x^3)'+5x'=5x^4-10x^2+5=5(x-1)^2(x+1)^2$;

$f'(x)=0$: $5(x-1)^2(x+1)^2=0$; $x=-1$ либо $x=1$;

б) $f'(x)=2(x^4)'-(x^8)'=8x^3-8x^7=8x^3(1-x^2)(1+x^2)=$

$=8x^3(1-x)(1+x)(1+x^2)$;

$x=-1$ либо $x=0$ либо $x=1$;

в) $f'(x)=(x^4)'+4x'=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$;

$f'(x)=0$: $4(x+1)(x^2-x+1)=0$; $x=-1$;

г) $f'(x)=(x^4)'-12(x^2)'=4x^3-24x=4x(x^2-6)=4x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$;

$f'(x)=0$: $4x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$; $x=-\sqrt{6}$ либо $x=\sqrt{6}$;

217.

а) $f'(x)=(x^3)'-6(x^2)'-63x'=3x^2-12x-63=3(x^2-4x-21)$;

$f'(x)<0$: $x^2-4x-21<0$; $(x+3)(x-7)<0$; $x\in(-3;7)$;

б) $f'(x)=3x'-5(x^2)'+(x^3)'=3-10x+3x^2$;

$f'(x) < 0$: $3 - 10x + 3x^2 < 0$; $3(x - \frac{1}{3})(x - 3) < 0$; $x \in (\frac{1}{3}; 3)$;

в) $f'(x) = \frac{2}{3}(x^3)' - 8x' = 2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$;

$f'(x) < 0$: $(x - 2)(x + 2) < 0$;
$x \in (-2; 2)$;

г) $f'(x) = 3(x^2)' - 9x' - \frac{1}{3}(x^3)' = 6x - 9 - x^2$;

$f'(x) < 0$: $6x - 9 - x^2 < 0$; $x^2 - 6x + 9 > 0$;
$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

218.

а) $g(x) = x^2 + 3x + 10$; $g'(x) = (x^2)' + 3x' + 10' = 2x + 3$;
б) $f(x) = 4x^4 - 0{,}4x + 2$; $f'(x) = (4x^4)' - 0{,}4x' + 2' = 16x^3 - 0{,}4$;
в) $h(x) = 4x^2 - 2x$; $h'(x) = 4(x^2)' - 2x' = 8x - 2$;
г) $\varphi(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x + 1{,}5$; $\varphi'(x) = 3(x^3)' - \frac{1}{2}x' + 1{,}5' = 9x^2 - \frac{1}{2}$.

219.

а) Утверждение неверно. К примеру, пусть $f_1(x) = \frac{1}{x}$ и $f_2(x) = -\frac{1}{x}$.

Тогда $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_2'(x) = \frac{1}{x^2}$ – в т. $x_0 = 0$, очевидно, у каждой из функций производной не существует. Однако, $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ – имеет производную, равную 0, в любой т. $x_0 \to R$.

б) Пусть $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ имеет производную в т. x_0 и функция $f_1(x)$ также имеет производную в т. x_0, но функция $f_2(x)$ не имеет в этой точке производной. Обозначим $\varphi'(x_0) = a$, $f_1'(x_0) = b$.

Тогда $f_2'(x_0) = \varphi'(x_0) - f_1'(x_0) = a - b$, т.е. функция $f_2(x)$ имеет производную в т. x_0, что противоречит предположению, т.е. $\varphi(x)$ не имеет производной в точке x_0.

16. Производная сложной функции

220.

а) $h(x) = \cos 3x$; б) $h(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

$y = f(x) = 3x,\ \ g(y) = \cos y;$ $\quad$ $y = f(x) = 2x - \dfrac{\pi}{3},\ \ g(y) = \sin y;$

в) $h(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2};$ $\quad$ г) $h(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right);$

$y = f(x) = \dfrac{x}{2};\ \ g(y) = \operatorname{tg} y;$ $\quad$ $y = f(x) = 3x + \dfrac{\pi}{4};\ \ g(y) = \cos y.$

221.

а) $h(x) = (3 - 5x)^5;$ $\quad$ б) $h(x) = \sqrt{\cos x};$

$y = f(x) = 3 - 5x;\ \ g(y) = y^5;$ $\quad$ $y = f(x) = \cos x;\ \ g(y) = \sqrt{y};$

в) $h(x) = (2x + 1)^7;$ $\quad$ г) $h(x) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x};$

$y = f(x) = 2x + 1;\ \ g(y) = y^7;$ $\quad$ $y = f(x) = \dfrac{1}{x};\ \ g(y) = \operatorname{tg} y.$

222.

а) $y = \sqrt{9 - x^2};$

$y \geq 0$: $9 - x^2 \geq 0;$

$(x - 3)(x + 3) \leq 0;$ $-3 \leq x \leq 3;$

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}};$

$y > 0$: $x^2 - 7x + 12 > 0;$

$(x - 3)(x - 4) > 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x < 3; \\ x > 4; \end{array}\right.$$

в) $y = \sqrt{0{,}25 - x^2};$

$y \geq 0$: $0{,}25 - x^2 \geq 0;$

$(x - 0{,}5)(x + 0{,}5) \leq 0;$

$-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5;$

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x + 5 - x^2}};$

$y > 0$: $4x + 5 - x^2 > 0;$

$(x + 1)(x - 5) < 0;$

$-1 < x < 5.$

223.

а) $y = \sqrt{\cos x};$

$y \geq 0$: $\cos x \geq 0;$

$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z;$

б) $y = \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)};$

$y \neq 0$: $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0;$

$x \neq \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z;$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] / n \in Z\right\}$.

в) $y = \mathrm{tg}2x$;

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$;

г) $y = \sqrt{\sin x}$;

$y \geq 0$: $\sin x \geq 0$;

$2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

224.

а) $f'(x) = ((2x-7)^8)' = 8(2x-7)^{8-1}(2x-7)' = 16(2x-7)^7$;

б) $f'(x) = \left(\frac{1}{(5x+1)^3}\right)' = -3(5x+1)^{-3-1}(5x+1)' = -\frac{15}{(5x+1)^4}$;

в) $f'(x) = ((9x+5)^4)' = 4(9x+5)^{4-1}(9x+5)' = 36(9x+5)^3$;

г) $f'(x) = \left(\frac{1}{(6x-1)^5}\right)' = -5(6x-1)^{5-1}(6x-1)' = -\frac{30}{(6x-1)^6}$.

225.

а) $f'(x) = \left(\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-9}\right)' = -9\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-9-1}\left(3-\frac{x}{2}\right)' = \frac{9}{2\left(3-\frac{x}{2}\right)^{10}}$;

б) $f'(x) = \left(\left(\frac{1}{4}x-7\right)^8 - (1-2x)^4\right)' = 8\left(\frac{1}{4}x-7\right)^{8-1}\left(\frac{1}{4}x-7\right)' -$

$- 4(1-2x)^{4-1}\cdot(1-2x)' = 2\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7 + 8(1-2x)^3$;

в) $f'(x) = ((4-1{,}5x)^{10})' = 10(4-1{,}5x)^{10-1}(4-1{,}5x)' = -15(4-1{,}5x)^9$;

г) $f'(x) = ((5x-2)^{13} - (4x+7)^{-6})' = 13(5x-2)^{13-1}\cdot(5x-2)' +$

$+ 6(4x+7)^{-6-1}\cdot(4x+7)' = 65(5x-2)^{12} + \frac{24}{(4x+7)^7}$.

226.

а) $y = \sqrt{1-2\cos x}$;

$y \geq 0$: $1 - 2\cos x \geq 0$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$;

$$\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in Z;$$

б) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x^2} - 1}$;

$y \ge 0$: $\dfrac{4}{x^2} - 1 \ge 0$;

$$\begin{cases} x^2 - 4 \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+2) \le 0, \\ x \ne 0; \end{cases} \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x \ne 0; \end{cases} \Rightarrow x \in [-2;\, 0) \cup (0;\, 2];$$

в) $y = \sqrt{\sin x - 0{,}5}$;

$y \ge 0$: $\sin x - 0{,}5 \ge 0$; $\sin x \ge 0{,}5$;

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z;$$

г) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$;

$y \ge 0$: $\dfrac{1}{x} + 1 \ge 0$; $\dfrac{x+1}{x} \ge 0$;

$$\begin{cases} x(x+1) \ge 0; \\ x \ne 0; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1; \\ x \ge 0; \end{array}\right. \\ x \ne 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;\, -1] \cup (0;\, +\infty).$$

227.

а) $h(x) = f(g(x)) = 3 - 2x^2$;
б) $h(x) = g(p(x)) = \sin^2 x$;
в) $h(x) = g(f(x)) = (3 - 2x)^2$;
г) $h(x) = p(f(x)) = \sin(3 - 2x)$.

228.

а) $h(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$;

$\cos x - 1 \ne 0$;

$x \ne 2\pi k$, $k \in Z$;

$D(h) = R \backslash \{2\pi k / k \in Z\}$;

б) $h(x) = f(p(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$;

$$\begin{cases}\sqrt{x} \geq 0, & x \geq 0; \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0, & x \neq 1;\end{cases} \quad D(h) = [0;\ 1) \cup [1;\ +\infty);$$

в) $h(x) = p(f(x)) = \sqrt{\cos x}$;

$\cos x \geq 0$;

$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$D(h) = \left\{\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right] / \, n \in Z\right\}$;

г) $h(x) = p(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;

$x - 1 > 0$; $x > 1$;

$D(h) = (1;\ +\infty)$.

229.

а) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$, $g(x) = 2x$; $f(g(x)) = \dfrac{1}{2}(2x) = x$;

б) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$, где $x \geq 0$. $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$; $g(x) = 3x + 2$; $f(g(x)) = -\sqrt{x^2 + 1 - 1} = -|x| = x$

при $x \leq 0$.

230.

а) $f'(x) = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{17-1}(x^3 - 2x^2 + 3)' = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16}(3x^2 - 4x) =$
$= 17x(x^3 - 2x^2 + 3)^{16}(3x - 4)$;

б) $f'(x) = \left(\sqrt{1 - x^4}\right)' + \left(\dfrac{1}{x^2 + 3}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(1 - x^4\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1 - x^4\right) =$

$= (x^2 + 3)^{-2}(x^2 + 3)' = -\dfrac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \dfrac{2x}{(x^2 + 3)^2}$;

в) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(4x^2 + 5\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(4x^2 + 5\right)' = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$;

г) $f'(x) = 5(3 - x^3)^{5-1}(3 - x^3)' + \dfrac{1}{2}(2x - 7)^{\frac{1}{2}-1}(2x - 7)' =$

$= -15x^2(3 - x^3)^4 + \dfrac{1}{\sqrt{2x - 7}}$.

17. Производные тригонометрических функций

231.

а) $y'(x) = 2\cos x$; б) $y'(x) = -\frac{1}{2}\cos x$;

в) $y'(x) = -0{,}5\cos x$; г) $y'(x) = \frac{3}{2}\cos x$.

232.

а) $y'(x) = -3\sin x$; б) $y'(x) = 1 - 2\sin x$;

в) $y'(x) = \sin x$; г) $y'(x) = 2\cos x - \frac{3}{2}\sin x$.

233.

а) $y'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}$; б) $y'(x) = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y'(x) = \frac{1}{2\cos^2 x}$; г) $y'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \cos x$.

234.

а) $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x - \pi))' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 = \sin 2x$;

$f'(x) = f'(\pi) = 0$;

б) $f'(x) = x' + (\mathrm{tg}x)' = 1 + \frac{2}{\cos^2 2x}$;

$f'(0) = f'(\pi) = 1 + \frac{2}{1} = 3$;

в) $f'(x) = 3\left(\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -3\left(\cos\frac{x}{3}\right)' = -3\left(-\frac{1}{3}\right)\sin\frac{x}{3} = \sin\frac{x}{3}$;

$f'(0) = 0$; $f'(\pi) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $f'(x) = 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)' = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2}$;

$f'(0) = 0$; $f'(\pi) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.

235.

а) $f'(x)=\frac{1}{2}x'+(\cos x)'=\frac{1}{2}-\sin x$;

$f'(x)=0$: $\frac{1}{2}-\sin x=0$;

то $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$;

б) $f'(x)=x'-(\text{tg}x)'=1-\frac{1}{\cos^2 x}$;

$f'(x)=0$: $1-\frac{1}{\cos^2 x}=0$;

то $\cos x=-1$ либо $\cos x=1$;

$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$ либо $x=2\pi k,\ k\in Z$;

в) $f'(x)=2(\sin x)'-1'=2\cos x$;

$f'(x)=0$: $\cos x=0$;

то $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

г) $f'(x)=x'-(\cos x)'=1+\sin x$;

$f'(x)=0$: $1+\sin x=0$;

то $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

236.

а) $f'(x)=3x^2\sin 2x+2x^3\cos 2x$;

б) $f'(x)=4x^3+\frac{2}{\cos^2 2x}$;

в) $f'(x)=\frac{(\cos 3x)'\cdot x-\cos 3x\cdot x'}{x^2}=\frac{-3x\sin 3x-\cos 3x}{x^2}$;

г) $f'(x)=\frac{x'\sin x-x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$.

237.

а) $f'(x)=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$;

б) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{-4(\cos^2 x-\sin^2 x)}{(2\cos x\sin x)^2}=\frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}$;

в) $f'(x)=2\cos x\cdot(\cos x)'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$;

г) $f'(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)'=0$.

238.

а) $f'(x) = (\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x)' = 3\cos 3x$;

б) $f'(x) = \left(\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}\right)' = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$;

в) $f'(x) = (\sin 5x \sin 3x + \cos 5x \sin 3x)' = -2\sin 2x$;

г) $f'(x) = (\sin 3x \cos 3x)' = 3\cos 6x$.

239.

а) $f'(x) = 2(\sin^2 x)' - \sqrt{2}\,x' = 2\sin 2x - \sqrt{2}$;

$f'(x) = 0$: $2\sin 2x - \sqrt{2} = 0$;

$2x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$; $f'(x) > 0$: $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $f'(x) = 2x' + (\cos(4x - \pi))' = 2 - (\cos 4x)' = 2 + 4\sin 4x$;

$f'(x) = 0$: $2 + 4\sin 4x = 0$;

$4x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$; $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}k$, $k \in Z$;

$f'(x) > 0$: $\sin 4x > -\frac{1}{2}$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$;

в) $f'(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$; $f'(x) = 0$: $-2\sin 2x = 0$;

$2x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; $f'(x) > 0$: $-2\sin 2x > 0$;

$-\pi + 2\pi k < 2x < 2\pi k$; $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k$, $k \in Z$;

г) $f'(x) = (\sin 2x)' - \sqrt{3}\,x' = 2\cos 2x - \sqrt{3}$; $f'(x) = 0$: $2\cos 2x - \sqrt{3} = 0$;

$2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$; $f'(x) > 0$: $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

240.

а) $f(x) = x + \cos x + 5$; б) $f(x) = \sin 2x + 1$;

в) $f(x) = 20 - \sin x$; г) $f(x) = 2 - 3\cos x$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ

18. Применение непрерывности

241.

а) $f(x) = x^4 - x + 1$;

$f'(x) = 4x^3 - 1$, $D(f') = R$ – непрерывна на R, а значит и в т. $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1; \\ x^2 - x, & x > -1. \end{cases}$

$f'(x_1 = 0) = 2\cdot 0 - 1 = -1$ – дифференцируема в т. $x_1 = 0$ и, значит, непрерывна в этой точке.

$f(x_2 + \Delta x) \to 2$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta x \to 0$;

$f(x_2 + \Delta x) \to 2$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta x \to 0$,

поэтому в т. $x_2 = -1$ функция является непрерывной.

в) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0; \\ 5 - 2x, & x \ge 0. \end{cases}$

$f'(x) = -2\cdot(-1) = 2$ – функция непрерывна в т. $x_2 = -1$.

$f(x_1 + \Delta x) \to 5$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta x \to 0$;

$f(x_1 + \Delta x) \to 1$ при $\Delta x < 0$ и $\Delta x \to 0$,

значит, $f(x)$ в т. $x_1 = 0$ не является непрерывной.

г) $f(x) = 2x - x^2 + x^3$;

$f'(x) = 2 - 2x + 3x^2$, $D(f') = R$ – функция непрерывна при $x \in R$, а значит и в т. $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

242.

а) $f(x) = x^3 - 2x^2$;

$f'(x) = 3x^2 - 4x$, $D(f') = R$ – функция $f(x)$ непрерывна при $x \in R$;

б) $f(x) = \dfrac{x^3 + 27}{3x + x^2}$;

$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$;

т.е. $x \in (-\infty; -3)$, $x \in (-3; 0)$, $x \in (0; +\infty)$;

в) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$;

$f'(x) = 8x^3 - 6x$, $D(f') = R$ – функция $f(x)$ непрерывна при $x \in R$;

г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$;

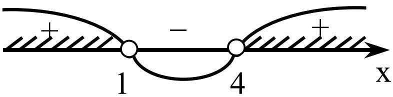
$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; т.е. $x \in (-\infty; 2)$, $x \in (2; +\infty)$.

243.

а) $f(x) = 1,4 - 10x^2 - x^3$ непрерывна на [0, 1] и $f(0) = 1,4 > 0$,
$f(1) = -9,6 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на [0; 1] корень;
$f(0,2) = 0,992 > 0$, $f(0,4) = -0,264 < 0$ – корень $x_0 \in [0,2; 0,4]$,
$x_0 \approx 0,3$ с точностью до 0,1;
б) $f(x) = 1 + 2x^2 - 100x^4$ непрерывна на [0, 1] и $f(0) = 1 > 0$,
$f(1) = -97 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на [0; 1] корень;
$f(0,3) = 0,37 > 0$, $f(0,5) = -4,75 < 0$ – корень $x_0 \in [0,3; 0,5]$,
$x_0 \approx 0,4$ с точностью до 0,1;
в) $f(x) = x^3 - 5x + 3$ непрерывна на [0, 1] и $f(0) = 3 > 0$,
$f(1) = -1 < 0$ – функция $f(x)$ имеет на [0; 1] корень;
$f(0,6) = 0,216 > 0$, $f(0,8) = -0,488 < 0$ – корень $x_0 \in [0,6; 0,8]$,
$x_0 \approx 0,7$ с точностью до 0,1;
г) $f(x) = x^4 + 2x - 0,5$ непрерывна на [0, 1] и $f(0) = -0,5 < 0$,
$f(1) = 2,5 > 0$ – функция $f(x)$ имеет на [0; 1] корень;
$f(0,2) = -0,0984 < 0$, $f(0,4) = 0,3256 > 0$ – корень $x_0 \in [0,2; 0,4]$,
$x_0 \approx 0,3$ с точностью до 0,1.

244.

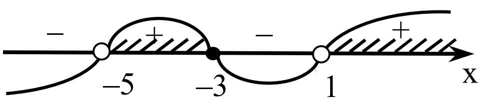
а) $x^2 - 5x + 4 > 0$;
$(x - 4)(x - 1) > 0$;



Ответ: $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

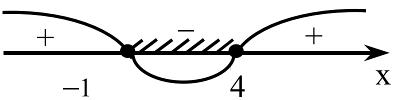
б) $\dfrac{x+3}{x^2+4x-5} \ge 0$;

$\dfrac{x+3}{(x+5)(x-1)} \ge 0$;



Ответ: $(-5; -3] \cup (1; +\infty)$.

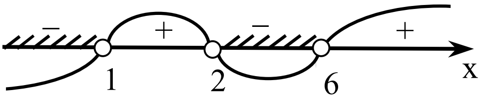
в) $x^2 - 3x - 4 \le 0$;
$(x + 1)(x - 4) \le 0$;



Ответ: $[-1; 4]$.

г) $\frac{x^2-7x+6}{x-2}<0$;

$\frac{(x-1)(x-6)}{x-2}<0$;

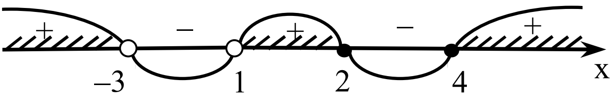


Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 6)$.

245.

а) $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3}\geq 0$;

$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x+3)}\geq 0$;

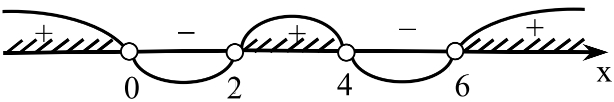


Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 2] \cup [4; +\infty)$.

б) $\frac{8}{x^2-6x+8}<1$;

$\frac{x^2-6x}{x^2-6x+8}>0$;

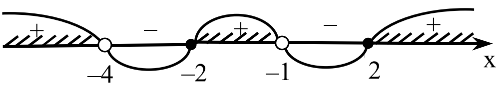
$\frac{x(x-6)}{(x-2)(x-4)}>0$;



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; +\infty)$.

в) $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+4}\geq 1$;

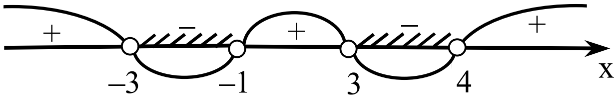
$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+4)}\geq 0$;



Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-2; -1) \cup [2; +\infty)$.

г) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)}<0$;

$\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-4)}<0$;



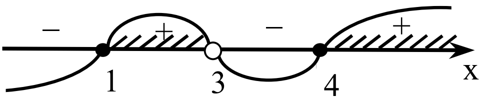
Ответ: (–3; –1) ∪ (3; 4).

246.

а) $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{4}{x-3}}$;

$x-\dfrac{4}{x-3}\ge 0$;

$\dfrac{(x+1)(x-4)}{x-3}\ge 0$;

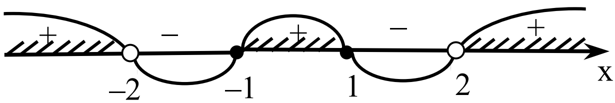


$D(f)$ = [–1; 3) ∪ [4; +∞).

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-4}+1}$;

$\dfrac{3}{x^2-4}+1\ge 0$;

$\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\ge 0$;

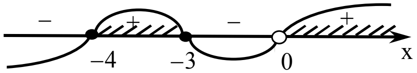


$D(f)$ = (–∞; –2) ∪ [–1; 1] ∪ (2; +∞).

в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+7x+12}{x}}$;

$\dfrac{x^2+7x+12}{x}\ge 0$;

$$\frac{(x+3)(x+4)}{x} \geq 0;$$

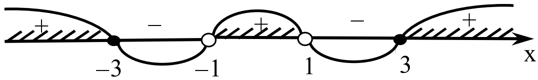


$D(f) = [-4; -3] \cup (0; +\infty)$.

г) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{8}{x^2 - 1}}$;

$$1 - \frac{8}{x^2 - 1} \geq 0;$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0;$$



$D(f) = (-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

247.

а) $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 4, \\ (x - m)^2, & x \geq 4; \end{cases}$

Видим, что $f(x)$ является непрерывной на R при любом m, кроме $x = 4$; условие непрерывности в т. $x = 4$:

$f(4 - \Delta x) = f(4 + \Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta x > 0$;

$f(4 - \Delta x) = \Delta x$, $f(4 + \Delta x) = (4 + \Delta x - m)^2$ при $\Delta x \to 0$;

$(4 - m)^2 = 0$, $m = 4$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - m}$.

Функция $f(x)$ – дробно-рациональная, поэтому она будет непрерывна на R, если $D(f)=R$; выражение $x^2 - m \neq 0$ при любых x, если $m < 0$;

в) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + m, & x \leq 0, \\ x + 2, & x > 0; \end{cases}$

условие непрерывности в т.$x = 0$:

$f(0 - \Delta x) = f(0 + \Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta x > 0$;

$f(0 - \Delta x) = 3(\Delta x^2) + m$, $f(0 + \Delta x) = 2 + \Delta x$ при $\Delta x \to 0$;

$3 \cdot 0 + m = 2 + 0$, $m = 2$;

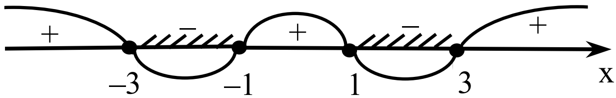
г) $f(x)=\dfrac{5-x}{x^4+m}$, $D(f)=R$, если $x^4+m\neq 0$ при любом x, т.е. при $m>0$.

248.

а) $x^4-10x^2+9\le 0$;

$(x^2-9)(x^2+1)\le 0$;

$(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)\le 0$;

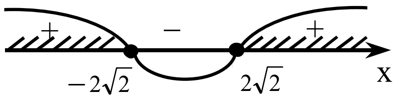


$x\in[-3;1]\cup[1;3]$;

б) $x^4-8\ge 7x^2$;

$(x^2-8)(x^2+1)\ge 0$;

$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2+1)\ge 0$;

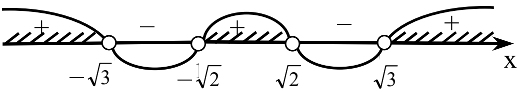


$x\in[-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2};+\infty)$;

в) $x^4-5x^2+6>0$;

$(x^2-2)(x^2-3)>0$;

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0$;

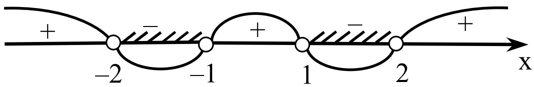


$x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{3};+\infty)$;

г) $5x^2-4>x^4$;

$(x^2-1)(x^2-4)<0$;

$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)<0$;

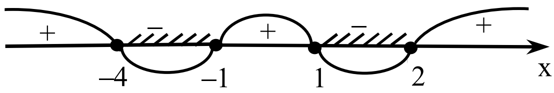


$x\in(-2;-1)\cup(1;2)$.

249.

а) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8)\le 0$;

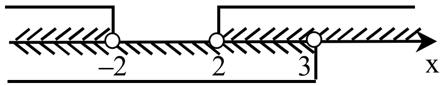
$(x-1)(x+1)(x+4)(x-2)(x^2+2x+4)\le 0$;



$x \in [-4; -1] \cup [1; 2]$;

б) $\sqrt{x^2 - 4}\,(x - 3) < 0$;

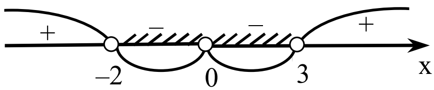
$\begin{cases} x^2 - 4 > 0; \\ x - 3 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+2) > 0; \\ x - 3 < 0; \end{cases}$



$x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3)$;

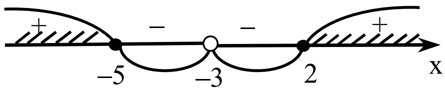
в) $x^2(3 - x)(x + 2) > 0$;

$x^2(x - 3)(x + 2) < 0$;



$x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$;

г) $\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2} \ge 0$;



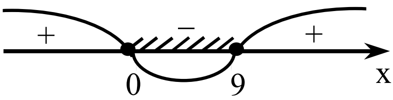
$x \in (-\infty; 5] \cup [2; +\infty)$;

250.

а) $f(x) = \sqrt{9x - x^2}$;

$9x - x^2 \ge 0$;

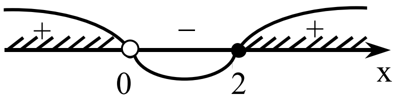
$x(x - 9) \le 0$;



$D(f) = [0; 9]$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$;

$x^2 - \dfrac{8}{x} \ge 0$; $\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x} \ge 0$;

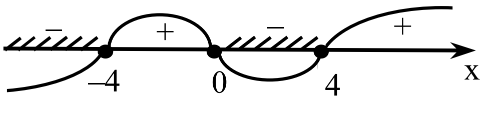


$D(f) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.

в) $f(x) = \sqrt{16x - x^3}$;

$16x - x^3 \ge 0$;

$x(x-4)(x+4) \le 0$;

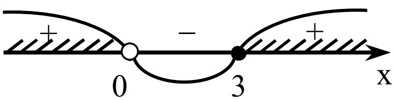


$D(f) = (-\infty; -4] \cup [0; 4]$.

г) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{27}{x^3}}$;

$1 - \frac{27}{x^3} \ge 0$;

$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^3} \ge 0$;



$D(f) = (-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$.

19. Касательная к графику функции

251.

1) Касательная горизонтальна:

а) в т. B и т. D; б) в т. B, т. C и т. D;

в) в т. A, т. C и т. E; г) в т. A, т. C и т. E;

2) Касательная образует с осью абсцисс острый угол:

а) в т. A и т. E; б) в т. E;

в) в т. B и т. F; г) в т. D;

3) Касательная образует с осью абсцисс тупой угол:

а) в т. C; б) в т. A;

в) в т. D ; г) в т. B и т. F.

252.

1) Производная функции равна нулю:

а) при $x = b$ и $x = d$; б) при $k = b$ и $k = d$;

в) при $x = a$, $x = b$ и $x = d$; г) при $x = b$ и $x = d$.

2) Производная функции больше нуля:

а) при $x = c$; б) при $x = a$ и $x = e$;

в) при $x = e$; г) при $x = c$.

3) Производная функции меньше нуля:

а) при $x = e$; б) при $x = c$;

в) при $x = c$; г) при $x = a$ и $x = e$.

253.

а) $f'(x) = (x^2)' = 2x$; б) $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - x' = x^2 - 1$;

$\mathrm{tg}\alpha = f'(-3) = 2\cdot(-3) = 6$; $\mathrm{tg}\alpha = f'(2) = 2^2 - 1 = 3$;

в) $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; г) $f'(x) = (x^2)' + 2x' = 2x + 2$;

$\mathrm{tg}\alpha = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3$; $\mathrm{tg}\alpha = f'(1) = 2(1 + 1) = 4$.

254.

а) $f'(x) = 2(\cos x)' = -2\sin x$; б) $f'(x) = -(\mathrm{tg}x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$;

$\mathrm{tg}\alpha = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2$; $\mathrm{tg}\alpha = f'(\pi) = -\frac{1}{\cos^2 \pi} = -1$;

в) $f'(x) = 1' + (\sin x)' = \cos x$; г) $f'(x) = -(\cos x)' = \sin x$;

$\mathrm{tg}\alpha = f'(\pi) = \cos\pi = -1$; $\mathrm{tg}\alpha = f'(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$.

255.

а) $f'(x) = 3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{3}{x^2}$;

$y = \frac{3}{x_0} + (x - x_0)\cdot\left(-\frac{3}{x_0^2}\right)$ – уравнение касательной к графику функции

$f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = -1$: $y = \frac{3}{-1} - 3(x + 1) = -3x - 6$;

при $x_0 = 1$: $y = \frac{3}{1} - 3(x - 1) = -3x + 6$;

б) $f'(x) = 2x' - (x^2)' = 2 - 2x$;

$y = 2x_0 - x_0^2 + 2(1 - x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = 0$: $y = 2(1 - 0)(x - 0) = 2x$;

при $x_0 = 2$: $y = 2\cdot 2 - 2^2 + 2(1 - 2)(x - 2) = -2x + 4$;

в) $f'(x) = (x^2)' + 1' = 2x$;

$y = 1 + x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = 0$: $y = 1 + 0 + 2\cdot 0(x - 0) = 1$;

при $x_0 = 1$: $y = 1 + 1 + 2\cdot 1(x - 1) = 2x$;

г) $f'(x) = (x^3)' - 1' = 3x^2$;

$y = x_0^3 - 1 + 3x_0^2(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = -1$: $y = (-1)^3 - 1 + 3(x + 1) = 3x + 1$;

при $x_0 = 2$: $y = 2^3 - 1 + 3\cdot 2^2(x - 2) = 12x - 7$.

256.

а) $f'(x) = 3(\sin x)' = 3\cos x$;

$y = 3\sin x_0 + 3\cos x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $y = 3\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) = 3$;

при $x_0 = \pi$: $y = 3\sin\pi + 3\cos\pi(x - \pi) = -3x + 3\pi$;

б) $f'(x) = (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$y = \mathrm{tg}(x_0) + \frac{1}{\cos^2 x_0}(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$y = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2};$$

при $x_0 = \frac{\pi}{3}$:

$$y = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} + 4(x - \frac{\pi}{3}) = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3};$$

в) $f'(x) = 1' + (\cos x)' = -\sin x$;

$y = 1 + \cos x_0 - \sin x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = 0$: $y = 1 + \cos 0 - \sin 0(x - 0) = 2$;

при $x_0 = \frac{\pi}{2}$: $y = 1 + \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2} + 1$;

г) $f'(x) = -2(\sin x)' = -2\cos x$;

$y = -2\sin x_0 - 2\cos x_0(x - x_0)$ – уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

при $x_0 = -\frac{\pi}{2}$: $y = -2\sin(-\frac{\pi}{2}) - 2\cos(-\frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2}) = 2$;

при $x_0 = \pi$: $y = -2\sin\pi - 2\cos\pi(x - \pi) = 2x - 2\pi$.

257.

Касательная в точке $(x_0; f(x_0))$ параллельна оси OX, если в этой точке $f'(x_0) = 0$

а) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$;

$f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x + 3 = 0$;

$x = 1$; $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$;

в т. $A(1; 1)$ графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ касательная к графику параллельна оси OX;

б) $f'(x) = 2x^3 + 16$;

$f'(x) = 0$: $2x^3 + 16 = 0$;

$2(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$;

$x = -2$: $f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^4 - 16\cdot 2 = -24$;

в т. $B(-2; -24)$ графика функции $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 16x$ касательная к графику параллельна оси OX;

в) $f'(x) = 12x^3 - 12x$;

$f'(x) = 0$: $12x(x - 1)(x + 1) = 0$;

$x = 0$, $x = 1$, $x = -1$: $f(-1) = f(1) = -1$; $f(0) = 2$;

в т. $A(-1; 1)$, т. $B(1; -1)$, т. $C(0; 2)$ графика функции $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$ касательная к графику параллельна оси OX;

г) $f'(x) = 3x^2 - 3$;

$f'(x) = 0$: $3(x - 1)(x + 1) = 0$;

$x = 1$, $x = -1$: $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 1 = 3$,

$f(1) = 1 - 3\cdot 1 + 1 = -1$;

в т. $A(-1; 3)$, т. $B(1; -1)$ графика функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ касательная к графику параллельна оси OX.

258.

а) $f'(x) = -2\sin x + 1$;

$f'(x) = 0$: $\sin x = \frac{1}{2}$;

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n =$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k =$$

$$= -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

в т. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$ и

т. $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \quad -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$

графика функции $f(x) = 2\cos x + x$ касательная к графику параллельна оси OX;

б) $f'(x) = 2\cos 2x + \sqrt{3}$;

$f'(x) = 0$: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$,

$x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$ и $x = \frac{7\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$;

$$f\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{6} + 2\pi n\right) + \sqrt{3}\left(\frac{3\pi}{12} + \pi n\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right);$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k\right) + \sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{12} + \pi k\right);$$

в т. $\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n; \quad \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{5\pi}{12} + \pi n\right)\right)$, $n \in Z$ и т. $\left(\frac{7\pi}{12}+\pi k;\quad -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{7\pi}{12}+\pi k\right)\right)$, $k \in Z$

графика функции $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\,x$ касательная к графику параллельна оси OX;

в) $f'(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; $f'(x) = 0$: $-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$;

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

$f\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi n-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi n$, $n \in Z$;

Если $n = 2k$, $k \in Z$, то $\cos\pi n = 1$,

если $n = 2k + 1$, $k \in Z$, то $\cos\pi n = -1$;

в т. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; 1\right)$ и т. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; -1\right)$ $(k \in Z)$

графика функции $f(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ касательная к графику параллельна оси OX;

г) $f'(x) = \sqrt{2} - 2\cos x$; $f'(x) = 0$: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ n, k \in Z$;

$$f\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-1\right) + 2\sqrt{2}\pi n;$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\pi k;$$

в т. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+2\sqrt{2}\pi n\right)$, $n \in Z$ и

т. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\pi k\right)$, $k \in Z$

графика функции $f(x) = \sqrt{2}\,x - 2\sin x$ касательная к графику параллельна оси OX.

259.

а) $f(x) = 3x - x^3$;

$f(x) = 0$: $3x - x^3 = 0$;

$x = -\sqrt{3}$; $x = 0$; $x = \sqrt{3}$;

$f'(x) = 3 - 3x^2$;

$f'(-\sqrt{3}) = 3 - 3(-\sqrt{3})^2 = -6$, $\text{tg}\alpha_1 = -6$, $\alpha_1 = \pi + \text{arctg}(-6)$ – угол, под которым в т. $(-\sqrt{3}; 0)$ график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX;

$f'(0) = 3$, $\text{tg}\alpha_2 = 3$, $\alpha_2 = \text{arctg}3$ – угол, под которым в т. (0; 0) график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX;

$f'(\sqrt{3}) = 3 - 3(-\sqrt{3})^2 = -6$, $\text{tg}\alpha_3 = -6$, $\alpha_3 = \pi + \text{arctg}(-6)$ – угол, под которым в т. $(\sqrt{3}; 0)$ график функции $f(x) = 3x - x^3$ пересекает ось OX;

б) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$f(x) = 0$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $f'\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \cos\pi n = \left[\begin{array}{ll} 1, & n = 2k; \\ -1, & n = 2k+1; \ k \in Z; \end{array}\right.$

График функции $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ пересекает ось ОX в т. $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$ под углом $\frac{\pi}{4}$, а в т. $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; 0\right)$ под углом $\frac{3\pi}{4}$;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

$f(x) = 0$: $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x = 1$; $x = 2$;

$f'(x) = 2x - 3$; $f'(1) = -1$, $\text{tg}\alpha_1 = -1$ и $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$ – угол, под которым в т. (1;0) график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ пересекает ось OX;

$f'(2) = 1$, $\text{tg}\alpha_2 = 1$ и $\alpha_2 = 45°$ – угол, под которым в т. (2;0) график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ пересекает ось OX;

г) $f(x) = -\cos x$;

$f(x) = 0$: $-\cos x = 0$;

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

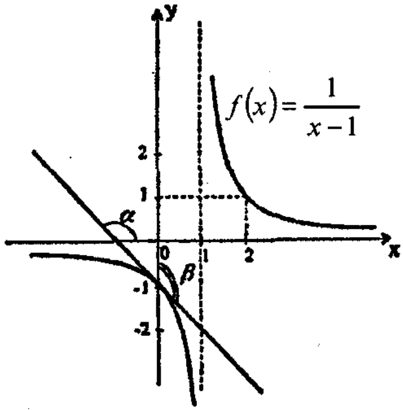
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$f'(x) = \sin x;\ f'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $\mathrm{tg}\alpha_1 = 1$ $\alpha_1 = 45°$ – угол, под которым в т. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0\right)$ график функции $f(x) = -\cos x$ пересекает ось OX;

$f'\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = -1$ и $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 0\right)$ график функции $f(x) = -\cos x$ пересекает ось OX.

260.

а)



Пусть α угол, под которым касательная к графику функции $f(x)$ в т. $(x_0;\ f(x_0))$ пересекает ось OX, то угол β, под которым эта касательная пересекает ось OY, равен:

$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$; $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{1}{f'(x_0)}$;

$f(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = -1$; $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $\mathrm{tg}\beta = -\frac{1}{f'(0)} = 1$;

$\beta = \frac{\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $(0; -1)$ график функции

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ пересекает ось OY;

б) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; $f(0) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$, $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{-f'(0)} = 1$,

$\beta = \dfrac{3\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $(0; -\dfrac{1}{2})$ график функции

$f(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ пересекает ось OY;

в) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$; $f(0) = \dfrac{1}{2}$; $f'(x) = x - 1$, $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{-f'(0)} = 1$;

$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ – угол, под которым в т. $(0; \dfrac{1}{2})$ график функции

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ пересекает ось OY;

г) $f(x) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $f(0) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$;

$f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{1}{-f'(0)} = \dfrac{1}{-2\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}}$;

$\beta = \pi + \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ – угол, под которым в т.

$(0; \dfrac{1}{2})$ график функции $f(x) = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ пересекает ось OY.

20. Приближенные вычисления

261.

а) $f(2{,}016) \approx f(2) + (2{,}016 - 2)\cdot f'(2)$;
$f'(x) = 4x^3 + 2$, $f'(2) = 4\cdot 8 + 2 = 34$;
$f(2) = 16 + 2\cdot 2 = 20$,
$f(2{,}016) \approx 20 + 0{,}016\cdot 34 = 20{,}544$;
$f(0{,}97) \approx f(1) + (0{,}97 - 1)\cdot f'(1)$;

$f(1) = 1 + 2 = 3,\ f'(1) = 4 + 2 = 6;$
$f(0{,}97) \approx 3 - 0{,}03 \cdot 6 = 2{,}82;$
б) $f'(x) = 5x^4 - 2;$
$f(1{,}995) \approx f(2) + (1{,}995 - 2) \cdot f'(2);\ f(2) = 2^5 - 2^2 = 28;$
$f'(2) = 5 \cdot 16 - 2 \cdot 2 = 76;$
$f(1{,}995) \approx 28 - 0{,}005 \cdot 76 = 27{,}62;$
$f(0{,}96) \approx f(1) + (0{,}96 - 1) \cdot f'(1);$
$f(1) = 0, \qquad f'(1) = 5 - 2 = 3;$
$f(0{,}96) \approx -0{,}04 \cdot 3 = -0{,}12;$
в) $f'(x) = 3x^2 - 1; \qquad f(3{,}02) \approx f(3) + (3{,}02 - 3) \cdot f'(3);$
$f(3) = 3^3 - 3 = 24; \qquad f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26;$
$f(3{,}02) \approx 24 + 0{,}02 \cdot 26 = 24{,}52;$
$f(0{,}92) \approx f(1) + (0{,}92 - 1) \cdot f'(1);$
$f(1) = 0,\ f'(1) = 3 - 1 = 2;$
$f(0{,}92) = -0{,}08 \cdot 2 = -0{,}16;$
г) $f'(x) = 2x + 3; \qquad f(5{,}04) \approx f(5) + (5{,}04 - 5) \cdot f'(5);$
$f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40; \qquad f'(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13;$
$f(5{,}04) \approx 40 + 0{,}04 \cdot 13 = 40{,}52;$
$f(1{,}98) \approx f(2) + (1{,}98 - 2) \cdot f'(2);$
$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10; \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7;$
$f(1{,}98) \approx 10 - 0{,}02 \cdot 7 = 9{,}86.$

262.

а) $1{,}002^{100} = (1 + 0{,}002)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0{,}002 = 1{,}2;$
б) $0{,}995^6 = (1 - 0{,}005)^6 \approx 1 - 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}97;$
в) $1{,}003^{200} = (1 + 0{,}003)^{200} \approx 1 + 200 \cdot 0{,}003 = 1{,}6;$
г) $0{,}998^{20} = (1 - 0{,}002)^{20} \approx 1 - 20 \cdot 0{,}002 = 0{,}96.$

263.

а) $\sqrt{1{,}004} = \sqrt{1 + 0{,}004} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}004 = 1{,}002;$

б) $\sqrt{25{,}012} = 5\sqrt{1{,}0048} \approx 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}00048\right) = 5 + 0{,}0012 = 5{,}0012;$

в) $\sqrt{0{,}997} = \sqrt{1 - 0{,}003} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}003 = 0{,}9985;$

г) $\sqrt{4{,}0016} = 2\sqrt{1{,}0004} \approx 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0004\right) = 2 + 0{,}0004 = 2{,}0004;$

264.

а) $\mathrm{tg}44° = \mathrm{tg}(45° - 1°) \approx \mathrm{tg}45° - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 45°} = 1 - \frac{\pi}{90} \approx 0{,}9651$;

б) $\cos 61° \approx \cos\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0{,}4849$;

в) $\sin 31° \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0{,}5151$;

г) $\mathrm{ctg}47° \approx \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{45} \approx 0{,}9302$.

265.

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}04\right) \approx \cos\frac{\pi}{6} - 0{,}04\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0{,}04 = 0{,}8460$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0{,}02\right) \approx \sin\frac{\pi}{3} - 0{,}02\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 \approx 0{,}8560$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}03\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + 0{,}03\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + 0{,}03\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5264$;

г) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}05\right) \approx \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + 0{,}05\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 1 + 2\cdot 0{,}05 = 1{,}01$.

266.

а) $\frac{1}{1{,}003^{20}} = (1 + 0{,}003)^{-20} \approx 1 - 20\cdot 0{,}003 = 0{,}94$;

б) $\frac{1}{0{,}996^{40}} = (1 - 0{,}004)^{-40} \approx 1 + 40\cdot 0{,}004 = 1{,}16$;

в) $\frac{1}{2{,}0016^{3}} = (2 + 0{,}0016)^{-3} = \frac{1}{8}(1 + 0{,}0008)^{-3} \approx \frac{1}{8}(1 - 3\cdot 0{,}0008) =$

$= \frac{1}{8} - 0{,}0003 = 0{,}1247$;

г) $\frac{1}{0{,}994^{5}} = (1 - 0{,}005)^{-5} \approx 1 + 5\cdot 0{,}006 = 1{,}03$.

21. Производная в физике и технике

267.

а) Скорость: $v(t) = x'(t) = -\frac{1}{3}(t^3)' + 2(t^2)' + 5t' = -t^2 + 4t + 5$ (м/сек);

б) $v(2) = -2^2 + 4\cdot 2 + 5 = 9$ (м/сек);

в) Остановка: $v = 0$: $-t^2 + 4t + 5 = 0$; $t = 5$ сек.

268.

$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 8t$ (м/сек);

$v(5) = 3\cdot 5^2 - 8\cdot 5 = 35$ (м/сек);

$a(t) = v'(t) = 6t - 8$ (м/сек^2);

$a(5) = 6\cdot 5 - 8 = 22$ (м/сек^2).

269.

$\omega(t) = \varphi'(t) = 6t - 4$ (рад/сек);

$\omega(4) = 6\cdot 4 - 4 = 20$ (рад/сек).

270.

$\omega(t) = \varphi'(t) = 4 - 0{,}6t$ (рад/сек);

$\omega(2) = 4 - 2\cdot 0{,}6 = 2{,}8$ (рад/сек).

271.

$v(t) = x'(t) = 6t^2 + 1$ (см/сек);

$a(t) = v'(t) = 12t$ (см/сек^2);

а) $a = 1$ (см/сек^2): $12t = 1$, $t = \frac{1}{12}$ сек.;

б) $a = 2$ (см/сек^2): $12t = 2$, $t = \frac{1}{6}$ сек.

272.

$v(t) = x'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t$ (м/сек);

$a(t) = v'(t) = -t + 6$ (м/сек^2);

а) $a = 0$: $6 - t = 0$, $t = 6$ сек.;

б) $v(6) = -\frac{1}{2}\cdot 6^2 + 6\cdot 6 = 18$ (м/сек).

273.

$v(t) = x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$;

$a(t) = v'(t) = -\frac{1}{4\sqrt{t}}$;

$a(t) = -2v^3(t)$ – ускорение пропорционально скорости в кубе.

274.

Имеем: $v(t) = x'(t) = 6t^2 - 2t$;

$a(t) = v'(t) = 12t - 2$;

$F(t) = m \cdot a(t)$;

$F(2) = m \cdot (12 \cdot 2 - 2) = 22$ т.

275.

Имеем: $v(t) = x'(t) = 2t + 1$ (см/сек);

$a(t) = v'(t) = 2$ (см/сек^2);

а) $F = m \cdot a = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04$ (н);

б) $E(t) = \frac{m}{2} \cdot v^2(t)$,

$E(2) = \frac{2}{2} (2 \cdot 2 + 1)^2 \cdot 0{,}01^2 = 0{,}025$ (Дж).

276.

$\rho(l) = m'(l) = 6l + 5$ (г/см).

а) $\rho(10) = 6 \cdot 10 + 5 = 65$ (г/см),

б) $\rho(20) = 6 \cdot 20 + 5 = 125$ (г/см).

277.

$v_1(t) = x_1'(t) = 8t$,

$v_2(t) = x_2'(t) = 3t^2$;

$v_1(t) > v_2(t)$: $8t > 3t^2$;

$3t\left(t - \frac{8}{3}\right) < 0$; $0 < t < \frac{8}{3}$.

При $t \in \left(0; \frac{8}{3}\right)$ скорость первой точки больше скорости второй точки.

278.

$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$;

$\vec{v}^{\,2}_{\text{отн}} = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos 60°$;

$v_1 = 5$ км/ч,

$v_2(t) = S'(t) = 4t + 1$ (км/с) $= 3600(4t + 1)$ (км/ч);

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{5^2 + 3600^2(4t+1)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3600(4t+1)\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right) =$$

$$= \sqrt{3600^2 \cdot 16t^2 + (3600^2 \cdot 8 + 18000 \cdot 4)t + 25 + 3600^2 + 18000} \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right).$$