

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

**к учебнику «Геометрия. 10-11 класс»
Л.С. Атанасян и др., М.: «Просвещение», 2000 г.**

Содержание

<i>Глава V. Метод координат в пространстве</i>	4
Вопросы к главе V.....	45
Дополнительные задачи.....	47
<i>Глава VI. Цилиндр, конус и шар</i>	61
Вопросы к главе VI.....	82
Дополнительные задачи.....	83
Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар.....	97
<i>Глава VII. Объемы тел</i>	112
Вопросы к главе VII.....	139
Дополнительные задачи.....	141
Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар.....	151

Глава V. Метод координат в пространстве

400. а) ось абсцисс: точка С (2;0;0);

б) ось ординат: точка Е (0;-1;0);

в) ось аппликат: точка В (0;0;-7);

г) плоскость Оху: точки Н ($-\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; 0), Е (0;-1;0), С (2;0;0), А(3;-1;0);

д) плоскость Оуз: точки В (0;0;-7), Е (0;-1;0), G(0;5;-7);

е) плоскость Охз: точки В (0;0;-7), С (2;0;0) и D (-4;0;3).

401. Координаты проекций точки А (2; -3; 5):

а) на плоскость Охз: А₁ (2; 0; 5), на Оху: А₂ (2; -3; 0); на Оуз: А₃ (0; -3; 5);

б) на ось Ох: А₄ (2; 0; 0), на Оу: А₅ (0; -3; 0), на Oz: А₆(0;0;5).

Точка В (3; -5; $\frac{1}{2}$):

а) на плоскость Охз: В₁ (3; 0; $\frac{1}{2}$), на Оху: В₂ (3; -5; 0), на Оуз: В₃ (0;-5; $\frac{1}{2}$);

б) на ось Ох: В₄ (3; 0; 0), на Оу: В₅ (0; -5; 0), на Oz: В₆(0;0; $\frac{1}{2}$).

Точка С ($-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$):

а) на плоскость Охз: С₁ ($\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$), на Оху: С₂ ($-\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0), на

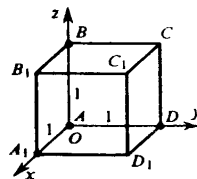
Оуз: С₃ (0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$);

б) на ось Ох: С₁ ($-\sqrt{3}$; 0;0), на Оу: С₅ (0; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0), на Oz: С₆(0; 0; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$).

402. А (0; 0; 0), В (0; 0; 1), D (0; 1; 0) и А₁ (1; 0; 0), следовательно, стороны куба равны 1. Куб помещен в пространстве, как показано на рисунке.

Следовательно, по рисунку имеем:

С(0;1;1), В₁(1;0;1), С₁(1;1;1), D₁(1;1;0)



403. $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $x=3$, $y=2$, $z=-5$; тогда координаты вектора $\vec{a}$: $\vec{a} \{3; 2; -5\}$.

Вектор $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $x=-5$, $y=3$, $z=-1$; $\vec{b} \{-5; 3; -1\}$.

Вектор $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$; $x=1$, $y=-1$, $z=0$; $\vec{c} \{1; -1; 0\}$.

Вектор $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$; $x=0$, $y=1$, $z=1$; $\vec{d} \{0; 1; 1\}$.

Вектор $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$; $x=-1$, $y=0$, $z=1$; $\vec{m} \{-1; 0; 1\}$.

Вектор $\vec{n} = 0,7\vec{k}$; $x=0$, $y=0$, $z=0,7$; $\vec{n} \{0; 0; 0,7\}$.

404. Для $\vec{a} \{5; -1; 2\}$ по формуле $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ координаты вектора $x=5$,

$y=-1, z=2$; следовательно, $\vec{a}=5\vec{i}-1\vec{j}+2\vec{k}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

Для $\vec{b} \{-3; -1; 0\}$ $x=-3, y=-1, z=0$; следовательно, $\vec{b}=-3\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{z}=-3\vec{i}-\vec{j}$.

Для $\vec{c} \{0; -1; 0\}$ $x=0, y=-1, z=0$; $\vec{c}=0\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k}=-\vec{j}$.

Для $\vec{d} \{0; 0; 0\}$ $x=0, y=0, z=0$ и тогда разложение будет выглядеть так:

$$\vec{d}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}.$$

405. Координаты точки равны соответствующим координатам радиус-вектора (п.44). Соответственно, для радиус-вектора OA_1 рассмотрим точку A_1 . Ее координаты и будут координатами вектора OA_1 : $A_1 (2; 0; 2)$ $OA_1 \{2; 0; 2\}$. $B_1 (0; 3; 2)$. Значит, $OB_1 \{0; 3; 2\}$. $C_1 (0; 0; 2)$. Значит $OC_1 \{0; 0; 2\}$.

$S (2; 3; 0)$. Значит, $OS \{2; 3; 0\}$. $C_1 (2; 3; 2)$. Значит, $OC_1 \{2; 3; 2\}$.

Вектор BC_1 это разность векторов OC_1 и OB . $BC_1=OC_1 - OB$; $OC_1 \{2; 3; 2\}$, $OB \{0; 3; 0\}$. Следовательно, $BC_1 \{2-0; 3-3; 2-0\}$, $BC_1 \{2; 0; 2\}$.

$$AC_1=OC_1-OA; OC_1 \{2; 3; 2\}, OA \{2; 0; 0\}.$$

$$AC_1 \{2-2; 3-0; 2-0\}, AC_1=\{0; 3; 2\}.$$

$$O_1C=OC-OO_1; OC \{2; 3; 0\}, OO_1 \{0; 0; 2\}.$$

$$O_1C \{2-0; 3-0; 0-2\}, O_1C \{2; 3; -2\}.$$

406. Рассмотрим общий случай. Рассмотрим два некомпланарных вектора AB и DC . Перенесем вектор DC параллельно так, чтобы точка D_1 его начала совпала с точкой B конца первого вектора. Получим вектор D_1C_1 или, что то же самое, вектор BC_1 , сонаправленный с вектором DC и равный ему по длине. Согласно правилу сложения векторов: $AB+DC=AB+BC_1=AC_1$.

Пусть $AB \{x_1; y_1; z_1\}$, $BC_1 \{x_2; y_2; z_2\}$. Докажем, что $AC_1 \{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$.

Для доказательства выразим координаты этих векторов через координаты их начала и конца. $AB (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$,

$BC_1 \{x_{c_1} - x_B; y_{c_1} - y_B; z_{c_1} - z_B\}$, $AC_1 (x_{c_1} - x_A; y_{c_1} - y_A; z_{c_1} - z_A)$, из обозначения координат вектора AB как x_1, y_1 и z_1 и вектора BC_1 как x_2, y_2, z_2 , получим $x_1=x_B-x_A, y_1=y_B-y_A, z_1=z_B-z_A, x_2=x_{c_1}-x_B, y_2=y_{c_1}-y_B, z_2=z_{c_1}-z_B$.

$$\text{Вычислим суммы } x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2: x_1+x_2=x_B-x_A+x_{c_1}-x_B=x_{c_1}-x_A;$$

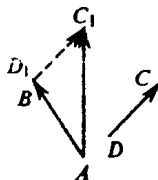
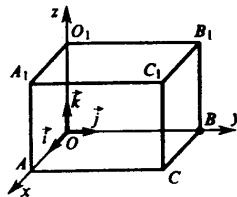
$$y_1+y_2=y_B-y_A+y_{c_1}-y_B=y_{c_1}-y_A; z_1+z_2=z_B-z_A+z_{c_1}-z_B=z_{c_1}-z_A;$$

Суммы координат $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2$ являются координатами вектора AC_1 , равного сумме исходных двух векторов AB и DC . Что и требовалось доказать.

407. а) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$,

$$x_p=x_a+x_b; x_a=3; x_b=0; \quad y_p=y_a+y_b; y_a=-5; y_b=7; \quad z_p=z_a+z_b; z_a=2; z_b=-1;$$

$$x_p=3+0=3; y_p=-5+7=2; z_p=2-1=1;$$



$$\vec{p} \{3; 2; 1\}.$$

б) Обозначим $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e}$

$$x_e = x_a + x_c = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}; \quad y_e = y_a + y_c = -5 + 0 = -5; \quad z_e = z_a + z_c = 2 + 0 = 2;$$

$$\vec{e} \{3\frac{2}{3}; -5; 2\}.$$

в) Обозначим $\vec{b} + \vec{c} = \vec{f}$,

$$x_f = x_b + x_c = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \quad y_f = y_b + y_c = 7 + 0 = 7; \quad z_f = z_b + z_c = -1 + 0 = -1;$$

$$\vec{f} \{\frac{2}{3}; 7; -1\}.$$

г) Обозначим $\vec{d} + \vec{b} = \vec{r}$,

$$x_r = x_d + x_b = -2, 7 + 0 = -2, 7; \quad y_r = y_d + y_b = 3, 1 + 7 = 10, 1; \quad z_r = z_d + z_b = 0, 5 - 1 = -0, 5;$$

$$\vec{r} \{-2, 7; 10, 1; -0, 5\}.$$

д) Обозначим $\vec{d} + \vec{a} = \vec{s}$,

$$x_s = x_d + x_a = -2, 7 + 3 = 0, 3; \quad y_s = y_d + y_a = 3, 1 - 5 = -1, 9; \quad z_s = z_d + z_a = 0, 5 + 2 = 2, 5;$$

$$\vec{s} \{0, 3; -1, 9; 2, 5\}.$$

е) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{q}$

$$x_q = x_a + x_b + x_c = 3 + 0 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3};$$

$$y_q = y_a + y_b + y_c = -5 + 7 + 0 = 2;$$

$$z_q = z_a + z_b + z_c = 2 - 1 + 0 = 1;$$

$$\vec{q} \{3\frac{2}{3}; 2; 1\}.$$

ж) Обозначим $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d} = \vec{k}$,

$$x_k = x_b + x_a + x_d = 0 + 3 - 2, 7 = 0, 3;$$

$$y_k = y_b + y_a + y_d = 7 - 5 + 3, 1 = 5, 1;$$

$$z_k = z_b + z_a + z_d = -1 + 2 + 0, 5 = 1, 5;$$

$$\vec{k} \{0, 3; 5, 1; 1, 5\}.$$

з) Обозначим $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{m}$,

$$x_m = x_a + x_b + x_c + x_d = 3 + 0 + \frac{2}{3} - 2, 7 = 3 + \frac{20}{30} - \frac{27 \cdot 3}{30} = 3 + \frac{20 - 81}{30} = 3 - \frac{61}{30} = \frac{29}{30};$$

$$y_m = y_a + y_b + y_c + y_d = -5 + 7 + 0 + 3, 1 = 5, 1; \quad z_m = z_a + z_b + z_c + z_d = 2 - 1 + 0 + 0, 5 = 1, 5;$$

$$\vec{m} = \{\frac{29}{30}; 5, 1; 1, 5\}.$$

408. Согласно п.44 имеем: $AC \{x_c - x_A, y_c - y_A; z_c - z_A\}$

По рисунку имеем: $A(4; 0; 0); B(0; 9; 0); C(0; 0; 2).$

$AC: x_c - x_A = 0 - 4 = -4; y_c - y_A = 0 - 0 = 0;$

$$z_C - z_A = 2 - 0 = 2; \quad AC \{-4; 0; 2\}.$$

$$CB \{x_B - x_C, y_B - y_C; z_B - z_C\}.$$

$$x_B - x_C = 0 - 0 = 0; \quad y_B - y_C = 9 - 0 = 9; \quad z_B - z_C = 0 - 2 = -2;$$

$$CB \{0; 9; -2\}.$$

$$AB: \{x_B - x_A, y_B - y_A; z_B - z_A\}.$$

$$x_B - x_A = 0 - 4 = -4; \quad y_B - y_A = 9 - 0 = 9;$$

$$z_B - z_A = 0 - 0 = 0; \quad AB \{-4; 9; 0\}.$$

$$MN \{x_N - x_M, y_N - y_M; z_N - z_M\}.$$

Координаты точек М, N и Р являются координатами векторов OM, ON и OP соответственно. Тогда согласно п. 45:

$$ON = \frac{1}{2} OC. \text{ Тогда } ON \left\{ \frac{1}{2} x_C; \frac{1}{2} y_C; \frac{1}{2} z_C \right\}; \quad ON \left\{ \frac{1}{2} \cdot 0; \frac{1}{2} \cdot 0; \frac{1}{2} \cdot 2 \right\};$$

$$ON \{0; 0; 1\}; \quad N \{0; 0; 1\}.$$

Вектор OM: точка М — середина отрезка AC. Значит $OM = \frac{1}{2} (OA + OC)$,

$$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_C) = \frac{1}{2} (4 + 0) = 2; \quad y_M = \frac{1}{2} (y_A + y_C) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

$$z_M = \frac{1}{2} (z_A + z_C) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1;$$

$$M (2; 0; 1); \quad OM \{2; 0; 1\}.$$

$$MN: x_N - x_M = 0 - 2 = -2; \quad y_N - y_M = 0 - 0 = 0; \quad z_N - z_M = 1 - 1 = 0; \quad MN \{-2; 0; 0\}.$$

Точка Р — середина отрезка BC. Значит:

$$OP = \frac{1}{2} (OB + OC), \quad x_P = \frac{1}{2} (x_B + x_C) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0; \quad y_P = \frac{1}{2} (y_B + y_C) = \frac{1}{2} (9 + 0) = 4 \frac{1}{2};$$

$$z_P = \frac{1}{2} (z_B + z_C) = \frac{1}{2} (0 + 2) = 1;$$

$$P = (0; 4 \frac{1}{2}; 1); \quad OP \{0; 4 \frac{1}{2}; 1\}$$

$$BM: \{x_M - x_B; y_M - y_B; z_M - z_B\};$$

$$x_M - x_B = 2 - 0 = 2; \quad y_M - y_B = 0 - 9 = -9; \quad z_M - z_B = 1 - 0 = 1;$$

$$BM \{2; -9; 1\}.$$

$$NP: \{x_P - x_N; y_P - y_N; z_P - z_N\};$$

$$x_P - x_N = 0 - 0 = 0; \quad y_P - y_N = 4 \frac{1}{2} - 0 = 4 \frac{1}{2}; \quad z_P - z_N = 1 - 1 = 0;$$

$$NP \{0; 3 \frac{1}{2}; 0\}.$$

409. Чтобы найти координаты вектора разности, нужно найти разности соответствующих координат этих векторов.

$$x_a = 5; \quad y_a = -1; \quad z_a = 1,$$

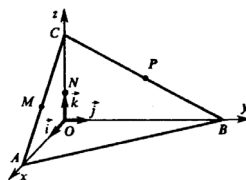
$$x_b = -2; \quad y_b = 1; \quad z_b = 0,$$

$$x_c = 0; \quad y_c = 0,2; \quad z_c = 0,$$

$$x_d = -\frac{1}{3}; \quad y_d = 2 \frac{2}{5}; \quad z_d = -\frac{1}{7}.$$

$$a) \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{p}$$

$$б) \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{r},$$



$$\vec{p} \{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\},$$

$$\vec{p} \{5 - (-2); -1 - 1; 1 - 0\},$$

$$\vec{p} \{7, -2; 1\}.$$

$$\text{в) } \vec{a} - \vec{c} = \vec{q},$$

$$\vec{q} \{5 - 0; -1 - 0, 2; 1 - 0\},$$

$$\vec{q} \{5; -1, 2; 1\}.$$

$$\vec{r} \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\},$$

$$\vec{r} \{-2 - 5; 1 - (-1); 0 - 1\},$$

$$\vec{r} \{-7, 2; -1\}.$$

$$\text{г) } \vec{d} - \vec{a} = \vec{e},$$

$$\vec{e} \{x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a\},$$

$$\vec{e} \{-\frac{1}{3} - 5; 2\frac{2}{5} - (-1); -\frac{1}{7} - 1\},$$

$$\vec{e} \{-5\frac{1}{3}; 3\frac{2}{5}; -1\frac{1}{7}\}.$$

$$\text{д) } \vec{c} - \vec{d} = \vec{f},$$

$$\vec{f} \{x_c - x_d; y_c - y_d; z_c - z_d\},$$

$$\vec{f} \{0 - (-\frac{1}{3}); 0, 2 - 2\frac{2}{5}; 0 - (-\frac{1}{7})\},$$

$$\vec{f} \{\frac{1}{3}; -2, 2, \frac{1}{7}\}.$$

$$\text{е) } \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} : \text{ пусть } \vec{a} - \vec{b} = \vec{m}, \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{c} = \vec{n}, \text{ следовательно}$$

$$\vec{m} \{x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b\}. \vec{n} \{(x_a - x_b) + x_c; (y_a - y_b) + y_c; (z_a - z_b) + z_c\}$$

$$\vec{n} \{5 - (-2) + 0; -1 - 1 + 0, 2; 1 - 0 + 0\}, \vec{n} \{7; -1, 8; 1\}.$$

$$\text{ж) } \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{l}, \vec{l} \{x_a - x_b - x_c; y_a - y_b - y_c; z_a - z_b - z_c\},$$

$$\vec{l} \{5 + 2 - 0; -1 - 1 - 0, 2; 1 - 0 - 0\}, \vec{l} \{7; -2, 2; 1\}.$$

$$\text{з) Вектор } 2\vec{a} \text{ будет иметь координаты } \{2x_a; 2y_a; 2z_a\}, \text{ или } \{10; -2; 2\}.$$

$$\text{и) Вектор } -3\vec{b} \text{ будет иметь координаты: } \{-3x_b; -3y_b; -3z_b\}, \text{ или } \{6; -3; 0\}.$$

$$\text{к) } -6\vec{c} \{-6x_c; -6y_c; -6z_c\}, \text{ или } \{-6 \cdot 0; -6 \cdot 0, 2; -6 \cdot 0\}, -6\vec{c} \{0; -1, 2; 0\}.$$

$$\text{л) } -\frac{1}{3}\vec{d} \{-\frac{1}{3}x_d; -\frac{1}{3}y_d; -\frac{1}{3}z_d\}, -\frac{1}{3}\vec{d} \{-\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{3}); -\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{7})\},$$

$$-\frac{1}{3}\vec{d} \{\frac{1}{9}; -\frac{12}{15}; \frac{1}{21}\}, \text{ или } -\frac{1}{3}\vec{d} \{\frac{1}{9}; -\frac{4}{5}; \frac{1}{21}\}.$$

$$\text{м) } 0,2\vec{b} \{0,2x_b; 0,2y_b; 0,2z_b\}, 0,2\vec{b} \{0,2 \cdot (-2); 0,2 \cdot 1; 0,2 \cdot 0\},$$

$$0,2\vec{b} \{-0,4; 0,2; 0\}.$$

410. Согласно условиям

$$\vec{a} : x_a = -1, y_a = 2, z_a = 0; \vec{b} : x_b = 0, y_b = -5, z_b = -2; \vec{c} : x_c = 2, y_c = 1, z_c = -3.$$

Для вектора $\vec{p}$ вычислим отдельно каждое слагаемое:

$$3\vec{b} \{3x_b; 3y_b; 3z_b\}, 3\vec{b} \{3 \cdot 0; 3 \cdot (-5); 3 \cdot (-2)\},$$

$$3\vec{b} \{0; -15; -6\}, \text{ обозначим } 3\vec{b} = \vec{m}.$$

$$-2\vec{a} \{-2x_a; -2y_a; -2z_a\}, -2\vec{a} \{-2 \cdot (-1); -2 \cdot 2; -2 \cdot 0\},$$

$$-2\vec{a} \{2; -4; 0\}, \text{ обозначим } -2\vec{a} = \vec{n}.$$

Следовательно $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{c}$ будет иметь координаты:

$$\vec{p} \{x_m + x_n + x_c; y_m + y_n + y_c; z_m + z_n + z_c\}, \quad \vec{p} \{0+2+2; -15-4+1; -6+0-3\}, \\ \vec{p} \{4; -18; -9\}.$$

Для вектора $\vec{q}$ аналогично вычислим: $3\vec{c} \{3x_c; 3y_c; 3z_c\}$,

$$3\vec{c} \{3 \cdot 2; 3 \cdot 1; 3 \cdot (-3)\}, \quad 3\vec{c} \{6; 3; -9\}, \text{ обозначим } 3\vec{c} = \vec{r}.$$

$$-2\vec{b} \{-2x_b; -2y_b; -2z_b\}, \quad -2\vec{b} \{-2 \cdot 0; -2 \cdot (-5); -2 \cdot (-2)\},$$

$$-2\vec{b} \{0; 10; 4\}, \text{ обозначим } -2\vec{b} = \vec{e}.$$

Следовательно $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a} = \vec{r} + \vec{e} + \vec{a}$,

$$\vec{q} \{x_r + x_e + x_a; y_r + y_e + y_a; z_r + z_e + z_a\}, \quad \vec{q} \{6+0+(-1); 3+10+2; -9+4+0\},$$

$$\vec{q} \{5; 15; -5\}.$$

411. По правилам суммы, разности, произведения векторов (п. 43) имеем:

$$a) \quad 3\vec{a} \{3 \cdot (-1); 3 \cdot 1; 3 \cdot 1\}, \quad 3\vec{a} \{-3; 3; 3\}, \quad 2\vec{b} \{2 \cdot 0; 2 \cdot 2; 2 \cdot (-2)\}, \quad 2\vec{b} \{0; 4; -4\}.$$

$$\text{Обозначим: } 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (3\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{c} = \vec{s} - \vec{c};$$

$$\vec{s} = 3\vec{a} + 2\vec{b}; \quad \vec{s} \{-3; 7; -1\}; \quad \vec{c} \{-3; 2; 0\}; \quad \vec{s} - \vec{c} = \vec{r};$$

$$\vec{r} \{-3 - (-3); 7 - 2; -1 - 0\}; \quad \vec{r} \{0; 5; -1\}.$$

$$b) \quad 2\vec{c} \{2 \cdot (-3); 2 \cdot 2; 2 \cdot 0\}; \quad 2\vec{c} \{-6; 4; 0\}; \quad \vec{a} \{-1; 1; 1\};$$

$$-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d} = (-\vec{a} + 2\vec{c}) - \vec{d} = \vec{p} - \vec{d};$$

$$\vec{p} = 2\vec{c} - \vec{a}; \quad \vec{p} \{-6 - (-1); 4 - 1; 0 - 1\}; \quad \vec{p} \{-5; 3; -1\}; \quad \vec{d} \{-2; 1; -2\};$$

$$\vec{p} - \vec{d} = \vec{q}; \quad \vec{q} \{-5 - (-2); 3 - 1; -1 - (-2)\}; \quad \vec{q} \{-3; 2; 1\}.$$

$$в) \quad 0,1\vec{a} \{0,1 \cdot (-1); 0,1 \cdot 1; 0,1 \cdot 1\}, \quad 0,1\vec{a} \{-0,1; 0,1; 0,1\}.$$

$$3\vec{b} \{3 \cdot 0; 3 \cdot 2; 3 \cdot (-2)\}, \quad 3\vec{b} \{0; 6; -6\}.$$

$$0,7\vec{c} \{0,7 \cdot (-3); 0,7 \cdot 2; 0,7 \cdot 0\}, \quad 0,7\vec{c} \{-2,1; 1,4; 0\}.$$

$$5\vec{d} \{5 \cdot (-2); 5 \cdot 1; 5 \cdot (-2)\}, \quad 5\vec{d} \{-10; 5; -10\}.$$

Все сложим, тогда в выражении $0,1\vec{a} + 3\vec{b} + 0,7\vec{c} - 5\vec{d}$ введем обозначение:

$$0,1\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{n}, \quad \vec{n} + 0,7\vec{c} = \vec{m}, \quad \vec{m} - 5\vec{d} = \vec{l}.$$

$$\vec{n} \{-0,1+0; 0,1+6; 0,1+(-6)\}, \quad \vec{n} \{-0,1; 6,1; -5,9\}.$$

$$\vec{m} \{-0,1+(-2,1); 6,1+1,4; -5,9+0\}, \quad \vec{m} \{-2,2; 7,5; -5,9\}.$$

$$\vec{l} \{-2,2 - (-10); 7,5 - 5; -5,9 - (-10)\}, \quad \vec{l} \{7,8; 2,5; 4,1\}.$$

$$r) \quad 2\vec{a} (2 \cdot (-1); 2 \cdot 1; 2 \cdot 1), \quad 2\vec{a} \{-2; 2; 2\}, \quad 3\vec{b} \{0; 6; -6\}.$$

$$2\vec{b} \{0; 4; -4\}, \quad \vec{a} - 2\vec{b} = \vec{f}, \quad \vec{f} \{-1-0; 1-4; 1-(-4)\}, \quad \vec{f} \{-1; -3; 5\}.$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{e}, \quad \vec{e} \{-2+0; 2+6; 2+(-6)\}, \quad \vec{e} \{-2; 8; -4\}.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{g}, \quad \vec{g} \{-1-0; 1-2; 1-(-2)\}, \quad \vec{g} \{-1; -1; 3\}.$$

$$2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{g} = \{-2; -2; 6\}$$

Следовательно вектор $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$ имеет координаты $\{-2 - (-1); 8 - (-3); -4 - 5\}$, или $\{-1; 11; -9\}$ и значит $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$ имеет координаты $\{-1 + (-2); 11 + (-2); -9 + 6\}$, или $\{-3; 9; -3\}$.

412. Для вектора $\vec{i}$ противоположным будет вектор с обратным знаком: $(-\vec{i})$, для $\vec{j}$ - вектор $(-\vec{j})$ и т. д.

$\vec{i} \{1; 0; 0\}$; $-\vec{i} \{-1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$; $-\vec{j} \{0; -1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$; $-\vec{k} \{0; 0; -1\}$,
 $\vec{a} \{2; 0; 0\}$; $-\vec{a} \{-2; 0; 0\}$, $\vec{b} \{-3; 5; -7\}$; $-\vec{b} \{3; -5; 7\}$, $\vec{c} \{-0,3; 0; 1,75\}$;
 $-\vec{c} \{0,3; 0; -1,75\}$.

413. а) Координаты вектора $\vec{a} \{3; 6; 8\}$ и вектора $\vec{b} \{6; 12; 16\}$ пропорциональны: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16}$, где $k = \frac{1}{2}$.

Поэтому $\vec{a} = k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c} \{1; -1; 3\}$ и вектора $\vec{d} \{2; 3; 15\}$ не пропорциональны, например $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

Следовательно векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{i} \{1; 0; 0\}$ и вектора $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ не пропорциональны, следовательно, векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{m} \{0; 0; 0\}$ и вектора $\vec{n} \{5; 7; -3\}$ пропорциональны при $k=0$, следовательно, векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны. $\vec{m}=0$ коллинеарен любому вектору.

д) Координаты вектора $\vec{p} \{\frac{1}{3}; -1; 5\}$ и вектора $\vec{q} \{-1; -3; -15\}$ не пропорциональны, например $\frac{\frac{1}{3}}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$

Поэтому векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

414. Для коллинеарных векторов существуют коэффициент k такой, что $\vec{a} = k\vec{b}$; $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = k$.

$$а) \frac{15}{18} = \frac{m}{12} = \frac{1}{n} = \frac{5}{6},$$

$$m = \frac{5}{6} \cdot 12 = 5 \cdot 2 = 10,$$

$$б) \frac{m}{(-\frac{1}{2})} = \frac{0,4}{n} = -\frac{1}{5},$$

$$m = -\frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{2}) = 0,1,$$

$$n = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5} = 1,2;$$

$$n = -0,4 \cdot 5 = -2.$$

415. а) Векторы $\vec{a} \{-3; -3; 0\}$, $\vec{i} \{1; 0; 0\}$ и $\vec{j} \{0; 1; 0\}$ являются компланарными, т.к., записав равенство $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ через координаты, получим

$$\begin{cases} -3 = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ -3 = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \\ 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -3. \end{cases}$$

Вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$. Значит векторы $\vec{a}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ компланарны.

б) Запишем равенство $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}$ через координаты:

$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 = 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ -3 = 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, $\vec{b}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{k}$ через координаты: $\vec{c} \{1; 0; -2\}$, $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \\ -2 = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = x, \\ 0 = 0, \\ -2 = y. \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

Значит, векторы $\vec{c}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ компланарны.

г) Векторы $\vec{d} \{1; -1; 2\}$ и $\vec{e} \{-2; 0; 1\}$ не коллинеарны, т.к. координаты вектора $\vec{d}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{e}$. Если вектор $\vec{f} \{5; -1; 0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то это значит, что векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. В противном случае векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны.

Запишем $\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$ в координатах, получим

$$\begin{cases} 5 = x - 2y \\ -1 = -x \\ 0 = 2x + y \end{cases}$$

Система имеет решение: $x=1$, $y=-2$. Поэтому вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, и, следовательно, векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны.

д) Запишем равенство $\vec{m} = x\vec{n} + y\vec{p}$ в координатах:

$$2 = 1 \cdot x + 0 \cdot y,$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ не компланарны.

е) Запишем равенство $\vec{q} = x\vec{r} + y\vec{s}$ в координатах:

$$\begin{cases} 0 = 3x + y, \\ 5 = 3x + y, \\ 3 = 3x + 4y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x \\ y = 5 - 3x \\ y = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x \end{cases}$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{q} = \vec{r} + \vec{s}$ не компланарны.

416. А (3, 2; 1); В (1; -3; 5); С $(-\frac{1}{3}; 0,75; -2\frac{3}{4})$, т.к. согласно п.44, координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

417. ОА {2;-3;0}, ОВ {7;-12; 18} ОС {-8; 0; 5}, т.к. если О — начало координат, то ОА, ОВ и ОС — являются радиус-векторами для точек А, В и С и согласно п.44 имеют координаты.

418. а) АВ {2-3; -1+1; 4-2}, АВ {-1; 0; 2};

б) АВ {3+2; -1-6; 0+2}, АВ {5; -7; 2};

в) АВ $\{\frac{1}{2}-1; \frac{1}{3}-\frac{5}{6}; \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\}$, АВ $\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

419. А (1; 6; 2) и В (2; 3; -1). Координатами вектора АВ будут:

АВ {x_В-x_А; y_В-y_А; z_В-z_А}, АВ {2-1; 3-6; -1-2}, АВ {1; -3; -3}.

Разложив по координатным векторам $\vec{i}$ {1; 0; 0}, $\vec{j}$ {0; 1; 0} и $\vec{k}$ {0; 0; 1},

получим: АВ = $\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$.

Точки В (2; 3; -1) и С (-3; 4; 5) — концы вектора ВС.

ВС {-3-2; 4-3; 5+1}, ВС {-5; 1; 6}, ВС = $-5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$.

Точки А (1; 6; 2) и С (-3; 4; 5) — концы вектора СА.

СА {1+3; 6-4; 2-5}, СА {4; 2; -3}, СА = $4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

420. Определим координаты: АВ {2-3; 3+1; -4-5}, АВ {-1; 4; -9},

DC {7-8; 0+4; -1-8}, DC {-1; 4; -9}.

Т.к. АВ и DC имеют одинаковые координаты, то

1) их длины равны;

2) если их отложить от начала координат, то эти векторы совпадут.

Значит, векторы АВ и DC равны, что и требовалось доказать.

Рассмотрим векторы ВС и АД.

ВС {7-2; 0-3; -1+4}, ВС {5; -3; 3}. АД {8-3; -4+1; 8-5}, АД {5; -3; 3}.

У векторов ВС и АД тоже совпадают координаты, а значит, рассуждая аналогично, получим, что векторы совпадают.

421. а) Если векторы АВ и АС коллинеарны, то точки А, В и С лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки А, В и С не лежат на одной прямой. Вычислим координаты этих векторов: АВ {-8; 11; -7},

АС {24; -33; 21}. Заметим, АС = -3АВ, следовательно, векторы АВ и АС коллинеарны, т.е. точки А, В и С лежат на одной прямой.

б) Найдем координаты векторов АВ и АС. АВ {9; -15; -9},

АС {18; -30; -18}. Очевидно, что $AC=2 \cdot AB$, поэтому векторы АВ и АС коллинеарны, значит точки А, В, и С лежат на одной прямой.

в) Найдем координаты векторов АВ и АС. АВ {1; -9; 9}, АС {2; -18; -14}. Векторы АВ и АС не коллинеарны, значит, точки А, В и С не лежат на одной прямой.

422. Рассмотрим векторы DA, DB, DC.

а) Вычислим координаты векторов DA, DB и DC:

$$DA \{-2; -13; 3\} = \vec{a}, \quad DB \{1; 4; 1\} = \vec{b}, \quad DC \{-1; -1; -4\} = \vec{c}.$$

Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах (условие компланарности):

$$\begin{cases} x_a = mx_b + nx_c, \\ y_a = my_b + ny_c, \\ z_a = mz_b + nz_c, \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = m - n, \\ -13 = 4m - n, \\ 3 = m - 4n, \end{cases} \quad \begin{cases} m = n - 2, \\ 4m = n - 13, \\ m = 3 + 4n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n - 2, \\ n - 2 = 3 + 4n, \\ 4m = n - 13, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -\frac{5}{3}, \\ m = -\frac{11}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Получаем равенство: } -\frac{44}{3} = -\frac{5}{3} - 13 = \frac{-5 - 39}{3}.$$

$$\text{Признак компланарности векторов выполняется } DA = -\frac{11}{3} DB - \frac{5}{3} DC.$$

По определению векторы DA, DB и DC компланарны. Следовательно, точки А, В, С и D лежат в одной плоскости.

б) Определим координаты предполагаемых векторов:

$$AD \{2; -1; 3\} = \vec{d}, \quad AB \{3; 3; -1\} = \vec{b}, \quad AC \{-2; -4; 0\} = \vec{c}.$$

Признак компланарности векторов в координатах:

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c, \\ y_d = my_b + ny_c, \\ z_d = mz_b + nz_c, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 3m - 2n, \\ -1 = 3m - 4n, \\ 3 = -m - 0 \cdot n, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + 2n = 3m, \\ 4n = 3m + 1, \\ m = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2n = -9, \\ 4n = -8, \\ m = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -5,5, \\ n = -2, \\ m = -3. \end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, условие компланарности векторов не выполняется, точки А, В, С и D не лежат в одной плоскости.

в) Рассмотрим векторы:

$$AD \{-4; 2; -2\} = \vec{d}, \quad AB \{-7; 8; 1\} = \vec{b}, \quad AC (7; -14; -7) = \vec{c}.$$

Признак компланарности векторов $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах x, y, z:

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c \\ y_d = my_b + ny_c \\ z_d = mz_b + nz_c \end{cases} ; \quad \begin{cases} -4 = -7m + 7n \\ 2 = 8m - 14n \\ -2 = m - 7n \end{cases} ; \quad \begin{cases} 7m = 7n + 4 \\ 8m = 2 + 14n \\ m = 7n - 2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 7n = m + 2, \\ 7m = (m + 2) + 4, \\ 8m = 2 + 14n, \end{cases} \begin{cases} 6m = 6, \\ n = \frac{m}{7} + \frac{2}{7}, \\ 8m = 2 + 14n, \end{cases} \begin{cases} m = 1, \\ n = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем равенство:
 $8 = 2 + \frac{14 \cdot 3}{7}$; $8 = 8$.

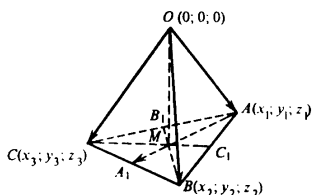
Следовательно, векторы компланарны при $m=1$, $n=\frac{3}{7}$. $\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{3}{7} \vec{AC}$.

При этом все три вектора отложены из одной точки, значит, точки А, В, С и D лежат в одной плоскости.

423. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, а М — точка их пересечения. Докажем, что точка М имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

Координаты точки равны координатам ее радиус-вектора. Выберем произвольно начало координат и начертим радиус-векторы $\vec{OM}$, $\vec{OC}$, $\vec{OB}$, и $\vec{OA}$. Их координаты будут соответствовать координатам точек М, С, В, А соответственно. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\vec{AM} = 2 \vec{MA_1}$.



Так как $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$, $\vec{MA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OM}$, то, подставив эти разности в наше равенство, получим:

$$\vec{OM} - \vec{OA} = 2(\vec{OA_1} - \vec{OM}), \text{ или } \vec{OM} + 2 \vec{OM} = \vec{OA} + 2 \vec{OA_1},$$

$$\text{или } 3 \vec{OM} = \vec{OA} + 2 \cdot \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}, \text{ т.к. } \vec{OA_1} = \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{2} \quad \text{или,}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right). \text{ Доказано.}$$

424. Координаты середины отрезка выражаются через координаты его начала и конца:

$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_B)$, $y_M = \frac{1}{2} (y_A + y_B)$, $z_M = \frac{1}{2} (z_A + z_B)$. Подставим координаты данных нам точек:

$$\text{а) } x_M = \frac{1}{2}(0-2); x_M = -1, y_M = \frac{1}{2}(3+2), y_M = \frac{5}{2} = 2,5; z_M = \frac{1}{2}(-4+0), z_M = -2;$$

$$\text{б) } 3 = \frac{1}{2}(14+x_B), x_B = -8; -2 = \frac{1}{2}(-8+y_B), y_B = 4; -7 = \frac{1}{2}(5+z_B); -14 = 5+z_B, z_B = -19;$$

$$\text{в) } -12 = \frac{1}{2}(x_A+0), x_A = -24; 4 = \frac{1}{2}(y_A+0), y_A = 8, \quad 15 = \frac{1}{2}(z_A+2), z_A = 28.$$

425. Пусть М — середина отрезка АВ. Тогда $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$,

$z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$. Т.к. точка лежит на Ох по условию, то справедливо:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B), \quad 0 = \frac{1}{2}(y_A + y_B), \quad 0 = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

$$\text{а) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(-3+2) \\ 0 = \frac{1}{2}(m-2) \\ 0 = \frac{1}{2}(5+n) \end{cases}; \begin{cases} \frac{m}{2} = 1 \\ \frac{n}{2} = -\frac{5}{2} \\ x_M = -\frac{3}{2} + 1 \end{cases}; \begin{cases} m = 2 \\ n = -5 \\ x_M = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(1+1) \\ 0 = \frac{1}{2}(0,5+m) \\ 0 = \frac{1}{2}(-4+2n) \end{cases}; \begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{4} \\ \frac{2n}{2} = 2 \\ x_M = 1 \end{cases}; \begin{cases} m = -\frac{1}{2} = -0,5 \\ n = 2 \\ x_M = 1 \end{cases}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(0+1) \\ 0 = \frac{1}{2}(m+n) \\ 0 = \frac{1}{2}(n+1-m+1) \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ \frac{n}{2} + 1 = \frac{m}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ m = n+2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = -n \\ 2m = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_M = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = -1 \end{cases}.$$

426. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ по определению, тогда

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ где } A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2).$$

$$\text{а) } A(-1; 0; 2), B(1; -2; 3),$$

$$|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2 + (3-2)^2}, \quad |AB| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

$$\text{б) } A(-35; -17; 20), B(-34; -5; 8),$$

$$|AB| = \sqrt{(-34+35)^2 + (-5+17)^2 + (8-20)^2},$$

$$|AB| = \sqrt{1^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{289} = 17.$$

$$427. |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ тогда } |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 36 + 1} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ имеет координаты: } \vec{c} \{1; 1; 1\}, |\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\vec{d} = -2\vec{k}; \vec{d} \{0; 0; -2\}, \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\vec{m} \{1; -2; 0\}, |\vec{m}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$$

$$428. |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2},$$

т.к. если $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$, то $\vec{d} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

$$a) |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6};$$

$$б) |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, |\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14},$$

$$в) |\vec{a}| - |\vec{b}| = \sqrt{14} - \sqrt{14} = 0;$$

$$г) |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2},$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (3+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2};$$

$$д) |3\vec{c}| = \sqrt{(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2}, \text{ т.к. } 3\vec{c} \{3x; 3y; 3z\},$$

$$|3\vec{c}| = \sqrt{(-3 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 3)^2} = \sqrt{9^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{126} = \sqrt{9 \cdot 14} = 3\sqrt{14}.$$

$$е) \sqrt{14} |\vec{c}| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 14;$$

$$ж) 2\vec{a} \{6; -4; 2\}, 3\vec{c} \{-9; 6; 3\}, 2\vec{a} - 3\vec{c} = \vec{m},$$

$$\vec{m} \{6+9; -4-6; 2-3\}, \vec{m} \{15; -10; -1\}, |\vec{m}| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + (-1)^2} = \sqrt{225+100+1} = \sqrt{326}.$$

429. Пусть К середина отрезка MN, тогда:

$$K \left(\frac{x_M + x_N}{2}, \frac{y_M + y_N}{2}, \frac{z_M + z_N}{2} \right); K \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{7-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right); K (-2; 3; 1),$$

$$\text{значит, } OK \{-2; 3; 1\} \text{ и } |OK| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

430. а) Чтобы найти периметр $\triangle ABC$, необходимо вычислить длины векторов $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{CA}$. Периметр треугольника равен их сумме.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vec{AB} \{x_B - x_A, y_B - y_A; z_B - z_A\},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(2 - \frac{3}{2})^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 \frac{1}{2}.$$

Аналогично $\vec{BC} \{2-2; 0-2; -1+3\}$, $\vec{BC} \{0; -2; 2\}$,

$$|\vec{BC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2};$$

$$\vec{CA} \left\{ \frac{3}{2}-2; 1-0; -2+1 \right\}, \vec{CA} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -1 \right\},$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

$$|\vec{AB}| + |\vec{BC}| + |\vec{CA}| = 1\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + 1\frac{1}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

б) AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы.

$$\vec{AA}_1 = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}), \quad \vec{BB}_1 = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}),$$

$$\vec{CC}_1 = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB});$$

$$\vec{AB} \left\{ 2-\frac{3}{2}; 2-1; -3+2 \right\}, \vec{AB} \left\{ \frac{1}{2}; 1; -1 \right\} \text{ и}$$

$$\vec{AC} \left\{ 2-\frac{3}{2}; 0-1; -1+2 \right\}, \vec{AC} \left\{ \frac{1}{2}; -1; 1 \right\}, \text{ следовательно}$$

$$\vec{AA}_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right); \frac{1}{2}(1-1); \frac{1}{2}(1-1) \right\}, \vec{AA}_1 \left\{ \frac{1}{2}; 0; 0 \right\},$$

$$|\vec{AA}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + 0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \vec{BA} = -\vec{AB}; \quad \vec{BA} \left\{ -\frac{1}{2}; -1; 1 \right\};$$

$$\vec{BC} \{2-2; 0-2; -1+3\}, \vec{BC} \{0; -2; 2\}, \text{ следовательно}$$

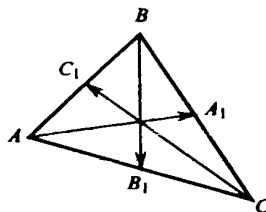
$$\vec{BB}_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right); \frac{1}{2}(-1-2); \frac{1}{2}(1+2) \right\}, \vec{BB}_1 \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\},$$

$$|\vec{BB}_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{73}{16}} = \frac{\sqrt{73}}{4}.$$

$$\vec{CA} = -\vec{AC}; \quad \vec{CA} \left\{ -\frac{1}{2}; 1; -1 \right\}; \quad \vec{CB} = -\vec{BC}; \quad \vec{CB} \{0; 2; -2\}, \text{ следовательно}$$

$$\vec{CC}_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right); \frac{1}{2}(1+2); \frac{1}{2}(-1-2) \right\}, \vec{CC}_1 \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\} \text{ и}$$

$$|\vec{CC}_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{4} = |\vec{BB}_1|.$$



431. Сравним длины сторон треугольника. Для этого по формуле расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ найдем $|\vec{AB}|$, $|\vec{BC}|$, $|\vec{AC}|$. Если $a=b=c$, то треугольник ABC — равносторонний. Если:

$c=b \neq a$, то треугольник равнобедренный, если нет одинаковых сторон: $c \neq b \neq a$, то есть если $a > b \geq c$, то следует проверить, выполняется ли теорема Пифагора. Если да, то $\triangle ABC$ — прямоугольный.

$$a) AB = \sqrt{(9-2)^2 + (3-10)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{49+49+0} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}.$$

$$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (10-3)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{0+49+49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}.$$

$$AC = \sqrt{(9-2)^2 + (3-3)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{49+0+49} = 7\sqrt{2}.$$

$AB=BC=AC$, треугольник равносторонний.

$$б) AB = \sqrt{(3-5)^2 + (7+3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140},$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-3-3)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{16+36+144} = \sqrt{196},$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (7-3)^2 + (-4+10)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56},$$

$BC > AB > AC$.

Проверим, выполняется ли равенство:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2, (\sqrt{196})^2 = (\sqrt{56})^2 + (\sqrt{140})^2,$$

$196 = 56 + 140 = 196$ — верно. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

$$в) AB = \sqrt{(5-5)^2 + (3-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{0+4+0} = 2,$$

$$BC = \sqrt{(5-4)^2 + (-3+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(5-4)^2 + (-5+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},$$

$AC > AB > BC$.

Проверим, выполняется ли равенство $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$6 = 4 + 2$ — выполняется. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный разносторонний.

$$г) AB = \sqrt{(-5+4)^2 + (2-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{(-4+5)^2 + (3-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6},$$

$$AC = \sqrt{(-5+5)^2 + (2-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{0+0+4} = 2.$$

$BC > AC > AB$.

Проверим: $BC^2 = AC^2 + AB^2$, $6 = 4 + 2$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный равносторонний.

432. Дано: $A(-3; 4; -4)$, Следовательно, точка A_1 — проекция точки A на Oxy — имеет координаты $A_1(-3; 4; 0)$,

A_2 — проекция точки A на Oyz — имеет координаты: $A_2(0; 4; -4)$, A_3 — проекция точки A на Oxz — имеет координаты: $A_3(-3; 0; -4)$. По формуле

расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$\text{Найдем } AA_1 = \sqrt{0+0+4^2} = 4, \quad AA_2 = \sqrt{3^2+0+0} = 3, \quad AA_3 = \sqrt{0+4^2} = 4,$$

таким образом для $A(x; y; z)$ расстояниями до координатных плоскостей будут $|x|$, $|y|$ и $|z|$.

б) На ось Ox проекция A_1 точки A имеет координаты $A_1(-3; 0; 0)$, на Oy : $A_2(0; 4; 0)$, на Oz : $A_3(0; 0; -4)$.

$$AA_1 = \sqrt{0 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}; \quad AA_2 = \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5; \quad AA_3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

433. Искомая точка для каждой плоскости – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки A на соответствующую плоскость. Следовательно, искомые точки имеют координаты $(0; 2; -3)$, $(-1; 0; -3)$, $(-1; 2; 0)$.

434. Наименьшее расстояние — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось координат, то есть расстояние между точкой и ее проекцией на ось координат. Координатами проекций точки на координатные оси будут абсцисса, ордината и аппликата этой точки. Следовательно, для $B(3; -4; \sqrt{7})$ проекция на ось Ox будет иметь координаты $B_1(3; 0; 0)$, на Oy : $B_2(0; -4; 0)$, на Oz : $B_3(0; 0; \sqrt{7})$.

435. Найдем длины сторон $\triangle ABC$ по формуле расстояния между двумя точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

$$|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + (k-3)^2} = \sqrt{8 + (k-3)^2},$$

$$|BC| = \sqrt{(0+1)^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$|AC| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{1 + (k-1)^2}.$$

Треугольник будет равнобедренным, если будет выполнено одно из трех условий: 1) $AB=BC$, или 2) $AB=AC$, или 3) $AC=BC$.

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{8 + (k-3)^2} = 3, & 2) \sqrt{8 + (k-3)^2} = \sqrt{1 + (k-1)^2}, \\ 8 + (k-3)^2 = 9, & 8 + (k-3)^2 = 1 + (k-1)^2, \\ (k-3)^2 = 1, & 8 + k^2 + 9 - 6k = 1 + k^2 - 2k + 1, \\ \left[\begin{array}{ll} k-3 = 1, & k = 4, \\ k-3 = -1, & k = 2. \end{array} \right. & 17 - 2 = 4k \\ & 15 = 4k, \quad k = \frac{15}{4} = 3,75. \end{array}$$

$$3) \sqrt{1 + (k-1)^2} = 3$$

$$1 + (k-1)^2 = 9, \quad (k-1)^2 = 8, \quad k-1 = 2\sqrt{2}, \quad k = 2\sqrt{2} + 1, \quad k-1 = -2\sqrt{2}, \quad k = 1 - 2\sqrt{2}.$$

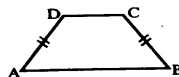
436. По формуле расстояния между двумя точками вычислим длины сторон трапеции $ABCD$:

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2 + 0} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{0 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2},$$

$$DA = \sqrt{(4-0)^2 + (4-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5.$$



$|AD|=|CB|=5$, следовательно, ABCD будет равнобедренной трапецией, если доказать, что $DC \parallel AB$, то есть, что DC и AB коллинеарны.

Если существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$ и $\vec{a} \neq 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

AB $\{-4; -4; 0\}$, CD $\{1; 1; 0\}$.

Очевидно, что $AB = -4CD$, т. е. AB и CD коллинеарны. значит, $AB \parallel CD$ и ABCD — равнобедренная трапеция.

437. Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} :$$

а) Пусть С (x ; 0; 0) — точка на оси Ох, равноудаленная от точек А и В. Следовательно, $CA=CB$, или в координатах:

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (2-0)^2 + (-3-0)^2} ,$$

$$\sqrt{4+4x+x^2+9+25} = \sqrt{9-6x+x^2+4+9} ,$$

$$\sqrt{x^2+4x+38} = \sqrt{x^2-6x+22}$$

$$x^2+4x+38=x^2-6x+22, \quad 10x=-16, x=-1,6; \text{ C } (-1,6; 0; 0).$$

Равноудаленной от точек А и В будет точка С ($-1,6; 0; 0$).

б) Пусть D (0; y ; 0) — точка на оси Оу, равноудаленная от А и В. $AD=DB$.

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (3-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-y)^2 + (-3-0)^2}$$

$$\sqrt{4+9-6y+y^2+25} = \sqrt{9+4-4y+y^2+9} ,$$

$$\sqrt{y^2-6y+38} = \sqrt{y^2-4y+22}$$

$$y^2-6y+38=y^2-4y+22, \quad 2y=16, \quad y=8; \text{ D } (0; 8; 0).$$

в) Пусть E (0; 0; z) — точка на оси Oz, равноудаленная от А и В.

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2 + (5-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (-3-z)^2}$$

$$\sqrt{4+9+25-10z+z^2} = \sqrt{9+4+9+6z+z^2} ,$$

$$\sqrt{z^2-10z+38} = \sqrt{z^2+6z+22}$$

$$z^2-10z+38=z^2+6z+22, \quad 16z=16, \quad z=1; \text{ E } (0; 0; 1).$$

438. а) Пусть на плоскости Оху точка Р (x ; y ; 0) равноудалена от А, В и С. Используя формулу

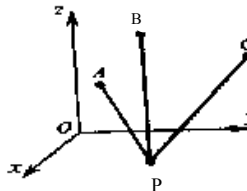
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} , \text{ со-}$$

ставим систему уравнений: $\begin{cases} AP = BP, \\ AP = CP \end{cases}$

$$AP = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-0)^2} =$$

$$= \sqrt{1+2x+x^2+4-4y+9+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14} ,$$

$$BP = \sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4x+x^2+1-2y+y^2+4} =$$



$$\begin{aligned}
&= \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9}, \\
CP &= \sqrt{(0-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1} = \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}, \\
&\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}, \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = x^2 + y^2 + 2y + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2y = 5; \\ 6y = 2x + 12; \end{cases}; & \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2x + 2(2 + \frac{1}{3}x) = 5; \end{cases}; & \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2y + 4 + \frac{2}{3}x = 5; \end{cases}; \\ \begin{cases} y = 2 + \frac{1}{3}x; \\ 2\frac{2}{3}x = 1; \end{cases}; & \begin{cases} \frac{8}{3}x = 1; \\ y = 2 + \frac{1}{3}x; \end{cases}; & \begin{cases} x = \frac{3}{8}; \\ y = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}; \end{cases}; & \begin{cases} x = \frac{3}{8}; \\ y = 2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Точка $P(\frac{3}{8}; \frac{17}{8}; 0)$ лежит на плоскости Oxy и равноудалена от точек A , B и C .

б) Пусть на координатной плоскости Oyz точка $Q(0; y; z)$ равноудалена от A , B и C , следовательно

$$\begin{cases} AQ = BQ, \\ AQ = CQ \end{cases} \quad (\text{очевидно, что и } BQ = CQ).$$

$$\begin{aligned}
AQ &= \sqrt{(-1-0)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2} = \sqrt{1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2} = \\
&= \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14}, \\
BQ &= \sqrt{(-2-0)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2} = \sqrt{4 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2} = \\
&= \sqrt{y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9}, \\
CQ &= \sqrt{(0-0)^2 + (-1-y)^2 + (1-z)^2} = \sqrt{0 + 1 + 2y + y^2 + 4 - 4z + z^2} = \\
&= \sqrt{y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2}. \\
&\begin{cases} \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14} = \sqrt{y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9}, \\ \sqrt{y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14} = \sqrt{y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2}, \\ \begin{cases} y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 9, \\ y^2 + z^2 - 4y - 6z + 14 = y^2 + z^2 + 2y - 2z + 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + 2z = 5; \\ 6y + 4z = 12; \end{cases}; & \begin{cases} y = \frac{5}{2} - z; \\ \frac{6 \cdot 5}{2} - 6z + 4z = 12; \end{cases}; & \begin{cases} y = \frac{5}{2} - z; \\ 2z = 3; \end{cases}; & z = \frac{3}{2}; \quad y = 1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

$$Q(0; 1; \frac{3}{2}).$$

в) Пусть на координатной плоскости Ozx точка R (x, 0; z) равноудалена от точек A, B и C, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR, \\ AR = CR \end{cases}$$

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{(-1-x)^2 + (2-0)^2 + (3-z)^2} = \\ &= \sqrt{1+2x+x^2+4+9-6z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}, \\ BR &= \sqrt{(-2-x)^2 + (1-0)^2 + (2-z)^2} = \\ &= \sqrt{4+4x+x^2+1+4-4z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}, \\ CR &= \sqrt{(0-x)^2 + (-1-0)^2 + (1-z)^2} = \\ &= \sqrt{x^2+1+1-2z+z^2} = \sqrt{x^2+z^2-2z+2}, \\ \begin{cases} \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14} = \sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}, \\ \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14} = \sqrt{x^2+z^2-2z+2}, \\ \begin{cases} x^2+z^2+2x-6z+14 = x^2+z^2+4x-4z+9, \\ x^2+z^2+2x-6z+14 = x^2+z^2-2z+2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2z=5, \\ 2x=4z-12, \end{cases} & \begin{cases} x=2z-5, \\ 4z-12+2z=5, \end{cases} & \begin{cases} x=2z-6, \\ 6z=17, \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} z = \frac{17}{6}, \\ x = \frac{17}{3} - 6 = -\frac{1}{3}; \end{cases} & R(-\frac{1}{3}; 0; \frac{17}{6}). \end{aligned}$$

439. а) Пусть точка R — центр окружности, описанной около $\triangle AOB$, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR = r, \\ AR = OR = r \end{cases} \text{ где } r \text{ — радиус окружности;}$$

Точки A, O, B и R лежат в одной плоскости.

Точка O (0; 0; 0) совпадает с началом координат, A (4; 0; 0) лежит на оси Oх; B (0; 6; 0) лежит на оси Oy, следовательно, $\triangle AOB$ лежит в координатной плоскости Oxy, тогда, центр описанной окружности лежит в той же плоскости. Следовательно, координаты центра: R (x; y; 0). По формуле расстояния между двумя точками:

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{(4-x)^2 + (0-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16-8x+x^2+y^2}, \\ BR &= \sqrt{(0-x)^2 + (6-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x^2+36-12y+y^2}, \\ OR &= \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{16+x^2+y^2-8x} = \sqrt{x^2+y^2-12y+36} \\ \sqrt{16+x^2+y^2-8x} = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x+16 = x^2+y^2-12y+36 \\ x^2+y^2-8x+16 = x^2+y^2 \end{cases}; \begin{cases} 8x = 12y-20 \\ 8x = 16 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{36}{12} = 3 \end{cases};$$

Координаты центра окружности, описанной около $\triangle AOB$: $R(2; 3; 0)$. Радиус описанной окружности равен $AR=BR=OR=r$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

б) Если точка $R(x; y; z)$ равноудалена от вершин тетраэдра $OABC$, то

$$\begin{cases} OR = AR \\ AR = BR \\ BR = CR \end{cases}$$

$$OR = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$AR = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2},$$

$$BR = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36 + z^2},$$

$$CR = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4}.$$

Можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16} \\ \sqrt{x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16} = \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36} \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4} \end{cases};$$

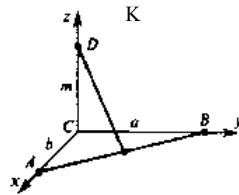
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16 \\ x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16 = x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 \\ x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + z^2 + 16 = x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 \\ x^2 + y^2 - 12y + z^2 + 36 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8x = 16 \\ 12y = 8x + 20 \\ 12y + 4z = 32 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ 12y = 36 \\ 36 + 4z = 32 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}.$$

440. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C и с осями: Ox — по отрезку CA , Oy — по отрезку CB , тогда точка D будет лежать на оси Oz . Пусть точка K — середина AB . Во введенной системе координат $A(b; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(0; 0; m)$.

$$\text{Точка } K\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right),$$



Подставляя координаты точек А и В, получим: $K(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

Следовательно:

$$|DK| = \sqrt{(\frac{b}{2} - 0)^2 + (\frac{a}{2} - 0)^2 + (0 - m)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + m^2}.$$

441. Сделаем рисунок.

а) Векторы $\vec{BB_1}$ и $\vec{B_1C}$ совпадают с катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1C , следовательно, $\angle BB_1C = 45^\circ$.

б) $\vec{BD} = \vec{B_1D_1}$, т.к. они сонаправлены и имеют одинаковую длину. $\vec{BD} = \vec{B_1D_1} = -\vec{DB}$.

Угол между $\vec{DB}$ и $\vec{DA}$ — угол между стороной и диагональю квадрата, т. е. $\alpha = 45^\circ$. Тогда угол между

$\vec{DA}$ и $\vec{B_1D_1}$ равен 135° .

$$\vec{DA} \wedge \vec{DB} = 135^\circ = \vec{DA} \wedge \vec{B_1D_1}.$$

в) $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1B}$ совпадают со сторонами равностороннего треугольника ABC и отложены из одной точки. Следовательно, угол 60° .

г) $\vec{BC} = \vec{AD}$; $\vec{BC} \wedge \vec{AC} = \vec{AC} \wedge \vec{AD} = 45^\circ$ (угол между стороной и диагональю квадрата).

$$\vec{BB_1} = \vec{AA_1}, \vec{BB_1} \wedge \vec{AC} = \vec{AA_1} \wedge \vec{AC} = 90^\circ.$$

е) $AD_1 \perp BC_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей B_1C и BC_1 , $BC_1 = 2OC_1$; $B_1C = 2OC$, следовательно,

$$\vec{BC_1} \wedge \vec{B_1C} = \vec{OC_1} \wedge \vec{OC} = 90^\circ.$$

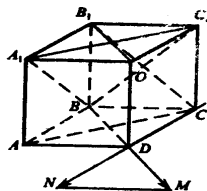
$$\text{ж) } \vec{A_1D_1} = \vec{BC}, \text{ следовательно, } \vec{A_1D_1} \wedge \vec{BC} = 0^\circ.$$

$$\text{з) } \vec{AA_1} = -\vec{C_1C}, \text{ следовательно, угол между ними равен } 180^\circ.$$

442. Угол $\vec{AB} \wedge \vec{CD} = \varphi$, тогда угол между векторами (1) $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$ равен φ , (2) $\vec{BA}$ и $\vec{CD}$ равен $180^\circ - \varphi$, (3) $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ равен $180^\circ - \varphi$.

Отложим вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ от одной точки и построим векторы $\vec{BA}$, $\vec{DC}$.

Тогда в случае (1) углы между векторами $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ и $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$ равны как вертикальные; в случаях (2) и (3) углы вычисляются как смежные.



$$443. \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

$$a) \vec{AD} \cdot \vec{B_1C_1} = |\vec{AD}| \cdot |\vec{B_1C_1}| \cdot \cos(\vec{AD} \wedge \vec{B_1C_1}) = a^2,$$

$$\text{Т.к. } \cos(\vec{AD} \wedge \vec{B_1C_1}) = 1 \text{ и } |\vec{AD}| = |\vec{B_1C_1}|$$

$$b) \vec{AC} = -\vec{C_1A_1}, \cos(\vec{AC} \wedge \vec{C_1A_1}) = \cos 180^\circ = -1,$$

$$|\vec{AC}| = |\vec{C_1A_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{C_1A_1} = \sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot (-1) = -2a^2.$$

в) $D_1B \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах),

$$\cos(\vec{D_1B} \wedge \vec{AC}) = \cos 90^\circ = 0, \vec{D_1B} \cdot \vec{AC} = 0.$$

г) $\vec{BA_1}$ совпадает с диагональю грани куба, как и $\vec{BC_1}$.

$$|\vec{BA_1}| = |\vec{BC_1}| = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\triangle BA_1C_1 \text{ — равносторонний, } \angle A_1BC_1 = 60^\circ = \vec{BA_1} \wedge \vec{BC_1}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\vec{BA_1} \cdot \vec{BC_1} = |\vec{BA_1}| \cdot |\vec{BC_1}| \cdot \cos(\vec{BA_1} \wedge \vec{BC_1}) = \sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} = a^2.$$

$$d) \vec{A_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{A_1C_1}, \cos(\vec{A_1O_1} \wedge \vec{A_1C_1}) = \cos 0^\circ = 1,$$

$$|\vec{A_1O_1}| = |\vec{A_1C_1}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2}, \vec{A_1O_1} \cdot \vec{A_1C_1} = \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot 1 = a^2.$$

$$e) \vec{D_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{D_1B_1}, \vec{B_1O_1} = \frac{1}{2} \vec{B_1D_1} = -\frac{1}{2} \vec{D_1B_1} = -\vec{D_1O_1}.$$

$$\vec{D_1O_1} \wedge \vec{B_1O_1} = 180^\circ, \cos 180^\circ = -1, |\vec{D_1O_1}| = |\vec{B_1O_1}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2},$$

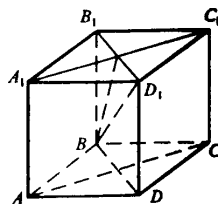
$$\vec{D_1O_1} \cdot \vec{B_1O_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2} \cdot (-1) = \frac{1}{4} \cdot 2a^2 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} a^2.$$

ж) $\vec{BO_1}$ совпадает с гипотенузой прямоугольного $\triangle BB_1O_1$, у которого ка-

$$\text{теты: } |\vec{BB_1}| = a, |\vec{B_1O_1}| = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2},$$

$$|\vec{BO_1}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} \cdot 2a^2} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, |\vec{C_1B}| = \sqrt{2a^2},$$

$$\vec{BO_1} \wedge \vec{C_1B} = 180^\circ - (\vec{BO_1} \wedge \vec{BC_1}) = 180^\circ - \angle O_1BC_1.$$



$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$, т.к. $\triangle BA_1C_1$ — равносторонний

$$\begin{aligned} \vec{BO}_1 \cdot \vec{C_1B} &= |\vec{BO}_1| \cdot |\vec{C_1B}| \cdot \cos 150^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2a^2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \\ &= a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = a^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{3} = -\frac{3}{2} a^2. \end{aligned}$$

444. Пусть $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,
тогда $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 5 - 6 + 4 = 3$,
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 - 1 + 2 = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -5 + 6 + 2 = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 + 1 + 4 = 6$, $\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$.

445. $\vec{a} \{3; -5; 1\}$, $\vec{b} \{0; 1; -5\}$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -10$;

б) $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{a} \cdot \vec{i} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3$;

в) $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{b} \cdot \vec{j} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 1$;

г) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{k} = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{b} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$,

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{k} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = 1 - 5 = -4$;

д) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j}) = \vec{a} \cdot \vec{k} + \vec{a} \cdot \vec{i} - 2\vec{a} \cdot \vec{j} - \vec{b} \cdot \vec{k} - 2\vec{b} \cdot \vec{i} + 4\vec{b} \cdot \vec{j} = (3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1) + (3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0) - 2(3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0) - 2(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + 4(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 1 + 3 + 10 + 10 + 4 = 28$.

446. $\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, далее если $0 < \alpha < 90^\circ$ (острый

угол), то $\cos \alpha > 0$, если $\cos \alpha = 0$, то $\alpha = 90^\circ$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos \alpha < 0$.

$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} > 0$ для любых векторов, отличных от нулевого. Тогда знак $\cos \alpha$ совпадает со знаком числителя.

а) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0$, т.к. $3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 + (0 \cdot 1) = -15 - 1 = -16 < 0$, следовательно, угол тупой;

б) $\cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) > 0$, т.к. $-5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 > 0$, следовательно, угол острый;

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 0$, т.к. $3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + (1 \cdot 1) = -3 + 2 + 1 = 0$, следовательно, угол прямой

447. $\vec{i} \{1; 0; 0\}$; $\vec{j} \{0; 1; 0\}$; $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ знак $\cos \alpha$ зависит от знака числителя.

а) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{i} < 90^\circ$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3$, $3 > 0$, следовательно, все выражение положительное. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) > 0$, $\vec{a} \wedge \vec{i} < 90^\circ$.

б) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$, то $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90^\circ$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + (0 \cdot 0) = -5$, $-5 < 0$, следовательно, все выражение отрицательно. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) < 0$, $\vec{a} \wedge \vec{j} > 90^\circ$.

в) $\vec{a} \cdot \vec{k} = 90^\circ$, когда $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$. $\cos \alpha = 0$, если числитель равен нулю.

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, следовательно, $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{k} = 90^\circ$.

448. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 5 + 2x - 3 \cdot 1 = 2x - 8$.

По условию задачи: $2x - 8 = 3$, $2x = 11$, $x = 5 \frac{1}{2} = 5,5$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x - 8 = -1$, $2x = 7$, $x = 3,5$;

в) $\vec{a} \perp \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, когда $\cos \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$, $-1 \cdot 5 + 2x - 3 \cdot 1 = 2x - 8 = 0$, $x = 4$.

449. $\vec{a} \{m; 3; 4\}$; $\vec{b} \{4; m; -7\}$,

Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

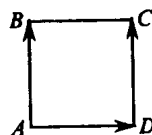
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 0$, $7m = 28$, $m = 4$.

450. Докажем, что $\left| \vec{AB} \right| = \left| \vec{DC} \right|$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $\left| \vec{AB} \right| = \left| \vec{AD} \right|$:

$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{2}$

$\left| \vec{DC} \right| = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{2}$

$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{2}$ аналогично. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = (2 - 1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$



Таким образом, $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{AD}$,

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, следовательно, ABCD — квадрат.

451. Применим формулу: $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

а) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{4 + 4 + 0} \cdot \sqrt{9 + 0 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ;$$

$$\text{б) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\sqrt{2} \cdot (-3) + \sqrt{2} \cdot (-3) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2+2+4} \cdot \sqrt{9+9+0}} = \frac{-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \vec{a} \wedge \vec{b} < 0, \text{ значит, это тупой угол, } \vec{a} \wedge \vec{b} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ;$$

$$\text{в) } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{0 \cdot 0 + 5 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1}{\sqrt{0+25+0} \cdot \sqrt{0+3+1}} = \frac{-5 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0, \text{ значит, угол тупой, } \vec{a} \wedge \vec{b} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

$$\text{г) аналогично, воспользовавшись формулой, получим } \vec{a} \wedge \vec{b} = 45^\circ$$

452. $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$. Воспользуемся формулой (см. 451):

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{2 \cdot 1 + 0 + 0}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+0+0}} = \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}; \vec{a} \wedge \vec{i} = 50^\circ 46';$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3}; \vec{a} \wedge \vec{j} = 63^\circ 26';$$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3}; \vec{a} \wedge \vec{k} = 50^\circ 46'.$$

$$\text{453. } \vec{CA} \{1-1; 3-2; 0+1\}, \vec{CA} \{0; 1; 1\};$$

$$\vec{CB} \{2-1; 3-2; -1+1\}, \vec{CB} \{1; 1; 0\};$$

$$\cos(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) = \frac{0+1+0}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \vec{CA} \wedge \vec{CB} = 60^\circ.$$

$$\text{454. } \cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\vec{AB} \{3-1; -1+1; 1-3\}, \vec{AB} \{2; 0; -2\}, \vec{BA} \{-2; 0; 2\};$$

$$\vec{AC} \{-1-1; 1+1; 3-3\}, \vec{AC} \{-2; 2; 0\}, \vec{CA} \{2; -2; 0\};$$

$$\vec{BC} \{-1-3; 1+1; 3-1\}, \vec{BC} \{-4; 2; 2\}, \vec{CB} \{4; -2; -2\}.$$

$$\cos(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \frac{-4+0+0}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{4+4}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}; \vec{AB} \wedge \vec{AC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\cos(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) = \frac{-2(-4)+0 \cdot 2+2 \cdot 2}{\sqrt{4+0+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\vec{BA} \wedge \vec{BC} = 30^\circ;$$

$$\cos(\vec{CA} \wedge \vec{CB}) = \frac{2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{16+4+4}} = \frac{8+4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

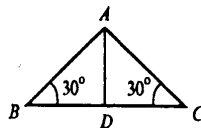
$\vec{CA} \wedge \vec{CB} = 30^\circ$, следовательно, углы при основании равны. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Вычислим $|\vec{BC}|$ и $|\vec{AB}|$ ($|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$): $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$|\vec{BC}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$P = |\vec{BC}| + 2|\vec{AB}| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} (2 + \sqrt{3}).$$



Вычислим площадь $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD$, где $AD \perp BC$.

Точка D — середина отрезка BC, т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Тогда D (1;0;2).

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

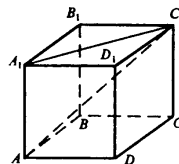
$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}.$$

455. Пусть сторона куба равна a , следовательно:

а) В прямоугольном треугольнике AA_1C_1 положим, $AA_1 = 1$, тогда $A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ по теореме Пифагора.

$$|\vec{AC_1}| = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos(\vec{AA_1} \wedge \vec{AC_1}) = \cos \angle A_1AC_1 = \frac{AA_1}{A_1C_1} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



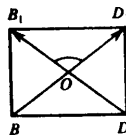
б) Векторы $|\vec{BD_1}|$ и $|\vec{DB_1}|$ лежат в плоскости BB_1D , сечение куба этой плоскостью — это прямоугольник BB_1D_1D со сторонами a и $a\sqrt{2}$.

$$\vec{BD_1} \wedge \vec{DB_1} = \angle B_1OD_1.$$

По теореме косинусов в $\triangle B_1\hat{I}D_1$:

$$|\vec{B_1D_1}|^2 = |\vec{OB_1}|^2 + |\vec{OD_1}|^2 - 2|\vec{OB_1}| \cdot |\vec{OD_1}| \cos \angle B_1OD_1.$$

$$|\vec{OB_1}| = |\vec{OD_1}| = \frac{1}{2} |\vec{DB_1}| = \frac{1}{2} |\vec{AC_1}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |\vec{B_1D_1}| = |\vec{A_1C_1}| = a\sqrt{2}, \text{ следовательно}$$



тельно

$$\cos \angle B_1OD_1 = \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2}) \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{2})} = \frac{|\vec{OB_1}|^2 + |\vec{OD_1}|^2 - |\vec{B_1D_1}|^2}{2\vec{OB_1} \cdot \vec{OD_1}}$$

$$= \frac{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

в) $C_1C \perp BD$, $AC \perp BD$ (по свойству диагонали квадрата).

Следовательно, BD перпендикулярно плоскости AC_1C , тогда, $BD \perp AC_1$,

$$\cos(\vec{BD} \wedge \vec{AC_1}) = \cos 90^\circ = 0.$$

456. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке D . Тогда, координаты вершин прямоугольного параллелепипеда:

$A(2;0;0)$; $A_1(2;0;2)$; $B(2;1;0)$; $B_1(2;1;2)$; $C(0;1;0)$; $C_1(0;1;2)$;

$D(0;0;0)$; $D_1(0;0;2)$.

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где $\vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha$, $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$; $\vec{a} \neq 0$; $\vec{b} \neq 0$.

$\vec{DB} \{2; 1; 2\}$, а это координаты точки B_1 .

$\vec{BC_1} \{0-2; 1-1; 2-0\}$, $\vec{BC_1} \{-2; 0; 2\}$.

$$\cos(\vec{DB_1} \wedge \vec{BC_1}) = \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+0+4}} = \frac{-4+4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{8}} = 0$$

$$\vec{DB_1} \wedge \vec{BC_1} = 90^\circ.$$

457. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{c}) = 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

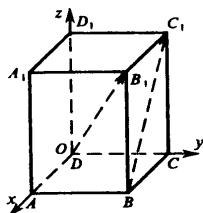
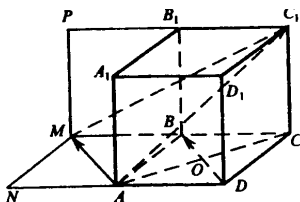
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 2;$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1 + 2 = 3.$$

458. см. учебник.

$$\begin{aligned} \text{459. а) } (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (2\vec{b}) &= ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) \cdot (2\vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2\vec{b} \cdot \vec{a} + \\ &+ 2\vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos 120^\circ + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 90^\circ = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = -1 + 2 = 1; \\ (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} + \\ &+ \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \end{aligned}$$

$$\cos 0^\circ - |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ - |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cos 0^\circ + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 90^\circ = 1 - \frac{1}{2} - 1 + 0 = \frac{1}{2};$$



б) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{p}|$, где по теореме косинусов

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)} = \sqrt{1+1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{d}|.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(180^\circ - \vec{a} \wedge \vec{b}\right)} = \sqrt{1+1-1} = 1$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2, \text{ следовательно, } |\vec{d}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

460. см.учебник.

461. Пусть $\vec{DA} = \vec{a}$; $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$;
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 60^\circ$.

Выразим $\vec{MN}$ и $\vec{BC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{c} - \vec{b}, \quad \vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DB} + \vec{BN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \\ &+ \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}), \\ \vec{MN} \cdot \vec{AD} &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(-\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} = \\ &= -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ - \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0. \\ \vec{MN} \cdot \vec{BC} &= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \\ &\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \text{ т.к. } \vec{c}^2 = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot 1 = \vec{b}^2 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1, \end{aligned}$$

т.к. $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ по условию; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, т.к. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 60^\circ$.

462. Воспользуемся свойством параллелепипеда.

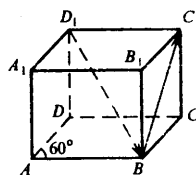
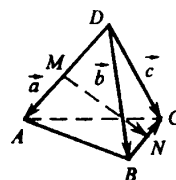
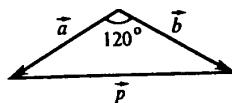
$$1) \vec{BA} \cdot \vec{D_1C_1} = (-\vec{AB}) \cdot \vec{D_1C_1} = -\vec{AB}^2 = -1 \text{ (т.к. } \vec{AB} = \vec{D_1C_1}, \vec{AB} \parallel \vec{D_1C_1},$$

по свойству параллелепипеда, то $\vec{AB} = \vec{D_1C_1}$).

$$2) \vec{BC_1} = \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AD} + \vec{AA_1}$$

$$\vec{D_1B} = \vec{D_1C_1} + \vec{C_1C} + \vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD},$$

$$\begin{aligned} \vec{BC_1} \cdot \vec{D_1B} &= (\vec{AD} + \vec{AA_1})(\vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD}) = \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - \vec{AD}^2 + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AA_1}^2 - \end{aligned}$$



$$-\vec{AA_1} \cdot \vec{AD} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = \frac{1}{2} - 1 - 1 = -1,5.$$

$$3) \vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1},$$

$$\begin{aligned} \vec{AC_1} \cdot \vec{AC_1} &= (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = \vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \\ &+ \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \vec{AA_1}^2 = 1 + 1 \cdot \cos 60^\circ + \\ &+ 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 + 1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

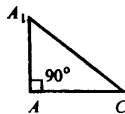
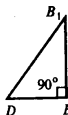
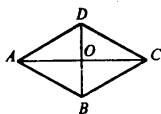
4) В основании параллелепипеда лежит ромб ABCD, у которого $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $AD = 1$, $AB = 1$, откуда следует, что

а) $\angle ADB = \angle DBA = 60^\circ$,

б) $DB = 1$.

В $\triangle DBB_1$: $DB = 1$, $BB_1 = AA_1 = 1$, $\angle DBB_1 = 90^\circ$ ($BB_1 \perp$ плоскости основания, т.к. $AA_1 \perp$ плоскости основания и $BB_1 \parallel AA_1$)

$$|\vec{DB_1}| = \sqrt{|\vec{BB_1}|^2 + |\vec{DB}|^2} = \sqrt{2}.$$



5) Рассмотрим основание параллелепипеда. $AC = 2AO$, где O — точка пересечения диагоналей ромба. AO — высота в равностороннем $\triangle ADB$,

$$AO = AB \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AC = \sqrt{3}.$$

В прямоугольном $\triangle AA_1C$

$$|\vec{A_1C}| = \sqrt{A_1A^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

$$6) \vec{DA_1} = (-\vec{AD}) + \vec{AA_1}, \quad \vec{D_1B} = \vec{D_1D} + \vec{DA} + \vec{AB} = -\vec{AA_1} - \vec{AD} + \vec{AB},$$

$$\begin{aligned} \vec{DA_1} \cdot \vec{D_1B} &= (\vec{AA_1} - \vec{AD}) (\vec{AB} - \vec{AA_1} - \vec{AD}) = \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AA_1}^2 - \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} - \\ &- \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD}^2 = \vec{AD}^2 - \vec{AA_1}^2 + \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 1 - 1 + 0 - \\ &- 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\angle \vec{DA_1} \wedge \vec{D_1B}) = \frac{\vec{DA_1} \cdot \vec{D_1B}}{|\vec{DA_1}| |\vec{D_1B}|}, \quad |\vec{DA_1}| = \sqrt{AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{DB}| = |\vec{DB}_1| = \sqrt{2}, \quad \cos(\vec{DA}_1 \wedge \vec{D_1B}) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \vec{AC}_1 &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1, \quad \vec{DB}_1 = -\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{BB}_1 = \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AA}_1, \\ \vec{AC}_1 \cdot \vec{DB}_1 &= (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AA}_1) = \vec{AB}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} - \\ &- \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AA}_1 + \vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{AA}_1 \cdot \vec{AD} + \vec{AA}_1^2 = \vec{AB}^2 + 2 \vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} - \\ &- \vec{AD}^2 + \vec{AA}_1^2 = 1 + 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 1, \quad |\vec{AC}_1| = |\vec{A_1C}| = 2, \quad |\vec{DB}_1| = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\cos(\vec{AC}_1 \wedge \vec{DB}_1) = \frac{\vec{AC}_1 \cdot \vec{DB}_1}{|\vec{AC}_1| |\vec{DB}_1|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

463. см. учебник.

$$464. \cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$a) \quad \vec{AB} \{1; 1; -2\}; \quad \vec{CD} \{1; 0; -1\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = 30^\circ.$$

$$б) \quad \vec{AB} \{1; 0; -1\}; \quad \vec{CD} \{0; -2; 2\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{0+4+4}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{2}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

$$в) \quad \vec{AB} \{1; 1; -2\}; \quad \vec{CD} \{-2; -2; 4\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|-2-2-8|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+4+16}} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot 2} = 1, \quad \varphi = \arccos(1) \quad \varphi = 0^\circ.$$

$$г) \quad \vec{AB} \{-1; 0; 1\}; \quad \vec{CD} \{0; 0; -2\}, \quad \cos \varphi = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

465. см. учебник.

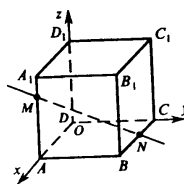
466. Обозначим стороны через a . Введем прямоугольную систему координат Охуз с началом в точке D. Тогда вершины куба имеют координаты:

A (a; 0; 0), B (a; a; 0), C (0; a; 0), D (0; 0; 0), A₁ (a; 0; a),

B₁ (a; a; a), C₁ (0; a; a), D₁ (0; 0; a); точки M и N:

$$M(a; 0; \frac{3}{4}a), \quad N(\frac{1}{2}a; a; 0).$$

$$a) \quad \vec{MN} \{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\}, \quad \vec{DD_1} \{0; 0; a\},$$



$$\cos \varphi = \frac{|0+0-\frac{3}{4}a|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{0+0+a^2}} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{9}{16}} \cdot a} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a} = \frac{3}{\sqrt{29}};$$

б) $\overrightarrow{BD} \{-a; -a; 0\}$,

$$\cos \varphi = \frac{|\frac{1}{2}a^2 - a^2 + 0|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{58}};$$

в) $\overrightarrow{B_1D} \{-a; -a; -a\}$,

$$\cos \varphi = \frac{|-\frac{1}{2}a(-a) - a^2 - a(-\frac{3}{4})a|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{|\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}|a^2|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{a^2 \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{87}};$$

г) $\overrightarrow{A_1C} \{-a; a; -a\}$,

$$\cos \varphi = \frac{|-\frac{1}{2}a(-a) - a^2 - \frac{3}{4}a(-a)|}{a\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3a^2}} = \frac{|a^2(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4})|}{a^2\sqrt{\frac{29}{16}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^2 9\sqrt{16}}{a^2 4\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

467. Обозначим $AB=a=BC$, тогда $AA_1=2a$.

Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке. Тогда вершины параллелепипеда имеют координаты:

$A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(a; 0; 2a)$, $B_1(a; a; 2a)$, $C_1(0; a; 2a)$, $D_1(0; 0; 2a)$.

а) $\overrightarrow{BD} \{-a; -a; 0\}$, $\overrightarrow{CD_1} \{0; -a; 2a\}$,

$$\cos \varphi = \frac{|0+a^2+0|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{a^2+4a^2}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \varphi \approx 71^\circ 34';$$

б) $\overrightarrow{AC} \{-a; a; 0\}$, $\overrightarrow{AC_1} \{-a; a; 2a\}$,

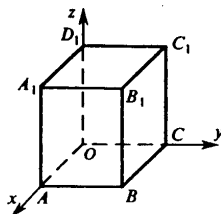
$$\cos \varphi = \frac{|a^2+a^2+0|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2+4a^2}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi \approx 54^\circ 44'.$$

468. Введем прямоугольную систему координат аналогично п. № 467.

Тогда $A(2; 0; 0)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(2; 0; 3)$, $B_1(2; 1; 3)$, $C_1(0; 1; 3)$, $D_1(0; 0; 3)$.

а) $\overrightarrow{AC} \{-2; 1; 0\}$, $\overrightarrow{D_1B} \{2; 1; -3\}$,

$$\cos \varphi = \frac{|-4+1|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{70}},$$



$$\text{б) } \vec{AB}_1 \{0; 1; 3\}, \vec{BC}_1 \{-2; 0; 3\},$$

$$\cos \varphi = \frac{|9|}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+9}} = \frac{9}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}},$$

$$\text{в) } \vec{A_1D} \{-2; 0; -3\}, \vec{AC_1} \{-2; 1; 3\},$$

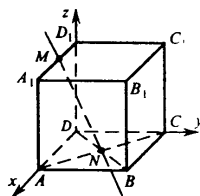
$$\cos \varphi = \frac{|4-9|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}.$$

469. Обозначим стороны через a .

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда $\vec{DA} \{a; 0; 0\}$, $\vec{DC} \{0; a; 0\}$,

$$\vec{DD_1} \{0; 0; a\}, M \left(\frac{4}{5}a; 0; a \right), \vec{DD_1} \{0; 0; a\}, M \left(\frac{4}{5}a; 0; a \right),$$

$$N \left(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a; 0 \right), \vec{MN} \left\{ \frac{-3}{10}a; \frac{1}{2}a; -a \right\}. \sin \varphi = |\cos \theta|,$$



где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости.

а) $DD_1 \perp$ плоскости $ABCD$,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{MN} \wedge \vec{DD_1} \right) \right| = \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{10}{\sqrt{134}};$$

б) $DA \perp$ плоскости DD_1C_1C ,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{MN} \wedge \vec{DA} \right) \right| = \frac{\left| \frac{-3}{10}a^2 \right|}{a \sqrt{\frac{134}{100}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{3}{\sqrt{134}};$$

в) $DC \perp$ плоскости AA_1D_1D ,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{DC} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{\left| \frac{1}{2}a \cdot a \right|}{a \sqrt{\frac{134}{100}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{5}{\sqrt{134}}.$$

470. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

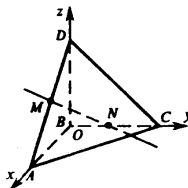
$$A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 1; 0), D (0; 0; 2), M (1; 0; 1), N \left(0; \frac{1}{2}; 0 \right).$$

$\sin \varphi = |\cos \theta|$, где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным к этой плоскости.

а) вектор $\vec{BC} \perp$ к плоскости ABD .

$$\vec{BC} \{0; 1; 0\}, \vec{MN} \left\{ -1; \frac{1}{2}; -1 \right\},$$

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BC} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|0 + \frac{1}{2} + 0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{3}.$$



б) вектор $\vec{BA} \perp$ к плоскости DBC.

$$\vec{BA} \{2; 0; 0\}, \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BA} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

в) вектор $\vec{BD} \perp$ к плоскости ABC.

$$\vec{BD} \{0; 0; 2\}, \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{BD} \wedge \vec{MN} \right) \right| = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

471. Пусть дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_1 C$ — диагональ куба; DB — диагональ грани куба.

Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, направленными вдоль ребер OA , OB , OC . Обозначим сторону куба через a .

Тогда $A_1(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$, $A_1 C \{-a; a; -a\}$, $D(0; 0; 0)$,

$B(a; a; 0)$, $DB \{a; a; 0\}$.

$$\cos(\vec{DB} \wedge \vec{A_1 C}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = 0.$$

Следовательно, $\vec{DB} \wedge \vec{A_1 C} = 90^\circ$, соответственно угол между прямыми

$A_1 C$ и DB равен 90° .

472. Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, направленными вдоль ребер OA , OB , OC . Обозначим сторону куба через a . Тогда:

1) $M_1(a; 0; a)$, $P(0; a; 0)$, $PM_1 \{a; -a; a\}$; $M(a; 0; 0)$,

$Q_1(0; 0; a)$, $MQ_1 \{-a; 0; a\}$.

$\vec{PM_1}$ и $\vec{MQ_1}$ — направляющие векторы прямых $\vec{PM_1}$ и $\vec{MQ_1}$, угол между ними равен углу между этими прямыми.

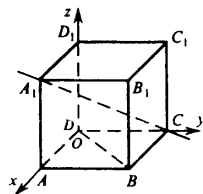
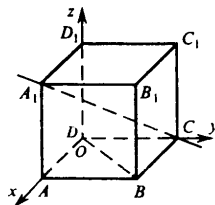
$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{MQ_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \text{ следовательно, угол между прямыми}$$

PM_1 и MQ_1 равен 90° .

Докажем, что прямая MN_1 , пересекающая прямую MQ_1 в точке M и лежащая в плоскости $MN_1 Q_1$, перпендикулярна прямой PM_1 .

$N_1(a; a; a)$; $\vec{MN_1}$ и $\vec{PM_1}$ — направляющие векторы этих прямых.

$$\vec{MN_1} \{0; a; a\}. \cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{MN_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \vec{PM_1} \perp \vec{MN_1} = 90^\circ.$$



Доказали, что $PM_1 \perp MQ_1$; $PM_1 \perp MN_1$ лежит в плоскости MN_1Q_1 ; MN_1 лежит в плоскости MN_1Q_1 . Эти прямые пересекаются в точке M. Значит, $PM_1 \perp$ плоскости MN_1Q_1 .

2) Прямые QN и QP_1 лежат в плоскости QNP_1 и пересекаются в точке Q.

$$Q(0; 0; 0), N(a; a; 0), \vec{QN} \{a; a; 0\}, P_1(0; a; a), \vec{QP_1} \{0; a; a\}$$

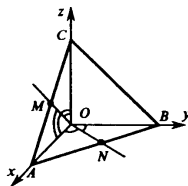
$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QN}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, PM_1 \perp QN_1;$$

$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QP_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, PM_1 \perp QP_1.$$

Таким образом, прямая $PA_1 \perp$ плоскости QNP_1 .

473. Введем прямоугольную систему координат так, что луч OA будет совпадать с осью Ox, OB с осью Oy, OC с осью Oz. Отложим на лучах отрезки: $OA=OB=OC=1$. Получим тетраэдр ABOC. OM и ON — биссектрисы углов $\angle AOC$ и $\angle AOB$.

$$AM=MC=\frac{1}{2} AC; AN=NB=\frac{1}{2} AB.$$



$$A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right);$$

$$\vec{OM} \left\{ \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right\}, \vec{ON} \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}.$$

$$\cos(\vec{OM} \wedge \vec{ON}) = \frac{\frac{1}{4} + 0 + 0}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \vec{OM} \wedge \vec{ON} = 60^\circ.$$

$\vec{OM}$ и $\vec{ON}$ — направляющие векторы лучей OM и ON.
 $\angle MON = 60^\circ$.

474. см. учебник.

475. Пусть точка N — середина отрезка CB, M — точка пересечения медиан $\triangle DBC$, $\angle DAN = \varphi$.

Введем прямоугольную систему координат Oxyz. Тогда $C(0; 3; 0)$, $B(4; 0; 0)$.

Точка N — середина отрезка CB; $N(2; \frac{3}{2}; 0)$.

$$D(5 \cos 60^\circ; 5 \cos 45^\circ; 5 \sin \varphi), \vec{AD} \left\{ \frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \sin \varphi \right\}.$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AD} = |\vec{AD}|^2 = 25, 25 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (5 \sin \varphi)^2, 25 = \frac{25}{4} + \frac{25 \cdot 2}{4} + 25 \sin^2 \varphi,$$

$$\text{следовательно, } \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \varphi = 30^\circ.$$

$$\vec{AD} \left\{ \frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2} \right\}, \angle DAN = 30^\circ, \vec{AN} \left\{ 2; \frac{3}{2}; 0 \right\}.$$

$$|\vec{AN}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2};$$

$$\vec{AM} = \vec{AN} + \vec{NM} = \vec{AN} + \frac{1}{3} \vec{ND} = \vec{AN} + \frac{1}{3} (\vec{AD} - \vec{AN}) = \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{2}{3} \vec{AN},$$

$$\vec{AM} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2; \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}; \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \right\}, \text{ т.е. } \vec{AM} \left\{ \frac{13}{6}; \frac{5\sqrt{2}+6}{6}; \frac{5}{6} \right\},$$

$$|\vec{AM}| = \sqrt{\frac{169}{36} + \frac{(5\sqrt{2}+6)^2}{36} + \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169 + 25 \cdot 2 + 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 6 + 36 + 25}{36}} =$$

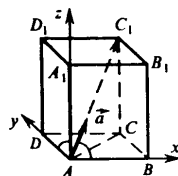
$$= \sqrt{\frac{280 + 60\sqrt{2}}{36}} = \sqrt{\frac{4(70 + 15\sqrt{2})}{36}} = \frac{2\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{70 + 15\sqrt{2}}.$$

476. Пусть $\angle CAC_1 = \varphi$.

Введем прямоугольную систему координат Охуз, рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором

$$\vec{AC_1}. \vec{a} (\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \sin \varphi), \vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sin^2 \varphi = 1;$$

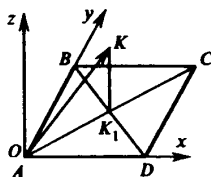
$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ следовательно, } \varphi = 45^\circ.$$



477. Введем прямоугольную систему координат Охуз. Обозначим сторону квадрата через а, $KK_1 = b$, где K_1 — точка пересечения диагоналей, или центр

квадрата. Тогда $\vec{AD} \{a; 0; 0\}$, $\vec{AB} \{0; a; 0\}$,

$$\vec{BD} \{a; -a; 0\}.$$



Точка K_1 — центр квадрата, следовательно, $K_1 \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0 \right)$, тогда $K \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b \right)$;

$$\vec{AK} \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; b \right).$$

Используя формулу скалярного произведения векторов, найдем длины векторов $\vec{BD}$ и $\vec{AK}$. Из прямоугольного треугольника BAD: $BD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника AKK_1 , где $AK_1 = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$AK = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}; \quad \vec{AK} \cdot \vec{BD} = |\vec{AK}| \cdot |\vec{BD}| \cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}).$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } \vec{AK} \cdot \vec{BD} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0, \quad \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = \\ &= a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\angle \vec{AK} \vec{AD}), \quad 0 = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} \cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}). \end{aligned}$$

Тогда, т. к. вектора ненулевые, то $\cos(\angle \vec{AK} \vec{BD}) = 0$. Следовательно, $\angle \vec{AK} \vec{BD} = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

478.

а)

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; -2);

B₁ (-3; 1; -4);

C₁ (-1; 0; 2).

б)

Ось симметрии — ось Oх:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; -2);

B₁ (3; 1; -4);

C₁ (1; 0; 2).

Ось симметрии — ось Oy:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; -2);

B₁ (-3; -1; -4);

C₁ (-1; 0; 2).

Ось симметрии — ось Oz:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; -1; 2);

B₁ (-3; 1; 4);

C₁ (-1; 0; -2).

в)

Если плоскость симметрии — плоскость Oxy, то:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; -2);

B₁ (3; -1; -4);

C₁ (1; 0; 2).

Плоскость симметрии — плоскость Oyz:

Точка

A (0; 1; 2),

B (3; -1; 4),

C (1; 0; -2),

Симметричная ей точка

A₁ (0; 1; 2);

B₁ (-3; -1; 4);

C₁ (-1; 0; -2).

Плоскость симметрии — плоскость Oxz :

Точка

Симметричная ей точка

$A(0; 1; 2),$

$A_1(0; -1; 2);$

$B(3; -1; 4),$

$B_1(3; 1; 4);$

$C(1; 0; -2),$

$C_1(1; 0; 2).$

479. а) По известной теореме через центр симметрии и данную прямую можно провести единственную плоскость.

Пусть O — центр симметрии, a — данная прямая, α — плоскость, проведенная через O и a .

Пусть $A \in a$, построим отрезок OA . Продолжим OA за точку O на расстояние $OA_1 = AO$. Получим точку A_1 , симметричную A .

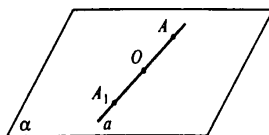
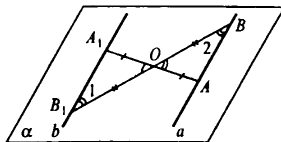
Пусть $B \in a$, построим отрезок OB . Продолжим OB за точку O на расстояние $OB_1 = OB$. Получим точку B_1 , симметричную точке B .

Через A_1 и B_1 проведем прямую b . Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$. $AO = A_1O$, $BO = OB_1$, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ как вертикальные, следовательно, $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

Тогда, $\angle 1 = \angle 2$ и $a \parallel b$.

б) Пусть $A \in a$. Симметричная ей точка A_1 тоже принадлежит прямой a ; $AO = OA_1$.

Точка A произвольна, следовательно, любая точка прямой, а также симметричная точка относительно центра O лежат на прямой a , следовательно, прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.



480. а) Пусть O — центр симметрии, α — данная плоскость.

1. Пусть точку $C \in a$, построим отрезок CO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OC$.

2. Пусть точка $A \in a$, построим отрезок AO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OA$.

3. Пусть точка $B \in a$, построим отрезок BO и продолжим его за точку O на расстояние $OB_1 = OB$.

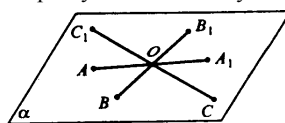
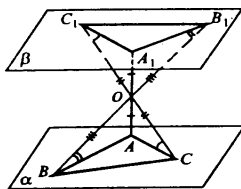
4. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость β .

5. Соединим точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 отрезками. $\triangle OAC = \triangle OA_1C_1$, т.к. $OA_1 = OA$, $OC_1 = OC$ и $\angle AOC = \angle A_1OC_1$ как вертикальные. Отсюда $AC = A_1C_1$.

Тогда $\angle A_1C_1O = \angle ACO$, по признаку параллельности прямых $A_1C_1 \parallel AC$.

6. Для $\triangle OAB$ и $\triangle OA_1B_1$ проведем аналогичные рассуждения и получим, что $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$. Тогда $\angle A_1B_1O = \angle ABO$, по признаку параллельности прямых $A_1B_1 \parallel AB$.

7. Если две пересекающиеся прямые (AC и AB) в одной плоскости (α) соответственно



параллельны двум прямым (A_1C_1 и A_1B_1) другой плоскости (β), то эти плоскости параллельны. Итак, $\alpha \parallel \beta$, утверждение доказано.

б) Если точка $O \in \alpha$, то любая точка плоскости β имеет симметричную ей точку относительно O , тоже принадлежащую плоскости α .

Тогда для $A \in \alpha$ ей симметричная точка $A_1 \in \alpha$; для $B \in \alpha$ ей симметричная точка $B_1 \in \alpha$; для $C \in \alpha$ ей симметричная точка $C_1 \in \alpha$.

Через три точки A_1, B_1, C_1 , принадлежащие плоскости β , можно провести единственную плоскость, соответственно, она совпадает с плоскостью α .

481. а) Пусть a — ось симметрии, $\ell \parallel \alpha$. Из точки $L \in \ell$ проведем $LA \perp a$; продолжим LA за точку A на расстояние $AM = LA$.

Из точки $L_1 \in \ell$ проведем $L_1A_1 \perp a$; продолжим L_1A_1 за точку A_1 на расстояние $A_1M_1 = L_1A_1$.

Параллельные прямые a и ℓ лежат в одной плоскости, тогда, четырехугольник LMM_1L_1 — плоский четырехугольник.

$ML = M_1L_1$ — по построению, $ML \perp \ell$, $M_1L_1 \perp \ell$, следовательно, $ML \parallel M_1L_1$ поэтому четырехугольник LMM_1L_1 — прямоугольник. Т.е., $MM_1 \parallel L_1L$, или $\ell \parallel m$.

б) Если a не параллельна ℓ , то a пересекается с L в некоторой точке A .

Выберем некоторую точку $N \in \ell$, построим $NE \perp a$, продолжим отрезок NE за точку E на расстояние $EF = NE$. Через точку F проведем прямую FA (m).

В треугольниках $\triangle AEF$ и $\triangle AEN$. $NE = EF$, AE — общий катет, таким образом, $\triangle AEF = \triangle AEN$, следовательно, $\angle EAN = \angle EAF = \varphi$.

Таким образом, прямая m образует угол φ с осью симметрии.

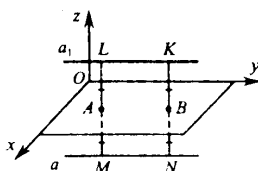
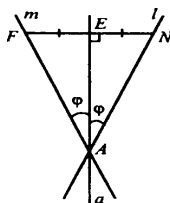
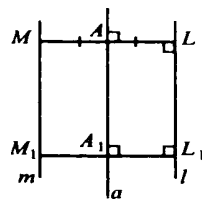
482. Выберем плоскость Oxy .

Пусть прямая a параллельна плоскости Oxy .

Точки M и L , N и K симметричны; $MA = AL$, $NB = BK$. Если a параллельна плоскости Oxy , то $NB = MA = BK = AL$, две прямые, перпендикулярные плоскости, между собой параллельны, тогда $ML \parallel NK$. Далее, $ML = NK$ и четырехугольник $MNKL$ — прямоугольник, поэтому $LK \parallel MN$ или $a_1 \parallel a$. А параллельные прямые лежат в одной плоскости.

Если a не параллельна Oxy , то она пересекает эту плоскость в точке — P . При симметрии точка P переходит в себя, т. к. лежит в плоскости Oxy . Таким образом, $P \in a_1$. Т.е. прямые a и a_1 имеют общую точку и лежат в одной плоскости.

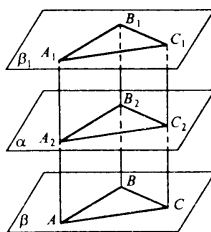
483. а) Выберем три точки в плоскости A, B, C , не лежащие на одной прямой. Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$. Продолжим эти отрезки за точки A_1, B_1, C_1 так, что $A_2A_1 = AA_2$, $B_2B_1 = BB_2$, $C_2C_1 = CC_2$. AA_1B_1B — прямо-



угольник, т.к. $AA_1=BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$. Таким образом, $A_1B_1 \parallel AB$. BB_1C_1C — прямоугольник, т.к. $BB_1=CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1$. тогда, $B_1C_1 \parallel BC$.

Плоскость β_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1 , она — единственная.

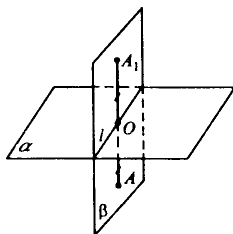
Если две пересекающиеся прямые (BA и BC) одной плоскости (β) параллельны двум прямым (B_1A_1 и B_1C_1) другой плоскости (β_1), то эти плоскости параллельны: $\beta_1 \parallel \beta$.



б) Пусть $\alpha \perp \beta$. Возьмем произвольную точку $A \in \alpha$ и построим AO перпендикулярно плоскости α . Продолжим отрезок за точку O на расстояние $OA_1=AO$.

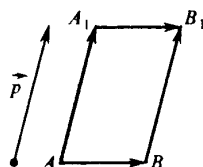
Две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, тогда этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости, т.е. $AO \subset \beta$, следовательно, и $AA_1 \subset \beta$.

Таким образом, каждая точка плоскости β отображается в точку, ей симметричную, которая тоже принадлежит плоскости β . Тогда, плоскость β отображается сама на себя, или β_1 совпадает с β .



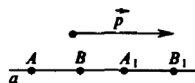
484. а) Докажем, что $AB \parallel A_1B_1$ (см. пункт 52 учебника). Доказано, что $A_1B_1=AB$, а значит $A_1B_1 \parallel AB$.

б) Пусть $a \parallel \vec{p}$. Выберем точку $A \in a$, тогда точка A перейдет в точку A_1 , так, что $AA_1=\vec{p}$. Следовательно, они лежат в одной плоскости. В плоскости через точку A можно провести только одну прямую AA_1 , параллельную $\vec{p}$, тогда $A_1 \in a$.



Таким образом, точка $A \in a$ отображается в точку $A_1 \in a$.

Для любой другой точки $B \in a$ повторим рассуждения, тогда, каждая точка прямой a переходит в точку прямой a , то есть прямая отображается на себя.



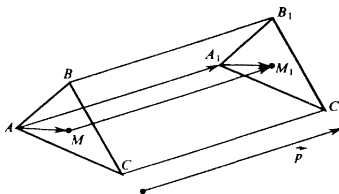
Пусть a содержит $\vec{p}$, тогда доказательство верно, просто векторы AA_1 и $\vec{p}$ лежат на одной прямой a .

485. Параллельный перенос — это движение, тогда $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Отсюда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Проведем отрезки AM и A_1M_1 . $AM=A_1M_1$.

Для плоского четырехугольника AMM_1A_1 имеем:

$AM \parallel A_1M_1$, $AM=A_1M_1$, следовательно,

AMM_1A_1 — параллелограмм, $\vec{AA_1} = \vec{MM_1} = \vec{p}$.



486. а) a — данная прямая.

Возьмем на прямой a точки A, B, C . При движении они перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Необходимо доказать, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Такое равенство верно, если все три точки — лежат на одной прямой; иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. В силу произвольного выбора точек A, B и C доказательство справедливо для любых других точек, таким образом, движение переводит прямую в прямую.

б) В плоскости α проведем прямую a и возьмем точку $O \notin a$. Проведем из точки O отрезки, пересекающие прямую a в точках A и B . При движении: $O \rightarrow O_1, A \rightarrow A_1$, так что $OA = O_1A_1$; $B \rightarrow B_1$, так что $OB = O_1B_1$.

По аксиоме: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

487. а) AC — заданный отрезок, $AC \subset a$.

При движении $A \rightarrow A_1, C \rightarrow C_1$. Докажем, что весь отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1 .

Возьмем произвольную точку $B \in AC$. При движении $B \rightarrow B_1$. $AB + BC = AC$. Т.к. при движении расстояния между точками сохраняются, то $A_1B_1 = AB, B_1C_1 = BC, A_1C_1 = AC$. Тогда $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Равенство выполняется только когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$, таким образом, точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1 .

б) $\angle AOB$ — лежит в плоскости α .

При движении $O \rightarrow O_1, A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1$, при этом $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1, AB = A_1B_1$ и $\triangle OAB = \triangle O_1A_1B_1$ по трем сторонам, тогда $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Если $\angle AOB = 180^\circ$, то $\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$.

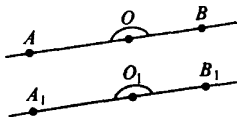
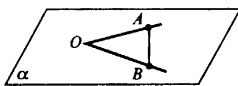
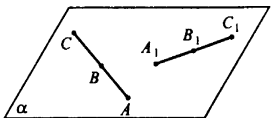
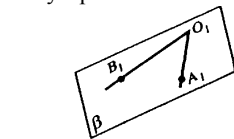
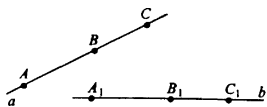
Доказательство:

На сторонах развернутого угла возьмем точки A и B . При движении $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1$, так что $AB = A_1B_1$, так что $AB = A_1B_1$; $O \rightarrow O_1$ при движении $AO = A_1O_1$ и $O_1B_1 = OB$. Итак, $AO_1 + O_1B_1 = A_1B_1$.

Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от точки O_1 , тогда, $\angle A_1O_1B_1$ — развернутый, т.е. $\angle A_1O_1B_1 = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

488. а) Пусть $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \alpha$. Пересечем a и b прямой c , следовательно $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c . Примем следующие обозначения (смотри рисунок):

M и N — произвольные точки, лежащие по разные стороны от секущей AB .



При движении $\angle MAB$ перейдет в равный $\angle M_1A_1B_1$, а $\angle ABN$ — в равный угол $\angle A_1B_1N_1$. Т.к. при движении плоскость α переводится в плоскость β , то прямые A_1M_1 и B_1N_1 лежат в одной плоскости β .

Отмеченные углы — $\angle 1$ и $\angle 2$, являются внутренними накрест лежащими, а если $\angle 1 = \angle 2$, то по признаку параллельности прямых $M_1A_1 \parallel B_1N_1$, или $a_1 \parallel b_1$. тогда, $a \rightarrow a_1$, $a \parallel a_1$ и $b \rightarrow b_1$, $b \parallel b_1$.

б) $\alpha \parallel \beta$. Пересечем α и β плоскостью C , получим две параллельные прямые $A_1B_1 \parallel AB$.

На линии пересечения плоскости C с плоскостью β через некоторую точку A_1 проведем плоскость Q , пересекающую α и β по параллельным прямым A_1C_1 и AC .

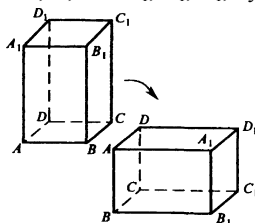
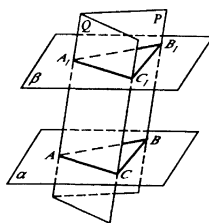
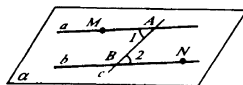
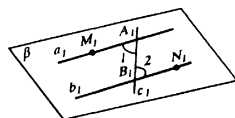
Построим отрезки B_1C_1 и BC . Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями равны, тогда $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

$ABCA_1B_1C_1$ — призма. При движении угол отображается на равный ему угол, расстояния между точками сохраняются. При этом, очевидно, основания призмы — $AA_1B_1C_1$ и $AABC$ остаются параллельными друг другу, и плоскости, которые можно провести через вершины A, B, C и A_1, B_1, C_1 , будут также параллельны друг другу.

489. а) Т.к. при движении отрезок отображается на отрезок той же длины, то исходный радиус OA переходит в отрезок O_1A_1 такой, что $OA = O_1A_1 = R$.

Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от центра на расстояние R . Т.к. движение сохраняет расстояния, то фигура, полученная из окружности движением, также есть геометрическое место точек плоскости, удаленных от O_1 на расстояние R . Таким образом окружность отображается на окружность (O_1R).

б) При движении ребра параллелепипеда не испытывают никаких сдвигов и поворотов относительно друг друга. Длины и углы не изменяются, т.к. отрезок и угол при движении переходит в отрезок и угол, имеющий такое же измерение.



Вопросы к главе V

1. а) Лежит в одной из координатных плоскостей;
б) Лежит на одной из координатных осей.
2. Через данную прямую проведем плоскость, перпендикулярную к оси Oz. Тогда плоскость будет параллельна плоскости Oxy. Любая точка на прямой лежит в нашей плоскости, тогда каждая точка этой прямой имеет одну и ту же аппликату.
3. А (2; 4; 5), В (3; x; y), С (0; 4; z) и D (5; t; u).
а) Если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxy, то их координаты по оси z равны: $y=5, z=5, u=5$; x, t – любые числа;
б) если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxz, то их координаты по оси y равны: $x=4, t=4$; y, z, u – любые числа;
в) если точки лежат на прямой, параллельной оси Ox, то у них одни и те же координаты y и z: $x=4, t=4$ и $y=z=u=5$.
4. $\vec{AB} \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{BC} \{x_2; y_2; z_2\}. \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$
 $\vec{AC} \{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$. Тогда $\vec{CA} \{-x_1-x_2; -y_1-y_2; -z_1-z_2\}.$
5. а) сонаправлен с осью Oz;
б) перпендикулярен оси Ox;
в) перпендикулярен оси Oy.
6. Очевидно, что $\vec{a}$ лежит в плоскости Oyz.
а) пересекает плоскость;
б) перпендикулярен Ox.
7. а) $\vec{a} \{-5; 3; -1\}$ и $\vec{b} \{6; -10; -2\}. \frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10} \neq \frac{-1}{-2}$, тогда, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны;
б) $\vec{a} \{-2; 3; 7\}; \vec{b} \{-1; 1,5; 3,5\}. \frac{-2}{-1} = \frac{3}{1,5} = \frac{7}{3,5} = k$, векторы коллинеарны.
8. Пусть d — длина радиуса-вектора точки М. Тогда:
а) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d = 1$,
 $\sqrt{1 + y^2 + z^2} = 1$, откуда $y=z=0$, точка М лежит на оси абсцисс, т.е. ответ Да.
б) $\sqrt{4 + y^2 + z^2} = 1; 4 + y^2 + z^2 = 1$,
 $y^2 + z^2 = -3$ — невозможно, т.к. $y^2 + z^2 \geq 0$, т.е. ответ Нет.
9. $|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
а) $3 = \sqrt{9 + x^2 + y^2}, \quad 9 = 9 + x^2 + y^2, 0 = x^2 + y^2, x=y=0$, следовательно, может
б) $3 = \sqrt{25 + x^2 + y^2}, \quad 9 = 25 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 = -16$, что невозможно, следовательно, не может.

10. $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где $M_1(3; y_1; z_1)$, $M_2(6; y_2; z_2)$.

a) $2 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $4 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$,

$(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = -5$ — противоречие. Таким образом, равенство $M_1M_2 = 2$ невозможно.

б) $3 = \sqrt{9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $9 = 9 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0$, откуда $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$, и отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox .

11. $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$, б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 180^\circ = -ab$;

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 90^\circ = 0$; г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 60^\circ = \frac{1}{2} ab$;

д) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos 120^\circ = ab \cos (180^\circ - 60^\circ) = -ab \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} ab$.

12. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, если $\cos \alpha > 0$, т.е. $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, если $\cos \alpha < 0$, т.е. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\cos \alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90^\circ$.

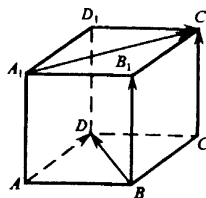
13. а) $AD \perp DC$, а $DC = D_1C_1$, таким образом $AD \perp D_1C_1$;

б) $BD \perp BB_1$, а $BB_1 = CC_1$, следовательно, $BD \perp CC_1$;

в) $A_1C_1 = AC$, AD не перпендикулярен AC , тогда, A_1C_1 и AD не перпендикулярны;

г) DB не перпендикулярен D_1C_1 ;

д) BB_1 не перпендикулярен AC .



14. а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Если $2 + y_1y_2 + z_1z_2 < 2$, то, $y_1y_2 + z_1z_2 < 0$, ответ: да может (например, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$);

б) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2$, т.е. $y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, ответ: да может (например, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$);

в) $2 + y_1y_2 + z_1z_2 > 2$, т.е. $y_1y_2 + z_1z_2 > 0$, ответ: да может (например, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 1$).

15. $x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$; $y = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{2+4}{2} = 3$; Ответ: $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 3\right)$

16. Плоскость проходит через точку $P(2; -\frac{1}{2}; 3)$.

17. При зеркальной симметрии — в левую,

При осевой — в правую,

При центральной — в правую.

Дополнительные задачи

490. а) Пусть $\vec{p} = 3\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{c}$, где $\vec{p} \{x; y; z\}$.

Тогда $3\vec{b} \{-15; 15; 0\}$, $-3\vec{a} \{15; 0; -15\}$, $3\vec{c} \{3; -6; -9\}$.

Тогда вектор $\vec{p}$ имеет координаты: $\vec{p} \{3; 9; -24\}$;

б) $\vec{p} = -0,1\vec{c} + 0,8\vec{a} - 0,5\vec{b}$,

$-0,1\vec{c} \{-0,1; 0,2; 0,3\}$, $0,8\vec{a} \{-4; 0; 4\}$, $-0,5\vec{b} \{2,5; -2,5; 0\}$.

Тогда $x = -0,1 - 4 + 2,5 = -1,6$, $y = 0,2 - 2,5 = -2,3$, $z = 0,3 + 4 = 4,3$; $\vec{p} \{-1,6; -2,3; 4,3\}$.

491. а) Координаты $\vec{a} \{-5; 3; -1\}$ не пропорциональны координатам

$\vec{b} \{6; -10; -2\}$, т.е. $\frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10}$. Таким образом, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Координаты $\vec{a} \{-2; 3; 7\}$ пропорциональны координатам вектора

$\vec{b} \{-1; 1,5; 3,5\}$: $\frac{-2}{-1} = \frac{3}{1,5} = \frac{7}{3,5}$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и

$\vec{b}$ коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{a} \{-\frac{2}{3}; \frac{5}{9}; -1\}$ и $\vec{b} \{6; -5; 9\}$ пропорциональны:

$\frac{-\frac{2}{3}}{6} = \frac{\frac{5}{9}}{-5} = \frac{-1}{9}$, $-\frac{1}{9} = -\frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{a} \{0,7; -1,2; -5,2\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{b} \{-2,8; 4,8; -20,8\}$:

$\frac{0,7}{-2,8} = -\frac{1}{4}$; $\frac{-1,2}{4,8} = -\frac{1}{4}$; $\frac{-5,2}{-20,8} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

492. Пусть E (x; y; z) – середина АВ.

Тогда: $x = \frac{1}{2}(-5+3) = -1$, $y = \frac{7-11}{2} = -2$, $z = \frac{3+1}{2} = 2$, т.е. E (-1; -2; 2).

Вычислим координаты точки, ближайшей к точке E на оси Ох: E₁ (-1; 0; 0); на оси Оу: E₂ (0; -2; 0); на оси Oz: E₃ (0; 0; 2).

493. Для решения задачи установим, можно ли вектор $\vec{a}$ разложить по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. существуют ли m и n, удовлетворяющие условию $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

а) $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} \{1; 1; 0\}$.

$\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} \{1; 0; -1\}$, где $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} \{0; 0; 1\}$.

Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах:

(1) $-1 = m \cdot 1 + n \cdot 1$, (2) $2 = m \cdot 1 + n \cdot 0$, (3) $3 = m \cdot 0 + n \cdot (-1)$.

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m=2$, $n=-3$, т.е., векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{a} \{1; 1; 1\}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} \{1; -1; 0\}$. Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах:

$$(1) 1 = m \cdot 2 + n \cdot 1, (2) 1 = m \cdot 1 + n \cdot (-1), (3) 1 = m \cdot 1, 5 + n \cdot 0.$$

$$m = \frac{2}{3}, n = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, 1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}.$$

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, т.е., векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ в координатах.

$$(1) 1 = m \cdot 1 + n \cdot 2, (2) 1 = m \cdot (-1) + n \cdot 3, 1 = m \cdot 2 + n \cdot (-1).$$

Система уравнений не имеет решений. Т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

494. Рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$: $\vec{AB} \{1; 1; 1\}$, $\vec{DC} \{1; 1; 1\}$. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ коллинеарны, т.к. $\vec{AB} = k \cdot \vec{DC}$, $k=1$. тогда, $AB \parallel DC$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{DC}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

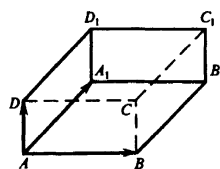
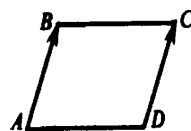
$$|\vec{AB}| = |\vec{DC}|.$$

Противоположные стороны четырехугольника ABCD параллельны и длины их равны, таким образом, ABCD — параллелограмм.

495. Пусть точка O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, тогда ее координаты: $O(\frac{2+3+2}{3}; \frac{0+2+3}{3}; \frac{1+2+6}{3})$, $O(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3)$.

496. Запишем $\vec{AD} \{4; 1; 0\}$, $\vec{AA_1} \{2; 3; -1\}$, $\vec{AB} \{-1; 4; 3\}$.

$\vec{AD_1} = \vec{AA_1} + \vec{AD}$. $\vec{AD_1} \{2+4; 3+1; 0-1\}$, $\vec{AD_1} \{6; 4; -1\}$.



Запишем координаты вектора $\vec{AD_1}$ через координаты его начала и конца:

$$6 = x_{D_1} - x_A, \quad 6 = x_{D_1} - 3, \quad x_{D_1} = 9.$$

$$4 = y_{D_1} - y_A, \quad 4 = y_{D_1} - 0, \quad y_{D_1} = 4,$$

$$-1 = z_{D_1} - z_A, \quad -1 = z_{D_1} - 2, \quad z_{D_1} = 1;$$

$$D_1(9; 4; 1).$$

$$2) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}, \vec{AC} \{-1+4; 4+1; 3+0\}, \vec{AC} \{3; 5; 3\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 3 &= x_C - x_A, & 3 &= x_C - 3, & x_C &= 6, \\ 5 &= y_C - y_A, & 5 &= y_C - 0, & y_C &= 5, \\ 3 &= z_C - z_A, & 3 &= z_C - 2, & z_C &= 5; \end{aligned} \quad C(6; 5; 5).$$

$$3) \vec{AB_1} \{-1+2; 4+3; 3-1\}, \vec{AB_1} \{1; 7; 2\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 1 &= x_{B_1} - 3, & x_{B_1} &= 4, \\ 7 &= y_{B_1} - 0, & y_{B_1} &= 7, \\ 2 &= z_{B_1} - 2, & z_{B_1} &= 4, \end{aligned} \quad B_1(4; 7; 4).$$

$$4) \vec{AC_1} = \vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{AD}, \vec{AC_1} \{2+(-1)+4; 3+4+1; -1+3+0\}.$$

$$\vec{AC_1} \{5; 8; 2\}.$$

Аналогично с (а)

$$\begin{aligned} 5 &= x_{C_1} - 3, & x_{C_1} &= 8, \\ 8 &= y_{C_1} - 0, & y_{C_1} &= 7, \\ 2 &= z_{C_1} - 2, & z_{C_1} &= 4, \end{aligned} \quad C_1(8; 8; 4).$$

497. Пусть O — середина AB

$$а) x_0 = \frac{1}{2}(2+5), \quad б) x_0 = \frac{1}{2}(0+3), \quad в) x_0 = \frac{1}{2}(5+3),$$

$$y_0 = \frac{1}{2}(3+7), \quad y_0 = \frac{1}{2}(4+8), \quad y_0 = \frac{1}{2}(3+5),$$

$$0 = \frac{1}{2}(k-1), \quad 0 = \frac{1}{2}(k+2), \quad 0 = \frac{1}{2}(k+3k),$$

$$\text{т.е. } k=1; \quad \text{т.е. } k=-2; \quad \text{т.е. } k=0.$$

498. Пусть единичный вектор $\vec{e} \{x; y; z\}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$. То-

$$\text{гда } \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}, \text{ т.е. } y = \frac{x}{2}; z = -x.$$

$$\text{Т.к. } |\vec{e}|=1, \text{ то } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4} + (-x)^2} = 1, \quad \sqrt{(2 + \frac{1}{4})x^2} = 1; \quad \frac{3}{2}|x|=1,$$

$$x > 0, \text{ т.к. } \vec{e} \text{ и } \vec{a} \text{ сонаправлены; } x = \frac{2}{3}, \text{ т.е. } \vec{e} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}.$$

Пусть $\vec{e}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$. Тогда $\vec{e}$ лежит в плоскости Oxy , т.к. вектор $\vec{b}$ лежит в плоскости Oxy . $\vec{e} \{x; y; 0\}$.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3}, y=3x.$$

$$|\vec{e}|=1, \sqrt{x^2+y^2}=1, \quad x=\frac{1}{\sqrt{10}}, y=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Таким образом, $\vec{e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0 \right\}$.

$$499. \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad 4 + y^2 + 5 = 25, \quad y^2 = 16, \quad y = \pm 4.$$

500. Пусть O — середина отрезка MN, S — середина отрезка PQ.

Тогда O $\left(\frac{2-4}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{3-1}{2} \right)$; O $(-1; 0; 1)$;

S $\left(\frac{1-3}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{2+0}{2} \right)$; S $(-1; 1; 1)$.

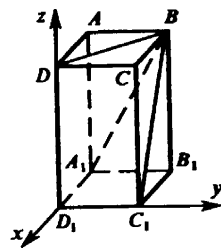
$$OS = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

501. В прямоугольной системе координат построим прямоугольный параллелепипед так, чтобы оси координат совпали с его ребрами и точка B была одной из его вершин. Согласно рисунку

$$A_1D_1=BC=|x_B|=2, D_1C_1=AB=|y_B|=5,$$

$$D_1D=B_1B=|z_B|=\sqrt{3}.$$

Расстояния от точки B до осей координат — это диагонали: BA_1 — до оси Ox, BC_1 — до оси Oy; BD — до оси Oz.



$$BA_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{25 + 3} = 2\sqrt{7},$$

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7},$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}.$$

502. Пусть D лежит на оси Oy и равноудалена от точек A и B; имеет координаты D $(0; y_D; 0)$, $AD=BD$. Тогда:

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 + (z_A - z_D)^2}.$$

$$AD = \sqrt{(13-0)^2 + (2-y_D)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{169 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot y_D + y_D^2 + 1} = \\ = \sqrt{4y_D^2 - 4y_D + 174},$$

$$BD = \sqrt{(-15-0)^2 + (7-y_D)^2 + (-18-0)^2} = \sqrt{225 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot y_D + y_D^2 + 324} = \\ = \sqrt{y_D^2 - 14 \cdot y_D + 598},$$

$$\text{Запишем уравнение: } \sqrt{y^2 - 4y + 174} = \sqrt{y^2 - 14y + 598},$$

$$y^2 - 4y + 174 = y^2 - 14y + 598, \quad 10y = 424, \quad y = 42,4; \quad \text{Тогда } D(0; 42,4; 0).$$

503*. Пусть O — центр описанной окружности; $O(x; y; z)$. Тогда

$AO=BO=CO$. Направляющие векторы сторон треугольника: $\vec{AB} \{2; -1; -1\}$,

$\vec{AC} \{2; 0; 0\}$, $\vec{BC} \{0; 1; 1\}$.

$$\cos \angle BAC = \frac{|4-0-0|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}; \quad \cos \angle ABC = \frac{|-1-1|}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \angle ACB = \frac{|0|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1+1}} = 0, \text{ следовательно,}$$

$\angle ACB = 90^\circ$ и $\triangle ABC$ — прямоугольный. Тогда, точка O лежит на отрезке

AB ; $AO=OB$. Вычислим координаты точки O : $x = \frac{1}{2} (0+2) = 1$.

$$y = \frac{1}{2} (2+1) = 1,5, \quad z = \frac{1}{2} (2+1) = 1,5; \quad O(1; 1,5; 1,5)$$

504. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке. Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ — проекция $\triangle ABC$ на плоскость Oxy ; M_1 — проекция точки M . Следовательно, $A(x_A; y_A; 4)$, $B(x_B; y_B; 9)$, $C(x_C; y_C; 5)$.

M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, $M(x_M; y_M; z_M)$, (z_M — искомое расстояние от точки M до плоскости α).

Точка пересечения медиан M имеет координаты:

$$M\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right); \text{ т.е. } z_M = 6 \text{ дм.}$$

505*. Пусть E_1, E_2, E_3, E_4 — середины ребер BC, AD, AB и DC . Точка O — середина отрезка E_1E_2 ; E_2E_3 — средняя линия грани ABD .

$$E_2E_3 = \frac{1}{2} DB.$$

Аналогично $E_1E_4 = \frac{1}{2} DB$. Тогда $E_4O = E_4E_1 +$

$$+ E_1O = \frac{1}{2} DB + E_1O, \quad OE_3 = OE_2 + E_2E_3 = OE_2 + \frac{1}{2} DB.$$

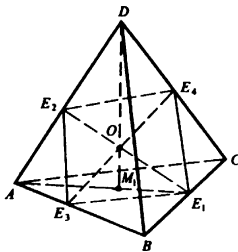
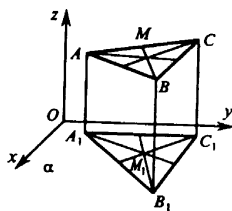
По условию $OE_2 = E_1O$, тогда $E_4O = OE_3$, таким образом O — середина отрезка E_3E_4 .

$$\vec{DO} = \vec{DE}_2 + \vec{E_2O} = \frac{1}{2} \vec{DA} + \frac{1}{2} \vec{E_2E_1}, \quad \vec{E_2E_1} = \vec{E_2D} + \vec{DC} + \vec{CE_1},$$

$$\vec{E_2E_1} = \vec{E_2A} + \vec{AB} + \vec{BE_1}.$$

Сложим эти два равенства. Получим:

$$2 \vec{E_2E_1} = \vec{E_2D} + \vec{E_2A} + \vec{CE_1} + \vec{BE_1} + \vec{DC} + \vec{AB} = \vec{DC} + \vec{AB},$$



$$\vec{E_2E_1} = \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{AB}),$$

$$\vec{DO} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{E_2E_1} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{AB}) = \frac{1}{2}$$

$$\vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{DC} + \frac{1}{4}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{4}\vec{DC} + \frac{1}{4}(\vec{DB} - \vec{DA}) = \frac{1}{4}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC});$$

$$(1) \vec{DM_1} = \vec{DA} + \vec{AM_1} = \vec{DA} + \frac{2}{3}\vec{AE_1} = \vec{DA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{DA} + \frac{1}{3}(\vec{DB} -$$

$$-\vec{DA}) + (\vec{DC} - \vec{DA}) = \vec{DA} + \frac{1}{3}(\vec{DB} + \vec{DC} - 2\vec{DA}) = \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{DC} + \frac{1}{3}\vec{DA} =$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}), \vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DM_1}. (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\vec{DO} = \frac{3}{4}\vec{DM_1}, \text{ значит, } \vec{OM_1} = \frac{1}{4}\vec{DM_1}, \frac{\vec{DO}}{\vec{OM_1}} = \frac{3}{1}.$$

Таким образом, точка $O \in DM_1$ и делит DM_1 в отношении 3:1, считая от вершины. Аналогично для других медиан.

$$506. \text{ а) } \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 6 = 3;$$

$$6) \vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = -3,5;$$

$$\text{в) } \vec{d} \cdot \vec{d} = 2^2 + 1^2 + 0 = 5;$$

$$\text{г) } (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d} = -1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 + 0 + \frac{2}{2} - 3 + 0 = 7;$$

$$\text{д) } (\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} - 15 + 12 - \frac{3}{2} + 0 - 8 + 2 - 5 + 6 = -10.$$

$$507. \text{ а) } \angle ADB = 45^\circ = \vec{DA} \wedge \vec{DB}, \vec{DB} = -\vec{BD},$$

$$\vec{DA} \wedge \vec{BD} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

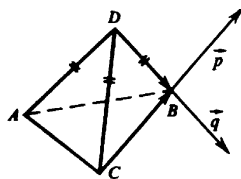
б) Отложим от точки В векторы $\vec{p} = \vec{CB}$ и

$$\vec{q} = \vec{DB}.$$

$$\vec{DB} \wedge \vec{CB} = \vec{p} \wedge \vec{q} = \angle DBC.$$

Рассмотрим $\triangle DBC$. $\angle BDC = 60^\circ$, $DC = DB$, тогда, $\angle DCB = \angle CBD$, т.к. треугольник равнобедренный.

$$\angle DCB + \angle DBC = 120^\circ, \text{ значит, } \angle DBC = \angle DCB = 60^\circ,$$



в) $\vec{BD} \wedge \vec{BA} = \angle DBA$. $\triangle DBA$ — равнобедренный, т.е.,

$$\angle DAB = \angle DBA = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'.$$

508. По определению проекции прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC , т.е. она перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости.

а) $D_1D \perp D_1B$.

$\vec{D_1D}$ — направляющий вектор прямой D_1D ;

$\vec{D_1B}$ — направляющий вектор прямой D_1B . Следовательно, $D_1B \perp D_1D$;

б) $\vec{DD_1}$ также направляющий вектор прямой D_1D , $DD_1 \perp (ABC)$, т.е. $DD_1 \perp BC$. $\vec{BC}$ — направляющий вектор прямой BC . Тогда, $\vec{DD_1} \perp \vec{BC}$. Т.к. $D_1D = DD_1$, то угол φ_1 между DD_1 и плоскостью ABC равен: $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi$, где $\varphi = 90^\circ$ — угол между D_1D и плоскостью ABC ;

в) $\vec{DA}$ и $\vec{BC}$ — направляющие векторы прямых DA и BC .

Если $\vec{DA} \perp \vec{BC}$, то $DA \perp BC$.

Т.к. тетраэдр $ABCD$ — правильный, то его вершина D проектируется в центр $\triangle ABC$. Если провести в $\triangle ABC$ высоту AM , то высота тетраэдра DD_1 пересечется с высотой $\triangle ABC$ в точке D_1 , тогда

1) $CB \perp AM$, т.к. AM — высота $\triangle ABC$;

2) $CB \perp DD_1$, $DD_1 \perp (ABC)$;

3) AM и $DD_1 \in (DD_1A)$, прямые AM и DD_1 пересекаются.

Из 1), 2) и 3) следует, что CB перпендикулярна плоскости DD_1C , значит, $CB \perp DA$, $BC \perp DA$.

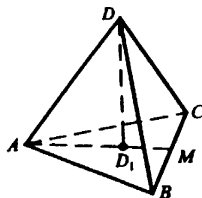
г) DC и D_1B не перпендикулярны, т.к. прямые DC и D_1B не перпендикулярны. Если бы $CD \perp D_1B$, то по теореме, обратной к т. о трех перпендикулярах, $CD_1 \perp D_1B$. Но это прямые, содержащие медианы правильного треугольника. Они не перпендикулярны.

509. $\cos \varphi = |\cos \vec{AB} \wedge \vec{CD}|$.

а) $\vec{AB} \{1; 1; -2\}$, $\vec{CD} \{-3; 3; -1\}$.

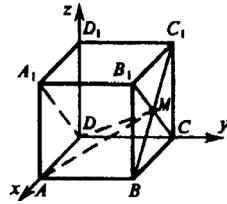
$$\cos \varphi = \frac{|-3 + 3 + 2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{9+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{19}} = \frac{2}{\sqrt{114}};$$

б) $\vec{AB} \{-5; 1; 1\}$, $\vec{CD} \{2; 2; -2\}$.



$$\cos \varphi = \frac{|-10+2-2|}{\sqrt{25+1+1} \cdot \sqrt{4+4+4}} = \frac{10}{3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{5}{9}.$$

510. Обозначим ребро куба через a . Тогда вершины куба имеют координаты: $A(a; 0; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(0; a; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(a; 0; a)$, $B_1(a; a; a)$, $C_1(0; a; a)$, $D_1(0; 0; a)$.



$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

a) $\vec{AD} \{-a; 0; -a\}$, $M(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$, $\vec{AM} \{\frac{a-2a}{2}; a; \frac{a-2a}{2}\}$,

$$\cos(\vec{A_1D} \wedge \vec{AM}) = \frac{\frac{-a(a-2a)}{2} - \frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2 + a^2} \cdot \sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{-a^2 + 2a^2 - a^2}{2}}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}}} = 0, \quad \vec{A_1D} \wedge \vec{AM} = 90^\circ$$

б) $\vec{MD} \{\frac{a}{2}; -a; -\frac{a}{2}\}$, $\vec{BB_1} \{0; 0; a\}$,

$$\cos(\vec{MD} \wedge \vec{BB_1}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{a^2}} = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{6a^2}{4}} \cdot a} = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a^2 \sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{MD} \wedge \vec{BB_1} \approx 114^\circ 06'.$$

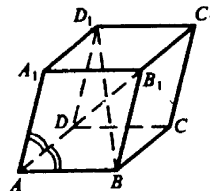
511. Найдем длины векторов $\vec{AC_1}$ и $\vec{BD_1}$.

$$\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1},$$

$$\vec{AC_1} \cdot \vec{AC_1} = |\vec{AC_1}|^2 \cdot \cos 0^\circ,$$

$$(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AA_1} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA_1} =$$

$$= \vec{AB}^2 + \vec{AD}^2 + \vec{AA_1}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA_1} = \vec{AB}^2 + \vec{AD}^2 + \vec{AA_1}^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1})$$



$$+2\vec{AD} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} + \vec{AD}^2 + 2\vec{AA_1} \cdot \vec{AD} +$$

$$+ \vec{AA_1}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 = 3 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6;$$

$$|\vec{AC_1}|^2 = 6; |\vec{AC_1}| = \sqrt{6};$$

$$\vec{BD_1} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DD_1} = \vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB}, \quad \vec{BD_1}^2 = |\vec{BD_1}|^2 \cdot \cos 0^\circ,$$

$$(\vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB})(\vec{AA_1} + \vec{AD} - \vec{AB}) = |\vec{BD_1}|^2,$$

$$\begin{aligned} & \vec{AA_1}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - \vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} - \\ & - \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2 = \vec{AA_1}^2 + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA_1} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AA_1} + \vec{AD}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \\ & + \vec{AB}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos 60^\circ + 1^2 = 3 - \frac{2}{2} = 2 = |\vec{BD_1}|^2, \end{aligned}$$

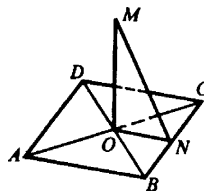
$$|\vec{BD_1}| = \sqrt{2}.$$

512. $DB \perp AC$; $AO=OC=4$, $DO=OB=3$.

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$BN = CN = 2,5.$$

$$\cos \angle OBC = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{5}, \quad \cos \angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{4}{5}.$$



а) $\vec{MN}$ и $\vec{BC}$ — направляющие векторы прямых

MN и BC . Косинус угла между прямыми MN и BC равен $|\cos(\vec{MN} \wedge \vec{BC})|$.

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{MN} &= \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}, \quad \vec{BC} \cdot \vec{MN} = \vec{BC} \cdot (\vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}) = \vec{BC} \cdot \vec{MO} + \\ & + \vec{BC} \cdot \vec{OB} + \vec{BC} \cdot \vec{BN} = -9 + 12,5 = 3,5 \end{aligned}$$

$$(\cos(\vec{BC} \wedge \vec{OB}) = -\cos \angle OBC = -\frac{3}{5}; \quad \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MO}) = 0, \text{ т.к. } MO \perp \text{ плоскости } ABC).$$

$$2) \quad \vec{BC} \cdot \vec{MN} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}),$$

$$MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{36 + 6,25} = 6,5,$$

где $ON=BN=NC=2,5$, т.к. в прямоугольном треугольнике OBC точка N является центром описанной окружности.

$$\vec{BC} \cdot \vec{MN} = 5 \cdot 6,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = 32,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}),$$

$$32,5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = 3,5, \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN}) = \frac{3,5}{32,5} = \frac{7}{65};$$

$$6) |\vec{DC}| = |\vec{BC}| = 5. \quad \vec{MN} = \vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN},$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = \vec{DC} \cdot (\vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN}) = \vec{DC} \cdot \vec{MO} + \vec{DC} \cdot \vec{OC} + \vec{DC} \cdot \vec{CN},$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MO} = 0, \text{ т.к. } \vec{MO} \perp \vec{DC}.$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 16, \text{ т.к. } \cos(\vec{DC} \wedge \vec{OC}) = \cos \angle DCO = \cos \angle OCB = \frac{4}{5};$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - \angle DCN) = 12,5 (-\cos \angle DCN) = -12,5.$$

$$\cdot \cos(2 \cdot \angle OCB) = -12,5 (2 \cdot \cos^2 \angle OCB - 1) = -12,5 \cdot 2 \cdot \frac{16}{25} + 12,5 = 12,5 - 16 = -3,5,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = 0 + 16 - 3,5 = 12,5,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{MN} = |\vec{DC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN}) = \frac{12,5}{5 \cdot 6,5} = \frac{125}{325} = \frac{5}{13};$$

$$b) \vec{AC} \cdot \vec{MN} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BN}) = \vec{AB} \cdot \vec{MO} + \vec{AB} \cdot \vec{OB} + \vec{AB} \cdot \vec{BN} + \vec{AD} \cdot \vec{MO} + \vec{AD} \cdot \vec{BN}, \vec{AB} \cdot \vec{MO} = 0, \text{ т.к. } \vec{AB} \perp \vec{MO},$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{OB} = 5 \cdot 3 \cdot \cos \angle OBA = 15 \cdot \cos \angle OBC = 15 \cdot \frac{3}{5} = 9,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - \angle ABN) = 12,5 (-\cos \angle ABN) = -12,5 \cdot \cos(2 \cdot \angle OBC) = -12,5 \cdot (2 \cdot \cos^2 \angle OBC - 1) = -25 \cdot \frac{9}{25} + 12,5 = 12,5 - 9 = 3,5,$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{OB} = \vec{BC} \cdot \vec{OB} = 5 \cdot 3 \cdot (-\frac{3}{5}) = -9, \quad \vec{AD} \cdot \vec{MO} = 0.$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BH} = \vec{BC} \cdot \vec{BN} = 5 \cdot 2,5 = 12,5, \quad \vec{AC} \cdot \vec{MN} = 0 + 9 + 3,5 - 9 - 0 + 12,5 = 16,$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{MN} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN}) = \frac{16}{8 \cdot 6,5} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13};$$

$$r) \vec{DB} \cdot \vec{MN} = (\vec{DC} + \vec{CB}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OC} + \vec{CN}) = \vec{DC} \cdot \vec{MO} + \vec{CB} \cdot \vec{MO} + \vec{DC} \cdot \vec{OC} + \vec{CB} \cdot \vec{OC} + \vec{DC} \cdot \vec{CN}, \vec{DC} \cdot \vec{MO} = 0.$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{MO} = 0, \quad \vec{DC} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 16,$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{OC} = 5 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \angle OCB) = 5 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -16,$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot \cos(180^\circ - 2\angle OCB) = -3,5,$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CN} = 5 \cdot 2,5 \cdot 1 = 12,5,$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{MN} = 0 + 0 + 16 - 16 - 3,5 + 12,5 = -3,5 + 12,5 = 9,$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{MN} = |\vec{DB}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos(\angle \vec{DB} \wedge \vec{MN}) = 6 \cdot 6,5 \cdot \cos(\angle \vec{DB} \wedge \vec{MN}),$$

$$\cos(\angle \vec{DB} \wedge \vec{MN}) = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}.$$

513. Обозначим сторону куба через a . Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке.

Задача сводится к нахождению $\cos(\angle \vec{NM} \wedge \vec{DA})$.

а) $N\left(\frac{3}{5}a; 0; 0\right)$, $A(0; 0; 0)$, $A_1(a; 0; a)$, $B(a; a; 0)$,

$B_1(a; a; a)$, $M(a; a; \frac{3}{5}a)$, $D(0; 0; 0)$; $\vec{NM} = \left\{\frac{2}{5}a; a; \frac{3}{5}a\right\}$.

$\vec{DA} = \{a; 0; 0\}$.

$$|\cos(\angle \vec{NM} \wedge \vec{DA})| = \frac{\left|\frac{2}{5}a^2 + 0 + 0\right|}{\sqrt{\frac{4}{25}a^2 + a^2 + \frac{9}{25}a^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{\frac{2}{5}a^2}{a^2 \sqrt{\frac{4+25+9}{25}}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{38}}.$$

б) Синус угла между прямой MN и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ равен

$$|\cos(\angle \vec{NM} \wedge \vec{AA_1})|.$$

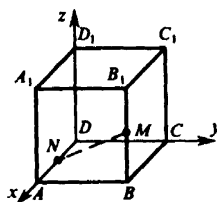
$$\vec{AA_1} = \{0; 0; a\}; |\cos(\angle \vec{NM} \wedge \vec{AA_1})| = \frac{\left|0 + 0 + \frac{3}{5}a^2\right|}{a \sqrt{\frac{38}{25}} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{a^2 \sqrt{\frac{38}{25}}} = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

514. $\vec{a} = \{|\vec{a}| \cos \varphi_1; |\vec{a}| \cos \varphi_2; |\vec{a}| \cos \varphi_3\}$, (смотри задачу 460)

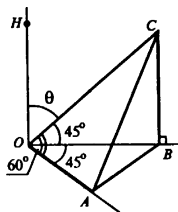
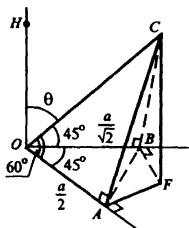
где φ_1 , φ_2 и φ_3 — углы, которые $\vec{a}$ составляет с осями координат Ox , Oy , Oz .

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{где } x, y, z \text{ — координаты } \vec{a}.$$

Тогда, $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_1 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_2 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_3 = |\vec{a}|^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3)$, $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$, что и требовалось доказать.



515.



Из точки С проведем прямую CF перпендикулярную плоскости AOB, в плоскости AOB проведем FA $\perp$ OA, FB $\perp$ OB. По теореме о трех перпендикулярах: CA $\perp$ OA и CB $\perp$ OB. Пусть OC=a, тогда из $\triangle COA$: OA=OC cos 60°=

$$= \frac{a}{2}; \text{ из } \triangle COB: OB=OC \cdot \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Для $\triangle AOB$ по теореме косинусов:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cos 45^\circ;$$

$$AB^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}, AB = \frac{a}{2}.$$

Таким образом, $\triangle AOB$ — равнобедренный, OA=AB; $\angle ABO=45^\circ$, $\angle OAB=90^\circ$.

Тогда, FA совпадает с AB и С проектируется в точку В.

Прямые HO и CB перпендикулярны к плоскости ABO, т.е. они лежат в одной плоскости, $\angle HOB=90^\circ$, $\angle COB=45^\circ$, таким образом, искомый угол $\theta=45^\circ$.

516. CA $\perp$ AB.

Из А проведем прямую OA $\perp$ AB, $\angle CAO=\varphi$. Отложим AC=AO; построим отрезок CO, из точки O проведем луч, пересекающий луч AD в точке D, OD $\parallel$ AB.

OD $\parallel$ AB, а OA $\perp$ AB, значит, OD $\perp$ OA. По теореме о трех перпендикулярах: CO $\perp$ OD.

Обозначим AD=a. Тогда в $\triangle AOD$: AO=a sin θ , OD=a cos θ .

Из $\triangle OAC$ по теореме косинусов: CO²=OA²+AC²-2·AC·AO·cos φ ;
CO²=a² sin² φ +a² sin² θ -2a² sin² θ cos φ =2a² sin² θ (1 - cos φ).

В прямоугольном $\triangle COD$

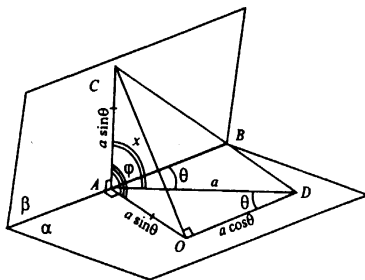
$$CD^2 = OC^2 + OD^2;$$

$$CD^2 = 2a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta.$$

В $\triangle CAD$ по теореме косинусов искомый $\angle CAD=x$;

$$CD^2 = CA^2 + AD^2 - 2 \cdot CA \cdot AD \cdot \cos x.$$

$$2a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi) + a^2 \cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + a^2 - 2a^2 \sin \theta \cos x,$$



Возьмем на ребре двугранного угла PQ точку O ; проведем прямую $OB \perp PQ$, $OB_1 \perp PQ$. $\angle BOA = \varphi$.

При зеркальной симметрии $B \in \beta \rightarrow B_1 \in \beta_1$, при этом $\alpha \perp B_1B$ и проходит через середину отрезка B_1B : $BK = B_1K$.

$\triangle B_1OK = \triangle BOK$, кроме того они прямоугольные ($OK \perp PQ$, OK — общий катет, $B_1K = BK$).

Тогда, $\angle BOK = \angle B_1OK = \varphi$, т.к. линейные меры двугранных углов равны, то и соответствующие двугранные углы между плоскостями α и β , α и β_1 тоже равны.

520. а) Возьмем в плоскости α точку K и проведем через нее две пересекающиеся прямые a и b . При параллельном переносе прямая b перейдет в параллельную ей прямую b_1 , а прямая a — в параллельную ей прямую a_1 . Т.к. a и b пересекаются, то a_1 и b_1 тоже пересекаются. Через a_1 и b_1 проведем плоскость α_1 . Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Тогда, $\alpha \parallel \alpha_1$, что и требовалось доказать.

б) проведем на плоскости α прямую

$\vec{a} \parallel \vec{p}$ и $\vec{b} \parallel \vec{p}$. Известно, что прямая, параллельная $\vec{p}$ или содержащая $\vec{p}$, отображается на себя.

$b \rightarrow b$, $a \rightarrow a$. Через параллельные прямые a и b проходит единственная плоскость α , которая таким образом отображается сама на себя, что и требовалось доказать.

