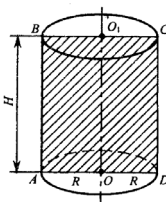


Глава VI. Цилиндр, конус и шар

521. Докажем, что осевое сечение цилиндра — это прямоугольник (ABCD). Одно основание цилиндра получено из другого параллельным переносом, таким образом, $BC=AD$, т.к. параллельный перенос сохраняет расстояния. AB и CD перпендикулярны основаниям. $AB=CD$, как отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, т.е. ABCD — прямоугольник $R=1,5$ м, $P=4$ м.



$$AC=BD=\sqrt{H^2+(2R)^2}=\sqrt{H^2+D^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{ (см)}$$

522. AA_1B_1B — прямоугольник (см.п.521).

Из $\triangle AB_1B$:

$$AB=2R=48 \cdot \sin 60^\circ = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ см}; R=12\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$H=B_1B=48 \cdot \cos 60^\circ = \frac{48}{2} = 24 \text{ см};$$

$$S_{\text{осн}}=\pi R^2=\pi (12\sqrt{3})^2=\pi \cdot 144 \cdot 3=432 \pi \text{ см}^2.$$

523. AA_1B_1B — квадрат, $AB_1=20$ см. $AB=H$;

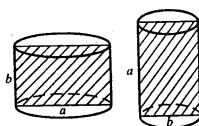
$$H\sqrt{2}=20 \Rightarrow H=\frac{20}{\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2},$$

$$H=10\sqrt{2}, S_{\text{осн}}=\pi R^2, \text{ где } R=\frac{1}{2} AB=\frac{1}{2} H=5\sqrt{2},$$

$$S_{\text{осн}}=\pi (5\sqrt{2})^2=50\pi \text{ см}^2.$$

524. Нет.

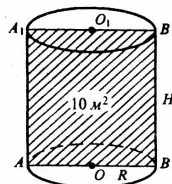
Пример изображен на рисунке.



525.

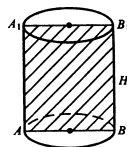
$$\begin{cases} H \cdot 2R=10 \\ \pi \cdot R^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R=\frac{10}{2H}=\frac{5}{H}, \\ \pi \left(\frac{5}{H}\right)^2=5, \end{cases} \frac{\pi \cdot 5}{H^2}=1$$

$$H=\sqrt{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{-1}}=\sqrt{5\pi} \text{ м.}$$



$$\mathbf{526.} \quad S_{\text{осн}}=\pi R^2; \quad S_{\text{сеч}}=H \cdot 2R, \quad \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{сеч}}}=\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{4}=\frac{\pi R^2}{2HR} \Rightarrow \frac{R}{H}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R}{H} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

$$\angle B_1AB = 30^\circ; \quad \angle A_1BA = 30^\circ;$$

$$\angle \beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ; \quad \angle ATA_1 = 60^\circ.$$

527. АВ и O_1O — скрещивающиеся прямые.

а) 1. Построим плоскость, содержащую АВ так, чтобы плоскость была параллельна O_1O . AA_1BB_1 — прямоугольник. $\rho(AB, OO_1) = \rho((AA_1B), OO_1)$.

Построим $OP \perp A_1B$, $\rho(AB, OO_1) = OP = d$. 2. $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм, $h = ?$

$$A_1P = BP = \sqrt{r^2 - d^2}, \quad A_1B = \sqrt{r^2 - d^2},$$

$$A_1B = \sqrt{100 - 64} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (дм)},$$

$$H = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ дм}.$$

б) $h = 6$ см, $r = 5$ см, $AB = 10$ см, $d = ?$

$$A_1B = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

$$A_1P = PB = 4 \text{ см. Из } \triangle A_1OP: d = \sqrt{r^2 - A_1P^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ см}.$$

528. Пусть π — секущая плоскость, $\pi \parallel O_1O$.

$O_1O \perp$ плоскостям оснований, тогда прямые АВ и CD, по которым π пересечет боковую поверхность цилиндра, также перпендикулярны плоскостям оснований. Тогда ABCD — прямоугольник. Точка А переходит в точку В и точка D переходит в точку С.

529. AA_1B_1B — прямоугольник.

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ т.е. } AB = 2\sqrt{R^2 - d^2};$$

$$S = AB \cdot H = 2\sqrt{R^2 - d^2} \cdot H = \\ = 2\sqrt{25 - 9} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2.$$

530. Пусть $H = 12$ см, $R = 10$ см, AA_1B_1B — квадрат. $AB = H = 12$ см,

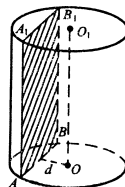
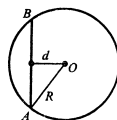
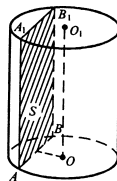
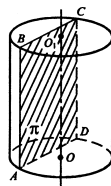
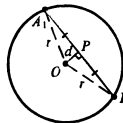
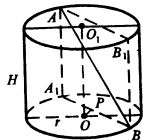
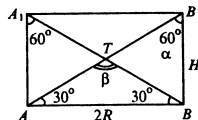
$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ т.е. } \frac{12}{2} = \sqrt{100 - d^2}, \quad 6 = \sqrt{100 - d^2},$$

$$36 = 100 - d^2, \quad d^2 = 64, \quad d = 8 \text{ см}.$$

531. Пусть $H = 10$ дм, $S_{\text{сеч}} = 240$ дм², $d = 9$ дм.

$$S = H \cdot AB; \quad 240 = 10 \cdot AB, \text{ т.е. } AB = 24 \text{ дм}.$$

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \text{ или } 12 = \sqrt{R^2 - 81}, \quad 144 = R^2 - 81, \quad 255 = R^2, \quad R = 15 \text{ дм}.$$



532. $\angle BAC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла CA_1AB .

Пусть R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.

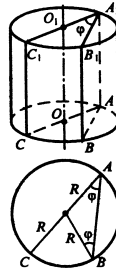
$$S_1 = S_{A_1C_1CA} = 2RH.$$

$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{AB}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{R}{\sin \varphi};$$

$$AB = 2R \cos \varphi; \quad S_2 = S_{A_1B_1BA} = AB \cdot H = 2R \cos \varphi H;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2RH}{2RH \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos \varphi}$.



533. $S = 2RH$, или $R = \frac{S}{2H}$;

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}, \quad \text{т.е.} \quad AB = \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2};$$

$$S_{\text{сеч}} = AB \cdot H = 2H \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2} = \sqrt{S^2 - 4H^2 d^2}.$$

534. Из $\triangle AOB$: $AO = OB = R$.

$$BM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}d$$

тогда $\frac{BM}{d} = \tan 60^\circ = \sqrt{3};$

$$2BM = 2\sqrt{3}d; \quad AB = 2\sqrt{3}d;$$

$$S = 2\sqrt{3}dh.$$

535. По условию: $d = 2$ см, $\angle AOB = 60^\circ$.

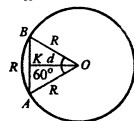
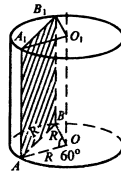
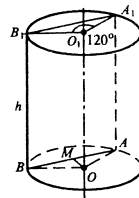
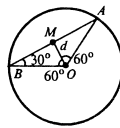
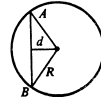
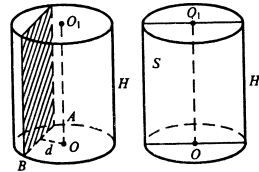
$$\frac{BK}{OK} = \frac{BK}{2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{тогда} \quad BK = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$AB = 2 \cdot BK = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см.}$$

$$AA_1B_1B \text{ — прямоугольник, } S = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} = 40 \text{ см}^2.$$

536. $\angle ACB$ — вписанный, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, то он опирается на диаметр.

Пусть h — образующая, равная высоте цилиндра, R — радиус цилиндра, далее $BC = x$, тогда $AC = \sqrt{4R^2 - x^2}$.



$$S_1 = S_{BB_1C_1C} = S = xh = S_2 = S_{ACC_1A_1} = h \cdot \sqrt{4R^2 - x^2},$$

$$xh = h \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ или } x = \sqrt{4R^2 - x^2}, \quad x^2 = 4R^2 - x^2, \quad 2x^2 = 4R^2,$$

$$x^2 = 2R^2, \quad x = \sqrt{2}R, \quad R = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Площадь осевого сечения

$$S_3 = 2Rh = \frac{2xh}{\sqrt{2}}. \quad S_3 = \sqrt{2} \cdot (xh) = \sqrt{2}S.$$

Ответ: $\sqrt{2}S$.

537. По условию $D=1\text{ м}$; $H=\pi D$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rH, \quad r = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}(\text{м}), \quad H = \pi \cdot 1 = \pi \text{ м}, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi^2 \text{ м}^2.$$

538. По условию $S_{\text{бок}} = S$,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh = S, \quad 2rh = \frac{S}{\pi}; \quad S_{AA_1B_1B} = AB \cdot h = 2rh = \frac{S}{\pi}.$$

539. $D=1,5\text{ м}$, $H=3\text{ м}$, на 1 м^2 — 200 г краски.

$$S_{\text{полн}} + S_{\text{осн}} = 2\pi rh + \pi r^2 = S_{\text{бака}},$$

$$S_{\text{новбака}} = \pi BP + \pi r^2 = \pi \cdot 1,5 \cdot 3 + \pi \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 =$$

$$= \pi \cdot 4,5 + \pi \cdot \frac{2,25}{2} = 4,5\pi + 1,125\pi = 5,625\pi.$$

Тогда количество краски: $0,2 \cdot 5,625\pi = 1,125\pi \text{ кг}$.

540. По условию: $H - R = 12$,

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H) = 288\pi \text{ см}^2. \text{ Запишем систему:}$$

$$\begin{cases} H - R = 12, \\ 2\pi R(R + H) = 288\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} H - R = 12, \\ 2\pi R(R + H) = 144. \end{cases}$$

$$R^2 + R(12 + R) = 144; \quad R^2 + 6R - 72 = 0;$$

$$R_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 72} = -3 \pm 9.$$

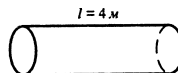
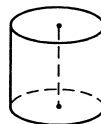
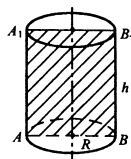
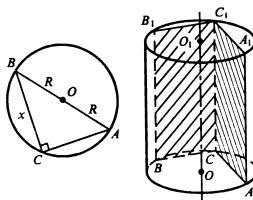
Очевидно, $R > 0$, т.е. $R = 6 \text{ см}$, $H = 12 + 6 = 18 \text{ см}$.

541. По условию: $d = 20 = 0,2 \text{ м}$,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot d \cdot l, \quad S_{\text{шв}} = \frac{2,5\pi d \cdot l}{100},$$

$$S_{\text{бок}} + S_{\text{шв}} = \pi \cdot 0,2 \cdot 4 + \frac{2,5\pi d \cdot 0,2 \cdot 4}{100} = 0,8\pi + \frac{0,8\pi d \cdot 2,5}{100} =$$

$$= 0,8\pi \left(1 + \frac{2,5}{100 \cdot 40}\right) = 0,8\pi(1 + 0,025) = 0,82\pi \text{ м}^2.$$



542. По условию: $S_{осн} = S$; $S = \pi R^2$.

Пусть высота цилиндра h . Из $\triangle AA_1B_1$.

$$\frac{2R}{h} = \operatorname{tg} \varphi, \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad h = \frac{2R}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$S_{бок} = 2\pi R h = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4\pi \operatorname{ctg} \varphi \frac{S}{\pi} = 4S \operatorname{ctg} \varphi.$$

Ответ: $4S \operatorname{ctg} \varphi$.

543. $S_{бок} = 2\pi R h$, $S_{полн} = 2\pi R(h + R)$,

$$AB = 2\pi R h, \quad R = \frac{AB}{2\pi} \cdot (1); \quad h = AA_1 \cdot (2)$$

Диагонали прямоугольника равны и в точке T делятся пополам (по свойствам прямоугольника).

Из $\triangle ATA_1$ по теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \varphi = \frac{2d^2}{4} - \frac{2d^2}{4} \cos \varphi = \\ &= \frac{d^2}{2} (1 - \cos \varphi) = \frac{d^2}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

$$AA_1 = \sqrt{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = d \sin \frac{\varphi}{2}, \quad AA_1 = h.$$

Из $\triangle ATB$ по теореме косинусов: $AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varphi) =$

$$= \frac{2d^2}{4} + \frac{2d^2}{4} \cos \varphi = \frac{d^2}{2} (1 + \cos \varphi) = \frac{d^2}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

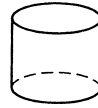
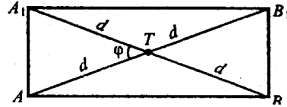
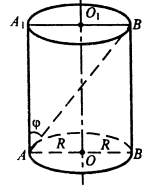
$$AB = \sqrt{d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = d \cos \frac{\varphi}{2}; \quad R = \frac{AB}{2\pi} = \frac{d \cos \frac{\varphi}{2}}{2\pi};$$

$$\begin{aligned} S_{бок} &= 2\pi \frac{d \cos \frac{\varphi}{2}}{2\pi} \cdot d \sin \frac{\varphi}{2} = d^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2} d^2 \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} d^2 \sin \frac{\varphi}{2}; \end{aligned}$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2}{4\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн};$$

$$S_{полн} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + 2 \frac{d^2}{4\pi} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2} \sin \varphi + \frac{d^2}{4\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2} \left(\sin \varphi + \frac{1}{\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Если за основание принять AA_1 , а за высоту — AB , то $S_{бок}$ не изменится.

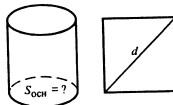


$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi};$$

Ответ: $S_{полн} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + 2 \cdot \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi + \frac{d^2}{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$

544. $S_{осн} = \pi R^2.$

Очевидно, сторона квадрата равна $\frac{d}{\sqrt{2}}.$



$$\frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R, \text{ т.е. } R = \frac{d}{2\sqrt{2} \cdot \pi}; \quad S_{осн} = \pi \frac{d^2}{8 \cdot \pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

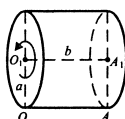
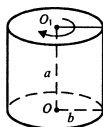
545. Пусть $R = OA = a, H = AA_1 = a.$

а) $S_{осевого сеч} = 2RH = 2aa = 2a^2;$

б) $S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi aa = 2\pi a^2;$

в) $S_{полн} = 2\pi a^2 = 2(\pi a^2) = 4\pi a^2.$

546. а)



$$S_{бок} = 2\pi ba$$

$$S_{бок} = 2\pi ab$$

$S_{бок}$ одинакова.

б) $S_{полн} = 2\pi ba + 2\pi b^2 = S_1, \quad S_2 = S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2,$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)} = \frac{a}{b}.$$

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{S_1}{S_2}.$

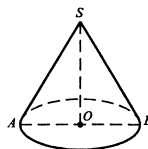
547. По условию $SO = h = 15$ см, $R = OA = 8$ см,

$$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = 17 \text{ см.}$$

548. а) $\alpha = 30^\circ$ по условию

$$R = AO = AS \cos \alpha = AS \cos 30^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ см,}$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi (6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 \cdot \pi = 108\pi \text{ см}^2;$$



б) $\alpha = 45^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2} \text{ см},$

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 = 72\pi \text{ см}^2;$$

в) $\alpha = 60^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{1}{2} 6 \text{ см}^2.$

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ см}^2$$

549. По условию $PO = h = 8 \text{ дм}.$

а) $S_1 = \frac{1}{2} S_{\text{осн}};$ б) $S_1 = \frac{1}{4} S_{\text{осн}},$

Плоскость, параллельная основанию, пересекается с конусом по окружности и разбивает конус на две части.

$$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA; \quad \frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1A_1}{OA}, \quad \frac{PO_1}{8} = \frac{r_1}{r}.$$

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2, \quad \frac{PO_1}{8} = \frac{\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S_{\text{осн}}}{\pi}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_{\text{осн}}}}.$$

а) $PO_1 = 8 \sqrt{\frac{S_1}{S_{\text{осн}}}} = 8 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ дм};$ б) $PO_1 = 8 \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{8}{2} = 4 \text{ дм};$

550. Пусть $\angle APB = 90^\circ, AO = OB = 5 \text{ см}, S_{\Delta APB} = ?$

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} AP \cdot PB = \frac{1}{2} AP^2,$$

$$2AP^2 = AB^2 \text{ (по теореме Пифагора), } AB = 10 \text{ см.}$$

$$AP^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 4 = 50 \text{ см}^2, \text{ тогда } S_{\Delta APB} = \frac{50}{2} = 25 \text{ см}^2.$$

551. а) Обозначим $\angle BPC = 30^\circ, PC = PB = 2r.$

$$S_{BPC} = \frac{1}{2} PB \cdot PC \cdot \sin 30^\circ; \quad S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r}{2 \cdot 2} = r^2;$$

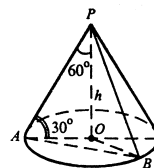
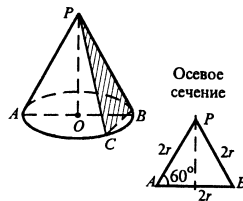
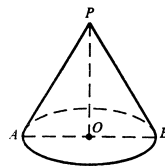
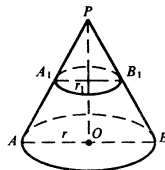
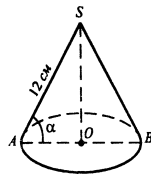
б) Дано $\angle BPC = 45^\circ,$

$$S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = r^2 \sqrt{2};$$

в) Дано $\angle BPC = 60^\circ, S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = r^2 \sqrt{3}.$

552. Дано $PO = h, \angle APO = 60^\circ, AP \perp PB, PB$ — образующая.

1) $AP = 2h,$ (PO — катет, лежащий против угла в 30°);



2) $AP = PB = 2h$ — как образующие конуса;

3) $\triangle APB$ прямоугольный.

$$S_{APB} = \frac{1}{2} AP \cdot PB, \quad S = \frac{2h \cdot 2h}{2} = 2h^2.$$

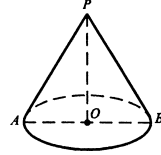
553. Дано: APB — осевое сечение. $S_{APB} = 6 \text{ дм}^2$, $S_{осн} = 8 \text{ дм}^2$.

1) $S_{APB} = \frac{1}{2} PO \cdot AB$, $AB = 2r$.

$$S_{APB} = \frac{PO \cdot 2r}{2} = rh, \quad 6 = rh; \quad (1)$$

2) $S_{осн} = \pi r^2$, $8 = \pi r^2$; (2)

3) из (2) $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$; из (1) $h = \frac{6}{r} = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{\pi}{8}} \text{ дм.}$



554. Дано BC — хорда, стягивает угол а) в 60° ; б) в 90° . $S_{сеч} = ?$

Проведем $OK \perp CB$ и соединим точки P и K . По теореме о трех перпендикулярах: $PK \perp CB$. PK — высота треугольника BPC .

$$S_{сеч} = S_{BPC} = \frac{1}{2} CB \cdot PK.$$

а) $BC = r$.

Из $\triangle ПОК$: $PK = \sqrt{PO^2 + OK^2}$, из $\triangle СРК$: $PK = \sqrt{CP^2 - CK^2}$.

$$PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4l^2 - r^2}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2},$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{4l^2 - r^2};$$

б) $CB = r\sqrt{2}$; $PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}},$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2l^2 - r^2}.$$

555. Дано: $OP = h = 10 \text{ см}$, BC — хорда,

$\angle COB = 60^\circ$, двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью BPC равен: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° . $S_{BPC} = ?$

Построим линейный угол данного двугранного угла. Проведем $OA \perp BC$, строим отрезок PA . По теореме о трех перпендикулярах $PA \perp BC$.

$$OA \perp BC$$

$PO \perp PAO$, поэтому $\angle PAO$ — линейный угол двугранного угла.

а) $\angle PAO = 30^\circ$. Из $\triangle POA$: $PA = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h$, из

$\triangle COB$: $BC = r = 2CA$,

$$\frac{CA}{OA} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad CA = \frac{OA}{\sqrt{3}}.$$

Из $\triangle POA$: $\frac{h}{OA} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad OA = h\sqrt{3}$.

Итак, $CA = \frac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h$, $BC = 2h$. $S_{сеч} = \frac{1}{2} BC \cdot PA$, $S_{сеч} = \frac{1}{2} 2h \cdot 2h = 2h^2$,

$$S_{сеч} = 2 \cdot 100 = 200 \text{ см}^2.$$

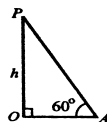
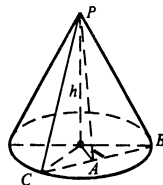
б) $\angle PAO = 45^\circ$. $PA = h\sqrt{2}$ см $= 10\sqrt{2}$ см, $OA = h$, $CA = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$$BC = \frac{2h}{\sqrt{3}}; \quad S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot h\sqrt{2} = \frac{h^2}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{100}{3} \sqrt{6} \text{ см}^2.$$

в) $\angle PAO = 60^\circ$; $\frac{h}{OA} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; $OA = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$$CA = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(\sqrt{3})^2} = \frac{h}{3} \text{ см}, \quad CB = \frac{2h}{3} \text{ см}, \quad PA = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}} \text{ см}.$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2h^2}{3\sqrt{3}} = \frac{2h^2}{9} \text{ см}^2. \quad S_{сеч} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 100}{9} = \frac{200\sqrt{3}}{9} \text{ см}^2.$$

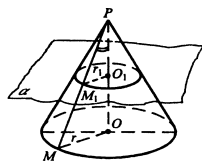


556. Дано: $\alpha \perp$ оси конуса PO .

Докажем, что

1) сечение конуса плоскостью α будет кругом с центром в точке O_1 ;

2) $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$.



Возьмем некоторую точку $M_1 \in \alpha$ и точку $M_1 \in O_1(r_1)$. (на плоскости α строим окружность с центром в точке O_1 и радиуса r_1 и на этой окружности выбираем произвольную точку M_1).

Через точку P и точку M_1 проводим прямую PM_1 , которая пересечет плоскость основания конуса в точке M . $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$ как прямоугольные, имеющие одинаковый острый угол.

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PM_1}{PM}; \quad OM = \frac{PO \cdot O_1M_1}{PO_1} = \frac{PO}{PO_1} \cdot r_1 = r = \text{const при задан-}$$

ной точке P и окружности $O_1(r_1)$.

Тогда: точка M — произвольная, значит, все точки луча PM_1 , пересекающие плоскость основания конуса, лежат на окружности $O(r)$, т.е. равноудалены

лены от некоторой точки O на расстояние r , что видно из формулы. PM — образующая конуса по определению.

4) Образующие составляют коническую поверхность, поэтому докажем, что существует произвольная точка $M_1 \in \alpha$, $M_1 \in PM$ такая, что $M_1 \in O_1(r_1)$.

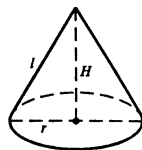
5) $\triangle PO_1M_1 \sim \triangle POM$ (PM — образующая).

$$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} \cdot r = r_1 = \text{const} \text{ при заданной точке } P \text{ и } r.$$

Тогда: эта окружность будет сечением боковой поверхности, а круг, границей которого является $O_1(r_1)$, будет сечением конуса плоскостью α .

557. См. рисунок к задаче 556: $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO}$, или

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO}; \quad S_1 = \pi r_1^2; \quad S_2 = \pi r_2^2.$$

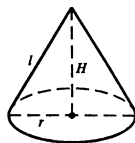


Запишем отношение: $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{PO_1^2}{PO^2}; \quad \frac{\frac{S_1}{\pi}}{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{PO_1^2}{PO^2}.$

558. 1) $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi r l;$

2) $l = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (см)};$

3) $\frac{\pi \cdot 25 \cdot \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5}{\pi \cdot 25} = 72^\circ \cdot 3 = 216^\circ.$



559. $r = l \cos 60^\circ = \frac{l}{2}, \quad r = \frac{l}{2}.$

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l.$$

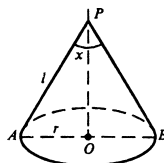
Вычислим градусную меру дуги α : $\alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot l \cdot l}{\pi \cdot l^2 \cdot 2} = 180^\circ.$

560. Обозначим $\angle APO = x$.

$$\frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l, \text{ где } l = AP, \quad r = OA.$$

$$r = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ \cdot \pi l} = \frac{\alpha l}{360^\circ}.$$

а) $r = \frac{180^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{2};$ б) $r = \frac{90^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{4};$ в) $r = \frac{60^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{l}{6}.$



Из $\triangle APO$: $\sin x = \frac{AO}{PA} = \frac{r}{l}$.

а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = 30^\circ$, $\angle APB = 2x = 60^\circ$;

б) $\sin x = \frac{1}{4}$, $x = \arcsin \frac{1}{4}$, $\angle APB = 2 \arcsin \frac{1}{4}$;

в) $\sin x = \frac{1}{6}$, $x = \arcsin \frac{1}{6}$, $\angle APB = 2 \arcsin \frac{1}{6}$.

561. По условию $r = 9$ см, $\varphi = 120^\circ$.

Пусть ℓ — длина дуги сектора, получающегося в результате развертки конуса.

$$\ell = \frac{2\pi r \varphi}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 6\pi.$$

С другой стороны ℓ — это длина окружности основания конуса, тогда радиус основания $R = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{6\pi}{3\pi} = 3$ см.

Тогда $S_{осн} = \pi r^2 = 9\pi$ см².

$$H = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ см.}$$

562. $\triangle AOP$ — равнобедренный;

$$r = OA = l \sin 45^\circ = \frac{6,5 \cdot \sqrt{2}}{2}; \quad S_{бок} = \pi r l,$$

$$S_{бок} = \pi \cdot \frac{6,5 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot 6,5 = 169/8 \pi \sqrt{2} \text{ см}^2.$$

563. Дано: $H = 1,2$ см, $S_{сеч} = 0,6$ см².

1) $S_{полн} = \pi r(1 + r)$;

2) $S_{APB} = \frac{1}{2} AB \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = r \cdot H$,

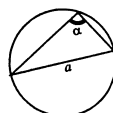
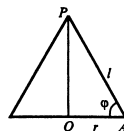
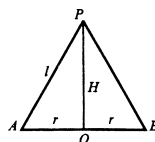
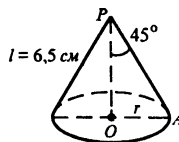
$$0,6 = r \cdot 1,2 \quad r = \frac{0,6}{1,2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ см;}$$

$$l = \sqrt{H^2 + r^2}, \quad l = \sqrt{1,44 + 0,25} = \sqrt{1,69} = 1,3 \text{ см;}$$

4) $S_{полн} = \pi \cdot 0,5(0,5 + 1,3) = \pi \cdot 0,5 \cdot 1,8 = 0,9\pi$ см².

564. По теореме синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$, следовательно, $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

$$\frac{r}{l} = \cos \varphi, \text{ следовательно } l = \frac{r}{\cos \varphi},$$



$$l = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi}; S_{\text{полн}} = \pi r(r+l), \text{ тогда}$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha} \left(\frac{a}{2 \sin \alpha} + \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right) =$$

$$= \frac{\pi a}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{a^2}{2 \sin \alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{\pi a^2 (1 + \cos \varphi)}{4 \sin^2 \alpha \cos \varphi}.$$

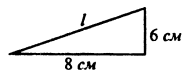
565. При вращении получим коническую поверхность.

$$S_{\text{бок}} = \pi r l, S_{\text{полн}} = \pi r(1+r).$$

$$l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ (см)};$$

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot 8(10+8) = 18 \cdot 8 \cdot \pi = 144\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

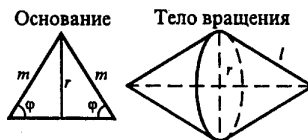


566. $S_{\text{бок}} = 2S_{\text{бок}} = \pi r l.$

$$r = m \sin \varphi, l = m;$$

$$S_{\text{бок}} = \pi m \sin \varphi \cdot m = \pi m^2 \sin \varphi;$$

$$S_{\text{пов}} = 2\pi m^2 \sin \varphi.$$

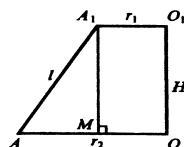


567. Дано: $r_1 = 3 \text{ см}, r_2 = 6 \text{ см}, H = 4 \text{ см}.$

Проведем $A_1M \perp OA.$

$$A_1M = H = 4 \text{ см}, AM = 3 \text{ см},$$

$$A_1A = \sqrt{H^2 + AM^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ (см)}.$$



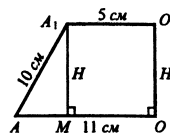
568. Проведем $A_1M \perp OA.$

$$A_1M = O_1O = H \text{ см}, AM = 6 \text{ см}.$$

а) $H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см};$

б) $S_{\text{сеч}} = S_{\text{трапеции}} S_{AA_1O_1O} = \frac{5+11}{2} \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2,$

$$S_{\text{сеч}} = 128 \text{ см}^2.$$



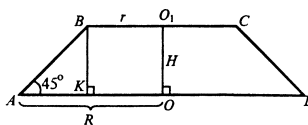
569. Осевое сечение усеченного конуса

— равнобедренная трапеция с

основаниями $2r$ и $2R$. Вычислим высоту

трапеции $OO_1 = H$. $AK = R$ — r , $\triangle ABK$ —

прямоугольный равнобедренный, $BK = O_1O = H = R - r$.



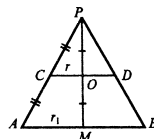
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H = \frac{2r + 2R}{2} \cdot (R - r) = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2.$$

570. Дано $S_{\text{бок}} = 80 \text{ см}^2, PO = OM, CD \perp PM.$

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l, \text{ где } r = OC, r_1 = MA, l = CA. CO$$

— средняя линия в $\triangle APM, AC = CP.$

$$S_{\text{бок}} = \pi r_1 AP. \text{ Обозначим } AC = CP = l, \text{ тогда}$$



$\pi r_1 \cdot 2l = 80$, или $\pi r_1 l = 40$ (*). $\triangle POC \sim \triangle PMA$.

$$\frac{PO}{PM} = \frac{OC}{MA} = \frac{PC}{PA}; \quad \frac{r}{r_1} = \frac{l}{2l} \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{r_1}{2}.$$

$$\text{Из (*) } l = \frac{40}{\pi r}; \quad S_{\text{бок}} = \pi \left(\frac{r_1}{2} + r_1 \right) \cdot \frac{40}{\pi r_1} = \frac{\pi \cdot 3r_1 \cdot 40}{2\pi r_1} = 60.$$

571. Пусть $CB = r_1$, $AD = r$, $l = DC$, $H = BA$.

Проведем $CM \perp DA$.

$$\text{Из } \triangle DCM: DM = 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3;$$

$$DA = r = 3 + 4 = 7 \text{ см.}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l; \quad S_{\text{бок}} = \pi(4 + 7)3\sqrt{2} = \pi \cdot 11 \cdot 3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\pi \text{ см}^2;$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(r_1^2 + r^2),$$

$$S_{\text{полн}} = 33\sqrt{2}\pi + \pi(16 + 49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi.$$

572. Дано: $1 \text{ м}^2 - 150 \text{ г}$, $N=100$ ведер.

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)l,$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r_1^2, \quad S_{\text{полн}} = [\pi(10 + 15)30 + \pi \cdot 10^2] \cdot 2 =$$

$$= 2[\pi \cdot 25 \cdot 30 + 100\pi] = 2\pi[750 + 100] = 850 \cdot 2\pi = 1700\pi \text{ см}^2;$$

$$1 \text{ м} - 100 \text{ см}, \quad 1 \text{ м}^2 - 10^4 \text{ см}^2, \quad x \text{ м}^2 - 1700\pi \text{ см}^2,$$

$$x = \frac{1700\pi}{100 \cdot 100} = 0,17\pi \text{ м}^2.$$

$$S = 0,17\pi \text{ м}^2; \quad 100S = 17\pi \text{ м}^2.$$

Расход краски составит: $0,15 \cdot 17\pi = 2,55\pi \text{ кг} \approx 8,012 \text{ кг}$.

573. Через три точки проходит единственная плоскость, то есть через точки A , B и O . Сечение — это окружность, проходящая через центр сферы.

а) Проведем радиусы OA и OB . $\triangle AOB$ — равнобедренный, OM — медиана. Тогда, OM также и высота, то есть $OM \perp AB$.

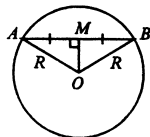
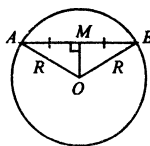
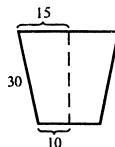
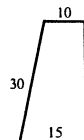
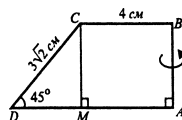
б) Если $OM \perp AB$, то $\triangle OMA = \triangle OMB$. (OM — общий катет, $OA = OB = R$). тогда, $MA = MB$, точка M — середина AB .

574. Проведем секущую плоскость через точки A , B и O . Сечение сферы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке O . OM — медиана в равнобедренном $\triangle AOB$, поэтому $OM \perp AB$.

а) $R = 50 \text{ см}$, $AB = 40 \text{ см}$.

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle AOM: OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} =$$



$$= \sqrt{2500 - 400} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ см};$$

б) $R=15$ мм, $AB=18$ мм.

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ мм};$$

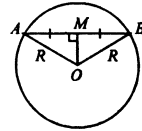
в) $R=10$ дм, $OM=60$ см, найти AB . $OM=60$ см $=6$ дм.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм}, \quad AB = 2AM = 16 \text{ дм};$$

г) $R=a$, $OM=b$.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

575. Проведем плоскость через точки A , B и точку O — центр сферы. В сечении получим окружность радиуса R , проходящая через центр сферы. В равнобедренном $\triangle OAB$ проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, таким образом, OM — медиана,



ана, $MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.

$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

576. а) $A(2; -4; 7)$, $R = 3$.

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2 \text{ имеем:}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9;$$

б) $A(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; аналогично (а)

в) $A(2; 0; 0)$, $R = 4$, $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 16$, аналогично (а).

577. а) $A(-2; 2; 0)$, $N(5; 0; -1)$.

Уравнение сферы с центром в точке $C(x_o; y_o; z_o)$ имеет вид:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2.$$

В нашем случае оно имеет вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2$.

Т.к. точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:

$$(5 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + (-1)^2 = R^2, \quad 49 + 4 + 1 = R^2, \quad R^2 = 54,$$

поэтому уравнение сферы имеет вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54$;

а) $A(-2; 2; 0)$, $N(0; 0; 0)$. $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = R^2.$$

$$(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2 + 0^2 = R^2, \quad 4 + 4 = R^2, \quad R^2 = 8.$$

Уравнение имеет вид: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 8$;

б) $A(-2;2;0)$, $N(5;3;1)$.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$5^2 + 3^2 + 1^2 = R^2, \quad 25 + 9 + 1 = 35, \quad R^2 = 35.$$

Уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = 35$.

578. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$, где R — радиус сферы, $(x_o; y_o; z_o)$ — координаты точки C , центра сферы. В нашем случае
 $x-x_o = x$; $y-y_o = y$; $z-z_o = z$, поэтому $x_o = 0$; $y_o = 0$; $z_o = 0$,

а $R = \sqrt{49} = 7$. Координаты центра $(0;0;0)$, радиус: 7.

б) $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z^2 = 2$.

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2, \quad x-3 = x-x_o, \quad x_o = 3;$$

$$y+2 = y-y_o, \quad y_o = -2; \quad z-z_o = z, \quad z_o = 0; \quad 2 = R^2, \quad R = \sqrt{2}.$$

Координаты центра: $(3;-2;0)$, радиус: $\sqrt{2}$.

579. а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4x + 4) + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \text{ — уравнение сферы.}$$

Координаты центра $(2; 0; 0)$, радиус: 2;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$, $x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + z^2 = 24$,

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 = 5^2.$$

Координаты центра $(0; 1; 0)$, радиус: 5;

$$\text{в) } x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3, \quad (x^2 + 2x + 1) - 1 + y^2 + z^2 = 3,$$

$$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4 = 2^2 \text{ — уравнение сферы с центром } (01; 0; 0), \text{ радиус: } 2;$$

г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2,5$,

$$(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + (z^2 - 2z + 1) - 1 = 2,5,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = 2,5 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 2,5 + \frac{10}{4} + 1 =$$

$$= 2,5 + 2,5 + 1 = 5 + 1 = 6 = (\sqrt{6})^2,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{6})^2 \text{ — уравнение сферы; в точке с ко-}$$

ординатами $\left(\frac{1}{2}; +\frac{3}{2}; 1\right)$ расположен ее центр, радиус равен $\sqrt{6}$.

580. Сечение шара плоскостью — это круг. $OB \perp$ плоскости сечения, $OB=9$ дм, $OA=R$.

Из прямоугольного треугольника OBA :

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - OB^2} = \\ = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1681 - 81} = \sqrt{1600} = 40 \text{ дм.}$$

Площадь круга в сечении:

$$S = \pi(AB)^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi \text{ дм}^2.$$

581. Плоскость треугольника ABC пересекает сферу с центром в точке O по окружности, которая описана около $\triangle ABC$. Из точки O проведем OK перпендикулярно плоскости ABC , OK — искомое расстояние, точка K — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Соединим точку K с одной из вершин $\triangle ABC$, например, с A , проведем радиус в точку A .

$\triangle OKA$ — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}.$$

Найдем длину AK .

$$AK = \frac{AB \cdot CB \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}}, S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-CA)},$$

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12, S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2,$$

$$AK = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 4} = 5 \text{ см}, OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см.}$$

582. Плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около прямоугольника $ABCD$. Центр окружности находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть O — центр сферы, следовательно $OK \perp$ плоскости $ABCD$, OK — искомое расстояние.

Из прямоугольного $\triangle OKA$ вычислим OK :

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - AK^2}.$$

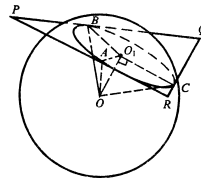
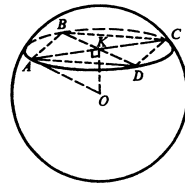
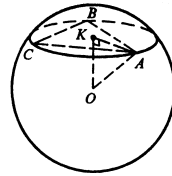
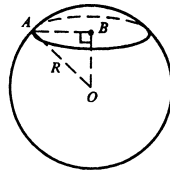
$$AK = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}, OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см.}$$

583. Равнобедренный $\triangle PQR$ «положили» на сферу, он касается сферы в точках A, B, C . Проведем из центра сферы O перпендикуляр OO_1 на плоскость PQR .

$O_1A \perp PR$, $O_1B \perp PQ$, $O_1C \perp RQ$. (По теореме о трех перпендикулярах O_1A, O_1B, O_1C перпендикулярны к сторонам треугольника PQR).

$\triangle OO_1A = \triangle OO_1B = \triangle OO_1C$ (прямоугольные, где O_1O — общий катет, $OA = OB = OC = R$).

Тогда: точка O_1 — центр вписанной окружности.



Вычислим радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{S_{\Delta PQR}}{p}, \quad p = \frac{10+10+12}{2} = 16 \text{ см.}$$

По формуле Герона: $S_{\Delta PQR} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2$,

$$r = \frac{48}{16} = 3 \text{ см.}$$

По теореме Пифагора из ΔOO_1B найдем OO_1 :

$$OO_1 = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ см.}$$

584. см.538, за исключением: вместо ΔPQR будет ΔABC . Рассуждения повторяются; точка O_1 — центр вписанной в ΔABC окружности. Пусть ее радиус равен r .

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}, \quad p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см.}$$

По формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \text{ см}^2$.

$$r = O_1F = \frac{84}{21} = 4 \text{ см.}$$

Из прямоугольного ΔOO_1F по теореме Пифагора:

$$OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ см.}$$

585. Из центра сферы — O , опустим перпендикуляр OO_1 к плоскости $ABCD$. Проведем $O_1L \perp DC$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp AD$. (По теореме о трех перпендикулярах OL , OM , ON , OK перпендикулярны к соответствующим сторонам ромба). $\Delta OO_1L = \Delta OO_1K = \Delta OO_1N = \Delta OO_1M$ (прямоугольные, O_1O — общий катет, $OK=OL=ON=OM=R$). Тогда, $O_1K=O_1L=O_1N=O_1M$, точка O_1 равноудалена от сторон ромба, таким образом O_1 — центр вписанной в ромб окружности. Пусть ее радиус равен r . Тогда из ΔOO_1L :

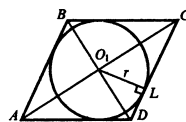
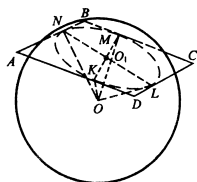
$$OO_1 = \sqrt{OL^2 - O_1L^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{100 - r^2}.$$

Вычислим r . $BD=15 \text{ см}$, $AC=20 \text{ см}$.

$$CD = \sqrt{O_1C^2 + O_1D^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{225 + 400} = \frac{\sqrt{625}}{2} = \frac{25}{2} \text{ (см)}.$$

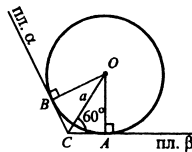
$$S_{\Delta O_1CD} = \frac{1}{2}CD \cdot O_1L = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot r.$$



$OA \perp \beta$, $AC \perp MN$ (по построению).

$OC \perp MN$ — по теореме о трех перпендикулярах.

OC — расстояние от центра сферы до ребра MN ,
 $OC = a$. $\triangle OBC = \triangle OAC$ ($OB = OA = R$, OC — общая),
 тогда OC — биссектриса угла $\angle ACB$, $\angle ACB = 120^\circ$,



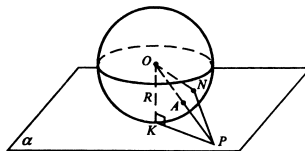
тогда $\angle OCA = 60^\circ$. Из $\triangle OCA$ имеем: $OA = R = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

AB — расстояние между точками касания.

$\triangle AOB$ — равнобедренный, $\angle OCA = 60^\circ$, тогда, $\angle OBA = \angle OAB = 60^\circ$,

$\triangle AOB$ — равносторонний, $AB = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

592. α — касательная плоскость к сфере,
 $P \in \alpha$, $KP = 15$ см, $OK = OA = R = 112$ см. Дока-
 жем, что точка $A \in OP$ будет ближайшей
 точкой к точке P .



Выберем произвольную точку N на
 сфере. Проведем отрезки NO и NP . По
 свойству сторон треугольника:

$ON + NP > OP$, $OP = OA + AP$, $R + NP > R + AP$, $NP > AP$.

Итак, $AP < NP$, а далее так как точка N выбрана произвольно, то утвер-
 ждение доказано. Из прямоугольного $\triangle OKP$ имеем:

$$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{R^2 + 15^2} = \sqrt{112^2 + 15^2} = \sqrt{12544 + 225} = \sqrt{12769} = 113 \text{ см}, AP = OP - R = 113 - 112 = 1 \text{ см}.$$

593. $S = 4\pi R^2$.

а) $S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi \text{ см}^2$;

б) $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ см}^2$;

в) $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ м}^2$;

г) $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi \text{ см}^2$.

594. $S_{\text{сеч}} = 9 = \pi R^2$, $R^2 = \frac{9}{\pi} \text{ м}^2$; $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36 \text{ м}^2$.

595. $S = 324 \text{ см}^2$, $S = 4\pi R^2$, $R = \sqrt{\frac{324}{4\pi}} = \sqrt{\frac{81}{\pi}} = \frac{9}{\sqrt{\pi}} \text{ см}$.

596. Первая сфера: $S_1 = 4\pi R_1^2$. Вторая сфера: $S_2 = 4\pi R_2^2$.

Множитель 4π одинаковый, тогда, S_1 пропорционально R_1^2 , S_2 про-
 порционально R_2^2 .

Доказано.

597. $S_{сф} = 4\pi R^2$, $R = 5$ м, $S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ м²;

$S = \pi L^2$, L — радиус круга. $\pi L^2 = \pi \cdot 100$, $L^2 = 100$, $L = 10$ см.

598. Проведем диаметр сферы перпендикулярно к данным параллельным сечениям. Через диаметр проведем секущую плоскость. Она пересечет сферу по окружности, радиус которой равен радиусу сферы.

$ND = r_1 = 9$ см, $MB = r_2 = 12$ см, $NM = 3$ см, $OD = OB = R$.

Из прямоугольного $\triangle OBM$ по теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{R^2 - 12^2} = \sqrt{R^2 - 144}.$$

Из $\triangle ODN$: $ON = \sqrt{R^2 - 9^2} = \sqrt{R^2 - 81}$.

$$MN = NO - MO = \sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144},$$

$$\sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144} = 3,$$

$$\sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144},$$

$$R^2 - 81 = 9 + 6\sqrt{R^2 - 144} + R^2 - 144; \quad 6\sqrt{R^2 - 144} = 54, \quad \sqrt{R^2 - 144} = 9,$$

$$R^2 - 144 = 81, \quad R = 15 \text{ см}$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 = 900\pi \text{ см}^2.$$

599. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через следующие три точки:

- 1) общую точку двух сечений, из которой под углом 90° выходят радиусы r_1 и r_2 ;
- 2) конец радиуса r_1 ;
- 3) конец радиуса r_2 ;

Угол $\angle ACB$ — вписанный, т.к. он равен 90° , то он опирается на диаметр сферы, то есть $AB=2R$.

$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2$; $4R^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2$; $R^2 = r_1^2 + r_2^2$. Площадь сферы $S = 4\pi R^2 = 4\pi(r_1^2 + r_2^2)$.

600. Цилиндр получен в результате вращения квадрата $ABCD$ вокруг стороны AB ; $AB=a$.

$$S_{сф} = 4\pi a^2; \quad S_{осн} = \pi a^2;$$

$$S_{бок} = 2\pi \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2;$$

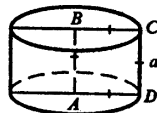
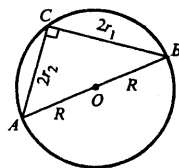
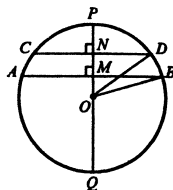
$$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2.$$

Тогда: $S_{полн \text{ цикл}} = S_{сф}$. Доказано.

Вопросы к главе VI

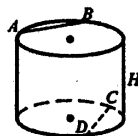
1. 90° .

2. Сечение — прямоугольник.



3. АВ и CD лежат в параллельных плоскостях.

$\rho(AB, CD) = H$, H — высота цилиндра.



4. Первая деталь Вторая деталь

$2l$, l — высота (образующая),

$\frac{r}{2}$, r — радиус основания,

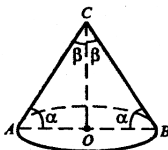
$$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2l = 2\pi l, \quad S_{бок} = 2\pi r l,$$

$$S_{осн} = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \pi \frac{r^2}{4}, \quad S_{осн} = \pi r^2,$$

$$2 S_{осн} = \frac{\pi r^2}{2}. \quad 2 S_{осн} = 2\pi r^2.$$

Боковые поверхности равны, но площадь двух оснований второй детали больше площади двух оснований первой детали.

5.



а) да; б) да.

6.

Равнобедренный треугольник.

7.

Да.

$$8. R = \sqrt{5} \text{ см}, D = 2R = 2\sqrt{5} = \sqrt{20} \text{ см}.$$

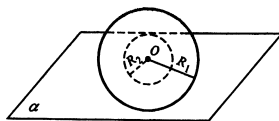
Вычислим гипотенузу прямоугольного треугольника:

$$C = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} \text{ см}.$$

$$C > D, \text{ т.к. } \sqrt{24} > \sqrt{20}.$$

Гипотенуза не помещается внутри сферы, тогда, хотя бы одна вершина лежит вне сферы.

9. Одна сфера всегда будет внутри другой, поэтому общую касательную плоскость провести невозможно.



10. Это сфера, у которой данный отрезок является диаметром.

Дополнительные задачи

601. ABCD — осевое сечение цилиндра; $OA = r$; точка P — середина радиуса OA; плоскость MNKL $\perp$ OA.

Осевое сечение $ABCD$ и сечение $MNKL$ являются прямоугольниками. Пусть образующая цилиндра $LM = \ell$, следовательно, $S = S_{ABCD} = AD \cdot LM = 2rl$.

Выразим длину отрезка MN .

$$ON = OM = r, \quad OP = \frac{r}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника ONP найдем:

$$PN = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

$\triangle OPN = \triangle OPM$, следовательно, $NP = PM$,

$$NM = 2PN = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

$$S_{MNKL} = MN \cdot LM = r\sqrt{3}l = rl\sqrt{3}.$$

Итак, $S = 2rl$, отсюда $rl = \frac{S}{2}$. Поэтому $S_{MNKL} = \frac{S}{2}\sqrt{3}$.

602. $ABCD$ — прямоугольник.

Через центры оснований проведем диаметры, перпендикулярные к сторонам AB и DC . $O_1M \perp AB$, $ON \perp DC$.

Из планиметрии известно, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам, следовательно, точка N и точка M — середины DC и AB соответственно. Отрезок MN параллелен сторонам AD и BC , $\angle MNO = 60^\circ$ — угол между прямой BC (или ей параллельной MN) и плоскостью основания.

Пусть R — радиус основания цилиндра.

$DC = AB = x$; $DN = \frac{x}{2}$. Из $\triangle DNO$ получим:

$$ON = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Из прямоугольного треугольника LON :

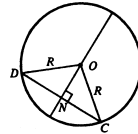
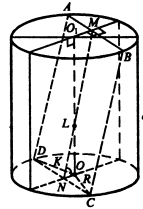
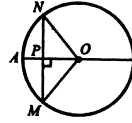
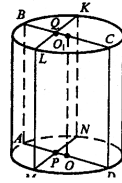
$$\frac{LO}{ON} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad OL = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Рассмотрим плоскость верхнего основания

$$O_1M = \sqrt{O_1B^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}; \quad \text{следовательно, } O_1M = ON.$$

Значит $\triangle O_1LM = \triangle O_1LN$, отсюда $OL = O_1L$.

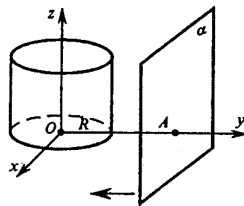
$O_1L + LO = O_1O = x$ (высота цилиндра равна его образующей).



$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = x, \quad 4 \cdot 3(R^2 - \frac{x^2}{4}) = x^2, \quad 12R^2 - 3x^2 = x^2, \quad 12R^2 = 4x^2,$$

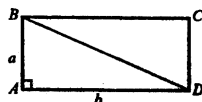
$$R^2 = \frac{x^2}{3}, \quad R = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

603. Возьмем систему координат, как показано на рисунке. Ось ординат при этом перпендикулярна плоскости α , по оси аппликат направлена ось цилиндра. Будем приближать плоскость α к оси O_z параллельно плоскости O_{xz} . Когда расстояние станет равно R , то допустим, что через точку A можно провести две прямые, параллельные оси O_z (или, что то же самое, перпендикулярные плоскости O_{xy}). Но по теореме п. 4 через точку A может проходить только одна прямая, параллельная оси цилиндра. Следовательно, на поверхности цилиндра найдется только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная оси цилиндра, она и есть образующая цилиндра.



604. Если вращать прямоугольник $ABCD$ вокруг стороны AB , получим цилиндр, у которого $r=b$, $l=a$.

$$S_{\text{полн}} = 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1.$$



При вращении вокруг стороны AD получим цилиндр, у которого $r=a$, $l=b$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rl = 2\pi ab, \quad S_{\text{осн}} = \pi a^2,$$

$$2S_{\text{осн}} = 2\pi a^2, \quad S_{\text{полн}} = 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2.$$

Согласно условию получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1, & \begin{cases} 2\pi b(a+b) = S_1, \\ 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2; \end{cases} \\ 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2; & \begin{cases} 2\pi a(b+a) = S_2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{S_1}{S_2}. \quad \text{Подставим в первое уравнение системы:}$$

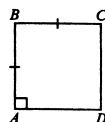
$$2\pi \cdot a \cdot a \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} + 2\pi \cdot a^2 \cdot \frac{S_1}{S_2} = S_1, \quad 2\pi \cdot a^2 \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) = S_1;$$

$$a^2 = \frac{S_1}{2\pi \cdot \frac{S_1 S_2 + S_2^2}{S_2^2}} = \frac{S_1 S_2^2}{2\pi \cdot S_1 (S_2 + S_1)} = \frac{S_2^2}{2\pi (S_2 + S_1)},$$

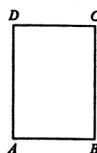
$$b^2 = a^2 \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_2^2}{2\pi (S_1 + S_2)} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{2\pi (S_1 + S_2)}.$$

Диагональ BD вычислим из $\triangle ABD$.

Осевое
сечение
цилиндра



Осевое
сечение



$$BD = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{S_2^2}{2\pi(S_1 + S_2)} + \frac{S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}} = \sqrt{\frac{S_2^2 + S_1^2}{2\pi(S_1 + S_2)}}; \quad BD = AC.$$

605. а) ABCD — квадрат, сторона которого равна a . Следовательно, радиус основания $r = \frac{a}{2}$, высота цилиндра равна a .

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2, \quad S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4}, \quad 2S_{\text{осн}} = \pi \frac{a^2}{2},$$

$$S_{\text{полн}} = \pi a^2 + \pi \frac{a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}, \quad \frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\frac{3\pi a^2}{2}}{\pi a^2} = \frac{3}{2}.$$

б) Пусть $AB=a$, следовательно, $AD=2a$. Рассмотрим два случая.

Первый: $AD=h$, $AB=2r$, следовательно $r = \frac{a}{2}$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a = 2\pi a^2, \quad S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{4}, \quad 2S_{\text{осн}} = \frac{\pi a^2}{2},$$

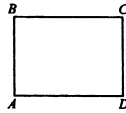
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{5}{2} \cdot \pi a^2, \quad \frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\frac{5}{2} \pi a^2}{2\pi a^2} = \frac{5}{4}.$$

Второй: $2AB=AD$. $AB=h$, $AD=2r$, $r=a$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2, \quad S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \cdot a^2,$$

$$2S_{\text{осн}} = 2\pi \cdot a^2, \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$

$$\frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{4\pi a^2}{2\pi a^2} = 2.$$



606. ABCD — прямоугольник, $AB=h$, $AD=2r$. Примем $AD=x$, следовательно $r = \frac{x}{2}$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h = 2\pi \frac{x}{2} h = \pi x h.$$

Площадь описанного около осевого сечения круга равна $\pi \cdot AO^2 = \pi \left(\frac{1}{2} AC\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot AC^2$.

Из $\triangle ACD$ найдем: $AC^2 = h^2 + x^2$. Площадь круга $S_{\text{кр}} = \frac{\pi}{4} (h^2 + x^2)$.

По условию $S_{\text{бок}} = S_{\text{кр}}$, или $\pi x h = \frac{\pi}{4} (h^2 + x^2)$.

Требуется найти отношение $\frac{r}{h} = \frac{x}{2h}$.



$$4xh = h^2 + x^2, \quad \frac{4xh}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2}, \quad \left(\frac{x}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{h}\right) + 1 = 0.$$

Обозначим $t = \frac{x}{h}$, следовательно $t^2 - 4t + 1 = 0$, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$,

$t > 0$ — по смыслу задачи, оба корня уравнения удовлетворяют этому условию. Искомое отношение: $\frac{x}{2h} = \frac{t_{1,2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

607. ABCD — осевое сечение; это — прямоугольник.

Примем $AB = h$, $AD = 2R$.

$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$; периметр равен $2(2R + h)$.

Из условий $2p = 2(h + 2R)$, $p = h + 2R$, $h = p - 2R$.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R(p - 2R) = 2\pi pR - 4\pi R^2.$$

Примем $f(R) = -4\pi R^2 + 2\pi pR$; $R > 0$.

Найдем ее наибольшее значение. Это экстремум функции $f(R)$.

$$f'(R) = -8\pi R + 2\pi p = 0 \quad R = p/4$$

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 2\pi\frac{p^2}{4} = \frac{-4\pi p^2}{16} + \frac{8\pi p^2}{16} = \frac{4\pi p^2}{16} = \frac{\pi p^2}{4}.$$

Наибольшая площадь боковой поверхности достигается при радиусе основания цилиндра $R = \frac{p}{4}$. $h = p - 2R = p - \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

608. Если внутренний радиус равен 5 см, то внутренний диаметр $D=10$ см. Следовательно, внешний диаметр, учитывая толщину стенок, равен $D + 2 = 12$ (см).

$$S_{\text{осн}} = \pi \frac{12^2}{4} = 36\pi \text{ (см}^2\text{)} \quad (S_{\text{круга}} = \pi \frac{d^2}{4}, \text{ где } d \text{ —}$$

диаметр круга).

Высота стакана 16 см, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot \frac{12}{2} \cdot 16 = 192\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Итак, площадь внешней поверхности стакана

$$S_{\text{внеш}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 192\pi + 36\pi = 228\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

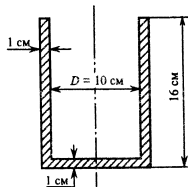
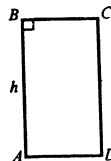
Вычислим полную площадь внутренней поверхности.

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot 5^2 = 25 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Высота внутренней части } 16 - 1 = 15 \text{ (см).}$$

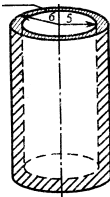
$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 15 = 150\pi \text{ (см}^2\text{)}. \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 175\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вычислим площадь кольца. $S_{\text{к}} = \pi(6^2 - 5^2) = \pi(36 - 25) = 11\pi \text{ (см}^2\text{)}.$

Площадь полной поверхности стакана равна $228\pi + 175\pi + 11\pi = 414\pi \text{ (см}^2\text{)}.$



Осевое сечение стакана



609. Найдем длину дуги СВА. Если примем за R радиус окружности, то это будет четверть длины круга,

т.е. $(2\pi R)/4$ или $\frac{\pi R}{2}$. Но с другой стороны, когда уже

сложен конус дуга СВА становится окружностью, основанием конуса. Тогда, учитывая, что r — это радиус основания, мы получим, что длина ее будет $2\pi r$. Но это одна и та же дуга,

следовательно, $2\pi r = \frac{\pi R}{2}$ или $r = \frac{R}{4}$, что и требовалось доказать, т.к. R —

это также образующая этого конуса.

610. Образующие конуса равны. Пусть $DA=DB=DC=a$.

Прямоугольные треугольники DBC, DAB и DAC равны по двум катетам.

$$AB=AC=BC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}.$$

Найдем R по формуле $\frac{a\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$

(теорема синусов для $\triangle ABC$)

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}, BF = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Примем $\angle BDF=\alpha$, тогда из теоремы косинусов для $\triangle BDF$ имеем:

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \alpha, 4 \cdot \frac{2}{3} = 1 + 1 - 2 \cos \alpha,$$

$$\frac{2}{3} = 2 \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

611. Пусть r — радиус основания конуса, h — высота конуса, тогда по условию $S_1=\pi r^2$ и $S_0=\pi r l$, l — образующая конуса.

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}, S_0 = \pi r \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$S_1 = \pi r^2, S_0^2 = \pi^2 r^2, (h^2 + r^2) = \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^4,$$

$$S_1^2 = \pi^2 r^4, S_0^2 = \pi^2 r^2 h^2 + S_1^2$$

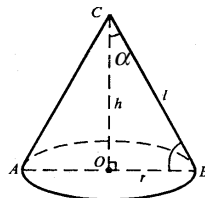
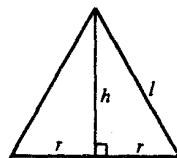
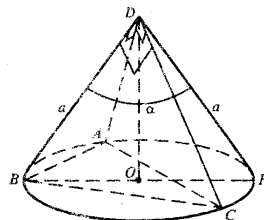
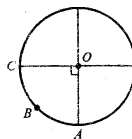
$$r^2 h^2 = \frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}, rh = \sqrt{\frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{S_0^2 - S_1^2}}{\pi} \text{ — это и есть площадь осевого}$$

сечения.

612. Примем $CO=h$, $OB=r$, $l=\sqrt{h^2+r^2}$

$$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}, S_{\text{полн}} = \pi r^2 + S_{\text{бок}} = \pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\sqrt{h^2 + r^2}. \text{ По условию } \frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{полн}}} = \frac{7}{8},$$



$$\frac{\pi r \sqrt{h^2 + r^2}}{\pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{7}{8},$$

$$8 \sqrt{h^2 + r^2} = 7r + 7 \sqrt{h^2 + r^2}, \quad \sqrt{h^2 + r^2} = 7r, \quad h^2 + r^2 = 49r^2, \quad h^2 = 48r^2, \quad \frac{h^2}{r^2} = 48$$

$$\frac{h}{r} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{h^2}{r^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 49 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$\cos \alpha = \frac{1}{7}$, или $\cos \alpha = -\frac{1}{7}$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то α — это

острый угол, $\cos \alpha > 0$. $\alpha = \arccos \frac{1}{7}$.

613. Построим $OC \perp DB$ и отрезок PC . По теореме о трех перпендикулярах $PC \perp DB$, PC — высота $\triangle DPB$.

Запишем теорему синусов для равнобедренного $\triangle DPB$.

$$\frac{DB}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ}, \quad \sin 120^\circ = \sin 60^\circ$$

$$DB = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = 4 \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}, \quad DC = \frac{1}{2} DB = 2\sqrt{3} \text{ (см)} \quad OC = \sqrt{DO^2 - DC^2} =$$

$$= \sqrt{16 - 12} = 2 \text{ (см)}$$

$$\angle PCO = 45^\circ. \text{ Из } \triangle POC: PC = \frac{OC}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

$$S_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}$$

614. По формуле $\alpha = \frac{360^\circ \cdot r}{\ell}$

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{270^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{4}.$$

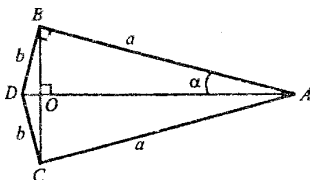
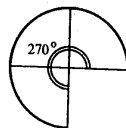
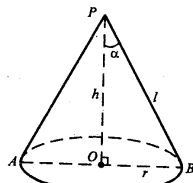
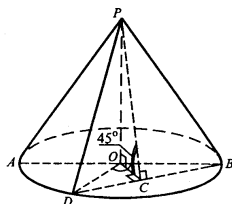
Из прямоугольного треугольника POB :

$$\frac{r}{\ell} = \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{3}{4}, \quad \alpha = \arcsin \frac{3}{4} \text{ (так как } \alpha \text{ — острый угол)}.$$

615. Если вращать $\triangle ABD$ вокруг гипотенузы получим два конуса с общим основанием.

$$S_{\text{бок}} = \pi r l, \text{ Из } \triangle ABD: DA = \sqrt{a^2 + b^2},$$

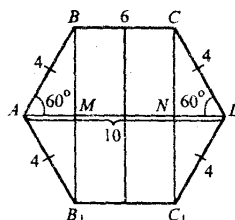
$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}},$$



..... b: S...= $\pi \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot b$

$$\bullet \dots \bullet : \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{\pi ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

616. При вращении трапеции ABD вокруг стороны AD получится тело вращения, состоящее из трех частей: центральной — прямого кругового цилиндра с радиусом BM и высотой BC и двух одинаковых конусов (трапеция равнобедренная по условию).



$$AM=ND=\frac{10-6}{2}=2 \text{ (cm)}.$$

$$AB = \frac{AM}{\cos 60^\circ} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (cm)}$$

$$\text{BM} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (CM).}$$

Найдем боковую поверхность цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rl = 2\pi \cdot BM \cdot BC = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

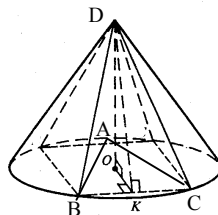
Боковая поверхность одного конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi \cdot BM \cdot AB = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Боковая поверхность всего тела вращения:

$$S = 24\sqrt{3}\pi + 2 \cdot 8\sqrt{3}\pi = 24\sqrt{3}\pi + 16\sqrt{3}\pi = 40\sqrt{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

617. а). Построим $OK \perp BC$, отрезок DK . По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. В правильном $\triangle ABC$, OK — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Примем $OK=r$.



$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}, \text{ где } p \text{ — полупериметр } \Delta ABC.$$

Из равенства $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$ (теорема синусов для

$\triangle ABC$) найдем a — сторону $\triangle ABC$

$$a = 2R \sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, p = \frac{3a}{2}; r = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{3a}{2}} = \frac{a \sqrt{3}}{2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{2 \sqrt{3}} \text{ (CM)}. r = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \text{ (CM)}.$$

Из прямоугольного $\triangle DOK$: $DK = \sqrt{DO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DK = \frac{1}{2} a \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} = \frac{3}{4} \sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{бок} = 3 \cdot S_{ABCD} = \frac{9}{4} \sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}; S_{\triangle ABC} = \frac{(3\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{\triangle ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} \sqrt{219} = \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{73}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot (3 + \sqrt{73}) \text{ (см}^2\text{)};$$

б) Построим $OK \perp AD$, отрезок PK . По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AD$.

В квадрате диагональ $BD = 2R$, R — радиус описанной окружности около квадрата, $BD = 2 \cdot 3$. Примем сторона квадрата равна a см, следовательно

$$a\sqrt{2} = BD, a\sqrt{2} = 6, a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$OK = \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle POK$:

$$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{16 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{32 + 9}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

$$S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PK = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{41} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{бок} = 4 \cdot S_{\triangle APD} = 4 \cdot \frac{3\sqrt{41}}{2} = 6\sqrt{41} \text{ (см}^2\text{)}; \text{ (боковые грани являются равнобедренными треугольниками)};$$

$$S_{ABCD} = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD} = 6(\sqrt{41} + 3) \text{ (см}^2\text{)};$$

в) PO — высота конуса. Построим $OK \perp A_1A_6$, отрезок PK . По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp A_1A_6$,

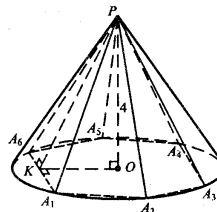
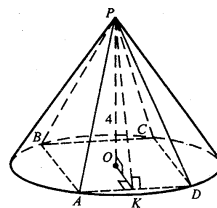
$A_1A_2 \dots A_6$ — правильный 6-угольник. Сторона правильного 6-угольника равна радиусу описанной окружности.

$$a_6 = R, A_1A_6 = a_6 = 3 \text{ (см)}$$

OK — радиус вписанной в правильный 6-угольник окружности.

$$\text{По теореме из планиметрии, } OK = r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}$$

Из прямоугольного $\triangle POK$:



$$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{64 + 27}{4}} = \sqrt{\frac{91}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ (см)}$$

$$S_{\Delta A_1PA_6} = \frac{1}{2} \cdot A_1A_6 \cdot PK = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{3}{4} \sqrt{91} \text{ (см}^2\text{)};$$

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\Delta A_1PA_6} = 6 \cdot \frac{3\sqrt{91}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{91}}{2} \text{ (см}^2\text{)}; S_{\text{осн}} = 6 \cdot S_{\Delta A_1OA_6};$$

A_1OA_6 — равносторонний, поэтому

$$S_{\Delta A_1OA_6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)}; S_{\text{полн}} = \frac{9}{2} (\sqrt{91} + 6\sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{)}$$

618. $S_{\text{бок}} = \pi (r + r_1) l$, где $r = \frac{1}{2} AD = 20 \text{ (см)}$,

$l = AB$, $r_1 = \frac{1}{2} BC = BM$.

По теореме из планиметрии известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна средней линии.

$$S_{ABCD} = 36 = \frac{BC + AD}{2} \cdot MN$$

Но $\frac{BC + AD}{2} = \text{средней линии} = MN$, где MN — высота трапеции. Следова-

тельно, $36 = (MN)^2$, MN — высота трапеции. $6 \text{ (дм)} = 60 \text{ (см)}$

$$60 = \frac{BC + AD}{2}, 60 = \frac{2r_1 + 40}{2} \quad 120 = 2r_1 + 40.$$

$$2r_1 = 80, r_1 = 40 \text{ (см)} \quad BC = 2 \cdot 40 = 80 \text{ (см)}$$

Изменим рисунок.

Построим $AE \perp BC$.

$$BE = 40 - 20 = 20 \text{ (см)}, AE = MN = 60 \text{ (см)}$$

Из прямоугольного ΔABE

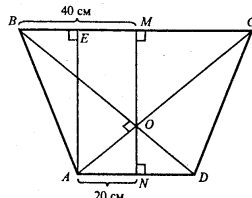
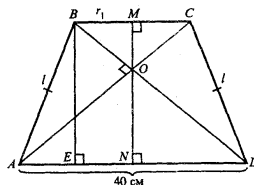
$$BA = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{20^2 + 60^2} = \sqrt{4000} = 20 \sqrt{10} \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi (40 + 20) \cdot 20 \sqrt{10} = 1200 \sqrt{10} \pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Площадь верхнего основания равна: $\pi r_1^2 = \pi 40^2 = 1600 \pi \text{ (см}^2\text{)} = 16 \pi \text{ (дм}^2\text{)}$, а площадь нижнего основания равна $\pi 20^2 = 400 \pi \text{ (см}^2\text{)} = 4 \pi \text{ (дм}^2\text{)}$.

$$S_{\text{полн}} = 12 \sqrt{10} + 16 \pi + 4 \pi = 12 \sqrt{10} + 20 \pi \text{ (дм}^2\text{)}.$$

619. Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.



а) Проведем произвольную прямую через центр сферы. Прямая пересечет сферу в точках А и В. Отрезок АВ будет диаметром, $\frac{1}{2} АВ$ — радиус сферы. Расстояние от каждой из точек до центра сферы равно, значит, центр сферы будет центром симметрии двух данных точек. Т.к. прямая проводилась произвольно, то утверждение справедливо для любых двух точек, являющихся концами диаметра сферы.

б) Построим произвольную прямую а, которая проходит через центр сферы О. Докажем, что она является осью симметрии. Возьмем произвольную точку А на сфере. Построим точку симметричную ей относительно О. Для этого проведем $AK \perp a$ и продолжим за точку R на расстояние АК. Получим точку A_1 . (по 2-м катетам) $OA, OA=R$. Но сфера — геометрическое место точек удаленное от т. О на расстояние R. Значит A_1 лежит на сфере.

Значит, при симметрии произвольная точка сферы переходит в точку этой же сферы. Тогда прямая а — любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы.

в) Возьмем произвольную плоскость α , которая проходит через центр сферы. Докажем, что для любой точки А симметричная ей относительно α точка A_1 также лежит на сфере.

Действительно, при построении симметричной точки мы проведем отрезок АК α (К α) и продолжим его за точку К так, чтобы $AK=KA_1$. $\Delta AKO = \Delta A_1KO$ ($OK=OK, AK=A_1K$ — по двум катетам). $\Delta A_1O=AO < R$, т.е. A_1 , удалена от точки О на расстояние R. Следовательно, что A_1 , лежит на сфере. Следовательно, для любой точки А симметричная ей точка также лежит на сфере, а значит α — плоскость симметрии.

620. а) Вычислим длину гипотенузы прямоугольного треугольника:

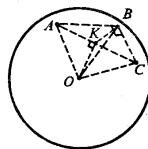
$$\sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = \sqrt{3,24 + 5,76} = \sqrt{9} = 3 \text{ (см)}$$

Диаметр сферы равен $2 \cdot 1,5=3$ (см).

Вывод: диаметр сферы равен длине гипотенузы, следовательно, центр сферы находится на середине гипотенузы, и лежит в плоскости треугольника.

б) Плоскость ΔABC пересекает сферу по окружности.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Проведем из точки О отрезок $OK \perp$ плоскости ΔABC , отрезки КА, КВ, КС. Равные наклонные (радиусы ОА, ОВ, ОС) имеют равные проекции на плоскость ABC, тогда, $KA=KB=KC$, точка К равноудалена от вершин ΔABC , значит, она — центр описанной окружности. Таким образом, точка К — середина гипотенузы AC, ОК — искомое расстояние.



$AC=3$ см, $AK=1,5$ см. Из ΔABC по теореме Пифагора

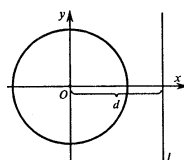
$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{6,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{42,25 - 2,25} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

621. Очевидно, что из точки О всегда можно провести прямую (отрезок), перпендикулярную l. Введем систему координат, как показано на рисунке.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$

Уравнение прямой l: $x=d$

Исследуем систему:

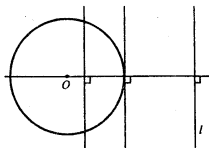


$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases} \quad y^2 = R^2 - d^2 = (R+d)(R-d),$$

$$y = \pm \sqrt{(R+d)(R-d)} \quad (R+d > 0 \text{ всегда}).$$

а) Если $R - d > 0$, $R=d$ и $y=0$ — касание в точке $(d, 0)$ с окружностью, а значит, со сферой.

б) Если $R - d < 0$, то решений нет, значит, l не пересекается с окружностью; l не пересекается со сферой.



622. Найдите координаты точки пересечения

сферы, заданной уравнением $(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 25$, с осями координат.

Если точка пересечения на оси абсцисс, ее координаты имеют вид $(x; 0; 0)$. Вычислим x .

$$(x-3)^2 + 0^2 + 5^2 = 25; (x-3)^2 = 0, x=3. \text{ Координаты точки } (3; 0; 0).$$

Если точка пересечения на оси ординат, то ее координаты имеют вид $(0; y; 0)$. Вычислим y .

$(0-3)^2 + y^2 + (0+5)^2 = 25, 9+y^2+25=25, y^2+9=0$, уравнение не имеет решений, значит, сфера не имеет общих точек с осью ординат.

Если есть точка пересечения с осью аппликат, то эта точка имеет координаты $(0; 0; z)$.

$$(0-3)^2 + 0^2 + (z+5)^2 = 25, (z+5)^2 = 25 - 9 = 16, z+5 = \pm 4,$$

или $z_1 = -1$, или $z_2 = -9$. Сфера пересекает эту ось в двух точках с координатами $(0; 0; -1)$ и $(0; 0; -9)$.

623. Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2; 4; 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс.

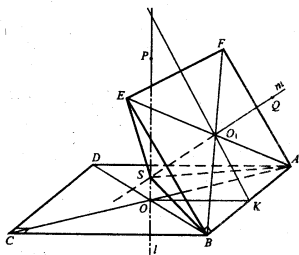
Т.к. плоскость проходит через точку $M(2; 4; 5)$ перпендикулярно оси абсцисс, то все точки этой плоскости имеют координаты вида $(2; y; z)$, если они удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, то будут лежать на сфере.

$2^2 + y^2 + z^2 = 36, y^2 + z^2 = 32$. В плоскости, перпендикулярной оси абсцисс, это уравнение окружности с радиусом $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Следовательно, плоскость пересекает сферу по окружности с радиусом $4\sqrt{2}$.

624. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведем прямую l , l перпендикулярна плоскости $ABCD$. Все точки на прямой l равноудалены от вершин A, B, C, D . (Если наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то сами наклонные равны $PA=PB=PC=PD, P \in l$.)

Построим отрезок $OK \perp AB$, через точку O_1 проведем луч KO_1 . $AB \perp$ плоскости POK . Прямая AB лежит в плоскости прямоугольника $ABEF$, значит плоскости POK и $ABEF$ взаимно перпендикулярны. Проведем через точку O_1 прямую $m \perp$ плоскости $ABEF$.

Если две плоскости перпендикулярны и



к одной из них проведен перпендикуляр, который имеет общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр принадлежит в этой плоскости.

Таким образом, $m \subset$ плоскости РОК; m геометрическое место точек, равноудаленных от вершин прямоугольника АBEF: $QA=QB=QE=QF$ $Q \in m$. Прямые l и m пересекаются в точка S, которая равноудалена как от вершин прямоугольник ABCD, так и от вершин прямоугольника ABEF.

Докажем, что точка S равноудалена от вершин A, B, C, D и вершин E, F. Проведем отрезки SA, SE, SB.

$\Delta SAO_1 = \Delta SOB$ (они прямоугольные, SO — общий катет, $OA=OB$ по свойству диагоналей прямоугольника).

Отсюда $SA=SB$. Значит, $SA=SB=SE$

Доказано, что $SA=SB=SE=SC=SD$ и $SA=SB=SE=SF$, следовательно, точка S равноудалена от всех вершин, значит, она является центром сферы, проходящей через все данные вершины.

625. Введем систему координат, согласно рисунку.

Уравнение сферы с центром в точке O: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Уравнение сферы с центром в точке O_1 . $x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2$.

Решение системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

дает ответ на вопрос задачи.

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - (y^2 - 2dy + d^2) - z^2 = 0. \quad 2dy - d^2 = 0, \quad d > 0, \quad \text{поэтому } 2y = d, \quad \frac{1}{2} d = y.$$

Согласно условию задачи $d < 2R$, тогда, $\frac{d}{2} < R, y < R$.

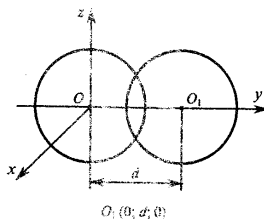
Значит, есть некоторая плоскость, которая перпендикулярна оси ординат (а значит, параллельная плоскости Oхz) и пересекает сферу, а при пересечении сферы плоскостью в сечении получим окружность. Утверждение а) доказано.

Подставим значение $y = \frac{d}{2}$ в уравнение сферы $x^2 + \frac{d^2}{4} + z^2 = R^2$,

$$x^2 + z^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}.$$

$$\text{Если } d = 1,6R, \text{ то } x^2 + z^2 = R^2 - \frac{2,56 R^2}{4} = R^2 (1 - 0,64) = 0,36 R^2$$

Это уравнение окружности в плоскости, параллельной плоскости Oхz, ее радиус $r = \sqrt{0,36 R^2} = 0,6R$.

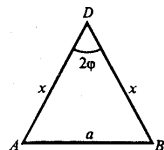
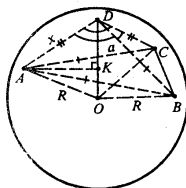


626. а) Построим $DK \perp$ плоскости ABC , проведем отрезки KB , KC . (Чтобы не загромождать рисунок, показан только KA).

$\Delta DKA = \Delta DKB = \Delta DKC$ (по катету и гипотенузе). Следовательно, $KA = KB = KC = r$, r — радиус окружности, описанной около ΔABC . Построим отрезок $OT \perp$ плоскости ABC и отрезки TA , TB , TC .

$\Delta OTA = \Delta OTB = \Delta OTC$ (они прямоугольные, OT — общий катет, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы). тогда, $TA = TB = TC = r$, r — радиус окружности, описанной около ΔABC . Выше доказано, что $KA = KB = KC = r$. Значит, точки T и K совпадают и отрезок $OD \perp$ плоскости ABC .

$\Delta ADC = \Delta BDC = \Delta ADB$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AB = CB = AC$, ΔABC — равносторонний.



$$\text{Пусть } AD = x, AB = a. \angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 2\varphi}{2} = 90^\circ - \varphi$$

Согласно теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin 2\varphi} = \frac{x}{\sin(90^\circ - \varphi)}, \quad \frac{a}{2\sin\varphi \cos\varphi} = \frac{x}{\cos\varphi}, \quad a = 2\sin\varphi x$$

Пусть $KA = KB = KC = r$. По теореме синусов для ΔABC .

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2r, a = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r. \quad 2\sin\varphi \cdot x = \sqrt{3}r, \quad r = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}} \cdot x.$$

$$\text{В } \Delta ADK \quad DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{x^2 - r^2}.$$

$$\text{В } \Delta AOK \quad OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$$DK + KO = R, \quad \sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2} = R, \quad (\sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2})^2 = R^2$$

$$x^2 - r^2 + R^2 - r^2 + 2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = R^2$$

$$2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = 2R^2 - x^2, \quad 4(x^2 - r^2)(R^2 - r^2) = 4R^4 + x^4 - 4R^2x^2,$$

$$4x^2R^2 - 4x^2r^2 - 4R^2R^2 + 4r^4 = 4R^4 + x^4 - 4R^2x^2,$$

$$x^4 - 4x^2R^2 + 4R^2R^2 = 0, \quad x^4 - 4x^2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot x^2 = 0,$$

$$x^2(x^2 - 4R^2 + \frac{16R^2}{3} \cdot \sin^2\varphi) = 0, \quad x \neq 0, \text{ тогда, } x^2 = 4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \sin^2\varphi.$$

$$x = DA = \sqrt{4R^2(1 - \frac{4}{3}\sin^2\varphi)} = 2R\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\varphi}{3}}$$

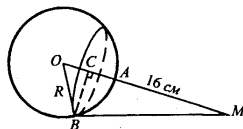
$$AB = a = 4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3 - 4\sin^2\varphi}{3}}$$

б) Сечение сферы плоскостью ΔABC является окружность с радиусом

$$r = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{3 - \sin^2 \varphi} \cdot 4 \cdot \sin \varphi \cdot R$$

$$\text{Вычислим площадь сечения: } \pi r^2 = \pi \frac{16}{9} \sin^2 \varphi (3 - 4 \sin^2 \varphi) R^2.$$

627. Известно, что ближайшая точка (А), лежащая на сфере к точке (М), лежащей вне сферы, принадлежит отрезку СМ, где О — центр сферы.



Пусть СВ — r — радиус окружности, $AC = x$, $BM = 24$ см. $OA = 10$ см

Из прямоугольного ΔCBM : $CM^2 + CB^2 = MB^2$, или $(16 + x)^2 + r^2 = 24^2$ см.

Из прямоугольного ΔCBO : $OB^2 = OC^2 + CB^2$, или $10^2 = (10 - x)^2 + r^2$.

$$\text{Решим систему } \begin{cases} (16 + x)^2 + r^2 = 576, \\ (10 - x)^2 + r^2 = 100. \end{cases}$$

$$(16 + x)^2 - (10 - x)^2 = 476, \quad 256 + 32x + x^2 - 100 - x^2 + 20x = 476.$$

$$52x = 576 - 256, \quad 52x = 320, \quad x = \frac{320}{52} = \frac{80}{13} \text{ (см);}$$

$$r^2 = 100 - (10 - x)^2 = 100 - 100 + 20x - x^2 = 20x - x^2$$

$$r^2 = \frac{20 \cdot 80}{13} - \frac{80 \cdot 80}{13 \cdot 13} = 100 \cdot \frac{16 \cdot 13 - 64}{169} = \frac{10^2 \cdot 12^2}{13^2};$$

$$r = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{10 \cdot 12}{13} = \frac{120}{13} \text{ (см).}$$

$$\text{Вычислим длину окружности } L = 2\pi r, \quad L = 2\pi \frac{120}{13} = \frac{240}{13} \pi \text{ (см)}$$

628. Пусть R — радиус внешней сферы; r — радиус внутренней сферы.

Сечение тела плоскостью, которая проходит через центры сфер, кольцо.

Площадь кольца равна $\pi (R^2 - r^2)$. (1)

Сечение, плоскостью касательной к внутренней сфере — окружность.

По теореме п. 61 $OC = r$ перпендикулярен к плоскости в сечении. Из прямоугольного ΔACO :

$$x = \sqrt{R^2 - r^2} \quad S_{\text{сеч}} = \pi x^2 = \pi (R^2 - r^2). \quad (2)$$

Сравнивая выражение (1) и (2) тождественны, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

